



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 1991A -

ANNO: 2016

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Oliveri Stefano

MATERIA: Fondamenti di meccanica strutturale - Prof. Soma

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

# Sollecitazioni semplici:

(1)

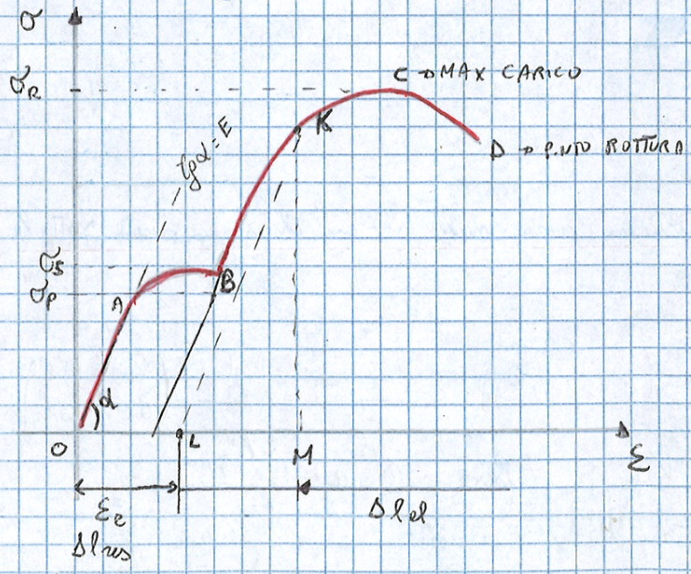
## 1) Descrivere le prove di trazione per i materiali metallici:

In scienza dei materiali, la prova di trazione è una prova di caratterizzazione dei materiali che consiste nel sottoporre un provino di un materiale ad un carico  $F$  inizialmente nullo che viene incrementato fino ad un valore massimo che determina la rottura del materiale.

Questa prova determina la resistenza meccanica, il modulo di Young  $[E]$ .

I provini possono essere a sezione circolare o piana, ma per i metalli si usano provini a sezione circolare.

Si fissa il provino tra due morsetti in posizione verticale, i morsetti stungono il provino in una zona più larga del provino. Una ganaschia con velocità costante impone uno sforzo e una forza in direzione opposta alle macchine. Sulle macchine è presente una cella di carico (misura la forza) e un estensimetro (misura l'allungamento)



$\overline{OL} = \Delta l_{max} \rightarrow$  allungamento presente nel provino anche a carico nullo

$\overline{LM} = \Delta l_{el} \rightarrow$  accorciamento quando si scarica il provino.

$\overline{OA}$ : zone di elasticità: segue la legge di Hooke  $\rightarrow$  linearità  $\sigma_{xx} = E \cdot \epsilon_{xx}$

$\overline{AB}$ : zone di smorzamento: non è caratteristica di tutti i metalli (se è troppo veloce non si vede). Non è più lineare l'allungamento, perde l'elasticità e si plasticizza.

$\overline{BC}$ : zone di invecchiamento: il carico aumenta fino al valore MAX = C zona plastica

$\overline{CD}$ : zone di strizione: si forma la strizione  $\rightarrow$  p.to di rottura non controllabile

Se il p.to K è  $A_0 \rightarrow$  l'allungamento è puramente ELASTICO,  $\Delta l_{res} = 0$

$\sigma_p$  = limite di proporzionalità (oltre non vale Hooke) 15% materiale fragile

$\sigma_s$  = tensione di smorzamento;  $A_R$  = allungamento relativo a rottura 5% < 5% " plastici

$\sigma_R$  = " di rottura;

# STATO DI TENSIONE

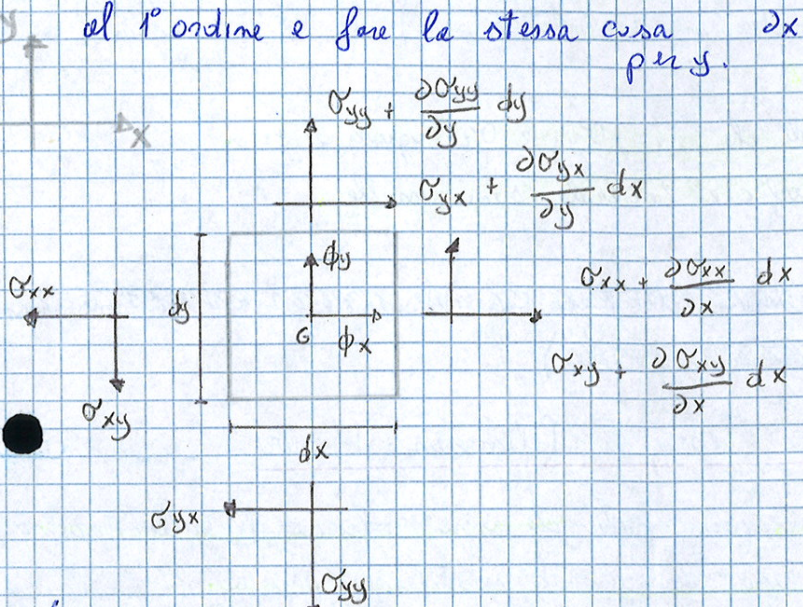
(3)

## ① Equazioni indefinite di equilibrio.

Immaginiamo di volutare un intorno infinitesimo in ~~qualsiasi~~ direzione  $x$ , la funzione  $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x,y,z) = \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx$ , può essere approssimata al 1° ordine e fare la stessa cosa per  $y$ .

$\phi_y, \phi_x \rightarrow$  componenti forze di volume.

### ~~ESERCIZIO~~ EQUILIBRIO ASSE X:



$$(-\sigma_{xx} + \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx) dy dz + (-\sigma_{yx} + \sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy) dx dz + \phi_x dx dy dz$$

Se consideriamo anche i contributi nelle 3° dimensione:

$$\left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dy dz + \left( \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz + \left( \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy + \phi_x dx dy dz$$

altre componenti

$$x: \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \phi_x = 0 \quad y: \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + \phi_y = 0$$

$$z: \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \phi_z = 0$$

## ② Tensore delle tensioni idrostatico e deviatorico.

Prendendo in considerazione un tensore delle tensioni:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Tensione media

$$\sigma_m = \frac{I}{3} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3}$$

$$[\sigma] = [\sigma_s] + [\sigma_d]$$

e definire un **tensore idrostatico** o **sferico**

e per differenza avremo il **tensore deviatorico** o **di distorsione**

$$[\sigma_s] = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_d] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_m & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_m & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_m \end{bmatrix}$$

# LINEA ELASTICA

(5)

- ① Descrivere il principio della sovrapposizione degli effetti per calcolare la linea elastica e le ipotesi di validità.

Possiamo usare la sovrapposizione degli effetti nel caso di strutture articolate in cui la funzione momento flettente è continua a tratti, nel caso di strutture a singola campata è possibile calcolare il metodo analitico della doppia integrazione le frecce e le rotazioni di strutture semplici.

