



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 2004A -

ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Coccimiglio Stefania

MATERIA: Teoria di scienza delle costruzioni - Domande della prova di teoria 2015-2016 - Prof. Valente

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Domande orali di Scienza delle Costruzioni per Edili (01cfo, aa 2015-16). Titolare Prof. Valente. Per essere ammessi alla prova orale e' necessario aver ottenuto una valutazione maggiore o uguale a 15 in entrambe le prove scritte. I paragrafi fanno riferimento ai Volumi 1 e 2 del testo del Prof. Carpinteri (Pitagora Editrice). Esaurita la risposta ad una domanda, si puo' passare alla successiva. Per ogni domanda e' necessaria almeno una figura, al fine di introdurre i simboli che vengono usati.

1. La cinematica e la statica dei sistemi di travi, capitolo 3 e 4

- (a) Il due teoremi delle catene cinematiche. Un esempio di applicazione per calcolare le reazioni vincolari interne ed esterne nelle strutture isostatiche mediante il PLV.

2. Analisi della deformazione, paragrafi dal 7.1 al 7.5

- (a) Definizione analitica del tensore delle deformazioni
(b) Significato fisico di deformazione (incluso il moto rigido)
(c) Significato fisico della sola deformazione (escluso il moto rigido)
(d) Variazione delle componenti del tensore delle deformazioni al variare del sistema di riferimento
(e) Cosa sono le deformazioni principali e come si trovano ?

3. Analisi della tensione, paragrafi dal 7.6 al 7.9

- (a) Definizione del tensore delle tensioni $[\sigma]$
(b) Dimostrare che il tensore precedente e' simmetrico
(c) Come variano le componenti al variare del sistema di riferimento ?
(d) Cosa sono le tensioni principali e come si trovano ?
(e) Dimostrazione delle regole di costruzione dei cerchi di Mohr per lo stato tensionale piano
(f) Cosa si intende per tensore idrostatico e deviatorico ?

4. Il solido elastico, capitolo 8

- (a) Equazioni indefinite di equilibrio nel volume per il continuo 3D
(b) Equazioni di equilibrio sulla superficie per il continuo 3D
(c) Dualita' statico-cinematica
(d) Il principio dei lavori virtuali (senza la dimostrazione)
(e) Definizione del comportamento elastico
(f) Il potenziale elastico ed il potenziale elastico complementare
(g) La matrice Hessiana del potenziale elastico
(h) Significato fisico della condizione di definitezza positiva della suddetta matrice Hessiana e sue conseguenze.
(i) Formulazione del problema elastico lineare attraverso l'operatore di Lamé'
(j) Il principio di sovrapposizione degli effetti
(k) Il teorema di unicità della soluzione
(l) Il teorema di Clapeyron
(m) Il teorema di Betti
(n) L'ipotesi di isotropia nell'ambito del comportamento elastico lineare
(o) Quali sono le condizioni che devono essere soddisfatte dal modulo di Young e dal rapporto di Poisson affinché la suddetta matrice Hessiana sia definita positiva ?
(p) La distinzione tra materiali duttili e fragili
(q) Descrivere la contrazione trasversale plastica o strizione, l'incrudimento negativo e l'energia di frattura. Possibili modalita' di controllo delle prove di laboratorio in condizioni di trazione diretta
(r) Definire la tensione ideale o tensione equivalente
(s) Il criterio di Tresca o della massima tensione tangenziale. Cosa si intende per tensione tangenziale nel piano o fuori piano ? Cosa si intende per esagono di Tresca ?
(t) Il criterio di Mohr-Coulomb per i materiali fragili

FARE ATTENZIONE AGLI AGGETTIVI USATI
LINEARE ≠ ELASTICO

TEORIA SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

④ LA CINEMATICA E LA STATICA NEI SISTEMI DI TRAVI (cap. 3 e 4)

① I DUE TEOREMI DELLE CATENE CINEMATICHE.

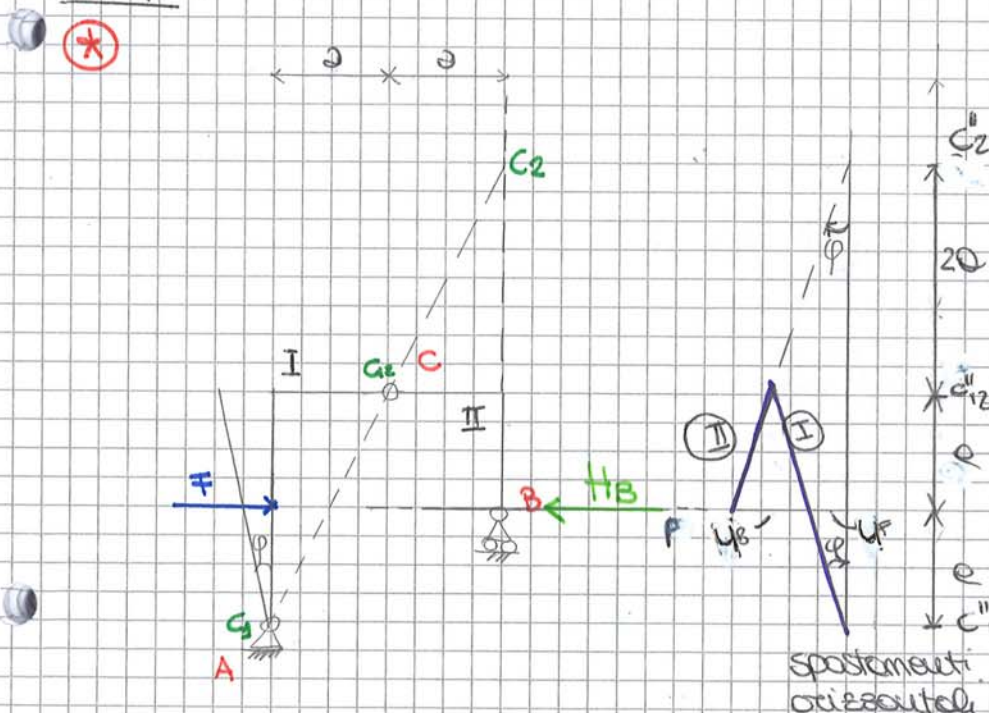
UN ESEMPIO DI APPLICAZIONE PER CALCOLARE LE REAZIONI VINCOLARI INTERNE ED ESTERNE NELLE STRUTTURE ISOSTATICHE MEDIANTE IL PLV.

Per catene cinematiche si intendono i sistemi a un grado di libertà o labili. Il loro studio grafico si basa sui 2 importanti teoremi, detti appunto delle catene cinematiche.

Il PRIMO TEOREMA può essere applicato a sistemi composti da almeno 2 corpi rigidi e afferma che condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema meccanico sia una volta labile è che, per ciascuna coppia di corpi i e j , i centri assoluti di rotazione C_i e C_j e il centro relativo di rotazione C_{ij} siano allineati.

Il SECONDO TEOREMA può essere applicato a sistemi composti da almeno 3 corpi rigidi. Esso afferma che condizione sufficiente o necessaria affinché un sistema meccanico sia una volta labile è che per ogni terzo di corpi i, j, k , i centri relativi di rotazione C_{ij}, C_{jk} e C_{ki} siano allineati.

ESEMPIO = PORTALE SCOPRO



$gdl = 3 \times 2 = 6$
 $gdlv = 2 + 2 + 1 = 5$
 SISTEMA A VOLTA LABILE

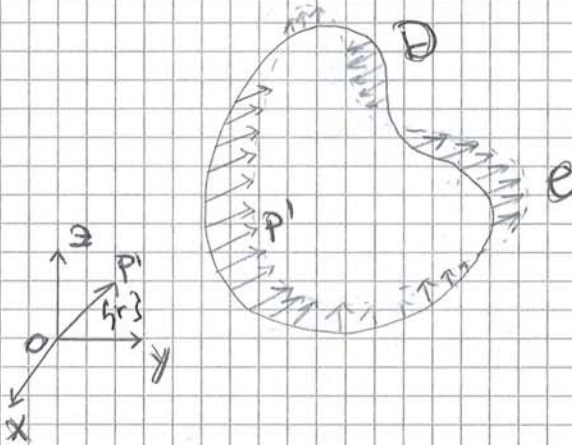
infatti due primo teoremi delle catene cinematiche i centri assoluti e il centro relativo delle coppie di corpi sono allineati.

2. ANALISI DELLA DEFORMAZIONE paragrafi #.4-7.5

3) DEFINIZIONE ANALITICA DEL TENSORE DELLE DEFORMAZIONI

● OGGETTO: corpo deformabile.

Analisi dei rapporti che intercorrono tra gli spostamenti di punti diversi (ma sufficientemente vicini) appartenenti ad uno stesso corpo deformabile durante un moto rototraslatorio.



Definiamo la funzione spostamento f che associa ad ogni vettore posizione $\{r\}$ dei punti del corpo in posizione iniziale e in configurazione non deformata il vettore spostamento $\{r'\}$ che tali punti subiscono ^{pendo il corpo} durante il moto, in configurazione deformata.

$$f: D \rightarrow E$$

$$f: P \rightarrow P'$$

$$f: \{r\} \rightarrow \{r'\}$$

D dominio della funzione, costituito dall'insieme dei punti geometrici occupati dai punti materiali del corpo nella posizione iniziale.

E codominio della funzione, e' il volume occupato dal corpo nella posizione finale.

Si ha quindi un campo vettoriale degli spostamenti che possono essere proiettati sul un sistema fisso XYZ

$$\{r'\} = u(x,y,z)\vec{i} + v(x,y,z)\vec{j} + w(x,y,z)\vec{k}$$

dove ciascuna componente e' funzione delle tre coordinate cartesiane x, y, z

Nel caso non si tratti solo di moto rigido bisogna usare lo primo delle 2 espressioni precedenti in cui la jacobiana $[J_p]$ è data dalle somme di 2 matrici, una antisimmetrica e una simmetrica, in quanto

matrice quadrata.

Infatti, la matrice jacobiana è definita come:

$$[J_p] = \underbrace{\frac{1}{2}([J_p] - [J_p]^T)}_{\text{ROTAZIONE}} + \underbrace{\frac{1}{2}([J_p] + [J_p]^T)}_{\text{DEFORMAZIONE}}$$

IDENTITÀ ↖

dunque possiamo scrivere anche

$$[J_p] = [C_p] + [E_p]$$

ANTISIMM. ↙ ↘ SIMMETRICA

Avevo ricavato la matrice jacobiana in questo modo, possiamo risolvere l'equazione dello spostamento:

$$\{ \eta \} = \{ \eta_p \} + [C_p] \{ dr \} + [E_p] \{ dr \}$$

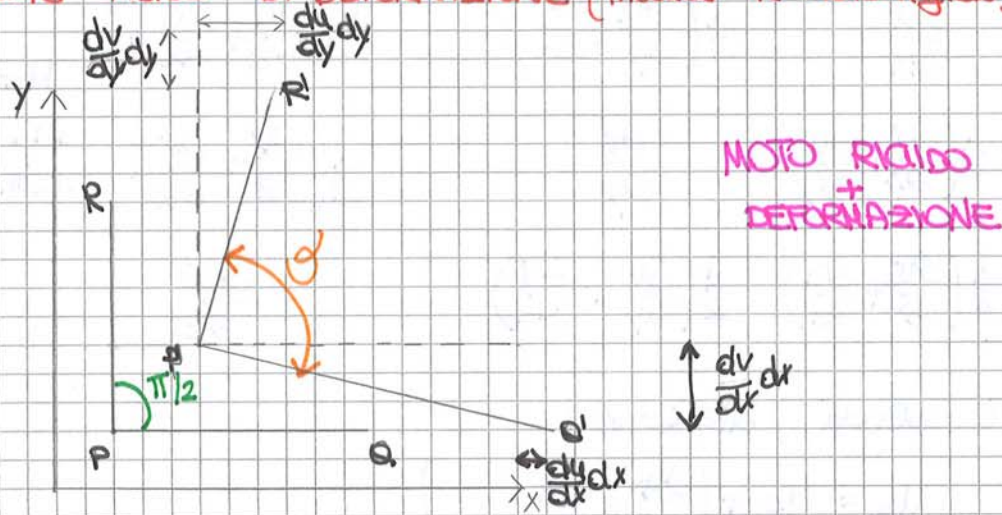
- TRASLAZIONE
- ROTAZIONE
- DEFORMAZIONE

In base all'identità scritta precedentemente possiamo risolvere la matrice di rotazione e quella di deformazione come:

$$[C_p] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

$$[E_p] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

(b) SIGNIFICATO FISICO DI DEFORMAZIONE (incluso il moto rigido)



Consideriamo 2 segmenti PR e PQ ortogonali tra loro di lunghezza infinitesimale appartenenti ad un corpo nello posizione iniziale e nello configurazione deformata.

Scego la terna XYZ così da avere i 2 segmenti suetti paralleli ai assi X e y

Dopo di che analizziamo il corpo nello posizione finale e ci rendiamo conto che i segmenti non solo hanno subito una deformazione rototraslatoria ma anche la loro lunghezza, durante la deformazione, è cambiata; inoltre non formano più un angolo retto, bensì un angolo $\theta \neq \pi/2$.

