NUMERO: 2000A - ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Polizzi Fabio

MATERIA: Dinamica dei sistemi meccanici - Prof. Fasana

(1)

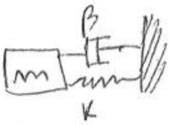
MOLLE IN SERIE: hanno la stessa forza $\frac{1}{K_{eq}} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \dots + \frac{1}{K_m}$

MOLLE IN PARALLELO: hanno la stessa deformazione $K_{eq} = K_1 + K_2 + \dots + K_m$

costante di smorzamento $\frac{N}{m/s}$

- $\frac{c}{2m} = \zeta \omega_m$ ---------------- pag (2) teoria

fattore di smorzamento

- $\omega_{RIS} = \omega_m \sqrt{1-2\zeta^2}$ (RISPOSTA FORZATA) PERIODICA) ---------- pag (8) teoria
- $\omega_d = \omega_m \sqrt{1-\zeta^2}$ (RISPOSTA LIBERA)
-  oscillazioni libere:

SI PARTE DA QUESTA

se $0<\zeta<1$: $x_{(t)} = \left(A_1 e^{i\omega_d t} + A_2 e^{-i\omega_d t}\right) e^{-\zeta\omega_m t}$ ---------- pag (3) teoria

RICORDA: quando ho sistema m, K, c che oscilla libero la soluzione è questa.

$$x_{(t)} = \left[A_1\underbrace{\left(\cos(\omega_d t) + i\,\mathrm{sen}(\omega_d t)\right)} + A_2\underbrace{\left(\cos(\omega_d t) - i\,\mathrm{sen}(\omega_d t)\right)}\right] e^{-\zeta\omega_m t}$$

$$x_{(t)} = \left[(A_1+A_2)\cos(\omega_d t) + i(A_1-A_2)\,\mathrm{sen}(\omega_d t)\right] e^{-\zeta\omega_m t}$$

poi impongo le c.i.:

1) $x_{(0)} = x_0$

2) $\dot{x}_{(0)} = v_0$

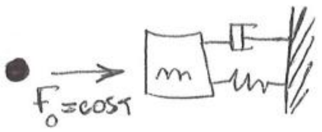
1) $x_{(0)} = A_1 + A_2$

2) $\dot{x}_{(0)} = \left[-(A_1+A_2)\omega_d \underbrace{\mathrm{sen}(\omega_d t)}_{=0} + i(A_1-A_2)\underbrace{\cos(\omega_d t)}_{=1}\cdot\omega_d\right] \underbrace{e^{-\zeta\omega_m t}}_{=1} +$

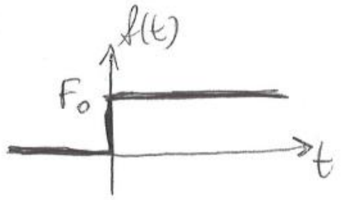
$\left[(A_1+A_2)\underbrace{\cos(\omega_d t)}_{=1} + i(A_1-A_2)\underbrace{\mathrm{sen}(\omega_d t)}_{=0}\right]\cdot(-\zeta\omega_m)\underbrace{e^{-\zeta\omega_m t}}_{=1} = v_0$

$= i\omega_d(A_1-A_2) + (A_1+A_2)(-\zeta\omega_m) = v_0$

$\hookrightarrow i(A_1-A_2) = \frac{(A_1+A_2)(\zeta\omega_m)+v_0}{\omega_d} = \frac{x_0\zeta\omega_m + v_0}{\omega_d}$



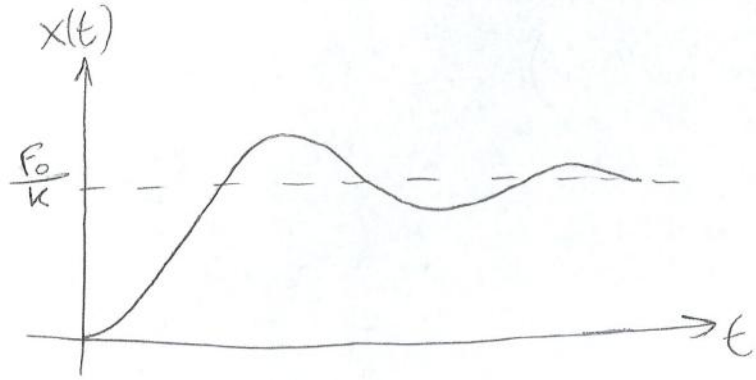
- **risposta al gradino**



----- pag (5) teo

$$X_{(t)} = \left[a\cos(\omega_d t) + b\,\text{sen}(\omega_d t)\right] e^{-\zeta\omega_n t} + \frac{F_0}{K}$$

$$\text{C.I.} \begin{cases} x_{(0)} = 0 \\ \dot{x}_{(0)} = 0 \quad \text{----} \quad b\omega_d - \zeta\omega_n a = 0 \end{cases} \Longrightarrow a, b$$



- funzione impulso (DIRAC) δ: ---------- pag (14) teoria

3 condiz. fondamentali:

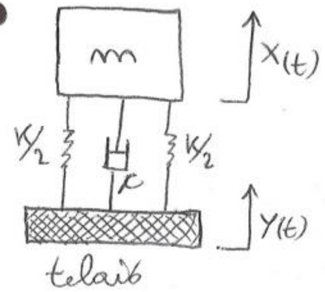
$$\begin{cases} 1)\ \delta_{(t-t_0)} = 0 \quad \forall t \neq t_0 \\ 2)\ \delta_{(t-t_0)} \to \infty \quad t = t_0 \\ 3)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{(t-t_0)}\, dt = 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \text{C.I.} \begin{cases} x_{(0^+)} = 0 \\ \dot{x}_{(0^+)} = \frac{1}{m} \end{cases}$$

---

(5)

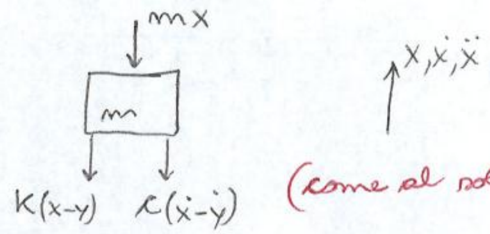
- $I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 = \int_D r^2 dm \longleftrightarrow J = \int_D r^2 dA$

- 

<u>accelerometro / sismografo</u>

agito telaio con moto imposto e analizzo $x(t)$

diagramma corpo libero:



(come al solito non considerare F_g)

$\downarrow)\ m\ddot{x} + c(\dot{x}-\dot{y}) + k(x-y) = 0$

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky + c\dot{y}$

moto relativo $\underbrace{z = x-y}$

$\hookrightarrow x = z + y$

$m\ddot{z} + m\ddot{y} + c\dot{z} + kz = 0$

$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = \underbrace{-m\ddot{y}}_{\text{forzante!}}$

Suppongo $y = Y_0 e^{i\omega t}$ $\quad (Y_0 \in \mathbb{R})$

Cerchiamo la slz. complessa $z_{(t)} = Z_0 e^{i\omega t}$ $\quad (Z_0 \in \mathbb{C})$

Sostituiamo:

$(k - m\omega^2 + i\omega c) Z_0 \cancel{e^{i\omega t}} = + m\omega^2 Y_0 \cancel{e^{i\omega t}}$

$$\frac{Z_0}{Y_0} = \frac{m\omega^2}{(k-m\omega^2)+i(\omega c)} \cdot \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} = \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \cdot \boxed{\frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + i\, 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}} = \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \cdot \underline{G_{(i\omega)}}$$

FATTORE DI AMPLIFICAZIONE

$$\left|\frac{Z_0}{Y_0}\right| = r^2 \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + i(2\zeta r)^2}}$$

$\omega \ll \omega_n$ — <u>ACCELEROMETRO</u>

$\omega \gg \omega_n$ — <u>SISMOGRAFO</u>

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 442

• Se $\boxed{\omega \gg \omega_n}$ ZONA S Sismografo

(perché non c'è max con $\zeta = 0,707$?

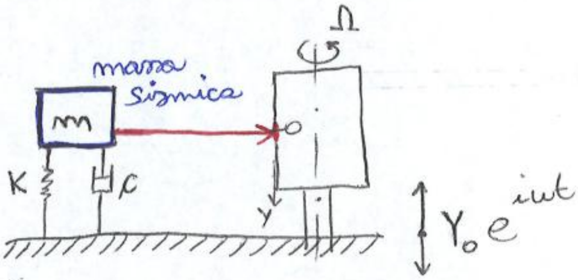
$$\omega_n = \frac{\omega_{RIS}}{\sqrt{1-2\zeta^2}} \longrightarrow \omega_{RIS} = \omega_n \underbrace{\sqrt{1-2\zeta^2}}$$

$$\hookrightarrow 1-2\zeta^2 > 0 \rightarrow \zeta < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

la risonanza esiste solo per $\boxed{\zeta < 0{,}707}$)

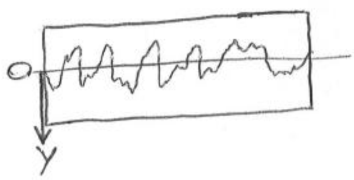
$$\left|\frac{Z_0}{Y_0}\right| \approx 1 \Longrightarrow \underset{(\mathrm{Re})}{Z_0 \approx -Y_0}$$

Sismografo: come è fatto



Evento sismico
⇓
massa oscilla
⇓
pennino scrive

rotolo carta:



Durante l'evento sismico m tende a stare ferma per inerzia.
Devo scegliere ω_n piccola affinché teoria sia valida.

$$\frac{K \text{ piccola}}{m \text{ grande}}$$

E siccome tende a stare ferma, quello che poi leggo è il moto assoluto del pavimento.

- mettendo insieme gli autovettori messi per colonna si ottiene la

MATRICE MODALE

$$[\Psi] = \Big[\{\psi_1\} \; \{\psi_2\} \Big] = \Big[\underset{\psi_1}{(\;)} \; \underset{\psi_2}{(\;)} \Big]$$

- ora calcolo M_n e K_n e c_n:

$$[\Psi]^T [m] [\Psi] = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & M_n & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$$ massa modale

$$[\Psi]^T [K] [\Psi] = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & K_n & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$$ rigidezza modale

$$[\Psi]^T [c] [\Psi] = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & c_n & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} = \alpha M_n + \beta K_n$$ ——— pag 35 Teoria

coeff. smorzamento modale vedi pag 50 Eserc.

- $[M_n]\{\ddot{\eta}\} + [c_n]\{\dot{\eta}\} + [K_n]\{\eta\} = \{0\}$

esempio 2gdl

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} M_1 \ddot{\eta}_1 + c_1 \dot{\eta}_1 + K_1 \eta_1 = 0 \rightarrow \omega_1 = \sqrt{\dfrac{K_1}{M_1}} \quad \zeta_1 = \dfrac{c_1}{2 M_1 \omega_1} \\ M_2 \ddot{\eta}_2 + c_2 \dot{\eta}_2 + K_2 \eta_2 = 0 \rightarrow \omega_2 = \sqrt{\dfrac{K_2}{M_2}} \quad \zeta_2 = \dfrac{c_2}{2 M_1 \omega_2} \end{cases}$$

cioè 1 sys con n gdl l'ho ricondotto a n sistemi a 1 gdl.

- Se $\zeta < 1$

$$\eta_{1(t)} = \left[A_1 \cos(\omega_{d1} t) + B_1 \operatorname{sen}(\omega_{d1} t) \right] e^{-\zeta_1 \omega_1 t} \qquad \text{con } \omega_{d1} = \omega_1 \sqrt{1 - \zeta_1^2}$$

$$\eta_{2(t)} = \left[A_2 \cos(\omega_{d2} t) + B_2 \operatorname{sen}(\omega_{d2} t) \right] e^{-\zeta_2 \omega_2 t} \qquad \text{con } \omega_{d2} = \omega_1 \sqrt{1 - \zeta_2^2}$$

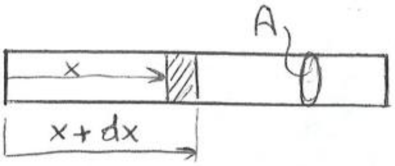
ti calcoli

$\dot{\eta}_{1(t)} = \text{– –}$

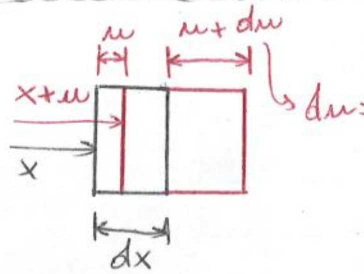
$\dot{\eta}_{2(t)} = \text{– –}$

• OSCILLAZIONI ASSIALI

pag (73) Teoria
pag (97) Miei esercizi
pag (66) Esercitazione

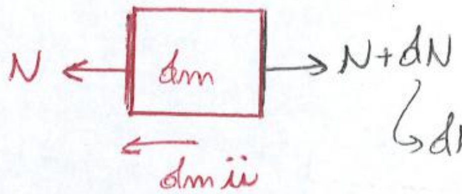


$\Rightarrow$



$\hookrightarrow du = \frac{\partial u}{\partial x} dx$

diagr. corpo libero



$\hookrightarrow dN = \frac{\partial N}{\partial x} dx$

$$\rightarrow)\ \cancel{N} + \frac{\partial N}{\partial x} dx - \cancel{N} - dm\,\ddot{u} = 0$$

$$dm = \rho\, dV = \rho A dx = \mu dx$$

μ = massa lineare [Kg/m]

$$\frac{\partial N}{\partial x} \cancel{dx} - \mu \cancel{dx}\, \ddot{u} = 0$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \mu \ddot{u} = 0$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \mu \ddot{u}$$

$$\frac{\partial (AE \frac{\partial u}{\partial x})}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$N = A\sigma = A\, E\varepsilon = AE \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon = \frac{\left(\cancel{dx} + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) - \cancel{dx}}{\cancel{dx}} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$AE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{AE}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

EQ. delle ONDE o di D'Alembert

$$\boxed{c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

Descrive le vibrazioni assiali nella trave o in una colonna d'aria.