L'ipotesi dei piccoli spostamenti consente: utilizzare i casi notevoli capendo e dividendo la struttura, semplificandola e infine sommare i diversi contributi trovati.

- Possibilità di modificare i vincoli e sommare gli effetti.
- " di applicare i carichi separatamente e infine sommare i contributi

- ② Quale può essere il grado massimo del polinomio che descrive la linea elastica di una trave e perché?

Il grado massimo del polinomio che descrive la linea elastica di una trave ha al max  $4^{\text{grado}}$ , questo poiché quando abbiamo un carico distribuito avremo che il  $M_g = \frac{1}{2} L q x - \frac{1}{2} q x^2$ , essendo la freccia una doppia integrazione del momento flettente il grado MAX può essere 4.

- ③ Quali sono le condizioni del tensore delle deformazioni nel caso di stato di deformazione piana?

Caso di deformazione piana, ~~non~~ considerando l'asse  $z$   $\perp$  al piano

$$\epsilon_{zz} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$$

prendendo in considerazione il legame tensione/deformazioni per i materiali isotropi omogenei elastici possiamo semplificare in tale modo:

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{cases} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

CRITERIO DI CEDIMENTO

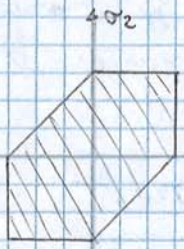
② Descrivere il criterio di rottura di Tresca

Chiamato anche criterio della MAX tensione tangenziale, secondo questa teoria il cedimento di una struttura o componente sollecitato da uno stato di tensione triassiale ha una massima tensione tangenziale raggiunta e supera la tensione tangenziale limite di rottura e con questo si ha cedimento. L'ipotesi di Tresca viene usata per materiali duttili (si spezzano a causa delle  $\tau$  su un piano inclinato a  $45^\circ$ )

$$\text{MAX} \begin{cases} |\sigma_1 - \sigma_2| \\ |\sigma_2 - \sigma_3| \\ |\sigma_3 - \sigma_1| \end{cases} \geq \sigma_u \quad \text{oppure} \quad \text{MAX} \begin{cases} \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right| \\ \left| \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right| \\ \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right| \end{cases} \geq \tau_{lim}$$

$\sigma_{id}$   $\tau_{id}$

RAPPR. GRAFICA



al di fuori si ha CEDIMENTO

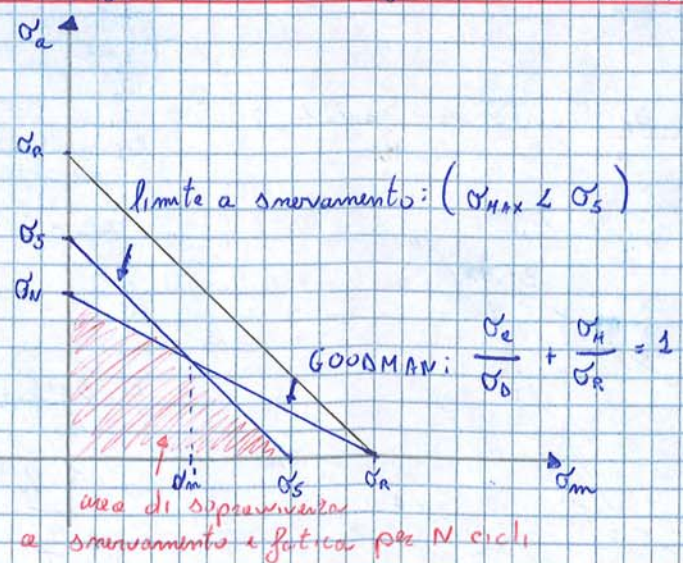
N.B: nelle travi si ha CEDIMENTO se è verificata:

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} > \frac{\sigma_u}{5}$$

(FATICA)

limite di fatica del materiale

③ Costruire il diagramma di Haigh date  $\sigma_R, \sigma_S, \sigma_N$ : "Si osservi che i diagrammi di Haigh sono tracciati per un determinato numero di cicli N"

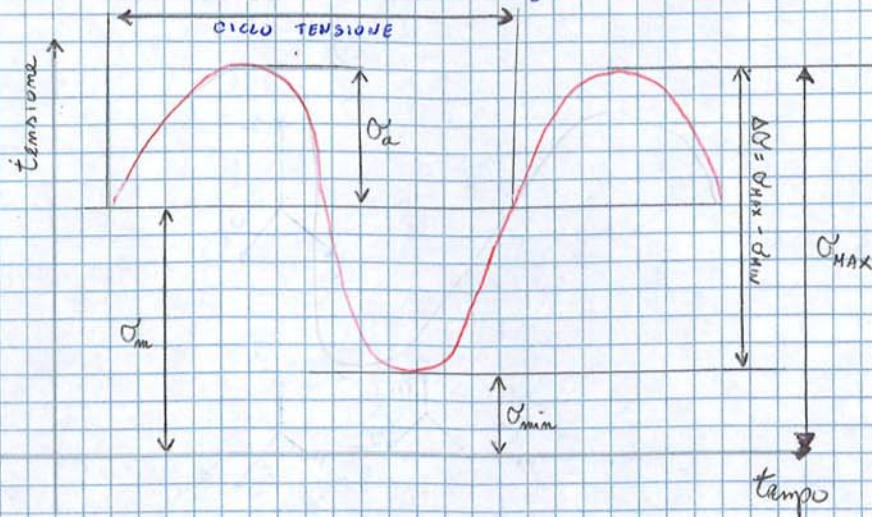


diagrammi di Haigh sono tracciati per un determinato numero di cicli N"

"il punto di intersezione tra la retta di Goodman e la linea a  $45^\circ$  limitata della tensione di smorzamento è:

$$\sigma'_m = \frac{\sigma_S - \sigma_N}{1 - \frac{\sigma_N}{\sigma_R}}$$

Descrivere il ciclo di sollecitazioni a fatica secondo UNI 3364



Viene descritto un generico ciclo di sollecitazione a fatica secondo la UNI 3364 i parametri sono:

• tensione massima  $\sigma_{max}$  • tensione minima  $\sigma_{min}$  • tensione media  $\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$

• tens. alternata  $\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$  • campo di tensione  $\Delta\sigma_a = \sigma_{max} - \sigma_{min} = 2\sigma_a$

• rapporto di tensione  $R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$  • rapp. ampiezza  $A = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{1-R}{1+R}$

- Nel caso di tensione media nulla abbiamo il ciclo di tensione alternata simmetrica
- " " " " " di compressione " " " " ripetuta o pulsante di compressione.

• Nel caso di tensione media di trazione abbiamo cicli di tensione ripetute di trazione.

Quali sono le condizioni del tensore delle deformazioni nel caso di deformazione pura??