PUNTO Q

$$\{h_Q\} = \{h_P\} + [\phi_P] \{dr\} + [\epsilon_P] \{dr\}$$

$$\{h_Q\} = \begin{Bmatrix} u_Q \\ v_Q \\ w_Q \end{Bmatrix}; \quad \{h_P\} = \begin{Bmatrix} u_P \\ v_P \\ w_P \end{Bmatrix}; \quad \{dr\} = \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix}$$

$$[\phi_P] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) & 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}) & 0 \end{bmatrix}$$

MATRICE DI ROTAZIONE (ANTISIMMETRICA)

Per quanto riguarda gli **SCORRIMENTI ANGOLARI** $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$ essi rappresentano fisicamente l'angolo spazzato durante la deformazione, dunque la variazione negativa dell'angolo retto che si ha nella posizione iniziale e configurazione indeformata.

Per le direzioni X e Y a mezzo di infinitesimi di ordine superiore si ha:

$$\frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dx} + \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{yx} = \gamma_{xy}$$

SCORRIMENTO
ANGOLARE

angolo spazzato
durante la
deformazione

$$\begin{Bmatrix} U_Q \\ V_Q \\ W_Q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\delta_{yx} & \frac{1}{2}\delta_{zx} \\ \frac{1}{2}\delta_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\delta_{zy} \\ \frac{1}{2}\delta_{xz} & \frac{1}{2}\delta_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$U_Q = \epsilon_x \cdot dx + \frac{1}{2}\delta_{yx} \cdot 0 + \frac{1}{2}\delta_{zx} \cdot 0 = \epsilon_x dx = \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

$$V_Q = \frac{1}{2}\delta_{xy} \cdot dx + \epsilon_y \cdot 0 + \frac{1}{2}\delta_{zy} \cdot 0 = \frac{1}{2}\delta_{xy} dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx$$

$$W_Q = \frac{1}{2}\delta_{xz} \cdot dx + \frac{1}{2}\delta_{yz} \cdot 0 + \epsilon_z \cdot 0 = \frac{1}{2}\delta_{xz} dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) dx$$

PUNTO R

$$\{ \eta_R \} = \begin{Bmatrix} U_R \\ V_R \\ W_R \end{Bmatrix}$$

$$\{ dr \} = \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix}$$

$$dx = dz = 0$$

$$\begin{Bmatrix} U_R \\ V_R \\ W_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\delta_{yx} & \frac{1}{2}\delta_{zx} \\ \frac{1}{2}\delta_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\delta_{zy} \\ \frac{1}{2}\delta_{xz} & \frac{1}{2}\delta_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ dy \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$U_R = \epsilon_x \cdot 0 + \frac{1}{2}\delta_{yx} dy + \frac{1}{2}\delta_{zx} \cdot 0 = \frac{1}{2}\delta_{yx} dy = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dy$$

$$V_R = \frac{1}{2}\delta_{xy} \cdot 0 + \epsilon_y \cdot dy + \frac{1}{2}\delta_{zy} \cdot 0 = \epsilon_y dy = \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

$$W_R = \frac{1}{2}\delta_{xz} \cdot 0 + \frac{1}{2}\delta_{yz} \cdot dy + \epsilon_z \cdot 0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) dy$$

A meno di infinitesimi di ordine superiore, le deformazioni specifiche coincidono con i termini della diagonale della MATRICE DI DEFORMAZIONE.

Ciò SCORRIMENTI ANGOLARI coincidono con le diminuzioni degli angoli formati dai segmenti passanti per P.

$$\begin{aligned} \pi/2 - \theta &= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dy}{dy} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx}{dx} \\ &= 2 \times \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \delta_{xy} \end{aligned}$$

ϵ e γ provocano le variazioni di forma:

$\epsilon \Rightarrow$ allunga o restringe

$\gamma \Rightarrow$ toglie la rettificata agli angoli.

Dalla LEGGE DI RECIPROCITÀ si può dimostrare che, esplicitando
 $\{n\}^T [E] \{m\}$ e $\{m\}^T [E] \{n\}$, $\eta_{nm} = \eta_{mn}$

VERIFICA:

$$\eta_{nm} = \{m\}^T [E] \{n\}$$

$$\begin{pmatrix} m_x & m_y & m_z \\ \downarrow & & \\ 1 \times 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left[\begin{array}{ccc} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \epsilon_z \end{array} \right] \\ \downarrow \\ 3 \times 3 \end{matrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \\ \downarrow \\ 3 \times 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \epsilon_x m_x + \frac{1}{2} \gamma_{yx} m_y + \frac{1}{2} \gamma_{zx} m_z \\ \textcircled{3} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} m_x + \frac{1}{2} \gamma_{zy} m_y + \epsilon_z m_z \end{matrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{matrix} \textcircled{2} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} m_x + \epsilon_y m_y + \frac{1}{2} \gamma_{yz} m_z \\ \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix} \begin{matrix} \text{colonne} \end{matrix}$$

$$= \epsilon_x m_x \cdot n_x + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \cdot m_y \cdot n_x + \frac{1}{2} \gamma_{xz} \cdot m_z \cdot n_x + \frac{1}{2} \gamma_{yx} \cdot m_x \cdot n_y + \epsilon_y \cdot m_y \cdot n_y + \frac{1}{2} \gamma_{zy} \cdot m_z \cdot n_y + \frac{1}{2} \gamma_{zx} \cdot m_x \cdot n_z + \frac{1}{2} \gamma_{yz} \cdot m_y \cdot n_z + \epsilon_z \cdot m_z \cdot n_z =$$

$$= \epsilon_x \cdot m_x \cdot n_x + \epsilon_y \cdot m_y \cdot n_y + \epsilon_z \cdot m_z \cdot n_z + \frac{1}{2} \gamma_{xy} (m_y \cdot n_x + m_x \cdot n_y) + \frac{1}{2} \gamma_{xz} (m_z \cdot n_x + m_x \cdot n_z) + \frac{1}{2} \gamma_{zy} (m_z \cdot n_y + m_y \cdot n_z)$$

$$\eta_{mn} = \{n\}^T [E] \{m\}$$

$$\begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z \\ \downarrow & & \\ 1 \times 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left[\begin{array}{ccc} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \epsilon_z \end{array} \right] \\ \downarrow \\ 3 \times 3 \end{matrix} \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \\ \downarrow \\ 3 \times 1 \end{pmatrix}$$

possiamo adesso esprimere la legge di TRASFORMAZIONE della matrice di deformazione per rotazioni del sistema di riferimento.

Tale matrice nel sistema ruotato n, m, e indicata come $[\epsilon^*]$, dove (*) sottintende la rotazione, è:

$$[\epsilon^*] = \begin{bmatrix} \epsilon_n & \frac{1}{2}\gamma_{mn} & \frac{1}{2}\gamma_{en} \\ \frac{1}{2}\gamma_{mm} & \epsilon_m & \frac{1}{2}\gamma_{em} \\ \frac{1}{2}\gamma_{me} & \frac{1}{2}\gamma_{me} & \epsilon_e \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \{n\}^T [\epsilon] \{n\} & \{n\}^T [\epsilon] \{m\} & \{n\}^T [\epsilon] \{e\} \\ \{m\}^T [\epsilon] \{n\} & \{m\}^T [\epsilon] \{m\} & \{m\}^T [\epsilon] \{e\} \\ \{e\}^T [\epsilon] \{n\} & \{e\}^T [\epsilon] \{m\} & \{e\}^T [\epsilon] \{e\} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \{n\}^T \\ \{m\}^T \\ \{e\}^T \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{SCALARE} \\ [\epsilon] \\ \text{MATRICE RIGA} \end{matrix} \begin{bmatrix} \{n\} & \{m\} & \{e\} \end{bmatrix}$$

MATRICE COLONNA

Sono tutte matrici quadrate il cui prodotto matriciale può essere scritto in maniera più compatta:

DEFORMAZIONE CHE AVVIENE CAMBIANDO SISTEMA DI RIFERIM.

$$[\epsilon^*] = [N]^T [\epsilon] [N]$$

TENSORE → grandezza che varia secondo questo regola

dove N è la matrice NORMALE, che rappresenta la rotazione dei sistemi X, Y, Z e quello n, m, e .

$$[N] = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \\ m_x & m_y & m_z \\ e_x & e_y & e_z \end{bmatrix}$$

I tre invarianti sono quindi:

$$J_I = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

$$J_{II} = - \begin{vmatrix} \epsilon_x & 1/2 \gamma_{yx} \\ 1/2 \gamma_{xy} & \epsilon_y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \epsilon_x & 1/2 \gamma_{zx} \\ 1/2 \gamma_{xz} & \epsilon_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \epsilon_y & 1/2 \gamma_{zy} \\ 1/2 \gamma_{yz} & \epsilon_z \end{vmatrix}$$

$$J_{III} = \det[\epsilon]$$

J_I = è detto traccia, poiché somma dei termini della diagonale

J_{II} = è la somma degli opposti dei determinanti dei minori principali

J_{III} = determinante della matrice deformazione.

L'equazione di terzo grado scritta in precedenza ammette 3 soluzioni $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ detti AUTOVALORI del problema, in modo tale che l'equazione $([\epsilon] - [I] \epsilon_n) \cdot \{n\} = 0$ ammette 3 soluzioni $\{n_1\}, \{n_2\}, \{n_3\}$ detti AUTOVETTORI del problema.

Gli AUTOVALORI sono numeri reali poiché il tensore $[\epsilon]$ è simmetrico e rappresentativo le DILATAZIONI PRINCIPALI, mentre gli AUTOVETTORI, se $\epsilon_1 \neq \epsilon_2 \neq \epsilon_3$ sono mutuamente ORTOGONALI e rappresentano le DIREZIONI PRINCIPALI.

Possiamo avere 3 casi:

① $\epsilon_1 \neq \epsilon_2 \neq \epsilon_3$, le 3 direzioni principali sono mutuamente ortogonali;

② $\epsilon_1 = \epsilon_2 \neq \epsilon_3$, la direzione $\{n_3\}$ è principale insieme alle ∞^1 direzioni ortogonali ad essa;

③ $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3$, le ∞^2 direzioni sono tutte principali.

Le tensore delle deformazioni nel sistema di riferimento principale 123 è diagonale

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix}$$

Essendo nulli gli scostamenti angolari. In questo modo, gli invarianti sono esprimibili in funzione delle dilatazioni:

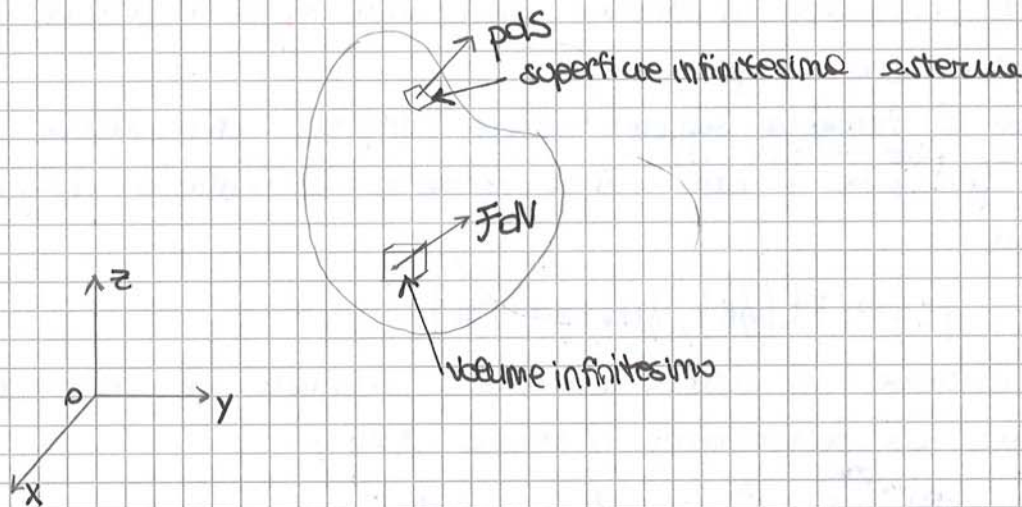
$$J_I = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$$

$$J_{II} = -(\epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_1 \epsilon_3 + \epsilon_2 \epsilon_3)$$

$$J_{III} = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3$$

3. ANALISI DELLA TENSIONE, paragrafi 4.6 - 4.9

③ DEFINIZIONE DEL TENSORE DELLE TENSIONI [5]



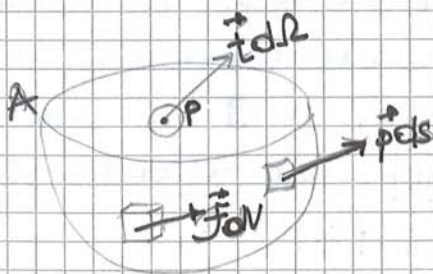
Consideriamo un corpo in equilibrio sotto l'azione di forze di superficie $\{p\}$ e forze di volume $\{F\}$, per cui (per l'equazione coordinata dello stato statico):

$$\int_S \{p\} dS + \int_V \{F\} dV = \{0\}$$

$$\int_S \{r\} \wedge \{p\} dS + \int_V \{r\} \wedge \{F\} dV = \{0\}$$

dove S è la frontiera del corpo, V il volume e r la posizione dei suoi punti.