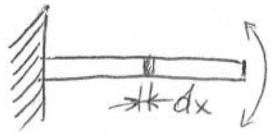
$$u_{(x,t)} = \phi_{(x)} e^{i\omega t}$$
$\downarrow$

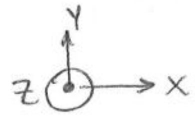
$$u_{(x,t)} = f_{(t)} \cdot g_{(x)}$$ variab. separabili
$\downarrow$

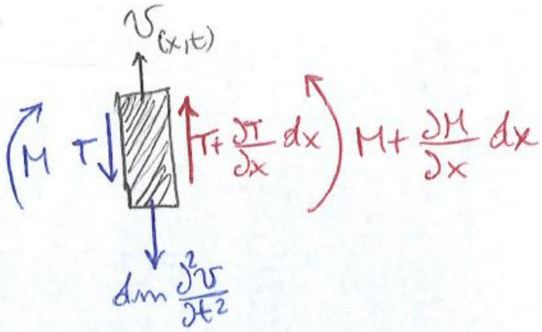
- OSCILLAZIONI FLESSIONALI trave Eulero-Bernoulli. — pag 83 Teoria (13)

pag 95 Mini esercizi

pag 71 Esercitazione







$$1)\ \cancel{T} + \frac{\partial T}{\partial x}\cancel{dx} - \cancel{T} - \overbrace{dm}^{\mu \cancel{dx}} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

$$2.)\ \cancel{M} + \frac{\partial M}{\partial x}\cancel{dx} - \cancel{M} + \left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx\right)\cdot\frac{\cancel{dx}}{2} + T\frac{\cancel{dx}}{2} = 0$$

$$1)\ \frac{\partial T}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

$$2.)\ \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{T}{2} + \frac{T}{2} + \underbrace{\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\cancel{dx}}{2}}_{\approx 0} = 0$$

$$\boxed{\Theta = \frac{\partial v}{\partial x}}\ (3)$$ da ricordare

$$1)\ \frac{\partial T}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

$$2.)\ \boxed{T = -\frac{\partial M}{\partial x}}\ (1)$$ da ricordare

$$+\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{M = EJ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}\ (2)$$ da ricordare

condizione necessaria:

$(EJ = cost)$

$$\boxed{EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0}$$ eq. moto trave Eulero-Bernoulli

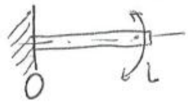
Se $v_{(x,t)} = \eta_{(t)} \cdot \phi_{(x)}$ variab. separabili

$$EJ\left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4}\eta\right) + \mu\left(\phi \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\right) = 0$$

$$EJ\ \phi^{IV} \eta = -\mu \phi \eta''$$

$$\boxed{[A_{(\beta)}] \cdot \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}\ \boxed{EVP}$$

impongo $\det[A_{(\beta)}] = 0 \Rightarrow$ eq. caratteristica asta incastrata - libera:



1° c.c. $v_{(0,t)} = 0 \rightarrow v_{(0,t)} = \eta_{(t)} \cdot \phi_{(0)} = 0 \rightarrow \boxed{\phi_{(0)} = 0}$

2° c.c. $\dfrac{\partial v_{(0,t)}}{\partial x} = 0 \rightarrow \dfrac{\partial v_{(0,t)}}{\partial x} = \eta_{(t)} \, \phi'_{(0)} = 0 \rightarrow \boxed{\phi'_{(0)} = 0}$

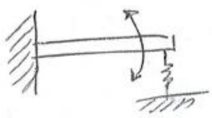
3° c.c. $M = EJ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$ (xké aria non dà momento)

$\hookrightarrow \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \eta_{(t)} \cdot \phi''_{(L)} = 0 \rightarrow \boxed{\phi''_{(L)} = 0}$

4° c.c. $T = -\dfrac{\partial M}{\partial x} = -EJ \dfrac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0$

$\hookrightarrow \dfrac{\partial^3 v}{\partial x^3} = \eta_{(t)} \cdot \phi'''_{(L)} = 0 \rightarrow \boxed{\phi'''_{(L)} = 0}$

asta incastrata - molla:



1° c.c. $v_{(0,t)} = 0 \longrightarrow \boxed{\phi_{(0)} = 0}$

2° c.c. $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \longrightarrow \boxed{\phi'_{(0)} = 0}$

3° c.c. $M = EJ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$ (xké aria non dà momento)

$\hookrightarrow \boxed{\phi''_{(L)} = 0}$

4° c.c. $\begin{cases} T = -K v_{(L,t)} \\ T = -\dfrac{\partial M}{\partial x} = -EJ \dfrac{\partial^3 v_{(L,t)}}{\partial x^3} \end{cases} \begin{cases} +K v_{(L;t)} = +EJ \dfrac{\partial^3 v}{\partial x^3} \\ EJ \dfrac{\partial^3 v}{\partial x^3} - K v_{(L;t)} = 0 \end{cases}$

$\rightarrow EJ \cancel{\eta_{(t)}} \phi'''_{(L)} - K \cancel{\eta_{(t)}} \phi_{(L)} = 0$

$\boxed{\phi'''_{(L)} - \dfrac{K}{EJ} \phi_{(L)} = 0}$

– –

• DIMOSTRAZIONE SOLUZIONE SINCRONA

$$[m]\{\ddot{x}\} + \underbrace{\cancel{[c]}}_{=0}\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\}$$

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\}$$

$$\left.\begin{array}{l}[m] = [m]^T \\ [k] = [k]^T\end{array}\right\} \text{entrambe simmetriche}$$

$$\left.\begin{array}{l}\{v\}^T[m]\{v\} > 0 \\ \{v\}^T[k]\{v\} \geq 0\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{DEF. POSITIVA} \\ \text{SEMIDEF. POSITIVA}\end{array}$$

si ipotizza:

$$\{x\} = \{A\}g(t)$$

$$\{\ddot{x}\} = \{A\}\ddot{g}(t)$$

sostituisco:

$$\rightarrow [m]\{A\}\ddot{g} + [k]\{A\}g = 0$$

$$\underbrace{\{A\}^T[m]\{A\}}_{1\times1}\ddot{g} + \underbrace{\{A\}^T[k]\{A\}}_{1\times1}g = \underbrace{\{A\}^T\{0\}}_{1\times1}$$

$$\ddot{g} + \underbrace{\frac{\{A\}^T[k]\{A\}}{\{A\}^T[m]\{A\}}}_{= \omega^2 \ (\geq 0)} g = 0$$

$$\ddot{g} + \omega^2 g = 0$$

slz. $g(t) = a\cos(\omega t) + b\,\text{sen}(\omega t)$

$\dot{g}(t) = -a\omega\,\text{sen}(\omega t) + b\omega\cos(\omega t)$

$\ddot{g}(t) = -a\omega^2\cos(\omega t) - b\omega^2\,\text{sen}(\omega t) = \boxed{-\omega^2 g(t)}$

— — —

→ sostituisci in →:

$$-[m]\{A\}\omega^2\cancel{g} + [k]\{A\}\cancel{g} = \{0\}$$

$$\underbrace{([k] - \omega^2[m])\{A\} = \{0\}}_{\text{AUTOPROBLEMA (EVP)}}$$

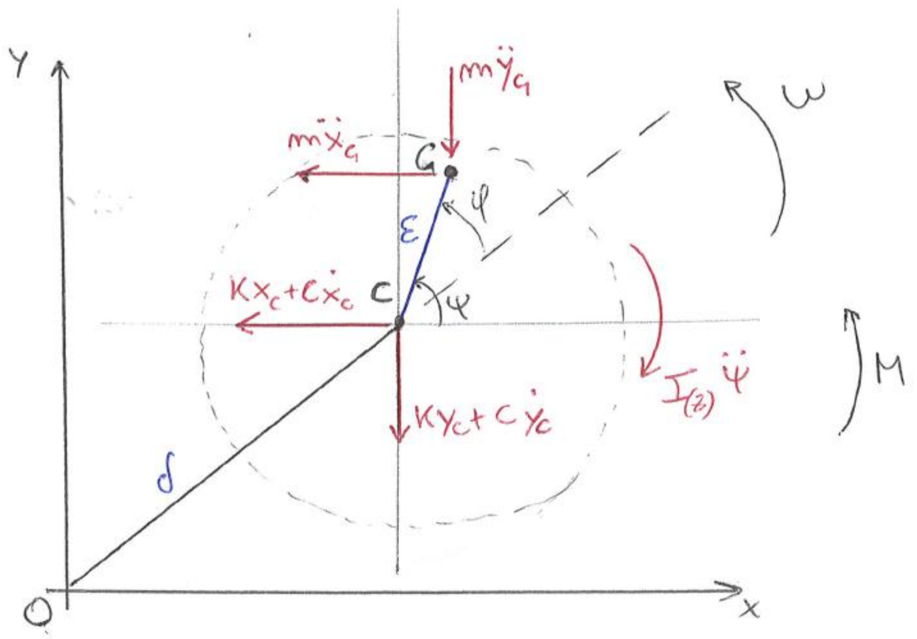
$\{A\} = 0$ slz. banale

$\det([k] - \omega^2[m]) = 0 \rightarrow \omega_n \rightarrow \Psi_n$

<u>∃ la slz. sincrona!</u>

• ROTORE DI JEFFCOT

1°: supporti ∞ rigidi, albero elastico



$\leftarrow)$ $m\ddot{x}_G + C\dot{x}_c + Kx_c = 0$

$\downarrow)$ $m\ddot{y}_G + C\dot{y}_c + Ky_c = 0$

$\circlearrowleft)$ $I\ddot{\psi} + (Kx_c + C\dot{x}_c)\,\varepsilon \,\mathrm{sen}\,\psi - (Ky_c + C\dot{y}_c)\,\varepsilon \cos\psi - M = 0$

$x_G = x_c + \varepsilon\cos\psi \rightarrow \dot{x}_G = \dot{x}_c - \varepsilon\dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\psi \rightarrow \ddot{x}_G = \ddot{x}_c - \cancel{\varepsilon\ddot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\psi} - \varepsilon\dot{\psi}^2\cos\psi$

$y_G = y_c + \varepsilon\,\mathrm{sen}\,\psi \rightarrow \dot{y}_G = \dot{y}_c + \varepsilon\dot{\psi}\cos\psi \rightarrow \ddot{y}_G = \ddot{y}_c + \cancel{\varepsilon\ddot{\psi}\cos\psi} - \varepsilon\dot{\psi}^2\,\mathrm{sen}\,\psi$

Si suppone $\omega = \dot{\psi} = \text{cost} \rightarrow$ da cui $\boxed{\ddot{\psi} = 0}$

$\leftarrow)$ $m\ddot{x}_c + C\dot{x}_c + Kx_c = m\varepsilon\dot{\psi}^2\cos\psi$

$\downarrow)$ $m\ddot{y}_c + C\dot{y}_c + Ky_c = m\varepsilon\dot{\psi}^2\,\mathrm{sen}\,\psi$