In uno stato di deformazione, prendendo in considerazione l'asse z e l'el piano avremo:  $\epsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$

segue:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix}$$

## Grado di iperstaticità

$G$  = grado di iperstaticità.

$$G \begin{cases} = 0 & \text{ISOSTATICO} \\ < 0 & \text{LABILE} \\ > 0 & \text{IPERSTATICO} \end{cases}$$

(91)

$$G = 3 \cdot i + 2 \cdot ce + 2 \cdot (z-1) \cdot ci + a - m \cdot m$$

$m$  = n. gradi di libertà del corpo (nel piano 3) (spazio 6)

$n$  = n° di corpi rigidi componenti il sistema

$i$  = n° incastri

$ce$  = n° cerniere ~~rotazionali~~ fisse

$ci$  = n° di cerniere interne relative a  $z$  diversi corpi rigidi.

$a$  = n° di appoggi semplici

## Sezioni di Ritter: una sezione

Si dice essere di Ritter (in una travatura RETICOLARE) in relazione ad un'asta se oltre all'asta in questione taglia anche altre aste confluenti, tutte in un punto proprio o improprio.

- se si intersecano in un polo, non è sufficiente scrivere l'eq. di momento intorno a quel polo
- se sono // bisogna scrivere l'eq. all'equilibrio  $\perp$  alla direzione di parallelismo.

## TRAVATURA RETICOLARE

Struttura molto ideale in cui tutte le aste sono collegate da cerniere interne e i carichi sono distribuiti solo sui nodi. Le ASTE ammettono reazioni vincolari o forze che hanno direzione solo assiale.

$$a + 3 = 2 \cdot n$$

$\downarrow$                        $\uparrow$   
 n° aste                      n° nodi



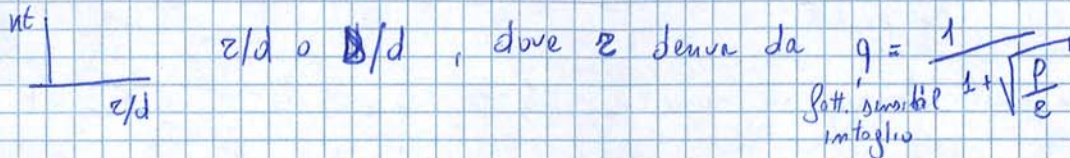
GENERALI

13

- Da quali parametri dipende il fattore di concentrazione delle tensioni nelle travi cilindriche a sezione piena in presenza di raggio di raccordo?

Il fattore di concentrazione delle tensioni  $K_t$  è il rapporto fra la tensione massima raggiunta nell'integlio e quella nominale nel componente.

Per quanto riguarda una trave cilindrica a sezione piena in tale diagrammi il fattore  $K_t$  è dato in funzione delle grandezze adimensionali che definiscono il tipo di geometria, sulle ascisse vi è spesso il raggio di fondo adimensionalizzato rispetto ad una dimensione caratteristica, mentre le curve sono parametrizzate con rapporti fra le dimensioni caratteristiche (rapporto diametri delle sezioni).  $K_t$  diviene sempre più grande, al limite infinito, per raggi di fondo intaglio tendenti a zero.



- Confrontare qualitativamente un diagramma di Wohler nel caso di prassi lisci o intagliati.

# FONDAMENTI MECCANICA STRUTTURALE.

03/03

## Capitolo 1: Sistemi meccanici - sezioni vincolari.

- **Sistema meccanico**: indica una parte o porzione di una macchina o struttura, un sistema può essere composto da un corpo rigido o da più corpi rigidi.
- Se il sistema è in quiete sarà in equilibrio.
- **Equilibrio dinamico** quando il sistema stesso modifica istante per istante il suo stato di moto ( $a \neq 0$ )
- **Equilibrio statico** è utilizzata per indicare che il sistema è in quiete.
- **Punto materiale** è la rappresentazione di un oggetto quando si trascura la forma e l'estensione dell'oggetto.
- **I gradi di libertà** sono parametri indipendenti necessari per determinare la posizione del punto dello spazio.
- Un corpo rigido è costituito da infiniti punti materiali che non cambiano le loro posizioni relativi, quindi le distanze tra tutti i punti del corpo restano invariate.
- Il **Sistema meccanico** può essere costituito da un insieme di corpi rigidi o da un intero corpo rigido.
- I **vincoli** del sistema sono ideali
- Le **forze** sono applicate in un punto o comunque idealizzato.
- La **forza** è un vettore caratterizzato da modulo, verso e direzione, tramite un sistema di riferimento  $(x, y, z)$ . La risultante delle forze si avrà tramite le regole del parallelogramma.
- **Nello spazio** (3D) avremo 6 gradi di libertà
- **Nel piano** (2D) avremo 3 gradi di libertà.

## Forze:

Le forze possono essere (spinte o carichi) o coppie (momenti), Esse si dividono come forze di superficie se agiscono in punti di una superficie o forze di volume se agiscono nei punti interni di un corpo.

Le forze di superficie si distinguono in forze distribuite, se agiscono su tutti i punti di un'area non infinitesima e forze concentrate, se agiscono istantaneamente in un punto soltanto (nella realtà non  $\exists$ )

## Equazioni di equilibrio:

nello spazio le equazioni di equilibrio sono 6, con X, Y, Z le componenti secondo tre assi di tutte le forze note ed incognite ed  $M_x, M_y, M_z$  i loro momenti rispetto a tali assi

$$\sum X = 0 \quad \sum M_x = 0$$

$$\sum Y = 0 \quad \sum M_y = 0$$

$$\sum Z = 0 \quad \sum M_z = 0$$

nel piano le equazioni si riducono a 3:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{array} \right.$$

## CAPITOLO 2 Travature reticolari

- Si definisce aste una particolare modello di trave che collegata al resto della struttura mediante cerniere dette nodi e che ammette carichi esterni solo sui nodi stessi.

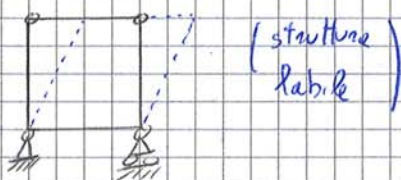
Le travature reticolari sono sistemi di aste collegate da cerniere interne.

- tirante quando il carico interno è di trazione ( $N$ )
- puntone " " " " è di compressione ( $-N$ )

Condizione necessaria, ma non sufficiente, perché la travatura sia ISOSTATICA

$$\underbrace{a + 3}_{\text{n° aste}} = 2 \underbrace{c_i}_{\text{cerniere interne}}$$

un modo più semplice sull'ISOSTATICITA' della travatura è quello di controllare se essa è costituita da triangoli di aste con lati adiacenti, senza intrecci.



### Metodo dei nodi:

Per determinare gli sforzi nelle singole aste si potranno scrivere  $2m$  equazioni in  $(a+3)$  incognite, e verificare così i valori delle reazioni esterne, già ottenute imponendo l'equilibrio globale.