Immaginiamo ora di sezionare il corpo tramite un piano secante A passante per P:



il corpo così è diviso in 2 parti ideemente
ognuna delle quali è in equilibrio
sotto l'azione sia delle forze di
volume che di quelle di superficie che
comprendono quelle reattive della superficie
infinitesima ~~esterna~~ e quelle reattive
della superficie della sezione A.

Donque, per il corpo sezionato otteniamo:

$$\int_{S_A} \{p\} dS + \int_{A} \{t\} dA + \int_{V_A} \{F\} dV = \{0\}$$

EQ. ALLA TRASAZIONE

Per l'equilibrio o una rotazione si ha:

$$\{tn\} d\Omega_n - \{tx\} d\Omega_x - \{ty\} d\Omega_y - \{tz\} d\Omega_z = \{0\}$$

considerando le proiezioni delle superficie triangolare $d\Omega_n$ sui suoi coordinati

$$\begin{aligned} d\Omega_x &= n_x d\Omega_n \\ d\Omega_y &= n_y d\Omega_n \\ d\Omega_z &= n_z d\Omega_n \end{aligned}$$

e dividendo l'equazione dell'equilibrio o una rotazione per $d\Omega_n$ otteniamo:

$$\{tn\} = \{tx\}n_x + \{ty\}n_y + \{tz\}n_z$$

l'espressione precedente, dovuta a Cauchy, può essere scritta in forma matriciale tenendo conto delle componenti speciali di tensione, cioè le componenti dei vettori $\{tx\}$, $\{ty\}$, $\{tz\}$ sugli assi X, Y, Z :

$$\begin{bmatrix} t_{nx} \\ t_{ny} \\ t_{nz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{xx} & t_{yx} & t_{zx} \\ t_{xy} & t_{yy} & t_{zy} \\ t_{xz} & t_{yz} & t_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

che usando le notazioni tradizionali diventa:

**CONDIZIONE
DI
EQUILIBRIO
DI
CAUCHY**

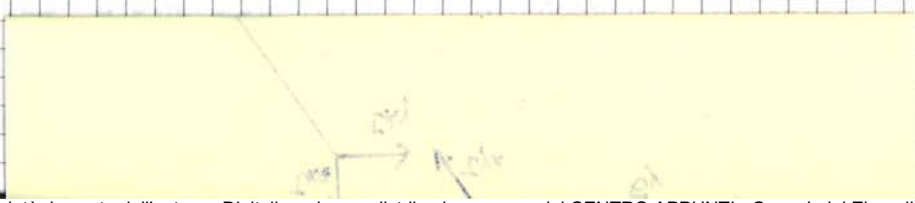
$$\begin{bmatrix} t_{nx} \\ t_{ny} \\ t_{nz} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}}_{[S]} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

due il primo indice indica la direzione e il secondo indice la direzione.

Questa ultima forma matriciale può essere scritta in forma compatta:

$$\{tn\} = [S] \{n\}$$

dove $[S]$ è la **MATRICE DEGLI SFORZI** ed è la matrice di trasformazione del vettore $\{n\}$ in vettore $\{tn\}$ in analogia con la matrice di deformazione $[E]$ matrice di trasformazione del vettore $\{n\}$ nel vettore spostamento $\{un\}$; posto nelle due luce la dualità tensione-deformazione.



dove il prodotto delle tensioni per lo stesso area rappresenta lo sforzo, invece $\frac{dz}{3}$ e $\frac{dy}{3}$ sono i 2 bracci.

Andando a risolvere l'equazione otteniamo:

$$\tau_{zy} d\Omega_z \frac{dz}{3} = \tau_{yz} d\Omega_y \frac{dy}{3}$$

e osservando che

$$\frac{1}{3} dz d\Omega_z = \frac{1}{3} dy d\Omega_y = dV$$

otteniamo

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}$$

Allo stesso modo si ottiene che $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ e $\tau_{xz} = \tau_{zx}$.

• Dunque, $[\sigma]$ è una matrice SIMMETRICA con 6 componenti significative: 2 per G_{ix} , 2 per G_{iy} e 2 per G_{iz} ; in quanto le altre non danno momento per le motivazioni date in precedenza, esse hanno braccio nullo o sia oppure sono potestate agli assi.

Tale matrice può essere riscritta, in base alle relazioni trovate in precedenza:

$$[\sigma^*] = \begin{bmatrix} h_n h^T [\sigma] h_n & h_n h^T [\sigma] h_m & h_n h^T [\sigma] h_e \\ h_m h^T [\sigma] h_n & h_m h^T [\sigma] h_m & h_m h^T [\sigma] h_e \\ h_e h^T [\sigma] h_n & h_e h^T [\sigma] h_m & h_e h^T [\sigma] h_e \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} h_n h^T \\ h_m h^T \\ h_e h^T \end{bmatrix} [\sigma] \begin{bmatrix} h_n & h_m & h_e \end{bmatrix}$$

MATRICE RIGA

MATRICE
COLONNA

Le precedenti matrici sono tutte quadrate 3×3 e la loro relazione può anche essere espressa come:

$$[\sigma^*] = [N]^T [\sigma] [N]$$

che indica che lo TENSORE è una grandezza fisica di natura tensoriale.

dove $[N]$ è la matrice ORTOGONALE

$$[N] = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \\ m_x & m_y & m_z \\ e_x & e_y & e_z \end{bmatrix}$$

Ritornando agli ~~auto~~ invarianti:

$$J_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (\text{è la traccia, in quanto somma dei termini sulle diagonali})$$

$$J_{II} = - \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

è la somma degli opposti dei determinanti dei minori principali

$$J_{III} = \det[\sigma]$$

Tali coefficienti sono costanti perché devono garantire che la soluzione non cambi con le forme di riferimento perché se occorresse questo sarebbe assurdo.

Dalla equazione di terzo grado scritta in precedenza si ottengono

3 soluzioni: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ reali perché $[\sigma]$ è simmetrica e sono detti **AUTOVALORI** del problema; invece, da (*) si ottengono 3 soluzioni $\{n_1\}, \{n_2\}, \{n_3\}$ detti **AUTOVETTORI** del problema. Gli **AUTOVALORI** rappresentano le **TENSIONI PRINCIPALI**, mentre gli **AUTOVETTORI** n_1, n_2, n_3 rappresentano le **DIREZIONI PRINCIPALI**.

Quindi, abbiamo 3 casi:

$$\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3 \Rightarrow 3 \text{ direzioni principali}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3 \Rightarrow 1 \text{ direzione principale e una direzione principale tra loro ortogonali}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \Rightarrow \text{tutte le direzioni sono principali.}$$

Il tensore degli sforzi nel sistema di riferimento 123 diventa

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

essendo nulle le tensioni tangenziali. Di conseguenza, i 3 invarianti possono essere espressi in funzione delle tensioni principali:

$$J_I = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$J_{II} = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)$$

$$J_{III} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

Il primo invariante assume il significato fisico di tensione normale media o meno di un fattore pari a 3:

$$J_I = 3 \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = 3 \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = 3 \bar{\sigma}$$

Perché il vettore tensione ha componenti sempre nulle nella direzione 3, il tensore degli sforzi rispetto ad una generica terna XYZ, presenterà la 3^a riga e per simmetria la 3^a colonna nulle:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il problema agli autovalori si risolve ottenendo annullando il determinante della seguente matrice:

$$\det \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_n & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_n & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_n \end{vmatrix} = 0$$

e le 3 radici si ottengono dalle condizioni:

① $\sigma_n = 0$

↳ traccia del minore principale

② $\sigma_n^2 - (\sigma_x + \sigma_y) \sigma_n + (\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2) = 0$

↳ det. del minore principale

La ① fornisce un risultato più noto $\Rightarrow \sigma_3 = 0$; mentre la seconda fornisce le 2 tensioni principali diverse da 0, dunque σ_1 e σ_2 .

Risolvendo le 2 precedenti equazioni otteniamo:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

Si può ottenere lo stesso risultato imponendo che sia diagonale il minore principale:

$$[N^*] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$[N]$
 $[\sigma]$
 $[N]^T$

7) COSA SI INTENDE PER TENSORE IDROSTATICO E TENSORE DEVIATORICO.

Ogni tensore degli sforzi è somma di 2 componenti:

$$[\sigma] = [\sigma^i] + [\sigma^d]$$

dove $\sigma^i = \bar{\sigma}$ è il TENSORE IDROSTATICO

$\sigma^d = \bar{\sigma}$ è il TENSORE DEVIATORICO

IL TENSORE IDROSTATICO:

$$\sigma^i = \begin{bmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{bmatrix}$$

Esso non dipende dal sistema di riferimento, è funzione dello stato. Si sviluppa quando un solido è introdotto in un liquido, non provoca la variazione della forma, è detto idrostatico proprio perché i liquidi si scambiano sforzi interni di tale tipo. Tensioni PRINCIPALI tutte e tre uguali dunque ^{tutte} le direzioni sono PRINCIPALI. Nei fluidi il vettore tensione agisce sempre ortogonalmente.

IL TENSORE DEVIATORICO:

$$[\sigma^d] = \begin{bmatrix} \sigma_x - \bar{\sigma} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \bar{\sigma} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \bar{\sigma} \end{bmatrix}$$

Dipende dallo stato di riferimento in quanto varia con il variare dell'orientamento; esso quando si sviluppa provoca la variazione di forma.

Di conseguenza, nell'equilibrio essa traslazione non interviene tutte le componenti e abbiamo:

1. $x \rightarrow$ appunto
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx (dy dz) + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy (dx dz) + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz (dx dy) + \gamma_x (dx dy dz) = 0$$

due l'notiamo che rimangono in gioco solo gli incrementi di tensione moltiplicati per le aree elementari su cui agiscono e la forza di volume moltiplicata per il volume elementare su cui agisce.

Se dividiamo o dividete la precedente equazione per il volume elementare $dx dy dz$, otteniamo:

1. $x \rightarrow$
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \gamma_x = 0$$
 I EQUAZIONE INDEFINITA DI EQUILIBRIO.

2. Per punto riguardando gli assi y e z si ragiona allo stesso modo e si ottiene:

2. $y \uparrow$
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \gamma_y = 0$$

3. $z \downarrow$
$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \gamma_z = 0$$

le 1,2,3 sono le **EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO.**

C) DUALITÀ STATICO-CINEMATICA

Vogliamo esprimere in forma matriciale i SISTEMI DI EQUAZIONI che governano da una parte la CONGRUENZA e dall'altra l'EQUILIBRIO ed evidenziarne la connessione che si ha tra i 2 problemi.

CONGRUENZA: consideriamo le equazioni che definiscono gli elementi del tensore delle deformazioni.

Le 6 componenti indipendenti possono essere ordinate in un vettore che è il risultato del prodotto tra un operatore matriciale 6×3 $[a]$ e il vettore spostamenti η :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

in forma compatta:

$$\{\epsilon\} = [a] \{\eta\}$$

EQUAZIONI CINEMATICHE

EQUILIBRIO: riconsideriamo le EQUAZIONI INDEFINITE di EQUILIBRIO, scritte in forma matriciale e con le componenti di tensione ordinate nel vettore delle tensioni:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

In forma compatta

$$[a]^T [s] + \{\gamma\} = \{0\}$$

EQUAZIONI STATICHE

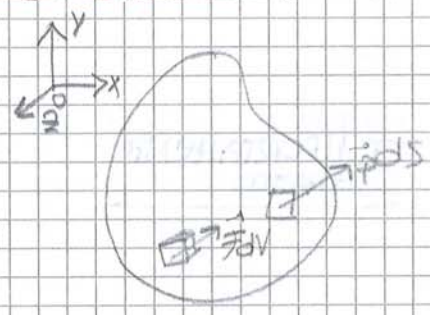
④ IL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI (senza dimostrazione)

$\Rightarrow L_e = L_i$

Il principio dei lavori virtuali afferma l'uguaglianza tra il lavoro esterno (prodotto di forze per spostamento) e del lavoro interno (tensione per deformazione). Si può anche dire che costituisce la definizione stessa di lavoro interno di deformazione, in quanto mentre è noto che il lavoro è dato dal prodotto scalare del vettore forze per il vettore spostamento, non è altrettanto ovvio che il lavoro interno è dato dal prodotto scalare del vettore tensioni per il vettore deformazione.