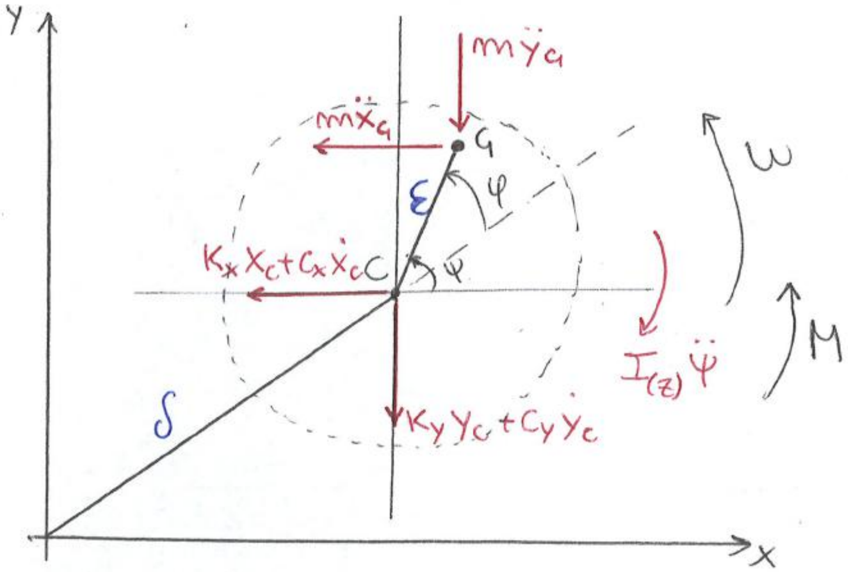
$\hookrightarrow x_c = Ae^{i\omega t}$ $\quad y_c = Be^{i\omega t}$ $\quad m\varepsilon\dot{\psi}^2\cos\psi = \mathrm{Re}(m\varepsilon\dot{\psi}^2 e^{i\omega t})$

$\dot{x}_c = Ai\omega e^{i\omega t}$ $\quad \dot{y}_c = Bi\omega e^{i\omega t}$ $\quad m\varepsilon\dot{\psi}^2\,\mathrm{sen}\,\psi = \mathrm{Im}(m\varepsilon\dot{\psi}^2 e^{i\omega t})$

$\ddot{x}_c = -A\omega^2 e^{i\omega t}$ $\quad \ddot{y}_c = -B\omega^2 e^{i\omega t}$

• ROTORE DI JEFFCOT 2°: supporti elastici, albero ∞ rigido

--- pag (121) Teoria



$\leftarrow)\ m\ddot{x}_G + C_x \dot{x}_c + K_x x_c = 0$

$\downarrow)\ m\ddot{y}_G + C_y \dot{y}_c + K_y y_c = 0$

$G)\ I\ddot{\psi} + (K_x x_c + C_x \dot{x}_c)\varepsilon \,\text{sen}\,\psi - (K_y y_c + C_y \dot{y}_c)\varepsilon \cos\psi - M = 0$

$x_G = x_c + \varepsilon\cos\psi \rightarrow \dot{x}_G = \dot{x}_c - \varepsilon\dot{\psi}\,\text{sen}\,\psi \rightarrow \ddot{x}_G = \ddot{x}_c - \cancel{\varepsilon\ddot{\psi}\,\text{sen}\,\psi} - \varepsilon\dot{\psi}^2\cos\psi$

$y_G = y_c + \varepsilon\,\text{sen}\,\psi \rightarrow \dot{y}_G = \dot{y}_c + \varepsilon\dot{\psi}\cos\psi \rightarrow \ddot{y}_G = \ddot{y}_c + \cancel{\varepsilon\ddot{\psi}\cos\psi} - \varepsilon\dot{\psi}^2\,\text{sen}\,\psi$

considerando il caso $\dot{\psi} = \omega = \text{cost}$ allora $\ddot{\psi} = 0$:

$\leftarrow)\ m\ddot{x}_c + C_x \dot{x}_c + K_x x_c = m\varepsilon\dot{\psi}^2\cos\psi$

$\downarrow)\ m\ddot{y}_c + C_y \dot{y}_c + K_y y_c = m\varepsilon\dot{\psi}^2\,\text{sen}\,\psi$

Studiamo a regime : int. particolare

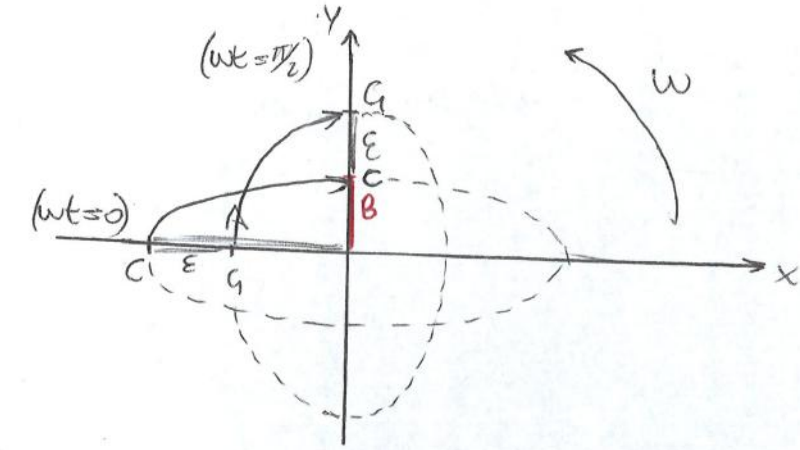
$x_c = A e^{i\omega t} \rightarrow \dot{x}_c = A i\omega e^{i\omega t} \rightarrow \ddot{x}_c = -A\omega^2 e^{i\omega t}$

$y_c = B e^{i\omega t} \rightarrow \dot{y}_c = B i\omega e^{i\omega t} \rightarrow \ddot{y}_c = -B\omega^2 e^{i\omega t}$

$m\varepsilon\dot{\psi}^2\cos\psi = \text{Re}(m\varepsilon\dot{\psi}^2 e^{i\omega t})$

$m\varepsilon\dot{\psi}^2\,\text{sen}\,\psi = \text{Im}(m\varepsilon\dot{\psi}^2 e^{i\omega t})$

CASO 2 $\omega_{CR(x)} < \omega < \omega_{CR(y)}$



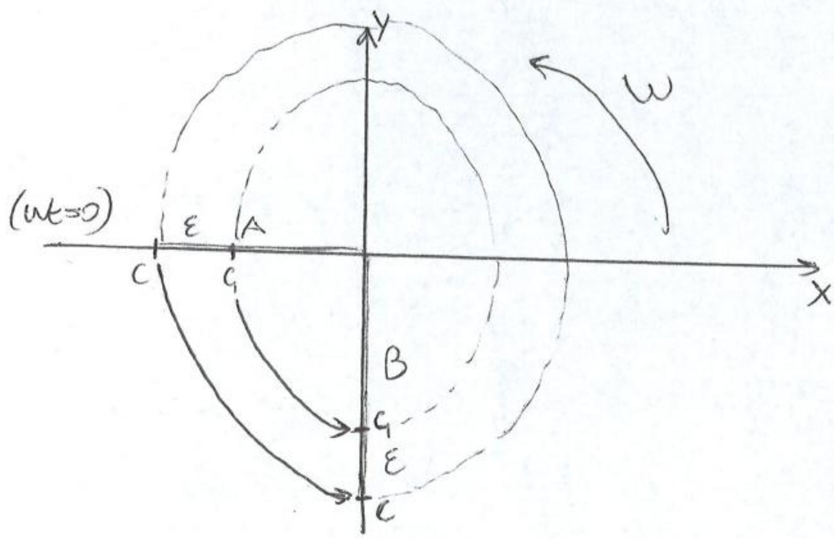
$A < 0$

$B > 0 \quad |B| < |A|$

PRECESSIONE ASINCRONA

INCROCIO DELLE TRAIETTORIE

CASO 3 $\omega_{CR(x)} < \omega_{CR(y)} < \omega$



$A < 0$

$B < 0 \quad |B| > |A|$

PRECESSIONE SINCRONA

Se $\omega \to \infty$ allora:

$A, B \to -\varepsilon$

cioè si AUTOCENTRA

Definizione di OPERAT. AUTOAGGIUNTO:

$$\int_D v \cdot \mathcal{L}[u]\, dD = \int_D u \cdot \mathcal{L}[v]\, dD$$

D: dominio
u, v: funzioni definite nel dominio D.

Trave Eulero-Bernoulli:

$$\begin{cases} M[\cdot] = \mu \\ u = \phi_{r(x)} \\ v = \phi_{s(x)} \end{cases} \qquad \begin{cases} K[\cdot] = EJ \dfrac{\partial^4}{\partial x^4} \\ u = \phi_{r(x)} \\ v = \phi_{s}(x) \end{cases}$$

$$\int_0^L \phi_s \,\mu\, \phi_r \, dx = \int_0^L \phi_r \,\mu\, \phi_s \, dx \Longrightarrow$$ M è operatore autoaggiunto

Se $EJ = \text{cost} \longrightarrow \underbrace{\int_0^L \overbrace{\phi_s}^{g} \cdot EJ \overbrace{\frac{\partial^4 \phi_r}{\partial x^4}}^{f'} dx}_{\text{integro per parti}} \overset{?}{=} \int_0^L \phi_r \cdot EJ \frac{\partial^4 \phi_s}{\partial x^4} dx$

$$\int f' \cdot g = f g - \int f g'$$

$$f' = \frac{\partial^4 \phi_r}{\partial x^4} \qquad g = \phi_s$$

$$EJ \left\{ \underbrace{\cancel{\frac{\partial^3 \phi_r}{\partial x^3} \phi_s \Big|_0^L}}_{=0} - \int_0^L \frac{\partial^3 \phi_r}{\partial x^3} \frac{\partial \phi_s}{\partial x} \right\} = \underbrace{-EJ \int_0^L \overbrace{\frac{\partial^3 \phi_r}{\partial x^3}}^{f'} \overbrace{\frac{\partial \phi_s}{\partial x}}^{g} dx}_{\text{per parti}}$$

$$-EJ \left\{ \left[\frac{\partial^2 \phi_r}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \phi_s}{\partial x} \right]_0^L - \int_0^L \frac{\partial^2 \phi_r}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial x^2} dx \right\}$$

Se incastro: $\dfrac{\partial \phi_s}{\partial x} = 0 \longrightarrow$ no pendenza

Se estremo libero: $\dfrac{\partial^2 \phi_r}{\partial x^2} = 0 \rightarrow M = 0$ (anche $T = 0$)

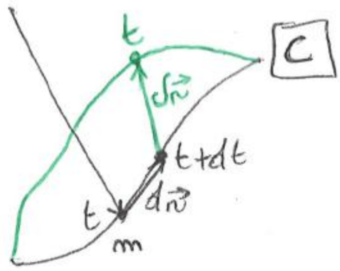
Se appoggio: $\dfrac{\partial^2 \phi_r}{\partial x^2} = 0 \longrightarrow M = 0$ ($T \neq 0$)

Se si ripetono i passaggi invertendo ϕ_r con ϕ_s si ottengono gli stessi risultati: K è operatore autoaggiunto.

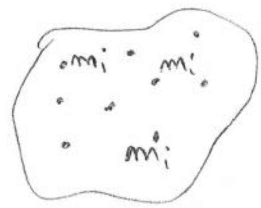
— — —

• PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

pag 52 Teoria



$\delta\vec{r}$: spostamento virtuale
- sono arbitrari
- devono rispettare le condizioni di vincolo
- non richiedono un passaggio di tempo
- ma... variano nel tempo



in STATICA $\boxed{R_i = 0}$ risultante delle forze agenti sulle m_i

$$\delta W_i = \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r} = 0.$$

F = forze ATTIVE
f = forze di reazioni vincolari

$$\delta W_i = (\vec{F}_i + \underbrace{\vec{f}_i) \cdot \delta\vec{r}}_{} = 0$$

$\hookrightarrow = 0$ perché $f_i \perp$ rispetto a $\delta\vec{r}$

$$\vec{F}_i \cdot \delta\vec{r} = 0$$

$$\boxed{W_{TOT} = \sum_{i=1}^{m} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r} = 0}$$

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI = 0

in DINAMICA $\boxed{R_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i}$

$$R_i \underbrace{- m_i \ddot{\vec{r}}_i}_{+\vec{F}_i'} = 0$$

$+\vec{F}_i' \rightarrow$ forze d'inerzia

$$R_i + \vec{F}_i' = 0$$

Quindi:

$$W_{TOT} = \sum_{i=1}^{m} (\vec{F}_i + \vec{F}_i') \cdot \delta\vec{r} = 0$$

$$\boxed{W_{TOT} = \sum_{i=1}^{m} (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \cdot \delta\vec{r} = 0}$$

PRINCIPIO DI D'ALEMBERT

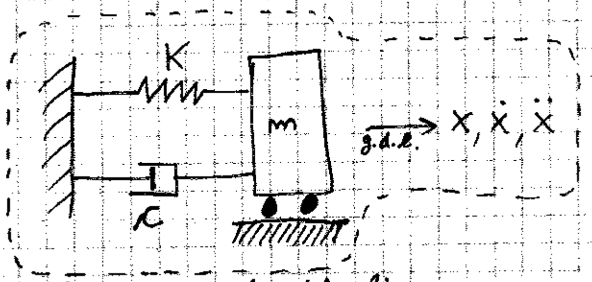
04/10/2012 (1)

DINAMICA DEI SISTEMI MECCANICI

alessandro.fasana@polito.it / non c'è un orario fisso x i ricevimenti

"Meccanica delle vibrazioni" Fasana - Marchesiello
"Dinamica delle macchine" Vatta - Malvano

Esame solo SCRITTO.
1 h 30 min
3 domande (teoria e esercizi) (*)



SISTEMA a 1 gdl, lineare

Elementi base:
- corpo m (con varie proprietà tra cui m)
- def. elastica K
- dissipazione energia / C

(*) All'esame portare solo la penna.