## CAPITOLO 3 CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

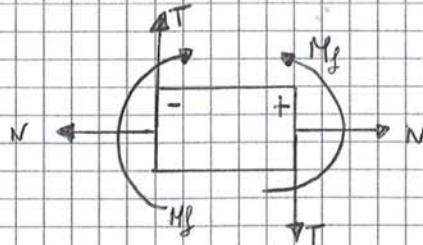
Def. generali.

asse geometrico può essere una qualsiasi linea nello spazio, ma di solito è una linea piana e spesso è una linea retta (travi ad asse rettilineo)  
 la sezione retta può variare, ma di solito si mantiene costante (trave di sezione costante)

• Caratteristiche di sollecitazioni

- lo sforzo normale  $N$  è calcolato sommando le componenti secondo l'asse  $x$  di tutte le forze che precedono la sezione  $S$
- Gli sforzi di taglio  $T_y$  e  $T_x$  sommando le componenti secondo l'asse  $y$  e  $z$  di tutte le forze
- $M_x$  sommando i momenti intorno all'asse  $x$  di tutte le forze che precedono  $S$
- $M_y$  e  $M_z$  momenti flettenti.....

$N$  positivo se di trazione,  $T$  positivo verso il basso,  $M_f$  positivo se sono compresse le fibre superiori e tese le inferiori.



"Convenzione per le caratteristiche di sollecitazioni"

Caratteristiche di sollecitazioni : considerazioni pratiche.

- Le discontinuità del diagramma di taglio rappresentano carichi concentrati esterni o di reazioni vincolari.
- Discontinuità del  $M_f$  sono rappresentative di coppie/momenti esterni concentrate o di coppie/momenti vincolari, Discontinuità di  $M_f \rightarrow$  discontinuità del taglio.
- Dove  $T=0$ , il  $M_f$  presenta un MAX o un MIN.
- In presenza di cerniere interne il  $M_f$  è nullo eccetto nel caso di momento esterno concentrato dove avrà una discontinuità.

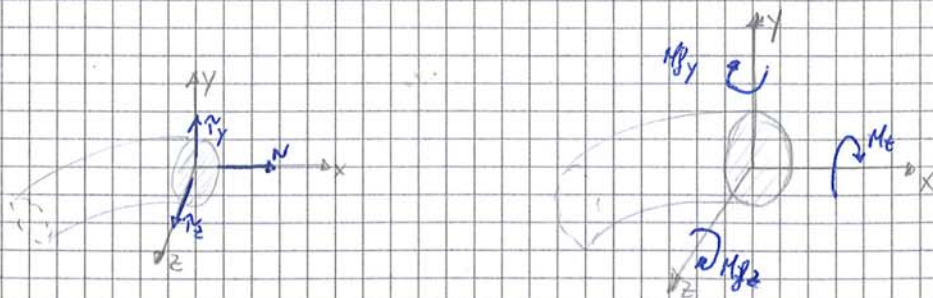
Calcolo delle caratteristiche di sollecitazione: STRUTTURE IN 3D

calcolo delle reazioni vincolari utilizzando tutte e 6 le condizioni nello spazio.

calcolo delle caratteristiche di sollecitazioni utilizzando sulle generica sezione le 6 caratteristiche.

3 forze :  $N$  normale (trazione o compressione),  $\tau_y$  e  $\tau_z$

3 momenti :  $M_x$  e  $M_z$  e  $M_y$

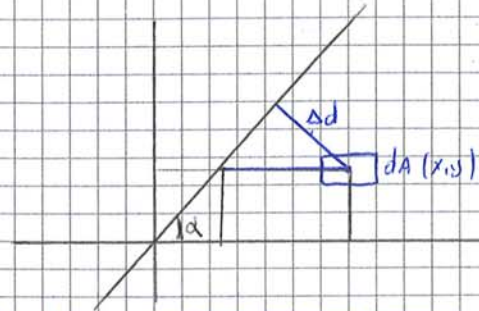
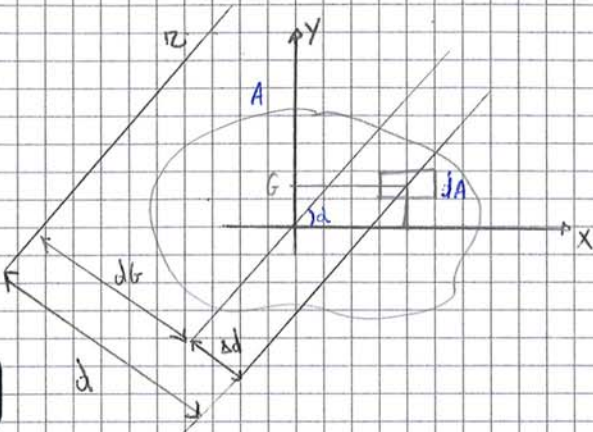


vedi libro pag 66

$$x_G = \frac{S_y}{A} ; \quad y_G = \frac{S_x}{A} \quad \left( \begin{array}{l} \text{coordinate del} \\ \text{baricentro} \end{array} \right)$$

Se  $S_x, S_y$  calcolati rispetto ad un asse baricentrico sono nulli.

Calcolo del momento statico rispetto ad una retta qualunque.



Per la similitudine dei triangoli avremo

$$\Delta d = x \sin \alpha - y \cos \alpha$$

$$S_e = \int_A d \cdot dA ; \quad d = d_G + \Delta d = d_G + x \sin \alpha - y \cos \alpha$$

$$S_e = \int_A d \cdot dA = \int_A d_G \cdot dA + \int_A x \sin \alpha \cdot dA - \int_A y \cos \alpha \cdot dA$$

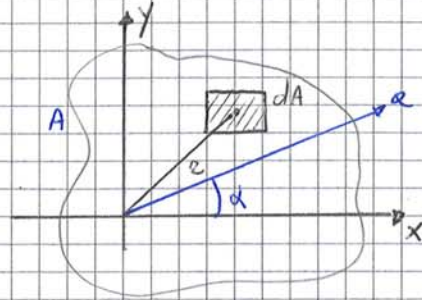
i momenti statici rispetto ai baricentri sono nulli quindi

$$S_e = \int_A d \cdot dA = \int_A d_G \cdot dA = d_G \cdot A$$

• momento di inerzia centrifugo :  $I_{xy} = \int_A x \cdot y \, dA$

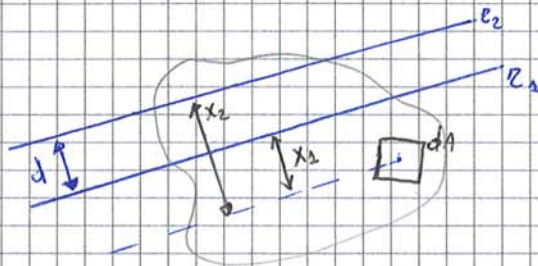
• momento di inerzia polare calcolato non rispetto ad un asse (o retta) ma rispetto ad un polo (punto) P.

$$I_p = \int_A r^2 \, dA$$



Teorema trasposizione dei momenti di inerzia.