Dato un sistema ② di FORZE ESTERNE (di volume $\{f\}$ e di superficie $\{p\}$) e di tensioni $\{s\}$ si dice essere STATICAMENTE AMMISSIBILE quando vengono soddisfatte le equazioni statiche $[a]^T \{f\} + \int_S \{p\} = 0$ e le condizioni al contorno $[N]^T \{s\} = \{p\}$

$[a]^T \{f\} = - \int_S \{p\} \quad \forall P \in V$
 $[N]^T \{s\} = \{p\} \quad \forall P \in S$



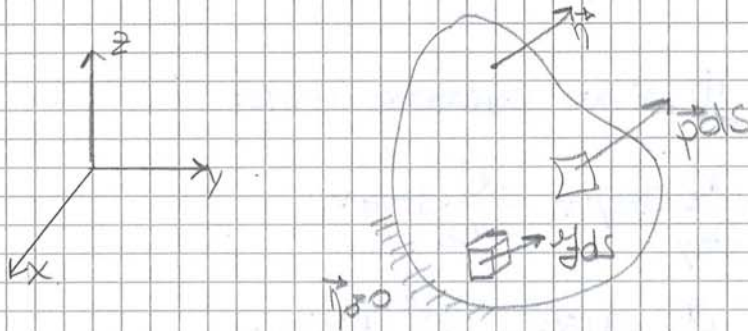
V = dominio tridimensionale occupato dal corpo.
 S = frontiera di tale dominio su cui sono applicate le forze esterne $\{p\}$ che possono essere messe su tutto il dominio o su uno specifico sottoinsieme.

Dato un sistema ③ di spostamenti $\{u\}$ e di deformazioni $\{e\}$ si dice CINEMATICAMENTE AMMISSIBILE se vengono rispettate le equazioni cinematiche:

$[a] \{u\} = \{e\}, \quad \forall P \in V$

F) IL POTENZIALE ELASTICO E IL POTENZIALE ELASTICO COMPLEMENTARE

Si consideri un corpo deformabile, in equilibrio sotto l'azione delle forze di volume f_i^b e di superficie f_i^s . In esso si generi un campo di spostamenti u_i diverso da zero tranne che in una parte vincolata delle superficie esterne.



Si immagini ora di incrementare le forze esterne di quantità elementari. I campi incrementali δf_i^b e δf_i^s generano un campo incrementale di spostamenti δu_i da cui discende un campo incrementale di deformazioni $\delta \epsilon_i$.

Applichiamo il PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI; considerando:

- ~~esistente~~ come STATICAMENTE AMMISSIBILE il sistema delle forze esterne f_i^b e f_i^s e delle tensioni che esse producono σ_{ij}
- CINEMATICAMENTE AMMISSIBILE il sistema degli spostamenti incrementali δu_i e delle deformazioni incrementali $\delta \epsilon_i$.

Si ha pertanto:

processo di carico \rightarrow

$$dL_e = \int_S f_i^s \delta u_i ds + \int_V f_i^b \delta u_i dV$$

$$dL_i = \int_V \sigma_{ij}^T \delta \epsilon_{ij} dV$$

per il P.L.V. vale l'uguaglianza:

$$dL_e = dL_i$$

Un corpo deformabile si definisce elastico quando il lavoro infinitesimo risulta un DIFFERENZIALE ESATTO:

$$d\phi = \sigma_{ij}^T \delta \epsilon_{ij}$$

che possiamo scrivere come

$$d\psi = \epsilon_x d\delta_x + \epsilon_y d\delta_y + \epsilon_z d\delta_z + \gamma_{xy} d\tau_{xy} + \gamma_{xz} d\tau_{xz} + \gamma_{yz} d\tau_{yz}$$

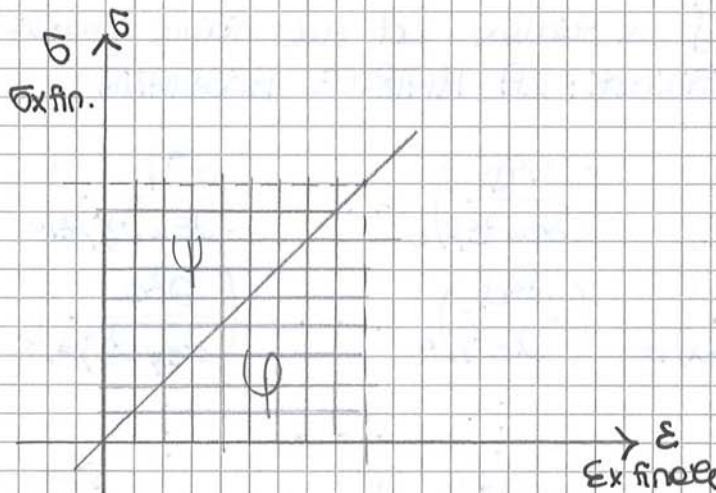
da queste equazioni otteniamo le COMPONENTI DI DEFORMAZIONE:

$$\epsilon_x = \frac{\partial \psi}{\partial \delta_x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial \psi}{\partial \delta_y}; \quad \epsilon_z = \frac{\partial \psi}{\partial \delta_z};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{xy}}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{xz}}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{yz}}$$

l'energia elastica complementare è l'AREA SOTTOFAZZA tra la curva $\epsilon_x(\sigma_x)$ e l'asse σ_x .

Nei casi UNIDIMENSIONALE LINEARE si $\psi = \varphi$



Condizioni da soddisfare per poter scrivere la matrice Hessiane sono:

$$\Phi(1,0,1) = 0$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial Ex}\right)_0 = (\delta x)_0 = 0$$

⋮

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_2}\right)_0 = (\gamma_2)_0 = 0$$

de ei mettiamo nell'intervallo di $(1, \epsilon) \ll 1$.

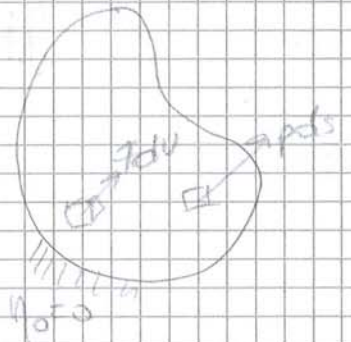
1) FORMULAZIONE DEL PROBLEMA ELASTICO LINEARE ATTRAVERSO L'OPERATORE DI DOME.

de equazioni indefinite di equilibrio:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{f_x}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{f_y}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{f_z}{\partial z} = 0$$



non bastano per determinare ^{componenti} sei di tensioni, Di oltre parte aggiungendo le equazioni costitutive elastiche $\epsilon \eta = [H] \eta \epsilon$ si ottiene un problema a 9 equazioni differenziali con 9 incognite: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}; u, v, w$.

Dunque, considerando come incognite primarie il vettore spostamento $\eta \eta$ possiamo dare una rappresentazione esatta sintetica del problema elastico; se nell'equazione statica $[a]^T \eta \epsilon + \eta \eta = \eta p$ aggiungiamo la legge costitutiva $\eta \epsilon = [H] \eta \epsilon$ e dopo di che consideriamo l'equazione cinematica $\eta \epsilon = [a] \eta \eta$, otteniamo:

$$[a]^T \eta \epsilon + \eta \eta = \eta p$$

$$\Rightarrow [a]^T [H] \eta \epsilon = -\eta \eta$$

$$\Rightarrow ([a]^T [H] [a]) \eta \eta = -\eta \eta$$

dove l'operatore differenziale di secondo ordine tra parentesi tonde viene chiamato operatore di dome:

$$[a] = \begin{matrix} & 6 \times 6 & \\ \begin{matrix} 3 \times 3 & 3 \times 6 & 6 \times 3 \end{matrix} & [a]^T [H] [a] & \end{matrix}$$

d'operatore di dome è un operatore matriciale 3×3 e nei problemi omogenei in cui la funzione $[H]$ è funzione del punto anche l'operatore è funzione del punto.

Richiamando le equazioni di equilibrio al contorno $[N]^T \eta \epsilon = \eta p$

e supponendo che esse vengano su una porzione S_p , della superficie esterna di un corpo, e che sulla porzione complementare S_n venga imposto un campo congruente di spostamenti $\eta \eta$, il problema elastico tridimensionale

5) PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI. (con un esempio)

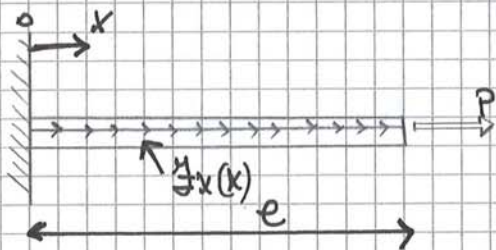
Dato un sistema di sovraccarichi $\{h_{1a}^k, h_{1b}^k, h_{1c}^k\}$ che genera un campo di spostamenti $\{u_{1a}^k, u_{1b}^k, u_{1c}^k\}$, un campo deformativo $\{\epsilon_{1a}^k, \epsilon_{1b}^k, \epsilon_{1c}^k\}$ e uno tensionale $\{\sigma_{1a}^k, \sigma_{1b}^k, \sigma_{1c}^k\}$ e un secondo sistema di sovraccarichi $\{h_{2a}^k, h_{2b}^k, h_{2c}^k\}$ che genera altrettanti campi $\{u_{2a}^k, u_{2b}^k, u_{2c}^k\}$. per il PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI il sistema $\{h_{1a}^k + h_{2a}^k, h_{1b}^k + h_{2b}^k, h_{1c}^k + h_{2c}^k\}$ genera dei campi pari a $\{u_{1a}^k + u_{2a}^k, u_{1b}^k + u_{2b}^k, u_{1c}^k + u_{2c}^k\}$.

CAUSE			EFFETTI		
h_{1a}^k	h_{1b}^k	h_{1c}^k	$\{\epsilon_{1a}^k\}$	$\{u_{1a}^k\}$	$\{\sigma_{1a}^k\}$
h_{2a}^k	h_{2b}^k	h_{2c}^k	$\{\epsilon_{2a}^k\}$	$\{u_{2a}^k\}$	$\{\sigma_{2a}^k\}$
$h_{1a}^k + h_{2a}^k$	$h_{1b}^k + h_{2b}^k$	$h_{1c}^k + h_{2c}^k$	$\{\epsilon_{1a}^k + \epsilon_{2a}^k\}$	$\{u_{1a}^k + u_{2a}^k\}$	$\{\sigma_{1a}^k + \sigma_{2a}^k\}$

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

ESEMPIO:

Nel caso di un corpo ^{elastico} lineare unidimensionale, fissato ad un estremo e sottoposto ad una trazione P all'estremo opposto e ad una distribuzione $f_x(x)$ di forze assiali



Le equazioni del problema elastico sono semplificate e diventano:

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} = -f_x(x) \quad 0 \leq x \leq e$$

$$EA \frac{du}{dx} = P \quad x=e$$

$$u=0 \quad x=0$$

dove e è la lunghezza del corpo, EA rappresenta la rigidità del corpo e in particolare modo E è il Modulo di Young che rappresenta la costante di proporzionalità tra tensione e deformazione e $A = \text{area}$.

(K) IL TEOREMA DI UNICITÀ DELLA SOLUZIONE. (con un esempio)

Il teorema dell'unicità della soluzione o teorema di Kirchhoff afferma che se h_{ij} esiste, allora è unico.

La dimostrazione viene fatta per assurdo, ipotizzando che lo stesso sistema di sollecitazioni h_{11}, h_{12}, h_{13} generasse due diverse risposte h_{21}, h_{22}, h_{23} e h_{31}, h_{32}, h_{33} .

	CAUSE			EFFETTI			
(A)	h_{11}	h_{12}	h_{13}	h_{21}	h_{22}	h_{23}	h_{31}
(B)	h_{11}	h_{12}	h_{13}	h_{31}	h_{32}	h_{33}	h_{R1}
A-B	0	0	0	$h_{\Delta 11}$	$h_{\Delta 12}$	$h_{\Delta 13}$	$h_{\Delta R1}$

Applicando il PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI otteniamo:

$$L_e = \int_V h_{ij}^T h_{\Delta ij} dV + \int_{S_p} h_{ij}^T h_{\Delta ij} dS + \int_{S_n} h_{ARj}^T h_{ij} dS$$

$$L_i = \int_V h_{\Delta ij}^T h_{\Delta ij} dV$$

$$L_e = L_i$$

$$\int_V h_{ij}^T h_{\Delta ij} dV + \int_{S_p} h_{ij}^T h_{\Delta ij} dS + \int_{S_n} h_{ARj}^T h_{ij} dS = \int_V h_{\Delta ij}^T h_{\Delta ij} dV$$

l'integrale a secondo membro è uguale al doppio del potenziale elastico, dunque si ha:

$$2\Phi = 2 \int_V \Phi(\Delta \epsilon_x, \Delta \epsilon_y, \dots, \Delta \gamma_{xy}) = 0$$

che, dato che Φ è una forma quadratica definita positiva, ~~se~~ si annulla quando si annulla l'integrando in ogni punto.

Cio' avviene se e solo se

$$\Delta \epsilon_x = \Delta \epsilon_y = \dots = \Delta \gamma_{xy} = 0$$

e cioè solo quando le soluzioni A e B coincidono

② IL TEOREMA DI CLAPEYRON, con un esempio.

Consideriamo un corpo linearmente elastico su cui agiscono forze di volume $\{f\}$ e forze di superficie $\{p\}$.