Modelli trattati sono tutti lineari.

$$\begin{cases} F_{MOLLA} = K \cdot x & \text{(sarebbe } Kx^3 \text{ ma viene modello difficile, comq poca differenza)} \\ F_{\substack{SMORZATORE \\ VISCOSO}} = c \cdot \dot{x} \end{cases}$$

se corpo viene spostato da equilibrio?

$$\boxed{m \cdot \ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0}$$

eq. di eq. alla traslazione

eq. diff. lineare! (x^1 o x^0)
e a coeff. cost!! ($m, c, K = \text{cost}$ nel tempo)

costanti di integrazione che dipendono da condizioni iniziali

risoluzione: $x = Ae^{st}$ dove $A, s \in \mathbb{C}$ (complessi)

t: tempo

$$\begin{cases} (ms^2 + cs + K)A\cancel{e^{st}} = 0 \\ A = 0 \text{ (inutile)} \end{cases}$$

sol. pox

[deve essere $= 0$ in qualsiasi istante di tempo, perciò $e^{st} \neq 0$ e lo elimino]

oppure $ms^2 + cs + k = 0$

polinomio caratteristico → soluz. $s_{1,2} = \dfrac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4Km}}{2m}$ → $s_1 = +$, $s_2 = -$

autovalori s_1 e s_2

→ ottengo 2 sol. ⇒ $x(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$ soluzione completa dell'omogenea

• $0 \le \zeta < 1$ modello sottosmorzato

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\,\underbrace{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}_{} \qquad (i^2 = -1)$$

$= \omega_d$ = pulsazione smorzata ("damping")

$s_{1,2}$ sono ora $\mathbb{C}$ e coniugati (*)

cioè: $s_2 = s_1^*$

$$X_{(t)} = \left(A_1 e^{i\omega_d t} + A_2 e^{-i\omega_d t}\right) e^{-\zeta\omega_n t}$$

• caso ( ) è complesso! → formule di eulero!

eulero

$$\boxed{X_{(t)} = \left[A_1(\cos\omega_d t + i\,\mathrm{sen}\,\omega_d t) + A_2(\cos\omega_d t - i\,\mathrm{sen}\,\omega_d t)\right] e^{-\zeta\omega_n t} =}$$

$$\boxed{(*) = \left[(A_1+A_2)\cos(\omega_d t) + i(A_1-A_2)\,\mathrm{sen}(\omega_d t)\right] e^{-\zeta\omega_n t}}$$

questo è il mio mod. che descrive quasi al 100% la realtà.

• N.B. A_1 e A_2 posx essere $\mathbb{C}$:(
proviamo a porre le cond. iniz.

cond. iniziali ipotizzate
1) $X_{(t=0)} = X_0$
2) $\dot{X}_{(t=0)} = v_0$
} eq 2° ordine ⇒ 2 cond. iniziali

ottengo:

1) $X_0 = [(A_1 + A_2)\cdot 1 + 0]\cdot 1 = A_1 + A_2$ → ora $A_1 + A_2$ = n° reale!

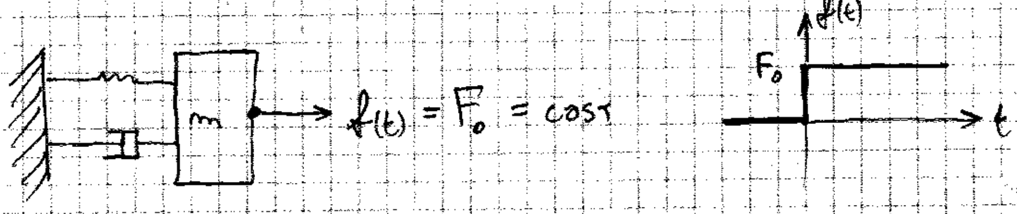
2) devo derivare la (*) → $\dot{X}_{(0)} = [0 + i(A_1 - A_2)\omega_d \cdot 1]\cdot 1 + [(A_1 + A_2) + 0](-\zeta\omega_n)\cdot 1 =$

$$v_0 = i(A_1 - A_2)\omega_d + (A_1 + A_2)(-\zeta\omega_n)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = X_0 & \in \mathbb{R} \\ i(A_1 - A_2) = \dfrac{v_0 + \zeta\omega_n(A_1 + A_2)}{\omega_d} = \dfrac{v_0 + \zeta\omega_n X_0}{\omega_d} & \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Visto che $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ e sostituisci per esempio $\zeta = 0{,}05 \rightarrow \omega_d \cong \omega_n$. ⑤

RISPOSTA AL GRADINO



eq. moto $\longrightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F_0$ $\qquad X_{(t)} = ?$

$$\boxed{X_{(t)} = \underbrace{\left(A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}\right)}_{\text{integrale generale dell'omogenea}} + \underbrace{\frac{F_0}{K}}_{\text{integrale particolare della funz. completa}}}$$

Se $F_0 = cost$

$$\begin{cases} x = cost \\ \dot{x} = 0 \rightarrow \cancel{\ldots} \\ \ddot{x} = 0 \end{cases} \qquad Kx = F_0$$

risposta libera, transitorio — risposta forzata, regime

questo termine è sempre così xché non dipende dalla forzante. Inoltre questa prima o poi andrà a zero...

questo termine non è sempre F/K ma ovviamente dipende dalla "forma" della forzante ... ci interesseremo solo a questo termine.

Fine

05/10/2012

$$X(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + \frac{F_0}{K}$$

$\zeta < 1$

Le condiz. iniziali vanno imposte sulla soluz. completa $\Rightarrow$ anche sull'int. particolare.

$$x(t) = \left(a \cdot \cos(\omega_d t) + b \sin(\omega_d t)\right) e^{-\zeta \omega_n t} + \frac{F_0}{K}$$

condiz. iniziali

poniamo per esempio:
$$\begin{cases} X_{(0)} > 0 \rightarrow X_0 = a + F_0/K \\ \dot{X}_{(0)} = V_0 > 0 \rightarrow V_0 = b\omega_d - \zeta\omega_n a \end{cases}$$

quindi io le ho entrambe, tengo quella che voglio

Useremo: $m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = f(t) = F_0 e^{i\Omega t}$ È solo un'altra notazione

eq. del moto

a regime: $x_{(t)} = X e^{i\Omega t}$ $X \in \mathbb{C}$ ✱✱

sostituisco x, $\dot{x}$ e $\ddot{x}$ in ...

$$\left[(K - m\Omega^2) + i\Omega c\right] \cdot X \cancel{e^{i\Omega t}} = F_0 \cancel{e^{i\Omega t}}$$

$$\boxed{X_{(t\to\infty)} = \frac{F_0}{K - m\Omega^2 + i\Omega c}} = F_0 \frac{K - m\Omega^2 - i\Omega c}{(K - m\Omega^2)^2 + (\Omega c)^2}$$

$\Omega = 2\pi f$

$X(\Omega) = X(f)$ FUNZIONE di RISPOSTA in FREQUENZA

<< In questo caso noi stiamo leggendo la Frf dello spostamento del sistema, data F_0 >>.

Im Re

Questa FRF ha 1 parte reale ed 1 immaginaria: ampiezza

$$|X| = \hat{X}_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(K - m\Omega^2)^2 + (\Omega c)^2}} = \frac{F_0/K}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

con: $r = \dfrac{\Omega}{\omega_n}$ $\zeta = \dfrac{c}{2m\omega_n}$

fase $\rightarrow$ $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{\mathrm{Im}(X)}{\mathrm{Re}(X)} = -\dfrac{\Omega c}{K - m\Omega^2} = -\dfrac{2\zeta r}{1 - r^2}$ $\mathrm{tg}\varphi$

$\rightarrow xKe^{i\varphi}$

riprendo ✱✱:

$$x_{(t)} = X e^{i\Omega t} = x_0 e^{i\varphi} \cdot e^{i\Omega t} = x_0 e^{i(\Omega t + \varphi)}$$

<u>Se</u>: $f(t) = F_0 \cos(\Omega t) = \mathrm{Re}(F_0 e^{i\Omega t})$ $\rightarrow$ input

$x_{(t)} = \mathrm{Re}\left[x_0 e^{i(\Omega t + \varphi)}\right] = x_0 \cos(\Omega t + \varphi)$ $\rightarrow$ output

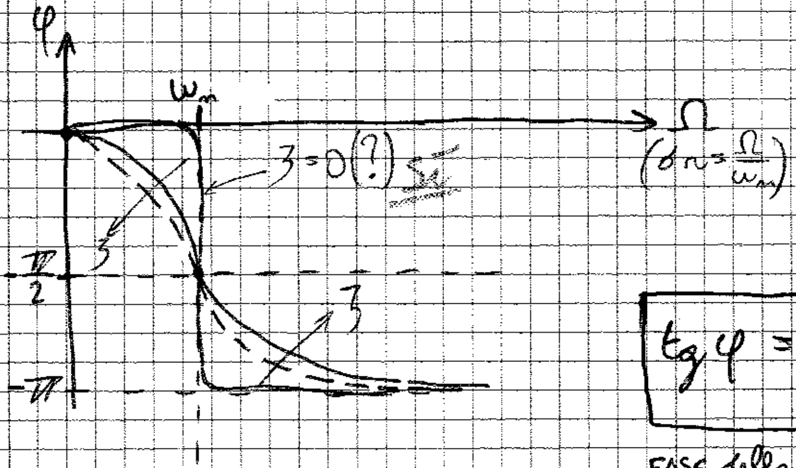


DIAGRAMMA DELLA FASE

$$\boxed{tg\,\varphi = -\frac{2\zeta r}{1-r^2}}$$

FASE della FRF

partenza Ω = 0

$r = 0 \Rightarrow tg\,\varphi = 0$

$r < 1 \Rightarrow tg\,\varphi < 0$

$r = 1 \Rightarrow tg\,\varphi \to \infty$

$r > 1 \Rightarrow tg\,\varphi \to +\infty$

$r \to \infty \Rightarrow tg\,\varphi \to 0$

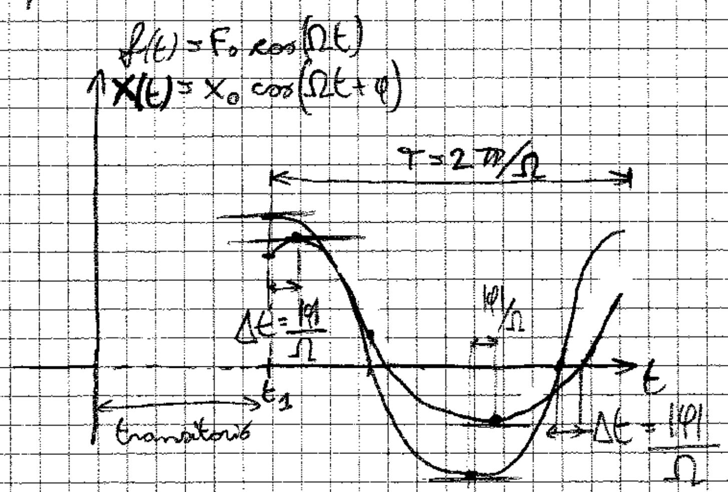
$$X = X_0 \cos(\Omega t - \vartheta) \qquad \left(r = \frac{\Omega}{\omega_n}\right)$$

con $\vartheta = -\varphi$

Sappiamo ora che la fase è sempre negativa (sempre in ritardo rispetto all'ingresso)

N.B. «la $F = F_0 \cos(\Omega t)$ e $X = X_0 \cdot \cos(\Omega t - \vartheta)$ non sono tra di loro in fase ma gli spostam. e le forze avvengono comunque contemporaneamente».

esempio del bambino sull'altalena



es. $\Omega t_1 = 48\pi$

$\Omega t_2 = 48\pi + |\varphi|$

$\varphi = -30°$

$$X(t) = X_0 \cos(48\pi - 30°)$$

1) $\underbrace{(m_1+M)}_{=m}\ddot{x}+c\dot{x}+Kx-M\varepsilon\Omega^2 \operatorname{sen}(\Omega t)=0$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+Kx=\underbrace{M\varepsilon\Omega^2}_{F_0}\operatorname{sen}(\Omega t) \Longrightarrow F_0 e^{i\Omega t}$$

ampiezza della forzante

cerchiamo la soluzione:

$x = X e^{i\Omega t}$ sostituisci in x, $\dot{x}$ e $\ddot{x}$

$$\boxed{X=\frac{M\varepsilon\Omega^2}{K-m\Omega^2+i\Omega c}}$$

N.B. dipende dalla freq!! è proporzionale

ampiezza del moto a regime "xké il transitorio si esaurisce"