Dato  $I_1$ , nota la distanza  $d$  tra i due assi ( $r_1$  ed  $r_2$ ), calcoliamo il momento di inerzia rispetto alla retta  $r_2$  // a  $r_1$



$$I_1 = \int_A x_1^2 \, dA$$

$$I_2 = \int_A x_2^2 \, dA = \int_A (x_1 + d)^2 \, dA = \int_A (x_1^2 + d^2 + 2x_1 d) \cdot dA = I_1 + 2S_1 \cdot d + A \cdot d^2$$

dove  $S_1$  è il mom. statico rispetto ad  $r_1$

Se l'asse  $r_1$  è baricentrico ( $S_1 = 0$ ) avremo:

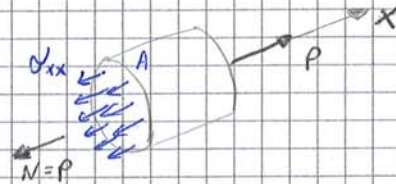
$$I_2 = I_1 + A \cdot d^2$$



## Sollecitazioni Semplici CAPITOLO 5 (5A)

Tensione unitaria - tensioni interne

Nel caso di trazione o compressione se la trave è omogenea, le fibre subiranno un identico allungamento, cioè le sezioni rette della trave si sposteranno parallelamente a se stesse le tensioni interne risultano uniformemente ripartite in tutta la sezione



Tensione unitaria  $\sigma_{xx}$  sarà uguale in tutti i punti della sezione

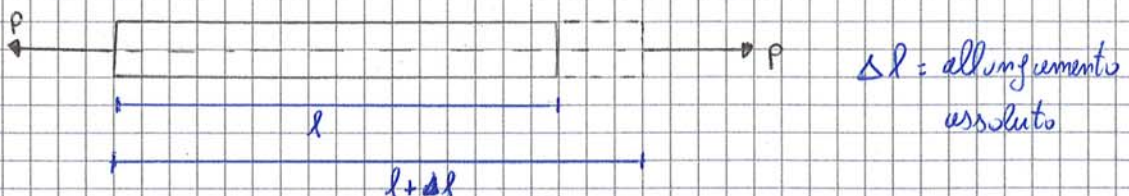
$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A} = \frac{[N]}{[mm^2]} = MPa$$

direzione  
della normale  
alle sezioni A

direzione delle  
componente di  
tensione.

N.B: la validità della distribuzione uniforme delle tensioni interne nel caso della trazione non è confermata in variazioni brusche della geometria della trave (EFFETTO DI INTAGLIO)

Allungamento e legge di Hooke:



Nel caso di trazione e compressione le dimensioni di una trave sottoposta a trazione variano in funzione dell'intensità del carico P applicato.

Il rapporto tra allungamento assoluto  $\Delta l$  e la sua lunghezza  $l$  è chiamato allungamento relativo  $\epsilon_{xx} = \frac{\Delta l}{l}$ .

Vi è un legame tra la tensione unitaria  $\sigma_{xx}$  e  $\epsilon_{xx}$ , questa diretta proporzionalità è espressa dalla Legge di Hooke:  $\sigma_{xx} = E \cdot \epsilon_{xx}$

$E$  = modulo di elasticità normale o modulo di Young.

# • PROVA DI TRAZIONE, COMPORTAMENTO MECCANICO DEI MATERIALI

Vedi foglio + libro pag 98. **FARE BENE!!**

## Tensione ammissibile e coefficiente di sicurezza.

Mediante le prove di trazione e compressione si possono ottenere i principali dati sulle proprietà meccaniche dei materiali. Nei calcoli di progetto o di verifica, si determina la tensione massima  $\sigma_{max}$  che sollecita il sistema e che non deve superare un determinato valore di resistenza legato al materiale e alle condizioni di lavoro.

La tensione ammissibile o di sicurezza viene ottenuto dividendo un certo carico limite  $\sigma_L$ , del materiale dato, per un numero  $S > 1$ , detto coefficiente di sicurezza.

$$\sigma_{ammissibile} = \frac{\sigma_L}{S}$$

mat. duttile :  $\sigma_{amm} = \frac{\sigma_s}{S}$       mat. fragile :  $\sigma_{amm} = \frac{\sigma_R}{S}$

• La scelta del coeff di sicurezza deriva da diverse considerazioni:

- ① condizioni reali di lavoro della costruzione.
- ② grado di precisione di alcuni metodi
- ③ proprietà del materiale

•  $\delta = \ln\left(\frac{l_f}{l_0}\right)$  deformazione reale

legame tra def. "ingegneristica" e "reale":  $\epsilon = e^{\delta} - 1$

dim:

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l_f - l_0}{l_0} = \frac{l_f}{l_0} - 1 ; \quad \frac{l_f}{l_0} = 1 + \epsilon$$

$$\delta = \ln(1 + \epsilon)$$

Angolo di torsione di una trave a sezione circolare:

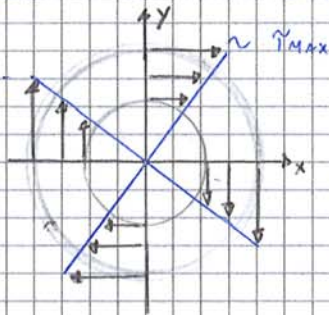
$$\vartheta = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot J_p}$$

Angolo di torsione unitario:  $\vartheta_u = \frac{M_t}{G \cdot J_p}$

dell'angolo di torsione di una trave a sezione circolare:  $\vartheta = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot J_p}$

sostituendo  $\gamma = G \cdot \varepsilon \cdot \frac{\varrho}{l}$ , si ottiene  $\gamma = \frac{M_t \cdot \varepsilon}{J_p}$

e graficamente sulla sezione la distribuzione delle tensioni tangenziali.



$$\tau_{MAX} = \frac{M_t}{J_p} \cdot \frac{d}{2}$$

Si definisce modulo di resistenza torsionale:

$$W_t = \frac{J_p}{d/2} \sim \tau_{MAX} = \frac{M_t}{W_t}$$

• **Lavoro di deformazione torsionale:**

Il lavoro di deformazione soggetta a torsione pura è:

$$L = \frac{1}{2} M_t \cdot \vartheta \quad \text{ovvero} \quad L = \frac{1}{2} \frac{G \cdot J_p \cdot \vartheta^2}{l}$$

da queste equazioni si definisce rigidità torsionale di una trave il

termine:  $G \cdot \frac{J_p}{l}$

• **TORSIONE IN TRAVI A SEZIONE RETTANGOLARE**

Nel caso di una trave a sezione non circolare l'ipotesi della conservazione delle sezioni piane non è più valida.

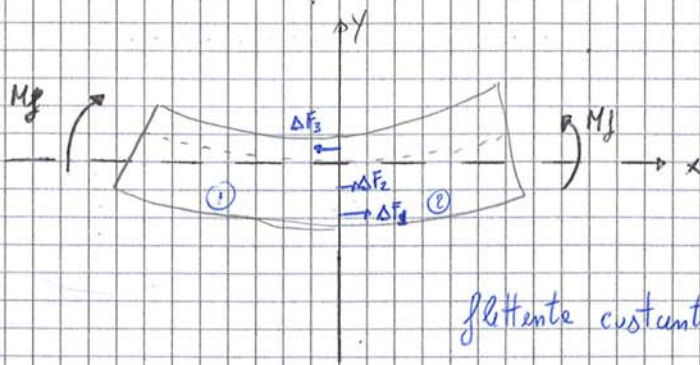
Per lo studio di tali sezioni si usano metodi indiretti, sfruttando

l'analogia idrodinamica.