• Sia $\{u\}$ il campo di spostamento che si genera nel corpo al termine del processo che porta le forze esterne dai valori iniziali (cioè 0) ai valori cosiddetti.

Applicando il principio dei lavori virtuali secondo cui $L_e = L_i$, otteniamo:

$$\int_V \{f\}^T \{u\} dV + \int_S \{p\}^T \{u\} dS = \int_V \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dV$$

che è valida se consideriamo i campi finali staticamente e cinematicamente ammissibili.

• Moltiplicando per $\frac{1}{2}$ i membri della precedente espressione, otteniamo:

$$\frac{1}{2} \int_V \{f\}^T \{u\} dV + \frac{1}{2} \int_S \{p\}^T \{u\} dS = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dV$$

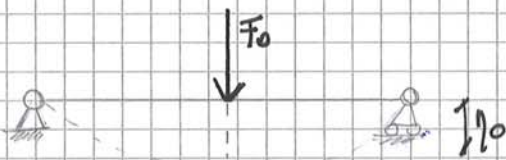
e ricordando che $\frac{1}{2} \{\sigma\}^T \{\epsilon\} = \Phi$, possiamo scrivere

$$\frac{1}{2} \int_V \{f\}^T \{u\} dV + \frac{1}{2} \int_S \{p\}^T \{u\} dS = \int_V \Phi dV$$

Tale equazione esprime il fatto che il lavoro compiuto dalle forze esterne per portare un corpo dallo stato iniziale indeformato a quello finale deformato è uguale alla metà del lavoro che tali forze compirebbero

• se presentassero il valore finale durante tutto il ~~esse~~ processo di carico.

ESEMPIO: TRAVE LINEARMENTE ELASTICA



Consideriamo una trave senza cui mezzecchia è applicata, lentamente così da evitare fenomeni dinamici, una forza che dai valori 0 iniziali assume il valore finale F_0 ; sotto l'azione di tale forza viene provocato un abbassamento che genera un campo di spostamenti $\{u\}$. Per il TEOREMA DI CLAPEYRON

• otteniamo:

$$L_{def} = \int_0^{u_0} F(u) du = \frac{1}{2} F_0 \cdot u_0$$

↑
Lavoro di deformazione

Forza e spostamento, cioè tensione e deformazione

sono 2 forze dello stesso modulo, quindi importante $\frac{1}{2}$

(M.) TEOREMA DI BETTI, con un esempio

Il **TEOREMA DI BETTI** mostra come il **PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI** è applicabile per spostamenti, tensioni e deformazioni, ma non lo si può applicare ai lavori di deformazione.

Si considera un corpo elastico lineare e lo si sottopone ad un processo di carico quasi-statico, dunque molto lento, in modo tale che le forze finali siano $\{F_0\}$, $\{p_0\}$ e che il lavoro compiuto sia L_a ; in un secondo momento si prosegue il processo di carico con l'applicazione quasi-statica di un secondo sistema di forze $\{F_b\}$, $\{p_b\}$ e che il lavoro compiuto sia L_b .

Considerando il trascinamento delle forze $\{F_0\}$ e $\{p_0\}$ per gli spostamenti $\{u_b\}$ il lavoro che si ottiene è il lavoro mutuo L_{ab} .

Dunque, spiegando il processo di carico in questo ordine:

1. $L_{a+b} = L_a + L_b + L_{ab}$ → non applicabile del principio di sovrapposizione degli effetti.

dove:

$$L_a = \frac{1}{2} \int_V \{F_0\}^T \{u_0\} dV + \frac{1}{2} \int_S \{p_0\}^T \{u_0\} dS$$

$$L_b = \frac{1}{2} \int_V \{F_b\}^T \{u_b\} dV + \frac{1}{2} \int_S \{p_b\}^T \{u_b\} dS$$

$$L_{ab} = \int_V \{F_0\}^T \{u_b\} dV + \frac{1}{2} \int_S \{p_0\}^T \{u_b\} dS$$

Invertendo il processo di carico e quindi applicando prima b e poi a , otteniamo:

2. $L_{b+a} = L_b + L_a + L_{ba}$

dove:

$$L_{ba} = \int_V \{F_b\}^T \{u_a\} dV + \int_S \{p_b\}^T \{u_a\} dS$$

È confrontando le espressioni 1 e 2 otteniamo:

$$L_a + L_b + L_{ab} = L_b + L_a + L_{ba}$$

$$L_{ab} = L_{ba}$$

cioè i 2 lavori mutui sono uguali tra loro e se sono diversi da 0, per il Teorema di Betti, non può essere applicato il principio di sovrapposizione degli effetti.

Se invece i 2 lavori sono uguali e 0 i 2 sistemi si definiscono **ENERGICAMENTE ORTOGONALI** e in questo caso può essere applicato il principio di sovrapposizione degli effetti.

n. IPOTESI DI ISOTROPIA NELL'AMBITO DEL COMPORTAMENTO ELASTICO LINEARE

L'ipotesi che facciamo è che il corpo sia **DEFORMABILE**
ISOTROPO
LINEARE ELASTICO

Per **ISOTROPIA** si intende la proprietà di un corpo per cui le sue caratteristiche meccaniche rimangono invariate indipendentemente dall'orientazione.

Proprio per questo il potenziale elastico complementare ψ dipende solo dalle tensioni principali e non dall'orientazione del sistema.

Dunque, abbiamo:

$$\psi = \psi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

Poiché ψ è una forma quadratica delle tensioni possiamo scrivere:

$$\psi = \frac{1}{2E} \{ (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \}$$

Considerando l'ipotesi di isotropia il vantaggio è che i coefficienti del 2° si riducono a 2, cioè $\frac{1}{2E}$ e $\frac{\nu}{E}$.

$\frac{1}{2E} \Rightarrow$ moltiplica i quadrati delle tensioni; $\frac{\nu}{E} \Rightarrow$ moltiplica i prodotti misti delle tensioni.

Sfruttando le espressioni del primo e del secondo invariante, essi definiti:

$$J_I = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$J_{II} = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)$$

possiamo riscrivere ψ come:

$$\psi = \frac{1}{2E} \{ J_I^2 + 2J_{II}(1+\nu) \}$$

e andando ad esprimere gli invarianti secondo le componenti del vettore:

$$\psi = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)$$

dove:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

E = modulo di Young

ν = modulo di Poisson

Tali componenti rappresentano il potenziale elastico complementare in caso di **ELASTICITÀ LINEARE E ISOTROPIA**.

Q. QUALI SONO LE CONDIZIONI CHE DEVONO ESSERE SODDISFATTE DAL MODULO DI YOUNG E DAL RAPPORTO DI POISSON AFFINCHÉ LA SOTTILE MATRICE HESSIANA SIA DEFINITA POSITIVA?

La matrice Hessiana si è supposta DEFINITA POSITIVA dunque lo stato indeformato deve rappresentare un minimo assoluto del campo di deformazione. Inoltre anche lo stato inverso deve essere definito positivo.

Considerando l'ipotesi di ISOTROPIA, possiamo scrivere le leggi costitutive elastiche secondo cui:

$$\epsilon = [H]^{-1} \sigma$$

che in forma matriciale esplicita diventa:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}$$

Per far sì che la matrice sia definita positiva tutti i suoi minori principali devono avere $\det > 0$. Dunque possiamo dire che:

$$\frac{1}{E} > 0$$

$G \rightarrow$ RIGIDEZZA TANGENZ.

$$\det \begin{vmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E \end{vmatrix} > 0$$

da cui otteniamo 4 disequazioni:

$$\bullet \frac{1}{E} > 0 \quad \bullet \frac{1}{E^2} (1-\nu^2) > 0 \quad \bullet \frac{1}{E^3} (1+\nu)^2 (1-2\nu) > 0 \quad \bullet \frac{E}{2(1+\nu)} > 0$$

In base alle quali possiamo scrivere:

$$\bullet E > 0$$

$$\bullet -1 < \nu < 1$$

$$\bullet \nu < \frac{1}{2}$$

$$\bullet \nu > -1$$

$$E > 0$$

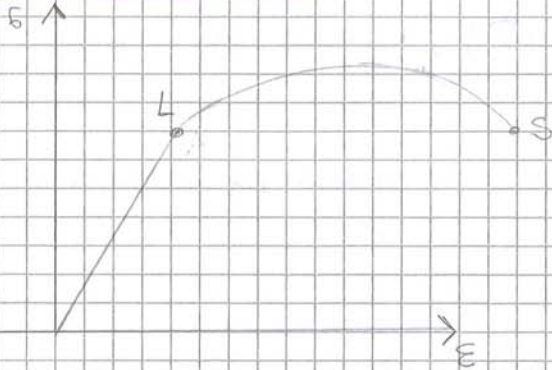
$$-1 < \nu < \frac{1}{2}$$

\rightarrow necessario per esistere
 $0 < \nu < \frac{1}{2}$ poiché non esiste
 $\nu < 0$

P. DISTINZIONE TRA MATERIALI FRAGILI E MATERIALI DUTILI

I materiali strutturali vengono divisi in base del andamento delle loro curve $\sigma(\epsilon)$, in MATERIALI DUTILI e MATERIALI FRAGILI:

• MATERIALI DUTILI:



Questi materiali presentano ampi tratti non lineari nel loro diagramma prima di pervenire alla rottura. Il loro rapporto di resistenza a trazione e resistenza a compressione si avvicina all'unità.

• MATERIALI FRAGILI



* due elementi

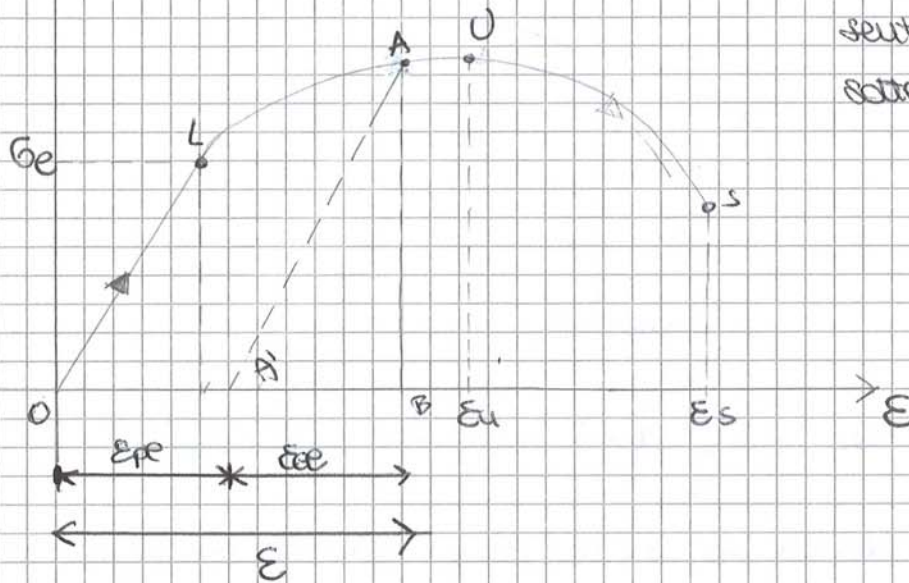
Le differenze fra i materiali fragili e duttili si scompaiono quando sono sotto l'improvviso quando lo spostamento è ancora sostanzialmente elastico e lineare. Inoltre, in questo caso il rapporto tra resistenza a trazione e resistenza a compressione è ^{molto} basso dell'unità ($10^{-1} - 10^{-2}$).

Le differenze di comportamento dipendono in gran parte dai meccanismi microscopici di danneggiamento e di frattura che nei vari materiali di impiego strutturale si presentano notevolmente diversi.

Per esempio, nelle leghe metalliche si ha lo scorrimento tra piani atomici e cristallini che danno origine ad un comportamento di tipo plastico o duttile con notevoli deformazioni permanenti. Invece nei CS le microfessure e gli accoppiamenti che avvengono tra i componenti granulari e la matrice possono eventualmente formare una fessura macroscopica che separa improvvisamente in 2 parti l'elemento strutturale.

Tuttavia, nella pratica la distinzione tra questi 2 tipi di materiali non è così netta, anche perché la duttilità dipende dalle temp. amb. e dalle dimensioni.

61



d'energia è rappresentata dall'area sottesa.

Procedendo nuovamente al provino si percorre il tratto AA' parallelo al tratto OL, giunti in A il provino si snerva nuovamente ad uno σ_{pe} . Questo è il fenomeno detto **hardening**, ovvero **incrudimento**, che consiste nel fatto che il materiale vergine si snerva a livelli più bassi di tensione rispetto del cui materiale più snervato.