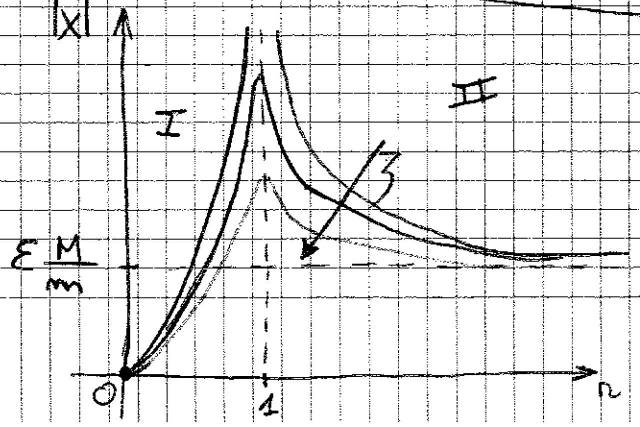
$$|X|=\frac{(M\varepsilon\Omega^2)/K}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$$

$\left(r=\frac{\Omega}{\omega_n}\right)$

$\left(\omega_n=\sqrt{\frac{K}{m}}\right)$

$\cdot\frac{m}{m}$

$$|X|=\varepsilon\frac{M}{m}\cdot\frac{\frac{m}{K}\Omega^2}{\sqrt{\dots}}=\varepsilon\frac{M}{m}\cdot\frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$$



X ottenere piccole oscillazioni posso fare 2 cose:

- $\Omega \ll \omega_n$ → devo avere ω_n molto grande cioè K elevato o m piccola (zona I)
- $\Omega \gg \omega_n$ → ω_n piccola cioè K piccola e m grande. → |X| non proprio 0 ma accettabilmente piccola

metto in evidenza K

$$F_v = \frac{(1+i\,2\zeta n)\,M\mathcal{E}\,\Omega^2}{(1-n^2)+i(2\zeta n)}\,e^{i\Omega t}$$

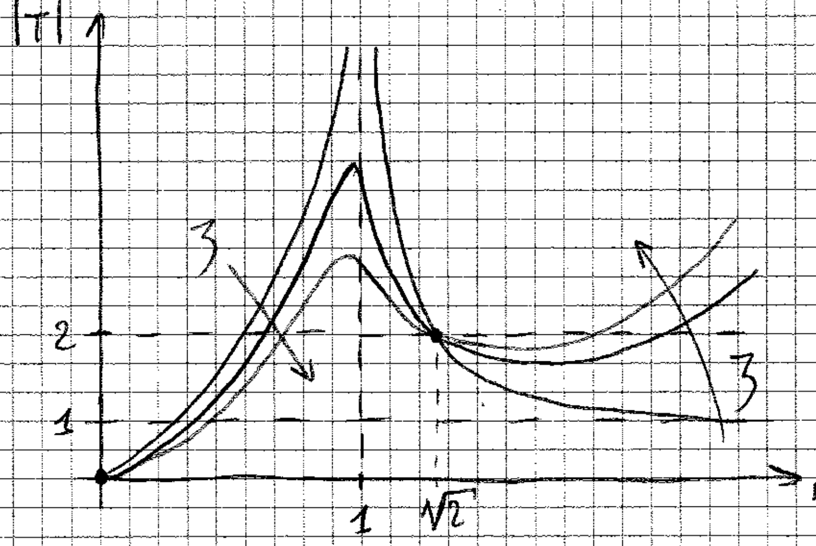
$$|T| = \frac{\sqrt{1+(2\zeta n)^2}}{\sqrt{(1-n^2)^2+(2\zeta n)^2}}\cdot\frac{\cancel{M\mathcal{E}}\Omega^2}{\cancel{M\mathcal{E}}\omega_n^2}\cdot\frac{\cancel{e^{i\Omega t}}}{\cancel{e^{i\Omega t}}}$$

$$|T| = n^2\cdot\frac{\sqrt{1+(2\zeta n)^2}}{\sqrt{(1-n^2)^2+(2\zeta n)^2}}$$

(è un rapporto di forze)

$\left(n=\frac{\Omega}{\omega_n}\right)$

$\left(\omega_n=\sqrt{\frac{K}{m}}\right)$



se $n=\sqrt{2}$ $(\zeta=0)$

$\downarrow$

$(1-n^2)^2=1$

$|T|\Rightarrow 2!$

se $n\to\infty$ $(\zeta=0)$

$\downarrow$

$|T|\Rightarrow 1!$

se $n\to\infty$ $(\zeta\gg)$

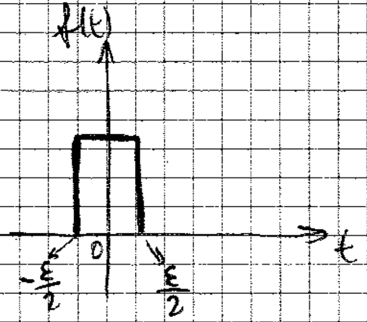
Quindi, non sempre aumentando ζ è benefico xké dopo $n=\sqrt{2}$ la forza scaricata a terra aumenta tanto repentinamente tanto è grande ζ.

Fine studio sys 1gdl con Forzante armonica del tipo $F_0\cdot e^{i\Omega t}$

---

se $t_0 = 0 \rightarrow \delta(t)$ questo studieremo!

La domanda è quanto vale $x(t)$?



per:

$t < -\frac{\varepsilon}{2} \rightarrow \begin{cases} x(t) = 0 \\ \dot{x}(t) = 0 \\ \ddot{x}(t) = 0 \end{cases}$

$-\frac{\varepsilon}{2} < t < \frac{\varepsilon}{2} \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F_0$

$t > \frac{\varepsilon}{2} \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0$

Ne devo studiare 2 eq. del moto....

... prendo un generico istante τ compreso nell'intervallo:

$$\left(-\frac{\varepsilon}{2} < \tau < \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\tau} (m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx)\, dt = \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\tau} F_0 \cdot dt$$

$$\Rightarrow \quad m\Big[\dot{x}(\tau) - \underbrace{\cancel{\dot{x}\left(-\tfrac{\varepsilon}{2}\right)}}_{=0}\Big] + c\Big[x(\tau) - \underbrace{\cancel{x\left(-\tfrac{\varepsilon}{2}\right)}}_{=0}\Big] + K\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\tau} x\, dt = F_0\left(\tau + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

integro ancora con τ come variabile d'integrazione

$$\Rightarrow \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2}\left[m\dot{x}(\tau) + c\,x(\tau) + K\int_{-\varepsilon/2}^{\tau} x(t)\, dt\right] d\tau = \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} F_0\left(\tau + \frac{\varepsilon}{2}\right) d\tau$$

$$\Rightarrow m\Big[x(\varepsilon/2) - \underbrace{\cancel{x(-\varepsilon/2)}}_{=0}\Big] + c\int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} x(\tau)\, d\tau + K\int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2}\left(\int_{-\varepsilon/2}^{\tau} x(t)\, dt\right) d\tau = F_0 \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2}\left(\tau + \frac{\varepsilon}{2}\right) d\tau$$

12/10/2012

$$\delta(t) \Rightarrow \begin{cases} x_{(0^+)} = 0 \\ \dot{x}_{(0^+)} = \dfrac{1}{m} \end{cases}$$

per $t>0$ $\quad m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0$

• $\zeta < 1$ (caso frequente) $\quad x_{(t)} = \left(A\cos(\omega_d t) + B\,\mathrm{sen}(\omega_d t)\right) e^{-\zeta\omega_n t}$

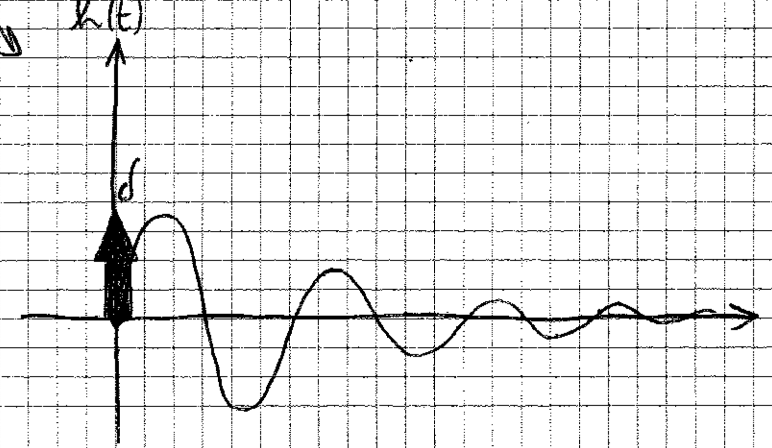
cond. iniz. $\begin{cases} x(0^+) = A = 0 \\ \dot{x}(0^+) = B\cdot 0\cdot 1 + B\omega_d \cdot 1 = \dfrac{1}{m} \end{cases} \quad \begin{cases} A = 0 \\ B = \dfrac{1}{m\cdot\omega_d} \end{cases}$

concludendo, se $\zeta<1$:

$$\boxed{h_{(t)} = \frac{1}{m\omega_d}\,\mathrm{sen}(\omega_d t)\cdot e^{-\zeta\omega_n t}}$$

FUNZIONE DI RISPOSTA ALL'IMPULSO (IRF) pag 21 Esercitazioni

$\equiv x(t)$ quando si parla di "IMPULSO"



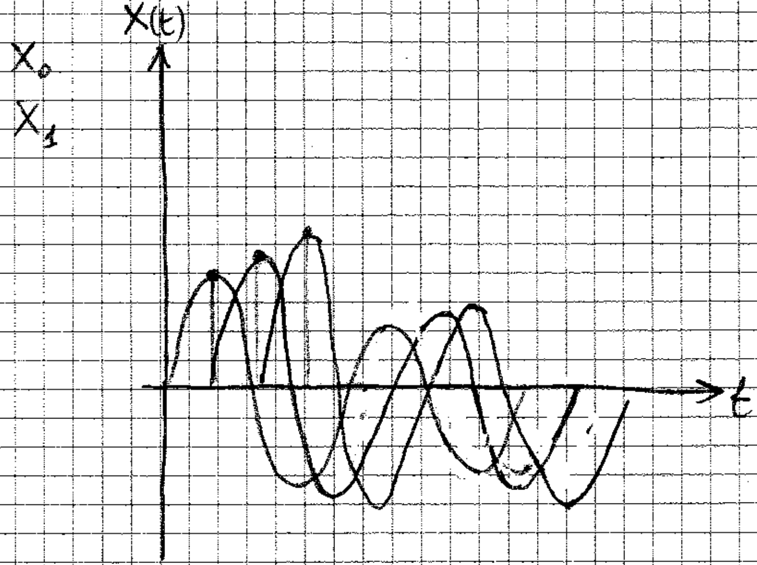
$\delta_{(t-t_0)}$ — $h_{(t)} = 0 \quad t \leq t_0$

$h_{(t)} = \dfrac{1}{m\omega_d}\,\mathrm{sen}[\omega_d(t-t_0)]\, e^{-\zeta\omega_n(t-t_0)}$

Ora faccio finta che f_0 non sia mai esistito ma ci sia f_1 al tempo $\tau = \Delta\tau$

$\Rightarrow x_{1(t)} = f_1 \Delta\tau \cdot h_{(t-\Delta\tau)}$

$\Rightarrow x_{2(t)} = f_2 \Delta\tau \cdot h_{(t-2\Delta\tau)}$



poichè il sist. è lineare $\rightarrow$ vale la sovrapposizione degli effetti !!