# FLESSIONE CAP 5 (5C)

Flessione pure solo Mom flettente

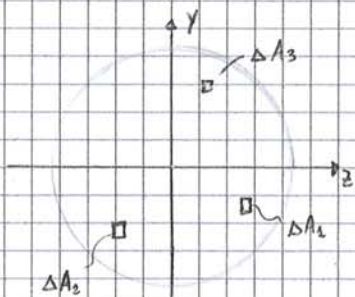
Flessione semplice è accompagnata anche da taglio



Per effetto delle coppie la trave si dispone secondo una linea (linea elastica) che nel caso considerato di trave a sezione costante e con mom. flettente costante lungo la trave, è un arco di cerchio.

Inoltre la linea elastica giace in un piano (piano di flessione) che coincide con il piano di sollecitazione. Nello parte convessa delle trave le fibre si allungano e nelle parte concave si accorciano, mentre alcune mantengono invariate la loro lunghezza secondo una retta  $m-z$  (asse neutro) che è normale all'asse di sollecitazione  $y$ .

Tesa (zona convessa); compressa (zona concava); asse neutro tensione nulla



$$\Delta F_1 = \sigma_1 \Delta A_1$$

$\Delta F_2 = \sigma_2 \Delta A_2$  , per l'equilibrio del corpo, la

somma di tali forze deve essere nulla (perché lo sforzo normale  $N$  è nullo), mentre la somma dei loro momenti rispetto all'asse  $z$  deve essere uguale al momento

applicato  $M$

$$\Delta F_1 + \Delta F_2 + \Delta F_3 + \dots = 0$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^n \sigma_i \cdot \Delta A_i = 0$$

$$-(\Delta F_1 \cdot y_1 + \Delta F_2 \cdot y_2 + \Delta F_3 \cdot y_3 + \dots) = M$$

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i \cdot \Delta A_i \cdot y_i = M$$

con la notazione integrale:  $\int_A \sigma dA = 0$  ;  $-\int_A \sigma y dA = M$

Sostituendo  $\sigma = -E \frac{y}{R}$  si ottiene:

$$\frac{E}{R} \int_A y dA = 0 \quad (1)$$

$$\frac{E}{R} \int_A y^2 dA = M \quad (2)$$

Questa equazione rappresenta una retta che passa per il baricentro della sezione, ma inclinata di un angolo  $\beta$  rispetto all'asse  $z$ , dato dalla:

$$\tan \beta = \frac{y}{z} = \frac{M_y \cdot J_z}{M_z \cdot J_y}$$

Il vettore del momento risultante,  $\perp$  al campo  $P$ , forma con l'asse  $z$  l'angolo  $\alpha$  dato dalla:  $\tan \alpha = \frac{M_y}{M_z}$

da cui  $\tan \beta = \frac{M_y \cdot J_z}{M_z \cdot J_y} = \frac{J_z}{J_y} \cdot \tan \alpha$

$J_y = J_z$  nel caso di sezioni circolari o quadrate.

## TAGLIO CAP 5 (5d)

Una sezione  $S$  di una trave è soggetta solo allo sforzo di taglio  $T$  quando la risultante di tutte le forze esterne che procedono  $S$  giace nel piano della sezione e passa per il suo baricentro. Il taglio risulta però sempre accompagnato da quello di flessione.

Si ha taglio puro solo nella sezione in cui la caratteristica del momento passa per lo zero.

Se la distribuzione delle tensioni non è uniforme, il valore medio sarà:

$$\tau_m = \frac{T}{A}$$

Il valore della tensione in ogni punto è dato da:

$$\tau = \frac{T \cdot s}{b \cdot J_z}$$

$S$  mom. statico, rispetto all'asse  $z$

$J_z$  = mom. inerzia dell'intera sezione rispetto all'asse  $z$ .

$b$ : larghezza della sezione.

CAP 6 (vedere libro LINEA ELASTICA)

(Domenica 13)

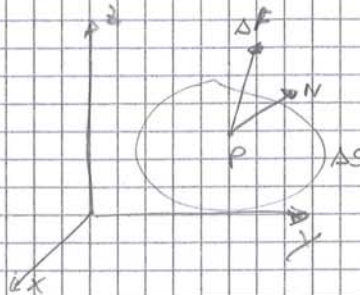
CAP 7 (meccanica del continuo)

è omogeneo se ha uguali proprietà in tutti i punti.

isotropo = proprietà uguali per tutte le direzioni.  
anisotropo = variano al variare delle direzioni.

Dato un continuo, la tensione in un punto P, rispetto ad una superficie con normale  $\{n\}$  si definisce

$$\{t\} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\{\Delta F\}}{\Delta S}$$



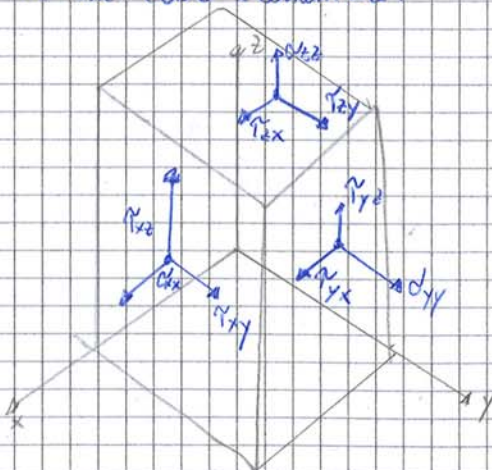
Dall'equilibrio alla trazione nelle 3 direzioni (x, y, z) si individua il legame tra tensione e normale alla sezione  $\{n\}$  definita come tensore delle tensioni

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{xx} & t_{yx} & t_{zx} \\ t_{xy} & t_{yy} & t_{zy} \\ t_{xz} & t_{yz} & t_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{Bmatrix}$$

in termini ingegneristici:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

in un cubo elementare:



$$t_x = \sigma_{xx} \cdot m_x + \tau_{yx} \cdot m_y + \tau_{zx} \cdot m_z$$

$$t_y = \tau_{xy} \cdot m_x + \sigma_{yy} \cdot m_y + \tau_{zy} \cdot m_z$$

$$t_z = \tau_{xz} \cdot m_x + \tau_{yz} \cdot m_y + \sigma_{zz} \cdot m_z$$

si dimostra per la reciprocità che:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad ; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad ; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

## Direzioni e tensioni principali

Dato il tensore in un punto rispetto alle normale alla sezione  $\{m\}$

$\{t\} = [\sigma] \cdot \{m\}$  è possibile determinare le direzioni rispetto alle quali

il tensore non ha contributo tangenziale e cioè sia:

$$\{t\} = \sigma_p \{m\},$$

quindi uguagliando avremo:  $\sigma_p \{m\} = [\sigma] \cdot \{m\}$

Quindi il calcolo delle tensioni e direzioni principali è un calcolo di autovalori ed autovettori di un sistema  $3 \times 3$ .