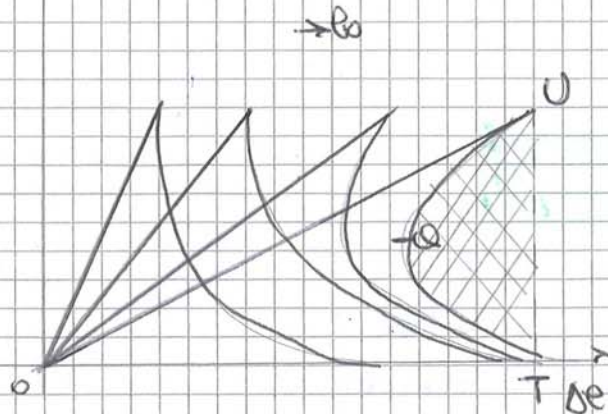
Continuando ad ~~applicando~~ aumentare le forze F si riprende a percorrere il tratto AU; in questa fase la rigidità tangenziale, cioè l'incremento di tensione per incremento unitario di deformazione continua a diminuire finché non si annulla nel punto U. Giunti nel punto U, se il ^{processo} è pilotato dalle forze esterne, il provino si rompe perché F non può più aumentare.

Oltre il punto U la rigidità tangenziale diventa negativa e ad incrementi positivi di $\Delta \epsilon$ corrispondono incrementi negativi di F e cioè è dovuto al fenomeno detto **CONTRAZIONE TRASVERSALE O STRIZIONE** per cui l'area A delle sezioni effettive diventa notevolmente minore dell'istante A_0 . Infine, raggiunto il punto terminale S il provino si rompe di schianto.

Una caratteristica del materiale è rappresentata dalle **curve $\sigma(\epsilon)$** che rappresenta la tensione trasmessa attraverso la ~~frattura~~ **fessura in tensione** dalle **operture (o lacerazioni) delle fessure stesse**.

Il processo di carico può essere controllato dopo DILATAZIONE CONVENIENTE
 NAVE (ϵ) e dell'allungamento (Δe)

$\neq \wedge$



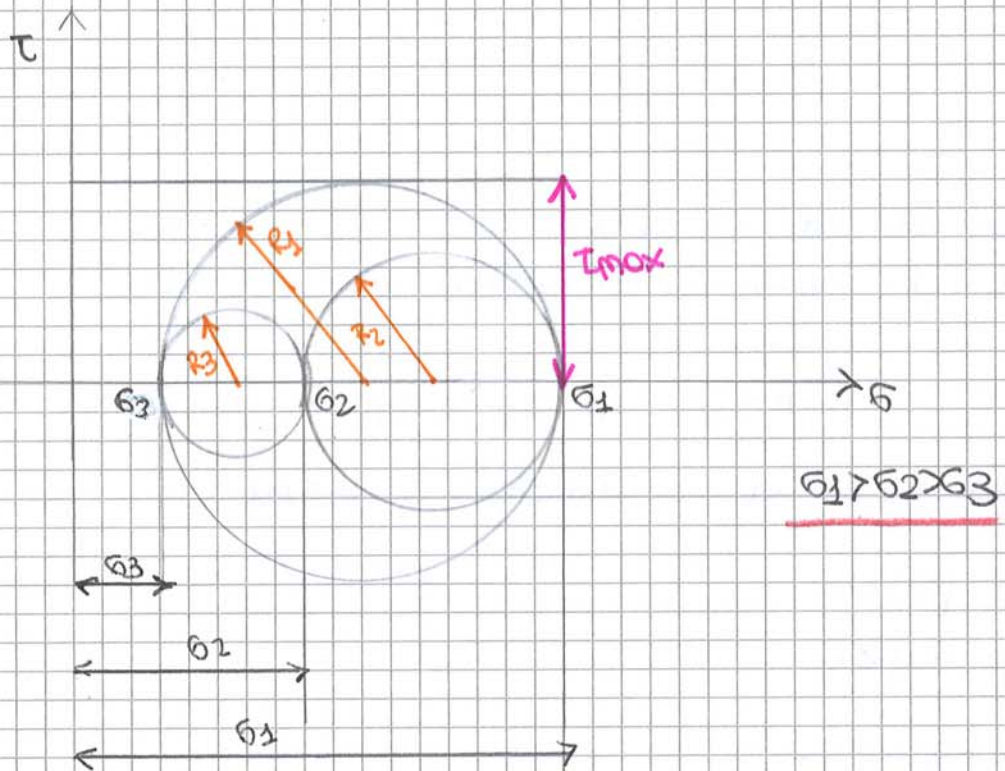
Arrivati al punto U si ha una caduta VERTICALE del carico sino ad
 un tratto SOFTENING INTERMEDIO che è il pseudopunto di rottura.
 Il tratto UQT viene così ignorato e diventa virtuale.
 Per selezionare sperimentalmente questo tratto è necessario produrre il
 carico mediante l'apertura w ~~che~~ ^{che} il tratto instabile è detto SNAP-BACK.
 Tutti i materiali risolutamente fragili ^{che} possiedono un basso valore dell'
 energia di frattura. Cioè con le normali lunghezze lo stesso base di
 misura presentano una brusca caduta di carico quando il comportamento
 globale del campione è ancora elastico lineare.
 Per ϵ piccolo \rightarrow AREA CONTROLLABILE
 Per ϵ grande \rightarrow AREA INCONTROLLABILE.
 L'energia elastica aumenta con ϵ del primo.

8. IL CRITERIO DI TRESCA O DELLA MASSIMA TENSIONE TANGENZIALE. COSA SI INTENDE PER TENSIONE NEL PIANO O FUORI PIANO? COSA SI INTENDE PER ESAGGIO DI TRESCA.

Per il CRITERIO DI TRESCA O CRITERIO DELLA TENSIONE TANGENZIALE MASSIMA le tensioni tangenziali sono responsabili dello sneramento del materiale nel caso di stato tensionale triassiale.

La τ_{max} è pari alla metà della differenza tra le tensioni principali estreme:

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3| \}$$



$\tau_{max} \Rightarrow$ Raggio max sul piano di Mohr

Lo stato di sneramento corrisponde a τ_{max} .

$$\tau_p = \frac{1}{2} \sigma_p$$

La condizione di Tresca $\tau_p \tau_{max} < \tau_p$ permette di verificare l'equazione:

$$\max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3| \} < \sigma_p$$

TENSIONE EQ. DI TRESCA

Nei piani di Mohr la condizione di Tresca è rappresentata da una striscia infinita delimitata da due rette $\tau = \pm \tau_p$

⊕ IL CRITERIO DI MOHR-COULOMB PER I MATERIALI FRAGILI

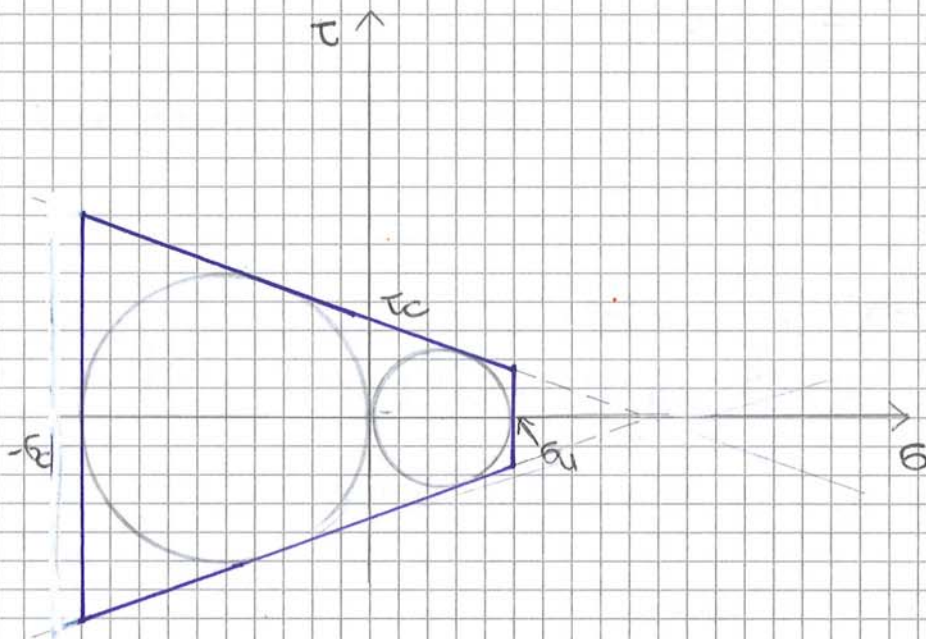
Il CRITERIO DI MOHR-COULOMB riguarda i materiali fragili che presentano diversi valori di resistenza a compressione e a trazione.

Esso non considera una tensione tangenziale di crisi costante e indipendente dalla σ stato tensionale, bensì una τ funzione della tensione normale:

$$\tau_{max} < \tau_c - \mu \sigma$$

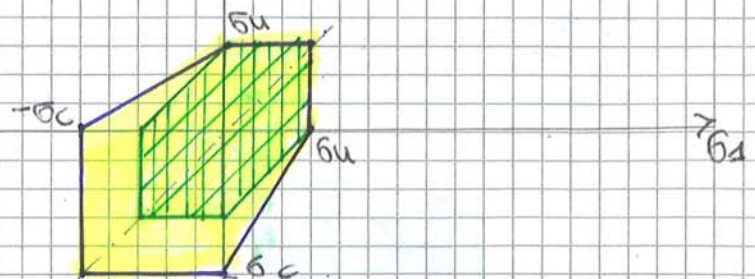
τ_c = coefficiente dei materiali
 μ = coeff. attrito interno

La resistenza aumenta per aumento della compressione normale, dunque nelle prove di Mohr si viene ad osservare una spirale che si sviluppa procedendo verso le σ negative.



Togliendo il dominio con 2 rette verticali parallele che rappresentano i due stati di crisi di trazione e compressione si ottiene un dominio trapezoidale che rappresenta in modo soddisfacente gli stati di crisi nei materiali fragili e incerti.

Sul piano $\sigma_1 - \sigma_2$ il dominio Mohr-Coulomb è un esagono simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante che per $\mu=0$ coincide con l'esagono di Tresca.



dunque:

$$\bullet \left[(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \right] < \sigma_p^2$$

TENSIONE EQUIVALENTE DI
VON MISES

Tale espressione si può esprimere usando gli invarianti:

$$(\sqrt{J_I^2 + 3J_{II}}) < \sigma_p$$

che è uguale

$$\left[(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \right] < \sigma_p^2$$

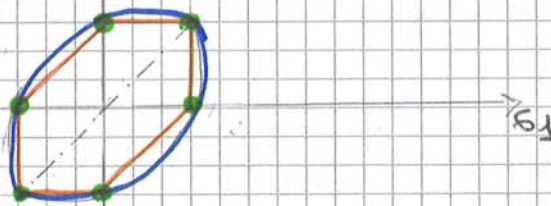
Nel caso di stato tensionale piano, per esempio $\sigma_3 = 0$ la condizione diventa

$$\left[(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \sigma_1\sigma_2 \right] < \sigma_p^2$$

che rappresenta un'ELLISSE simmetrica rispetto alle bisettrici dei I e II quadrante.

$\sigma_2 \uparrow$

ESAGONO DI TRESCA
ELLISSE DI VON MISES
• PUNTI DI CRISI UNIASSIALE



ELLISSE DI VON MISES: è circoscritta all'esagono di Tresca ed ha in comune con esso 6 punti. Il criterio di Von Mises è meno restrittivo di quello di Tresca poiché bisogna stare dentro l'ellisse e non solo dentro l'esagono. La restrizione del criterio di Tresca rispetto a Von Mises è anche data dal fatto che nel primo bisogna soddisfare 3 equazioni mentre nel secondo solo 1.

mentre per le altre basi che $n_1=0, n_2=0, n_3=1$

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= p_x \\ \tau_{zy} &= p_y \\ \sigma_z &= p_z \end{aligned}$$

© COSA SI INTENDE PER CASO ELEMENTARE DI SAINT VENANT E CASO COMPOSTO.

I casi di sollecitazioni elementare sono:

- SPORSO NORMALE CENTRATO, N
- FLESSIONE RETTA, M_x
- FLESSIONE RETTA, M_y
- TAGLIO RETTO T_x (E FLESSIONE RETTA M_x)
- TAGLIO RETTO T_y (E FLESSIONE RETTA M_y)
- TORSIONE M_z

Perché il taglio è la derivata del momento, la sua presenza implica la presenza delle relative flessioni, tuttavia non vale il viceversa.