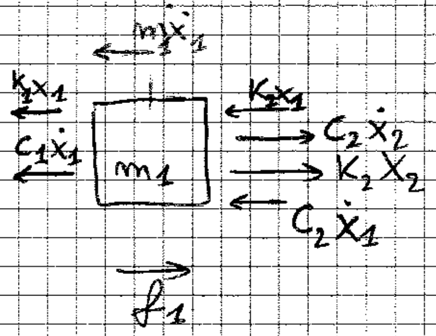
$$x_{(t)} = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_k = \sum_{k=0}^{N} f_{(k\Delta\tau)} h_{(t-k\Delta\tau)} \cdot \Delta\tau =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} f_{(k\Delta\tau)} \cdot h_{(t-k\Delta\tau)} \cdot \Delta\tau$$

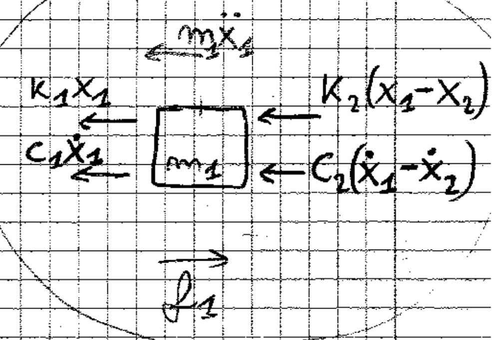
Tenendo conto però che $\Delta\tau \rightarrow d\tau$ allora $K \cdot \Delta\tau \rightsquigarrow$ "tempo" τ

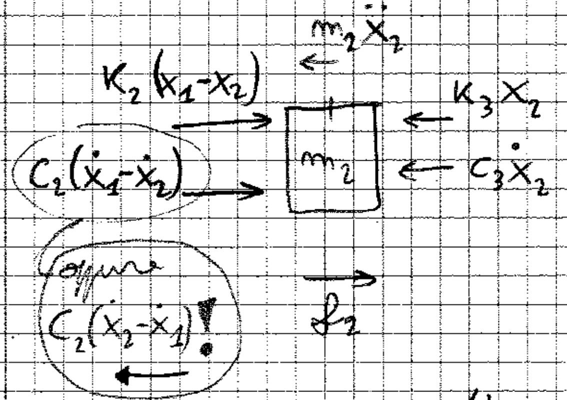
$$f_{(k\cdot\Delta\tau)} \longrightarrow f_{(\tau)}$$

Ora scrivo diagramma di corpo libero:



diventa





eq. di equilibrio del moto:

$$
\begin{aligned}
m_1)\quad & \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (c_1+c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = f_1 \\ m_2\ddot{x}_2 + (c_2+c_3)\dot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + (k_2+k_3)x_2 - k_2x_1 = f_2 \end{cases} \\
m_2)\quad &
\end{aligned}
$$

eq. lineari, di grado 2, a coeff cost.

sono accoppiate xké in entrambe ci sono termini con pedici 1 e 2 e quindi vanno sempre insieme $\Rightarrow$ non pox risolverle disaccoppiate.

Quella notazione è valida e "semplice" ma quando il grado aumenta dopo il 2, diventa macchinoso e facile sbagliare. Allora faremo rif. ad un'altra notazione: un vettore colonna $\{X_{(t)}\}$ che avrò

$$\{X_{(t)}\} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2c\dot{x}_1 - c\dot{x}_2 + 2kx_1 - kx_2 = f_1(t) \\ m\ddot{x}_2 + 2c\dot{x}_2 - c\dot{x}_1 - kx_1 + 2kx_2 = f_2(t) \end{cases}$$ ancora sono accoppiate

somma

- $m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + c(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + k(x_1 + x_2) = f_1 + f_2$ (combinaz. lin.)

ancora sono accoppiate

sottrazione

- $m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + 3c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + 3k(x_1 - x_2) = f_1 - f_2$ (comb. lin.)

$\Rightarrow$ chiamo $\underbrace{y_1 = x_1 + x_2}$ e $\underbrace{y_2 = x_1 - x_2}$

coordinate fittizie (comode)

$\Rightarrow$ chiamo $f_1 + f_2 = P_1$ e $f_1 - f_2 = P_2$

sostituisco:

$$\begin{cases} m\ddot{y}_1 + c\dot{y}_1 + ky_1 = P_1 \\ m\ddot{y}_2 + c\dot{y}_2 + ky_2 = P_2 \end{cases}$$

sono 2 eq. lineari, di 2° e a coeff. cost ma disaccoppiate (y_1 e y_2)

- Supponiamo che $c = 0$ e: SOLUZIONE SINCRONA

(*) $[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\}$ $\Rightarrow$ eq. omogenea.

partiamo dall'ipotesi che:

$[m] = [m]^T$
$[k] = [k]^T$ cioè sono sempre simmetriche.

$\Rightarrow$ l'eq. diventa $\ddot{g} + \omega^2 g = 0$ $\quad \omega = \omega_{(\{A\})}$

ma allora g deve essere:

$g_{(t)} = (a \cos(\omega t) + b \operatorname{sen}(\omega t))$ deve essere questa, non può essere altro

$\ddot{g}_{(t)} = -\omega^2 (a \cos(\omega t) + b \operatorname{sen}(\omega t)) = -\omega^2 g_{(t)}$

riprendo qua ➡ e sostituisco:

$-[m]\{A\}\omega^2 \cancel{g_{(t)}} + [K]\{A\}\cancel{g_{(t)}} = \{0\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{([K] - \omega^2[m])\{A\} = \{0\}}$ è un sistema algebrico non + differenziali.

Come facciamo a risolvere quest'eq.? 2 soluzioni poss:

1) slz. banale $\{A\} = 0$ non serve a nulla

2) $\det([K] - \omega^2[m]) = 0$

$[K]\{A\} = \omega^2[m]\{A\}$

premoltiplico per $[m]^{-1} \rightarrow \underbrace{[m]^{-1}[K]}_{[M]}\{A\} = \omega^2\{A\}$

$[M]\{A\} = \omega^2\{A\}$ autoproblema (??)

ω^2 sono gli autovalori della matrice $[M] = [m]^{-1}[K]$

$$[m]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = \{0\}$$

Autoproblema $[K]\{A\} = \omega^2 [m]\{A\}$ mi dà ω_r^2, $\{\Psi_r\}$

$\det\left([K] - \omega^2 [m]\right) = 0$ mi dà

↓

MODO PROPRIO

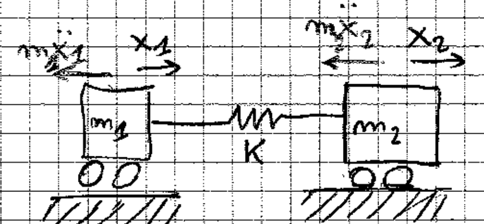
$\{\Psi_r\}$ = $\boxed{\text{forma modale}}$ è uno degli autovett. e dice come si "deforma" il sistema in certe condizioni.

↓

cioè è un vettore che mi dice di quanto si sposta la massa 1, la massa 2, ecc...

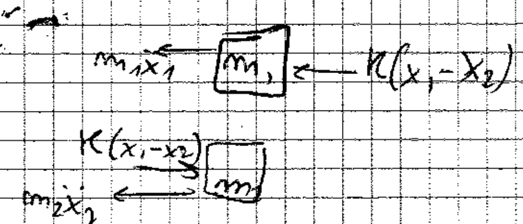
det = 0 → matrice non è a rango pieno → slz $\{\Psi\}$ definita a meno di una costante. Sistema di equaz. linearmente dipendenti: 1 di quelle eq. è comb. lineare delle altre.

Esempio 2 gdl



$\zeta = 0$

$f = 0$



$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + K(x_1 - x_2) = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + K(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

calc. $\det\left([K] - \omega^2[m]\right) = \det\left(\begin{bmatrix} K - m_1\omega^2 & -K \\ -K & K - m_2\omega^2 \end{bmatrix}\right) = 0$

$$\omega_2^2 = K\frac{m_1+m_2}{m_1 \cdot m_2} \longrightarrow \begin{bmatrix} K-\cancel{m_1}K\frac{m_1+m_2}{\cancel{m_1}\cdot m_2} & -K \\ -K & K-\cancel{m_2}K\frac{m_1+m_2}{m_1\cdot \cancel{m_2}} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\psi_{12}\\ \psi_{22}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} -K\frac{m_1}{m_2}\psi_{12} - K\psi_{22} = 0 \\ - \; - \text{uguale} \quad = 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \psi_{22} = -\frac{m_1}{m_2}\psi_{12} \right.$$

anche il 2° autovettore è definito a meno di una COST ARBITRARIA.

Se la m_1 va verso SX, la m_2 va verso DX ma moltiplicato per m_1/m_2

— — — facciamo un passo avanti:

$[K]\{A\} = \omega^2 [m]\{A\}$ autoproblema

$[K]\cdot\{\psi_r\} = \omega_r^2 [m]\{\psi_r\}$ vari autovalori e autovettori.

$[K]\cdot\{\psi_s\} = \omega_s^2 [m]\{\psi_s\}$

premoltiplico la 1° x l'autovett.^{T} della 2° e viceversa

$$\begin{cases} \{\psi_s\}^T [K]\{\psi_r\} = \omega_r^2 \{\psi_s\}^T [m]\{\psi_r\} & (1) \\ \{\psi_r\}^T [K]\{\psi_s\} = \omega_s^2 \{\psi_r\}^T [m]\{\psi_s\} & (2) \end{cases}$$

Ora prendo quella che voglio e faccio trasposta (la seconda) → prodotto matrici ⇒ traspongo tutto e inverto ordine termini:

Il PRINC. DI ORTOGON. lo potrò scrivere anche così in forma più compatta:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \{\Psi_1\}^T \\ \{\Psi_2\}^T \\ \vdots \\ \{\Psi_n\}^T \end{bmatrix}}_{[\Psi]^T} [m] \underbrace{\begin{bmatrix} \{\Psi_1\} \{\Psi_2\} \dots \{\Psi_n\} \end{bmatrix}}_{\text{matrice } [\Psi] \text{ ovvero matrice modale (contiene tutte le forme modali)}} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & \dots & m_n \end{bmatrix}$$

$[\Psi]^T \cdot [m] [\Psi] = diag(m_r)$ mat. diag. delle masse modali

$[\Psi]^T [K] [\Psi] = diag(K_r)$ mat. diag. delle rigidezze modali

Per normalizzare gli autovettori posso fare a scelta:

1) $\max |\Psi_{lr}| = 1$ esempio $\{\Psi_r\} = \begin{Bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -1/3 \\ 1 \\ 3/4 \end{Bmatrix}$

oppure 2) $m_r = 1 \quad \forall r$ di solito si usa questo $\Rightarrow \omega_r^2 \equiv K_r$ (vedi pag. 30 in fondo)

Cmq esistono casi in cui $r \neq s$ ma hanno $\omega_s = \omega_r$ (dischi, strutt. simmetriche)

Pausa

$\{\psi_n\}, \omega_n^2 \qquad n = 1, 2, \dots m$

gli autovettori l.^IN dip. (= neanche 1 di loro è c. lin. degli altri)

per dimostrarlo, suppongo il contrario:

$C_1\{\psi_1\} + C_2\{\psi_2\} + \dots + C_m\{\psi_m\} = 0$

sfrutto principio ortog. $\Rightarrow C_1[m]\{\psi_1\} + C_2[m]\{\psi_2\} + \dots + C_m[m]\{\psi_m\} = [m]\{0\}$

$\Rightarrow$ premoltiplico per 1 degli autovettori $\{\psi_n\}^T(\dots)$

$\{\psi_n\}^T[m]\{\psi_1\} = 0$

$\{\psi_n\}^T[m]\{\psi_2\} = 0$

$\vdots$

$C_n m_n = 0 \qquad m_n$ non può essere $= 0$ allora $C_n = 0 \qquad n = 1, 2, \dots m$

l'unico modo x far sì che che quella somma di vettori sia $= \{0\}$ è che i coeff. C_n siano tutti $= 0$

vuol dire LINEARM. INDIPENDENTI

GLI AUTOVETTORI SONO UNA BASE DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI

$\{v\} = \sum_{n=1}^{m} C_n\{\psi_n\}$ opportuna comb. lin. di autovettori.

Elemento fondamentale per costruire vettore (e qualsiasi cosa)

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} + [c]\{\dot{x}\} = \{0\}$$

x il sys non smorzato $\longrightarrow \{x_{(t)}\} = \sum_{n=1}^{m} \{\Psi_n\}$ qui va bene questa base, cioè anche per i sys smorzati?

$$\Longrightarrow \{x_{(t)}\} = \sum_{n=1}^{m} \{\Psi_n\} \cdot \eta_n(t)$$ <u>trasformaz. modale</u> $\downarrow$ dà un passaggio di coordinate

$\eta_n(t)$ = coord. modali (o naturali)

è sempre vero per $c=0$. Ora vediamo per c viscoso e proporzionale

la posso trovare anche così: $[\Psi]\{\eta(t)\}$

$$\Longrightarrow \{\dot{x}\} = [\Psi] \cdot \{\dot{\eta}\}$$

$$\{\ddot{x}\} = [\Psi] \cdot \{\ddot{\eta}\}$$

N.B. non vale la propietà commutativa

$$\Longrightarrow [m][\Psi]\{\ddot{\eta}\} + [c][\Psi]\{\dot{\eta}\} + [k][\Psi]\{\eta\} = \{0\}$$

$$\underbrace{[\Psi]^T[m][\Psi]}_{m\times m \quad m\times m \quad m\times m \;=\; diag(m_n)}\{\ddot{\eta}\} + [\Psi]^T[c][\Psi]\{\dot{\eta}\} + \underbrace{[\Psi]^T[k][\Psi]}_{m\times m \quad m\times m \quad m\times m \;=\; diag(K_n)}\{\eta\} = [\Psi]^T\{0\}$$

$$\begin{bmatrix} 51 & 0 & 0 \\ 0 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 35 \end{bmatrix}$$ $\rightarrow$ masse modali

$$[\Psi]^T[c][\Psi] = \alpha\, diag(m_n) + \beta\, diag(K_n) = diag(c_n)$$

Se $\zeta_n < 1$

sol. $$\eta_n(t) = \left(a_n \cos(\omega_{d_n} t) + b_n \operatorname{sen}(\omega_{d_n} t)\right) e^{-\zeta_n \omega_n t}$$

ω_n^2 = autovalore → ω_n è la pulsazione del sys a 1 gdl senza smorzamento = pulsaz. naturale n-esima

ω_{d_n} = pulsazione del sistema smorzato $= \omega_n \sqrt{1-\zeta_n^2}$

xō le η sono coord. fittizie → le moltiplico per $[\Psi]$ e ho la $\{X\}$!!! Fine!