$$\sigma_p \cdot \{m\} = [\sigma] \cdot \{m\}$$

$$([\sigma] - \sigma_p) \cdot \{m\} = 0$$

La matrice del tensore ha degli invarianti indipendenti dal sistema di riferimento utilizzato per descrivere la geometria.

$$I = \text{tr} [\sigma] = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

$$II = \sigma_{xx} \cdot \sigma_{yy} + \sigma_{yy} \cdot \sigma_{zz} + \sigma_{xx} \cdot \sigma_{zz} - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2$$

## TENSORE IDROSTATICO:

Dato un tensore  $[\sigma]$  si può calcolare una tensione media pari a:

$$\sigma_m = \frac{I}{3} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} \quad \text{e definire un tensore sferico } \sigma$$

idrostatico:

$$[\sigma_s] = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix}$$

Faccendo la stessa cosa per le altre componenti:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \phi_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \phi_y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \phi_z = 0 \end{cases}$$

EQ. DIFFERENZIALI  
INDEFINITE  
DI  
EQUILIBRIO

### Cerchi di Mohr

I cerchi di Mohr sono una rappresentazione bidimensionale, nel piano  $\sigma_N, \sigma_T$  dello stato di tensione tridimensionale in un punto.

Matematicamente il sistema di equazioni che definisce il problema è:

$$\begin{cases} \sigma_N = \{t\}^T \cdot \{m\} \\ \sigma_T^2 + \sigma_N^2 = \{t\}^T \cdot \{t\} \\ 1 = \{m\}^T \cdot \{m\} \end{cases}$$

$$M_1^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_2) \cdot (\sigma_N - \sigma_3) + \sigma_T^2}{(\sigma_1 - \sigma_2) \cdot (\sigma_1 - \sigma_3)} \quad (a) \quad M_3^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_2) \cdot (\sigma_N - \sigma_1) + \sigma_T^2}{(\sigma_3 - \sigma_1) \cdot (\sigma_3 - \sigma_2)} \quad (c)$$

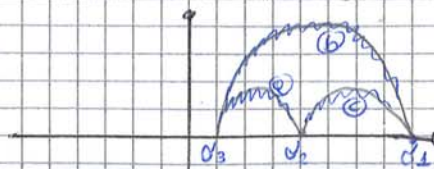
$$M_2^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_1) \cdot (\sigma_N - \sigma_3) + \sigma_T^2}{(\sigma_2 - \sigma_3) \cdot (\sigma_2 - \sigma_1)} \quad (b)$$

Essendo  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \rightarrow$

- (a)  $(\sigma_1 - \sigma_2) \cdot (\sigma_1 - \sigma_3) \geq 0$
- (b)  $(\sigma_2 - \sigma_3) \cdot (\sigma_2 - \sigma_1) \leq 0$
- (c)  $(\sigma_3 - \sigma_2) \cdot (\sigma_3 - \sigma_1) \geq 0$  e quindi:

- (a)  $(\sigma_N - \sigma_2) \cdot (\sigma_N - \sigma_3) + \sigma_T^2 \geq 0$
- (b)  $(\sigma_N - \sigma_1) \cdot (\sigma_N - \sigma_3) + \sigma_T^2 \leq 0$
- (c)  $(\sigma_N - \sigma_2) \cdot (\sigma_N - \sigma_1) + \sigma_T^2 \leq 0$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{rappresentano i punti che giacciono o} \\ \text{sono esterni alla circonferenza (a) (c)} \\ \text{o interni alla circonferenza (b)} \end{array} \right.$   
 SONO I 3 CERCHI DI MOHR





## Stato di deformazione

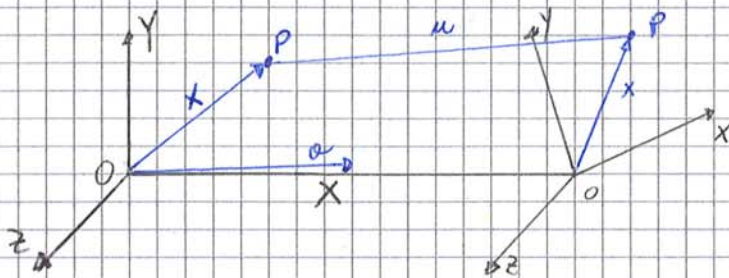
### POSIZIONE E SPOSTAMENTO DI UN CONTINUO

Nella configurazione indeformata il punto  $P$  è definito da:

$$\{X\}^T = \{X \ Y \ Z\}$$

Nella configurazione deformata il punto  $P$  è definito da:

$$\{x\}^T = \{x \ y \ z\}$$



Lo spostamento sarà  $\bar{u} = (\overline{P-O'}) - (\overline{P-O}) + (\overline{O-O'})$

cioè  $\bar{u} = \{x\} - \{X\} + \{a\}$ , se hanno la stessa origine i 2 sistemi di riferimento: ( $\{a\} = 0$ ).  $\{\bar{u}\} = \{x\} - \{X\}$

La MECCANICA vuole ottenere la posizione di un punto al tempo  $t$  conoscendo la posizione iniziale e la legge del moto, quindi:

$$\{x\} = f(\{X\}, t) \quad \text{approccio Lagrangiano.}$$

Lagrangiano: studia l'evoluzione del sistema, consiste nel seguire uno stesso punto nel tempo, partendo da una configurazione indeformata

approccio Euleroiano: inverso al primo  $\{X\} = \varphi(\{x\}, t)$ , (mi mette in un punto e rispetto che succede qualcosa) consiste nel seguire diversi punti materiali che passano per una determinata posizione spaziale nel tempo (tipico per i problemi di meccanica dei fluidi)

Nel caso di piccoli spostamenti le componenti di deformazione del punto in un caso 3d compaiono il tensore delle deformazioni:

$$[E] = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \epsilon_{yy} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

N.B.  
legumi per i  
materiali isotropi omogenei  
elastici

$$\frac{\tau_{xy}}{G} = \gamma_{xy}$$

$$\epsilon_{ii} = \frac{1}{E} [\sigma_{ii} - \nu (\sigma_{jj} + \sigma_{kk})]$$

Per calcolare la deformazione lungo una nuova direzione uso i COSENI DIRETTORI

$$\epsilon_m = \{m\}^T \cdot [E] \cdot \{m\}$$

↓  
proiezione di  $\epsilon$  su  $\{m\}$

Per le deformazioni principali  $\rightarrow \det([E] - \lambda) = 0$

I invariante =  $\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}$  DILATAZIONE CUBICA

### LEGGI COSTITUTIVE DEL MATERIALE

Le equazioni costitutive per un solido in campo lineare elastico legano tra loro il tensore delle tensioni e il tensore delle deformazioni tramite la LEGGE DI HOOKE ( $\sigma = E \cdot \epsilon$ )

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \cdot \epsilon_{kl}$$

$\epsilon_{ij}$  = n° delle costanti INDIPENDENTI nel caso di un materiale anisotropo qualsiasi.

↓  
Tensore di elasticità  
(81 componenti)

$\rightarrow$  36 x simmetria dei tensori delle tensioni e delle deformazioni per 21 x simmetria del tensore di elasticità.