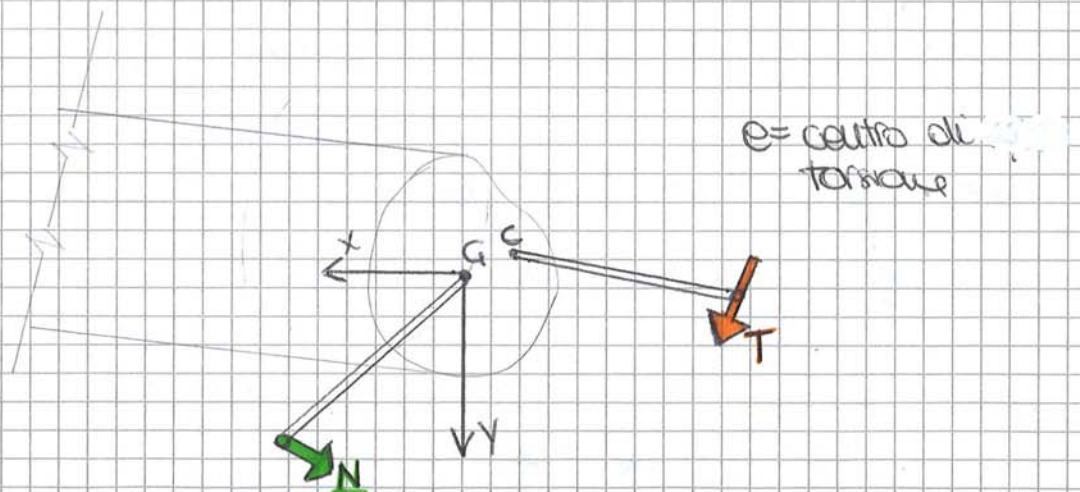
Le prime 3 sollecitazioni (N, M_x, M_y) producono un campo tensionale assiale con la presenza di σ_x . Invece, le 3 sollecitazioni T_x, T_y, M_z producono su ogni sezione trasversale un campo bidimensionale tangenziale con la presenza di τ_{xy} e τ_{yx} cioè τ_z .

La somma delle sollecitazioni elementari dà origine alle sollecitazioni composte:

- FLESSIONE DEVIATA M_x, M_y
- SPORSO NORMALE ECCENTRICO N, M_x, M_y
- TAGLIO-TORSIONE T_x, T_y, M_z

Lo sforzo normale eccentrico = forza assiale N applicata in un punto nel piano XY che però non coincide con il baricentro. Il taglio-torsione = forza di taglio con lo stesso d'azione applicata nel piano XY ma non necessariamente passante per il baricentro.

Quindi, $\{R\}$ ed $\{M\}$ rappresentano un sistema equivalente di forze e momenti formato dalle due forze isometriche ed ortogonali N e T.



$N \Rightarrow$ se sforzo di trazione \Rightarrow deformazione uniforme in direzione assiale e contrazioni tutte uguali tra loro nelle DIREZIONI TRASVERSALI, mentre gli spostamenti assiali sono nulli.



Integrando le precedenti equazioni risulta che la soluzione è costituita dalle tensioni $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ e $\sigma_z = \frac{N}{A}$ e dagli spostamenti:

$$u = -\frac{\nu}{E} \cdot \frac{N}{A} \cdot x + u_0(x, y, z)$$

$$v = -\frac{\nu}{E} \cdot \frac{N}{A} \cdot y + v_0(x, y, z)$$

$$w = \frac{N}{EA} z + w_0(x, y, z)$$

Essa è l'unica soluzione possibile secondo il TH. DI KIRCHOFF.

Il LAVORO ELEMENTARE DI DEFORMAZIONE è relativo ad un tratto infinitesimo di lunghezza dz del corpo di SAINT VENANT; si determina applicando il TEOREMA DI CLAYPERON:

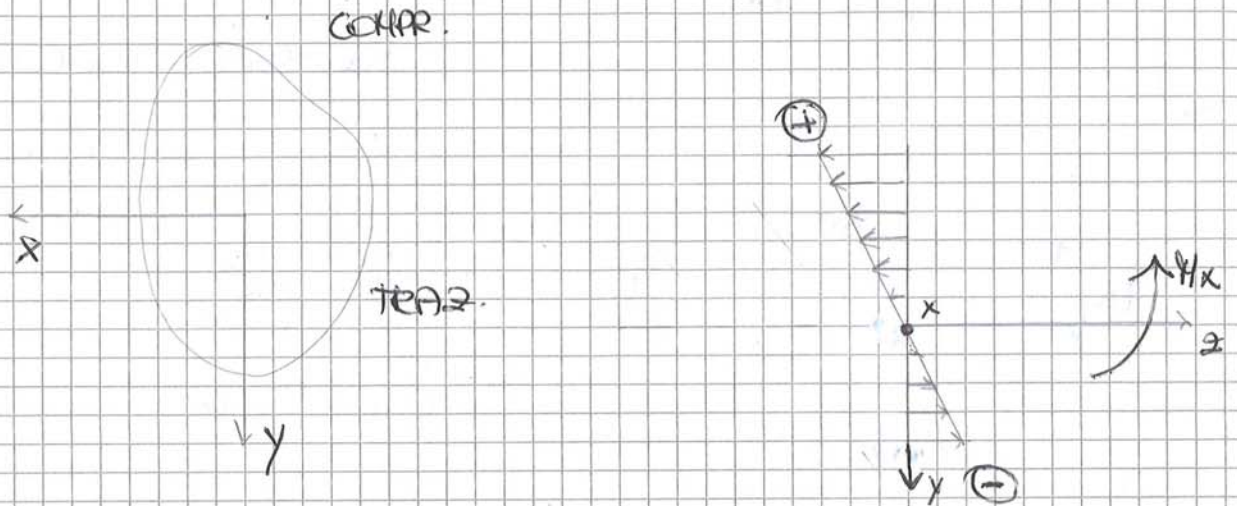
$$dL = \frac{1}{2} \cdot N \cdot dw = \frac{1}{2} N \cdot \epsilon_z \cdot dz$$

$$\Rightarrow \text{sostituendo } \epsilon_z = \frac{N}{EA}$$

$$\Rightarrow dL = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} dz$$

$\frac{1}{2}$ \Rightarrow fattore caratteristico dell'elasticità lineare.

$\sigma_z \Rightarrow$ dipende da y e di aumento dell'abitudine delle asse x .



$\sigma_z = 0$ cioè se $y = 0 \Rightarrow y = 0$ ASSE $x =$ ASSE NEUTRO

ASSE $y =$ ASSE DELLE SOLLECITAZIONI

$yz =$ PIANO DI SOLLECITAZIONE

ASSE NEUTRO ed ASSE DI SOLLECITAZIONE mutuamente ortogonali.

Dalle leggi costitutive $\epsilon = [H]^{-1} \sigma$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{M_x}{I_{xx}} y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

si ottiene il CAMPO DEFORMATIVO

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\frac{\nu}{E} \cdot \frac{M_x}{I_{xx}} y$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} \cdot \frac{M_x}{I_{xx}} y$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

nessune deformazioni

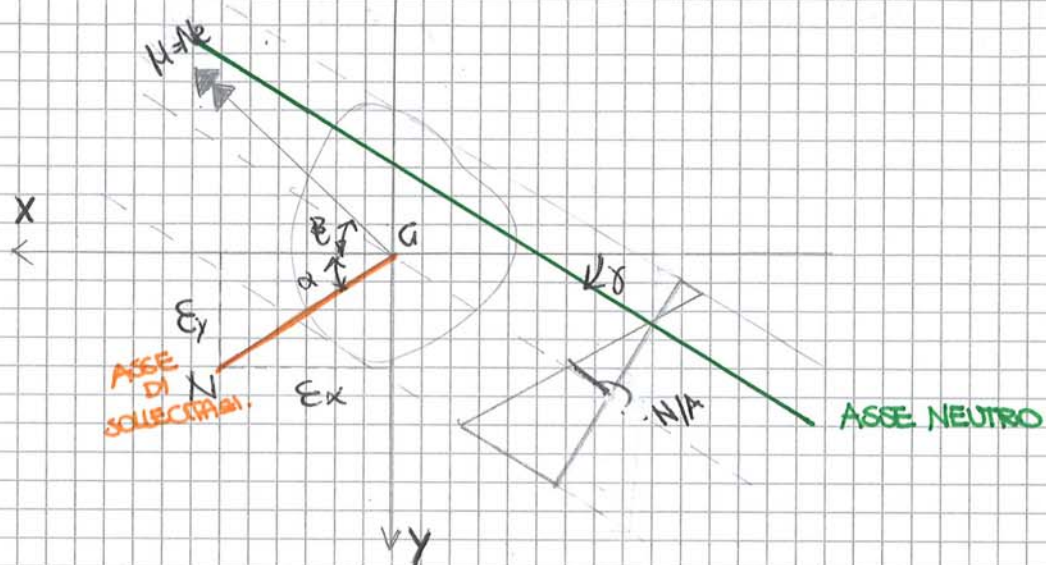
dalle integrazioni si ottengono gli spostamenti

$$u = -\frac{\nu}{E} \cdot \frac{M_x}{I_{xx}} y x + u_0(y, z)$$

$$v = -\frac{\nu}{2E} \cdot \frac{M_x}{I_{xx}} y^2 + v_0(x, z)$$

$$w = \frac{1}{E} \cdot \frac{M_x}{I_{xx}} y z + w_0(x, y)$$

3. IL CASO COMPOSTO DI FLESSIONE DEVIATA



e_x, e_y eccentricità

Al variare dell'angolo eccentricità si passano queste variabili, tra cui questo caso FLESSIONE DEVIATA:

$$\frac{e_y}{e_x} = \tan \alpha \quad \begin{matrix} e_x \rightarrow \infty \\ e_y \rightarrow \infty \end{matrix}$$

d'operazione

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_{xx}} \cdot y - \frac{M_y}{I_{yy}} \cdot x$$

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{N e_y}{I_{xx}} \cdot y + \frac{N e_x}{I_{yy}} \cdot x = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{e_y}{p_x^2} y + \frac{e_x}{p_y^2} x \right)$$

$$1 + \frac{e_y}{p_x^2} y + \frac{e_x}{p_y^2} x = 0$$

diventa:

$$\frac{y}{e_x^2} \tan \alpha + \frac{x}{p_y^2} = 0 \quad \leftarrow \text{(dividendo per } e_x)$$

La parte rappresenta una RETTA PARALLELA; dunque, quando sono presenti M_x, M_y l'asse neutro è baricentrico, però esso non è ortogonale all'asse di simmetria che è ~~la~~ la retta NG.

l'asse di simmetria è rappresentato da:

$$y = x \tan \alpha$$

mentre l'asse neutro:

$$y = - \frac{1}{\tan \alpha} \left(\frac{p_x}{p_y} \right) x - \frac{p_x^2}{p_y}$$

g) IL CASO COMPOSTO DI SFORZO NORMALE ECCENTRICO. LA REGIONE DI NEUTRO

Nei caso composto dello sforzso normale eccentrico si ha una forza N assiale con eccentricità e_y rispetto all'asse x e una eccentricità e_x rispetto all'asse y , dunque l'eccentricità vale $e = \sqrt{e_x^2 + e_y^2}$.

Tutto sforzo è equivalente ad un sistema composto dello sforzo normale centrato N e delle flessioni rette M_x ed M_y :

$$M_x = N e_y$$

$$M_y = N e_x$$

de σ_z è uguale alla somma di tali sollecitazioni:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_{xx}} y - \frac{M_y}{I_{yy}} x$$

SEGNO MENO: perché questo termine se positivo tende a far fibre del semipiano $x < 0$.

$$\Rightarrow \sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{N e_y}{I_{xx}} y + \frac{N e_x}{I_{yy}} x$$

sapendo che

$$I_{xx} = p_x^2 \cdot A$$

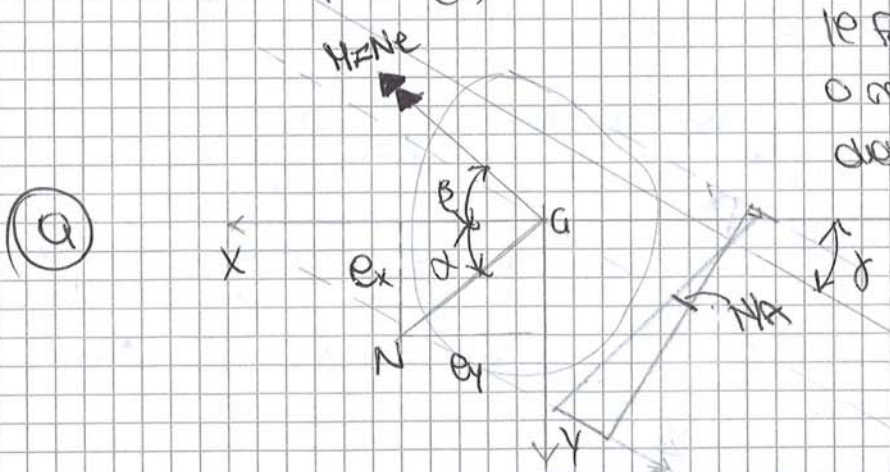
$$I_{yy} = p_y^2 \cdot A$$

$$\sigma_z = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{e_y}{p_x^2} y + \frac{e_x}{p_y^2} x \right)$$

Per l'equazione dell'asse neutro basta annullare σ_z dunque basta porre uguale a 0 il termine tra parentesi:

$$1 + \frac{e_y}{p_x^2} y + \frac{e_x}{p_y^2} x = 0$$

d'asse neutro può intersecare o meno la sezione trasversale dando origine a 2 diversi tipi di diagrammi: nei casi in cui l'asse interseca la sezione il diagramma sforzato (a) mentre in caso contrario il diagramma è a forma di trapezio (b)