?? NB $\{X\} = \{A\} g_{(t)} = \{A\} (a \cos(\omega t) + b \operatorname{sen}(\omega t))$

$\{X\} = \sum_{n=1}^{m} \{\Psi\} \eta_n \rightarrow \eta_n = (a_n \cos\ldots + b_n \operatorname{sen}\ldots) e^{-\zeta\ldots} \stackrel{\zeta=0}{=} (a_n \cos\ldots + b_n \operatorname{sen}\ldots)$

Se ho tante molle, masse, tanti smorzatori e lo perturbo ~~senza~~ forzan si muove con n pulsazioni. ~~di ...~~

↓

comb. lin. di armoniche la cui freq. è definita da comb. di masse modali, rigidezze modali e smorz. modali. Queste armoniche saranno ad ampiezza via via decrescente e con pulsazione ben precisa ognuna.

Es. sys con 2 gdl avrò pulsaz. con $f_m = 10 Hz$ e $f_n = 25 Hz$ → la perturbo → oscilla non a caso → dipende dalle 2 ω_n e dipende dalle 2 ζ_n.

I coeff. modali sono i mattoni con cui calcolare tt. le risp. del sistema

Per b_n è uguale il giochino ma c'è v_0.

Si ritorna a sta roba:

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{f(t)\}$$

integr. particolare

si passa sempre alle coord. modali.

1) $\{X_{(t)}\} = \sum_{r=1}^{m} \{\psi_r\} \eta_r(t)$

2) PRINC. ORTOG:

$$\{\psi_s\}^T [m] \cdot \sum_1^m \{\psi_r\} \ddot{\eta}_r + \{\psi_s\}^T [c] \sum_1^m \{\psi_r\} \dot{\eta}_r + \{\psi_s\}^T [k] \sum_1^m \{\psi_r\} \eta_r =$$

$$= \{\psi_s\}^T \{f(t)\}$$

⇒ è tc. = 0 tranne quando $r = s$

⇒ quando $r = s$: $m_r \ddot{\eta}_r + c_r \dot{\eta}_r + k_r \eta_r = \underbrace{\{\psi_r\}^T \cdot \{f(t)\}}_{1 \times m \quad m \times 1}$

SCALARE

$p_r(t)$ = FORZA MODALE

è facile! ma so calcolare

$\eta_r(t)$ ⇒ integr. di CONVOLUZIONE

$$\eta_r(t) = \int_0^t p_r(t) \cdot \underbrace{h_r(t-\tau)}_{\text{risposta all'impulso}} d\tau$$

risposta all'impulso $= \dfrac{1}{m_r \omega_{dr}} e^{-\zeta_r \omega_r t} \cdot \text{sen}(\omega_{dr} t)$

4) si calcolano le rigidezze modali K_n:

$$\{\Psi_n\}^T [k] \{\Psi_n\} = K_n$$

oppure $\omega_n^2 = \frac{K_n}{m_n}$

5) si calcolano lo smorzamento modale C_n:

$$C_n = \alpha m_n + \beta K_n \Longrightarrow \zeta_n = \frac{c_n}{2 m_n \omega_n}$$

6) $$\eta_n(t) = [a_n \cos(\omega_{d_n} t) + b_n \,\text{sen}(\omega_{d_n} t)] e^{-\zeta_n \omega_n t} + \int_0^t h_n(\tau)\, p_n(t-\tau)\, d\tau$$

risp. all'impulso

con $p_n(t) = \{\Psi_n\}^T \{f(t)\}$

poi C.i. $\Rightarrow a_n, b_n$

7) $$\boxed{\{x_{(t)}\} = [\Psi] \{\eta_{(t)}\}}$$

Cmq $\int_0^t h(\tau) f(t-\tau) d\tau \equiv \int_0^t f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$ se risp all'impulso = 0 a $t<0$ e ~~forza~~ $=0$ a $t<0$.

Se no, traslo asse tempi finché non trovo forza:

- $\{\ddot{X}_{(t)}\} = -\Omega^2 \{X_0\} e^{i\Omega t}$

$$\underbrace{\Big(\underset{\text{I Knote}}{[K]} - \underset{\text{I Knote}}{\Omega^2 [m]} + \underset{\text{I Knote}}{i\Omega [c]}\Big)}_{m \times m \text{ Knoten}} \{X_0\} \cancel{e^{i\Omega t}} = \{f_0\} \cancel{e^{i\Omega t}}$$

$$\downarrow$$

$$[K_{dinamica}] \{X_0\} = \{f_0\}$$

$m \times m$ (nota) $\quad m \times 1$ (?) $\quad m \times 1$ (dato)

RECETTANZA

da cui: $\{X_0\} = [K_d]^{-1} \cdot \{f_0\} = [\alpha(\Omega)] \{f_0\}$

formalmente si ~~può~~ può fare così ma invertire una matrice è un casino

Si pone $\alpha_{JK} \doteq \dfrac{X_{0J}}{f_{0K}} = \displaystyle\sum_{r=1}^{m} \frac{\Psi_{Jr} \cdot \Psi_{Kr}}{K_r - \Omega^2 m_r + i\Omega c_r}$

ampiezza oscillazione nel p.to J

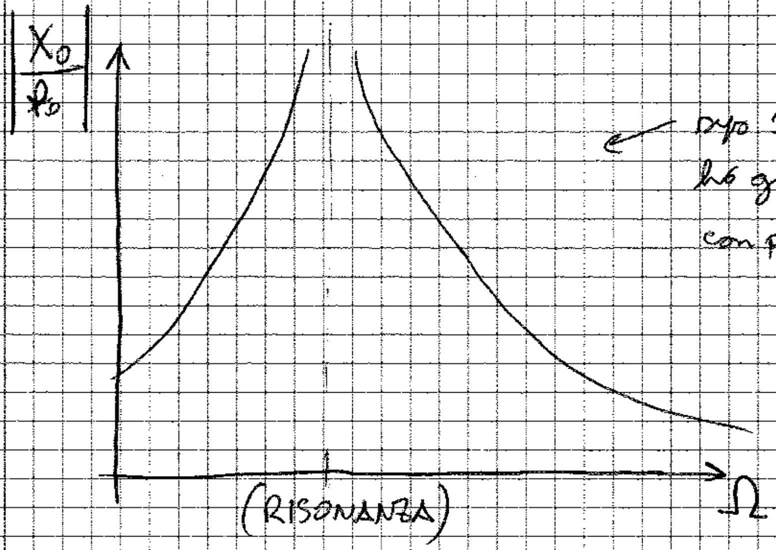
elemento K-esimo del vett. forza

Basta sostituire i vari Ω ecc... e calcolo il rapporto.

$\Rightarrow$ sist 1 gdl $\rightarrow X_0 = \dfrac{f_0}{K - m\Omega^2 + i\Omega c} \rightarrow \dfrac{X_0}{f_0} = \alpha = \dfrac{1}{K - m\Omega^2 + i\Omega c}$

"quindi anche la risp. di un sist con tanti gdl a regime e con forzante armonica si può scrivere come la sovrapposizione effetti delle risposte di tanti sist a 1 gdl"

ognuno con $\omega_r = \sqrt{\dfrac{K_r}{m_r}}$



sys 1 gdl in risonanza ho grandi spostamenti con piccole forze (non gradito)

Sys con + gdl la faccenda si complica perchè superata la risonanza (vedi grafico pag 44) posso tornare ad avere picchi di risonanza.

n gdl $\rightarrow$ n $\omega_{RISONANZA}$!! (a me interessano quelle basse)

Nota che in α_{JK} posso avere sella, in cui le ampiezze non sono tendenti a 0 come le antirisonanze

_ _ _ Fine sys a molti gdl.

Sono valide tutte ma a seconda delle coord. scelte le eq. poss essere differenti e questo può non giovare (come in questo caso).

→ Cmq gli autovalori (cioè le $\omega_r \equiv \omega_n$) sono gli stessi!!!

→ Invece gli autovettori (cioè $\{\Psi_r\}$) pur dipendendo dalle ω_r non rimangono gli stessi perché, dando l'informazione degli spostamenti delle masse, se uso un sistema di coord. cartesiane gli spostam. non saranno "uguali" a che se uso un sist. a coord. polari.

Fine

8/11/2012

LANCZOS The variational principles of mechanics

leggere introduzione

MEIROVITCH Principles and techniques of vibrations

Da scaricare file su portale

$$d\overline{W} = m \frac{1}{2} d(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) = d\left(\frac{1}{2} m \dot{\vec{r}} \bullet \dot{\vec{r}}\right) = d(T)$$

T = energia cinetica (è una funzione)

$$\boxed{d\overline{W} = dT}$$!

Se lo integro tra 2 istanti in cui:

$$\vec{r}_{(t=t_1)} = \vec{r}_1 \quad e \quad \vec{r}_{(t=t_2)} = \vec{r}_2$$

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\overline{W} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_{T_1}^{T_2} dT = T_2 - T_1 = \Delta T$$

siccome la T è figlia della W che a sua volta è figlia della $\boxed{C}$, allora la T sarà figlia del percorso seguito $\boxed{C}$.

Se però il percorso seguito $\boxed{C}$ non varia la ΔT, allora $\vec{F}$ è CONSERVATIVA.

cioè Se $\left(\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \bullet d\vec{r}\right)_I = \left(\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \bullet d\vec{r}\right)_{II} \Rightarrow \vec{F}$ conservativa

$\vec{r}_{RIF}$ l'ho scelto per comodità $\qquad (\vec{i}\cdot\vec{i}=1)$

$$\int_{r_1}^{r_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{l_0+x_1}^{l_0+0} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{l_0+x_2}^{l_0+0} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{x_1}^{0} -Kx\,\vec{i}\cdot dx\,\vec{i} - \int_{x_2}^{0} (-Kx)\,dx =$$

$x\,dx = \frac{x^2}{2}$

$$= \left[-\frac{K}{2}x^2\right]_{x_1}^{0} + \left[\frac{K}{2}x^2\right]_{x_2}^{0} =$$

$$= -\frac{K}{2}(0-x_1)^2 + \frac{K}{2}(0-x_2)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}Kx_1^2 - \frac{1}{2}Kx_2^2 =$$

$$= V_1 - V_2 = -\Delta V$$

N.B. $\vec{F}_{molla}$ è cons. xké il lavoro dipende solo dagli allungamenti della molla e non dal percorso seguito. Si dice quindi che la forza ammette un potenziale.

Quindi

$$\int_{r_1}^{r_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \Delta T$$

x tt. le forze $=\Delta T$ sia che la F sia conserv. sia che non è conservativa.

$$\int_{r_1}^{r_2} \left(\vec{F}_{CONS} + \vec{F}_{NON\,CONS}\right)\cdot d\vec{r} = \Delta T$$

$$-\Delta V + \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_{N.C.}\cdot d\vec{r} = \Delta T$$

$$\int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_{N.C.}\cdot d\vec{r} = \Delta(T+V)$$

$T+V \doteq$ Energia totale

Ora indico • F = forze attive agenti sulle masse
• f = forze di reazione vincolare

per cui: $\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F} + \vec{f_i}\right) \cdot \delta \vec{r_i} = 0$

Forze vincolari sono $\perp$ agli spostamenti virtuali. Quindi resta fuori solo la forza d'attrito che è invece parallela (ma contraria) agli spostamenti virtuali.

$\downarrow$

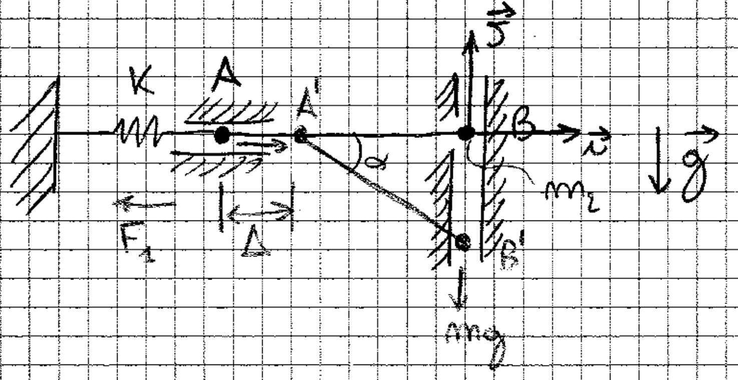
$\Rightarrow \vec{f_i} \cdot \delta \vec{r_i} = 0$

in cond. di eq. statico

$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} \cdot \delta \vec{r_i} = 0}$

PRINC. DEI LAV. VIRTUALI:
Il lavoro delle forze attive sugli spostamenti virtuali $= 0$.