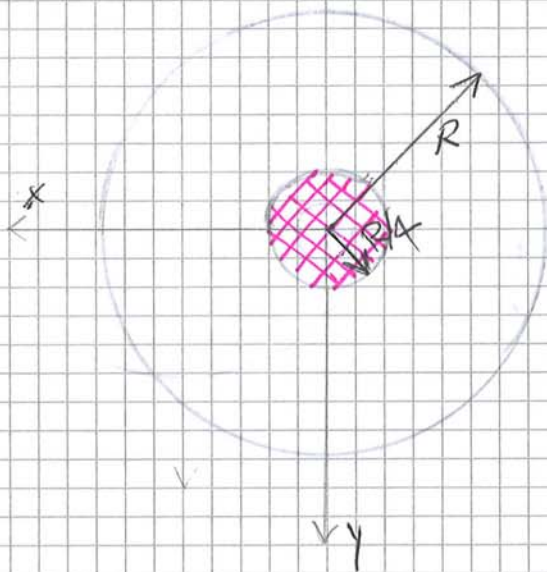
Il fatto che l'asse intersechi o meno la sezione dipende dalle eccentricità e da d

$$-\frac{h}{2} = \frac{\frac{1}{12}bh}{e_y}, \quad e_y = \frac{h}{6}$$

① EFHG \Rightarrow CENTRI d'INERZIA, se essi sono tutti nello stesso piano di simmetria ed ortogonale e completamente sovrapposte

SEZIONE CIRCOLARE:

Regione di simmetria \Rightarrow cerchio concentrico di raggio $\frac{R}{4}$



$$y = R$$

$$e_x^2 = \frac{I_{xx}}{A} = \frac{\frac{\pi R^4}{4}}{\pi R^2} = \frac{R^2}{4}$$

$$-y = -\frac{e_x^2}{e_y}$$

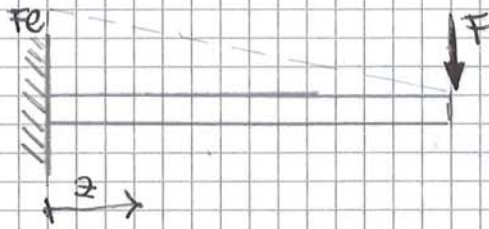
$$-R = -\frac{R^2}{4e_y}$$

$$e_y = \frac{R}{4}$$

1) L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE ELASTICA. ILLUSTRARE QUALCHE ESEMPIO DI APPLICAZIONE.

Per le travi ad asse rettilinea o a sezione simmetrica rispetto all'asse y (o z) e piano di simmetria yz si applica ad un'equazione differenziale nella funzione incognita $v(z)$ detta **FRECCIA**, dove si trascurano i contributi di deformazione dovuti al taglio poiché sono di gran lunga inferiori di quelli dovuti al momento.

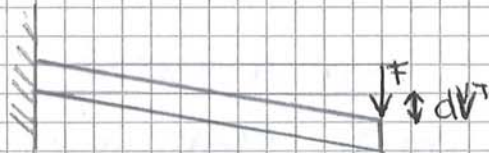
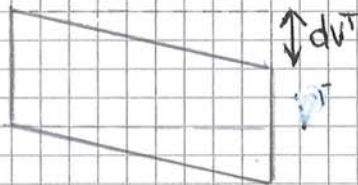
Considerando, per esempio, una trave incastata ad un'estremità e con un forza eccentrica applicata sull'altra di lunghezza l



l'incremento di spostamento verticale dovuto al taglio è:

$$v^T(z) = -\gamma \int dz$$

$$\Rightarrow v^T(l) = \gamma l$$



Invece l'incremento di spostamento verticale dovuto al momento è:

$$dv^M = -\rho_x dz$$

$$\frac{d^2 v^M}{dz^2} = -\frac{d\rho_x}{dz} \quad \text{eq. differenziale}$$

sapendo che

$$d\rho_x = \frac{dz}{R_x} = \chi_x dz$$

$$\chi_x = \frac{M_x}{EI_x}$$

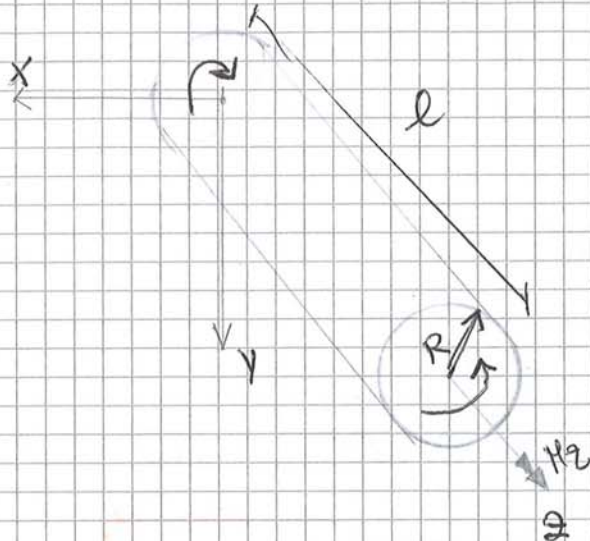
$$\frac{d^2 v^M}{dz^2} = -\frac{M_x}{EI_x}$$

Eq. differenziale delle linee elastiche

$$V_B^M(e) = \frac{m}{2EI_x} e^2$$

$$\varphi_B^M(e) = V_B^M(e) = \frac{me}{EI_x}$$

LA TORSIONE DELLE TRAVI DI SEZIONE CIRCOLARE (tensioni, deformazioni, campo) PERCHÉ LA TEORIA PRECEDENTE VALE ANCHE NEL CASO DI SEZIONI CAVE.



Consideriamo una trave a sezione circolare di raggio R e lunghezza l sulle cui basi applico 2 momenti torcenti uguali ed opposti. In questo caso, cioè nello stesso caso torsionale, bisogna considerare gli spostamenti e quindi forze delle ipotesi cinematiche: si assume che ogni sezione trasversale scivola rigidamente intesa rispetto all'asse longitudinale, restando piana in ogni punto.

In formule:

$$u = -\varphi z \cdot y$$

$$v = \varphi z \cdot x$$

$$w = 0$$

Escluso le sue termini, la rotazione deve essere costante e pari a Θ = caratteristica di torsione che nel caso in cui la trave sia incastata per la sezione $z=0$ viene detta ANGOLO UNITARIO DI TORSIONE ed è def.

$$\varphi z = \Theta z$$

dunque:

$$u = -\Theta z y$$

$$v = \Theta z x$$

$$w = 0$$

Dunque:

$$\theta = \frac{Mz}{GIp}$$

→ CARATTERISTICA DEFORMAZIONE
RELATIVAMENTE AL MOMENTO
TORCENTE

Arretrarsi o presto punto possiamo calcolare lo sforzo tangenziale
pebble:

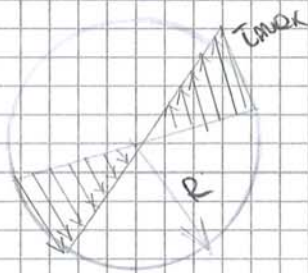
$$\tau_z = \frac{Mz \cdot r}{Ip}$$

→ Se il momento torcente è antiorario (positivo) il vettore τ_z darà momento positivo rispetto al centro e aumenterà verso il centro.

$$\tau_{max} = \frac{Mz \cdot R}{Ip}$$

poiché il momento di inerzia polare è $I_p = \frac{\pi R^4}{2}$ possiamo scrivere

$$\tau_{max} = \frac{Mz \cdot R}{\frac{\pi R^4}{2}} = \frac{2Mz}{\pi R^3}$$



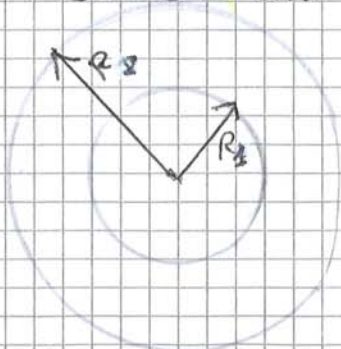
Tramite il teorema di Cauchy si può calcolare il lavoro di deformazione per unità di lunghezza:

$$\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} Mz \cdot \theta dz = \frac{1}{2} Mz \cdot \frac{2Mz}{GIp} dz$$

$$\theta = \frac{Mz}{GIp}$$

da Teoria appena enunciata vale anche per le sezioni ovoidali, triangolari, etc.. Basta solo considerare che cambia il momento di inerzia.

SEZIONE CAVA

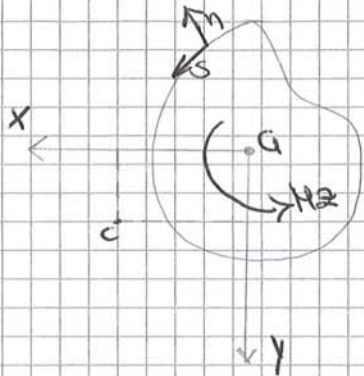


$$I_p = \frac{\pi}{2} (R_2^4 - R_1^4)$$

$$\tau_z = \frac{Mz \cdot r}{I_p} = \frac{2Mz}{\pi (R_2^4 - R_1^4)} r$$

$$\tau_{max} = \frac{2Mz}{\pi (R_2^4 - R_1^4)} R_2$$

Ⓒ TORSIONE DI ELEMENTI NON CIRCOLARI. COSA SI INTENDE PER ANALOGIA DELLA MEMBRANA? LA TORSIONE DELLE SEZIONI RETTANGOLARI (torsioni, deformazione, punto). LA TORSIONE DELLE SEZIONI SOTTILI APERTE, COSTITUITI DA RETTANGOLI DI DIVERSE DIMENSIONI



Nel caso di travi a sezione generica si assume che ogni sezione trasversale scivola rigidamente intorno ad un asse longitudinale detto ASSE DI TORSIONE non rettilineo piano. e differenziale delle travi o sezioni circolari.

In formule:

$$u = -\Theta z (y - y_c)$$

$$v = \Theta z (x - x_c)$$

$$w = \Theta \omega(x, y)$$

ASSE DI TORSIONE: può non essere piano baricentrico

x_c, y_c = coordinate del centro di torsione

$\omega(x, y) \Rightarrow$ FUNZIONE INCORRATA

descrive lo spostamento assiale di punti della sezione

Dalle equazioni cinematiche si può definire il CAMPO DEFORMATIVO:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0;$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \Theta \frac{\partial \omega}{\partial x} - \Theta (y - y_c)$$

$$\gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \Theta \frac{\partial \omega}{\partial y} + \Theta (x - x_c)$$

Dalle leggi costitutive elastiche invece otteniamo il CAMPO TENSIONALE:

$$\epsilon = [H]^{-1} \sigma$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 2/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 2/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}$$

Andando ad analizzare M_z , si ha:

$$M_z = \int_A (x\tau_{zy} - y\tau_{zx}) dA = G\Theta \int_A \underbrace{(x^2 + y^2 - y\frac{\partial w}{\partial x} + x\frac{\partial w}{\partial y})}_{I_t} dA$$

$I_t =$ INERZIA TORSIONALE

$$I_t = \int_A x^2 + y^2 \cdot \left(-\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) dA$$

$$M_z = G\Theta I_t \Rightarrow \Theta = \frac{M_z}{GI_t}$$

dunque

$$\tau_{zx} = \frac{M_z}{I_t} \left[\frac{\partial w}{\partial x} - (y - y_0) \right]$$

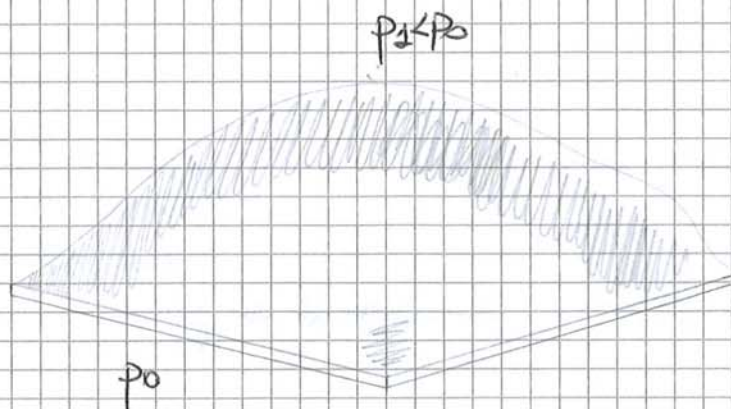
$$\tau_{zy} = \frac{M_z}{I_t} \left[\frac{\partial w}{\partial y} + (x - x_0) \right]$$

Da teorema di Biot-Savart otteniamo il lavoro di deformazione per unità di lunghezza:

$$dL = \frac{1}{2} M_z \Theta dz \Rightarrow \frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{GI_t}$$

ANALOGIA DELLA MEMBRANA:

serve ad avere dei risultati qualitativi per sezioni di forma non circolare.



Considerando un membrano su un teccolo di forma arbitraria o deformabile considerato membrano obbede difficoltà di pressione possono venire ad affermarsi deformazioni super membrano. In questo modo si ha una relazione corrispondenza tra la pendenza deformazione nel un punto deformazione e la pressione uniforme nel membrano.