Es.



AB = L

Sys di rif. (fisso) $\vec{i}\,\vec{j}$ scelto

$\vec{F_1} = -K\Delta\, \vec{i}$

$\vec{F_2} = -mg\, \vec{j}$

$\Delta = \overline{AA'} = L - L\cos\alpha$

caso statico $= 0$.

$$\sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i + \vec{F}_i') \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$ (vale sempre se vincoli $\perp$ a spost.

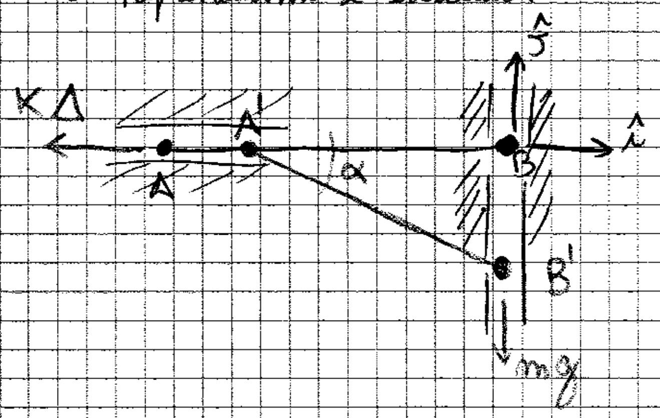
forze attive — forza d'inerzia

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0}$$

PRINCIPIO DI D'ALEMBERT

"Il lav. virtuale $\delta\mathcal{L} = 0$ purché oltre alle forze attive si conteggi la forza d'inerzia."

Ora riprendiamo l'esercizio:



$\vec{F}_1 = -K\Delta\,\hat{i}$ $\vec{F}_2 = -mg\,\hat{j}$

derivo rispetto al tempo e $\alpha(t)$
$\hookrightarrow f(g(t)) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ deriv $\frac{d}{dt} \Rightarrow f'(g(t)) \cdot g'$

$\vec{r}_1 = -L\cos\alpha\,\hat{i}$ $\vec{r}_2 = -L\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\hat{j}$

$\dot{\vec{r}}_2 = -L\cos(\alpha)\,\dot{\alpha}\,\hat{j}$

$\ddot{\vec{r}}_2 = (L\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\dot{\alpha}^2 - L\cos\alpha\,\ddot{\alpha})\,\hat{j}$ (??)

deriv $f(g(t)) \cdot h(t) = f'(g(t)) \cdot g' \cdot h(t) + f(g(t))$

$\Rightarrow \delta\vec{r}_1 = L(\mathrm{sen}\,\alpha)\,\delta\alpha\,\hat{i}$

$\Rightarrow \delta\vec{r}_2 = -L(\cos\alpha)\,\delta\alpha\,\hat{j}$

modo alternativo di scrivere D'Alem. (2° termine): (trascuro le i x il momento)

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\dot{\vec{r}}\cdot\delta\vec{r}\right) = m\,\frac{d(\dot{\vec{r}})}{dt}\cdot\delta\vec{r} + m\,\dot{\vec{r}}\cdot\underbrace{\frac{d(\delta\vec{r})}{dt}}_{=\text{atto di fede}} =$$

$$= m\,\ddot{\vec{r}}\cdot\delta\vec{r} + m\,\dot{\vec{r}}\cdot\delta\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

$$\Rightarrow\; m\,\ddot{\vec{r}}\cdot\delta\vec{r} = \frac{d}{dt}\left(m\,\dot{\vec{r}}\cdot\delta\vec{r}\right) - m\,\overbrace{\dot{\vec{r}}\cdot\delta\dot{\vec{r}}}^{\frac{1}{2}\delta(\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}})\ \text{fatto a pag 48}} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(m\,\dot{\vec{r}}\cdot\delta\vec{r}\right) - m\,\frac{1}{2}\,\delta\left(\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}\right) =$$

$$= \boxed{\frac{d}{dt}\left(m\,\dot{\vec{r}}\cdot\delta\vec{r}\right) - \delta T}$$

$$\overline{\delta W}_{NC} - \delta V - \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{d}{dt}\left(m_i\,\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\vec{r}_i\right)\right] + \sum_{i=1}^{N}\delta T_i = 0$$

$$\overline{\delta W}_{NC} + \underbrace{\delta T - \delta V}_{\delta(T-V)} = \sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}\left(m_i\,\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\vec{r}_i\right)$$

$$\boxed{L \doteq T - V}$$ FUNZIONE LAGRANGIANA

$$\overline{\delta W}_{NC} + \delta(T-V) = \sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}\left[m_i\,\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\vec{r}_i\right]$$

$\downarrow$

integro $\int_{t_1}^{t_2} \ldots dt$

e ricordo le proprietà degli $\delta\vec{r}$ (sm arbitrari!)

$$\delta T = \frac{1}{\cancel{2}} m L^2 \left[-\cancel{2} \cos\alpha \,\text{sen}\alpha \;\delta\alpha \cdot \dot\alpha^2 + \cos^2\alpha \cdot \cancel{2}\dot\alpha \cdot \underbrace{\delta(\dot\alpha)} \right]$$

$$\delta V = \frac{1}{\cancel{2}} K L^2 \cancel{2}(1-\cos\alpha)\,\text{sen}\alpha\;\delta\alpha - mgL\cos\alpha\;\delta\alpha$$

è un problema, è bene modificarlo in qlcs che dipende solo da $\delta\alpha$

$-2\cos\alpha\,\text{sen}\alpha\cdot\dot\alpha^2$

$$\int_{t_1}^{t_2} \cos^2\alpha \cdot \dot\alpha \cdot \delta\dot\alpha \; dt = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\cos^2\alpha \cdot \dot\alpha}_{f} \cdot \underbrace{\frac{d(\delta\alpha)}{dt}}_{g'} \, dt =$$ risolvo per parti $f \cdot g \Big|_{x_1}^{x_2} - \int f' g$

$$\cos^2\alpha\;\dot\alpha \cdot \cancel{\delta\alpha}\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left[-2\cos\alpha\,\text{sen}\alpha\cdot\dot\alpha^2 + \cos^2\alpha\cdot\ddot\alpha \right] \delta\alpha \cdot dt$$

$=0$ a t_2 e t_1

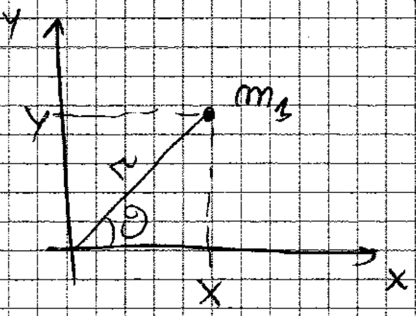
$\Rightarrow$ facendo i conti:

$\rightarrow \int_{t_1}^{t_2} [\,\ldots\,]\; \delta\alpha \cdot dt = 0$ (nella $[\ldots]$ c'è $\delta T - \delta V$)

$\rightarrow [\,\ldots\,] = 0$ Equaz. del moto (pag 56)

Fine

es.



$N = 1$

$$n = 2 \rightarrow \begin{cases} q_1 = X \\ q_2 = Y \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} q_1 = r \\ q_2 = \theta \end{cases}$$

def. è la posiz. di pun p.to è il p.to di applicazione di una forza.

$$\vec{r}_i = \vec{r}(q_1, q_2, \dots q_n ; t)$$

$\vec{r}$ dipende da $q_1, q_2 \dots ; t$

punto di partenza geometria del sistema.

xkè $\vec{r}_i$ non dipende dal temp t è uno spost virtuale

ripartiamo da HAMILTON:

$$\delta \vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} \delta q_n$$

spostamento virtuale

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \qquad i = 1, \dots, N$$

e basta xkè non c'è la variaz. di $\vec{r}_i$ rispetto al tempo (dipende dal tempo ma non la sua variazione)

i conto quindi [illegible] (attive) e quindi elementi

$$\underline{\underline{\delta W_{NC}}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i,NC} \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i,NC} \cdot \left(\sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \right) =$$

$$= \sum_i \cdot \sum_k \left(\vec{F}_{i,NC} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \right) =$$

$$= \underline{\underline{\sum_k \left(\sum_i \vec{F}_{i,NC} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k}}$$

$$\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i = |\vec{r}|^2$$

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} = \sum \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i =$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \cdot \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)$$

$$T = \sum_i^N \sum_k^n \sum_l^n \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \cdot \dot{q}_k \cdot \dot{q}_l +$$

$$+ \left(\sum_i \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \dot{q}_k \cdot \frac{1}{2} m_i \right) 2 +$$

$$+ \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)$$

$$T = \sum_k \sum_l \underbrace{\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \right)}_{0+0+0+\dots 0 = M_{kl}} \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_k \underbrace{\left(\sum_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot m_i \right)}_{M_k} \dot{q}_k +$$

Masse generalizzate

$$+ \sum_i \frac{1}{2} m_i \left| \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right|$$

per definizione:

1) $M_{kl} = M_{lk}$ scambio di pedici

2) $T_2 = \frac{1}{2}\{\dot{q}\}^T [M] \{\dot{q}\}$ con $\{\dot{q}\} = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{Bmatrix}$

3) $[M] = [M]^T \Rightarrow$ simmetrica $\Rightarrow$ poss usare princ. ortogonalità autovett

Fine

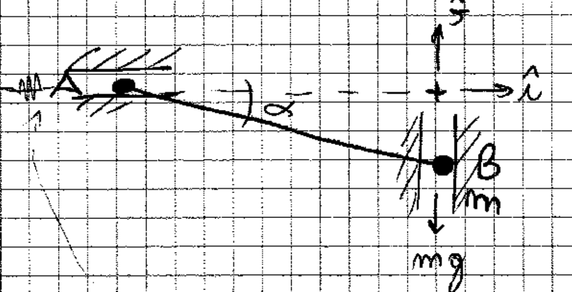
---

oggi applicheremo in degli esempi 16/11/2012

1) $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k$ $k = 1, 2, \dots n$ LAGRANGE

2) $Q_k = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{ik} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$ (pag 62) FORZA GENERALIZZATA

3) $L = T - V$ FUNZ. LAGRANGIANA



$n = 1$ gdl
$\downarrow$
$q_k \equiv \alpha$ coord. generalizzata

$\Delta V = \frac{1}{2} K \Delta^2 - mg \cdot L \operatorname{sen}\alpha$

tiene conto solo del contributo forza peso (non sottratto)

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = -\frac{\partial(-mgL\operatorname{sen}\alpha)}{\partial q_k} = mgL\frac{\partial(\operatorname{sen}\alpha)}{\partial \alpha} = mgL\cos\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_K} = \frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_K} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_K}$$ (nella cinetica T c'è esplicitazione coord lagrangiana in velocità)

$$0 - \frac{\partial L}{\partial q_K} = -\frac{\partial (T-V)}{\partial q_K} = \frac{\partial V}{\partial q_K}$$ (nella potenziale spesso non c'è esplicitazione coord. lagr.)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1 + m_2(\dot{x}_1 + \dot{\Delta}) & \text{① a} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\Delta}} = m_2(\dot{x}_1 + \dot{\Delta}) \quad \text{corretto} & \text{② b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial L}{\partial q_1} = \dfrac{\partial V}{\partial x_1} = K_1 x_1 + K_3(x_1 + \Delta) & \text{① c} \\ -\dfrac{\partial L}{\partial q_2} = \dfrac{\partial V}{\partial \Delta} = K_2\Delta + K_3(x_1 + \Delta) \quad \text{corretto} & \text{② d} \end{cases}$$

1° membro eq. LAGRANGE

$$Q_1 = \vec{F}_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_1} + \vec{F}_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_1} = f_1 \hat{\imath} \cdot \hat{\imath} + (-f_2 \hat{\imath}) \cdot \hat{\imath} = f_1 - f_2 \quad \text{① e}$$

∂x_1

$$Q_2 = tt = ma \frac{\partial q_2}{\partial \Delta} = f_1 \hat{\imath} \cdot 0 + (-f_2 \hat{\imath}) \cdot \hat{\imath} = -f_2 \quad \text{② e}$$

2° membro eq. LAGRANGE

Ora assemblo:

quando K=1:

$$\begin{cases} \text{i tre ①} \quad m_1\ddot{x}_1 + m_2(\ddot{x}_1 + \ddot{\Delta}) + K_1 x_1 + K_3(x_1 + \Delta) = f_1 - f_2 \\ \text{i tre ②} \quad m_2(\ddot{x}_1 + \ddot{\Delta}) + K_2\Delta + K_3(x_1 + \Delta) = -f_2 \end{cases}$$