DEFORMAZIONE PIANA (se si assume l'asse z  $\perp$  all'asse in esame):

$$\epsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{zy} = 0$$

quindi

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

con:  $\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$

## CAP 3 IPERSTATICHE

$$L_{NORMALE} = \frac{P^2 l}{2 E \cdot A} ; \quad L_{ME} = \frac{1}{2} \frac{G \cdot J_p \cdot \alpha^2}{l} ; \quad L_{M} = \frac{M^2 \cdot l}{2 E J}$$

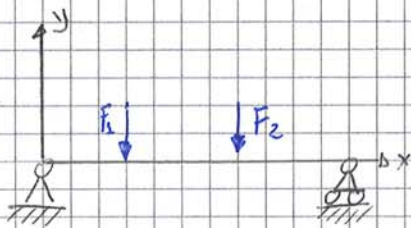
Teorema di Clepeyron:

Il lavoro di deformazione compiuto da  $n$  forze agenti staticamente su un corpo elastico è PARI alla metà della somma dei prodotti dei valori finali delle forze per i valori finali degli spostamenti nei loro punti di applicazione, valutati nelle direzioni delle forze stesse.

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \cdot V_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m M_i \cdot \theta_i$$

Teorema di Betti (odi RECIPROCA' degli spostamenti)

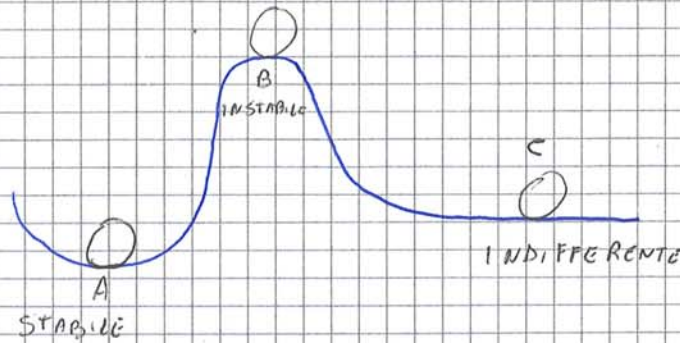
Il lavoro mutuo o indotto che compie un sistema di forze A già applicate ad un corpo elastico durante l'applicazione di un sistema di forze B è uguale al lavoro indotto che compirebbe il sistema B se fosse già applicato allo stesso corpo elastico durante l'applicazione del sistema A



Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, otteniamo le configurazioni finali delle travi applicando prima  $F_1$  e poi  $F_2$  o viceversa

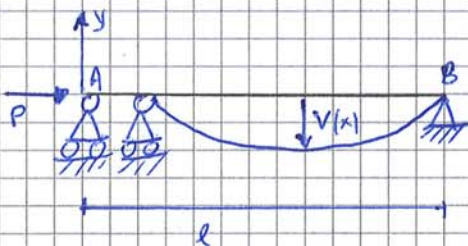
# INSTABILITÀ ELASTICA CAP 11

Lum 20 + FATICA



Un'asta compressa può assumere una configurazione cmg stabile in presenza di disturbi laterali oppure raggiungere un carico per il quale la configurazione di equilibrio diventa instabile anche per piccole perturbazioni: → la condizione critica di instabilità può essere data da  $d\sigma$  o  $dR$ .

Per studiare il problema si considera una trave, sollecitata da una forza assiale  $P$ .



$V(x)$  è la perturbazione in direzione  $y$ .

L'eq. di equilibrio della calotta delle linee elastiche è:

$$EJ_z \cdot \frac{d^2 V(x)}{dx^2} = -P \cdot V(x)$$

ponendo  $\frac{P}{EJ_z} = d \sim \frac{d^2 V(x)}{dx^2} + d V(x) = 0$

Le soluzioni è del tipo:  $V(x) = C_1 \sin dx + C_2 \cos dx$  da cui

ponendo le condizioni e contorno di vincolo:  $V(l) = C_1 \sin dl = 0$ , si ottiene:

$$\frac{P}{EJ_z} = \frac{\pi^2}{l^2}$$

$$\cos(\pi l) = \pi^2$$

CARICO EULERIANO DI STABILITÀ O CARICO CRITICO: (con  $m=1$ )

$$P_{ce} = \frac{\pi^2 \cdot EJ_z}{l^2}$$

## Saint-Venant (problema semi-inverso)

- Il modello è un solido cilindrico di lunghezza preponderante rispetto alle dimensioni della base, costituito da materiale omogeneo ed isotropo

### IPOTESI:

- dimensioni longitudinali ( $x$ ) preponderanti rispetto alle altre, omogeneo ed isotropo
- i carichi di volume sono nulli.
- Le forze superficiali sulla superficie laterali sono nulle
- Sia caricato da forze superficiali solo sulle basi con leggi tali per cui  $\sigma_{yy} \sigma_{zz} \tau_{yz}$  siano uguali a zero.
- Il solido di Saint-Venant è in sostanza una trave in cui le forze sono applicate solo sulle basi.

### EQ. INDEFINITE DI EQUILIBRIO

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \quad \sim x \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad \sim y \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0 \quad \sim z \end{array} \right.$$

## I POTESI DI VON MISES

L'energia totale può essere scritta come somma di energia volumica più l'energia di distorsione.

$$U_T = U_V + U_D \quad ; \quad U_V = \frac{1}{2} \sigma_m \cdot \frac{\Delta V}{V}$$

Che in un sistema di riferimento principale diventa:

$$U_V = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \cdot (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) \right]$$

Considerando la legge di Hooke  $\epsilon_i = \frac{1}{E} [\sigma_i - \nu(\sigma_j + \sigma_k)]$

$$U_V = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

L'energia di distorsione si ottiene per differenza

$$U_D = \frac{1}{2E} \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) \right] - \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

Semplificando

$$U_D = \frac{1+\nu}{6E} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \right]$$

Nel caso uniaassiale e nel provino due delle 3 tensioni principali sono nulle si semplifica ulteriormente e infine avremo finalmente se

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \geq \sigma_L$$

Per il travi

$$\sigma_{tr} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \frac{\sigma_L}{5}$$

$$U_D = \frac{1}{2E} \sigma_1^2 = \frac{1-2\nu}{6E} \sigma_1^2 = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_1^2$$

Esercizio (4)

(6)  $\sigma_s = 360 \text{ MPa}$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} k & 1,5k & 0 \\ 1,5k & 1,5k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) k per cui inizia lo sminuimento in base al criterio fra quelli utilizzabili per i mat. duttili.

$$C = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} = \frac{k + 1,5k}{2} = \frac{2,5k}{2} = 1,25k$$

$$\sigma_1 = C + R = 2,83k \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = C - R = -0,33k \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{(0,25k)^2 + 2,25k^2} = 1,5k$$

X TRESCA  $\sigma_{id} = \max \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_2 \\ \sigma_1 - \sigma_3 \\ \sigma_2 - \sigma_3 \end{bmatrix} = 3,16k$

$$3,16k \leq 360$$

$k = 114 \text{ MPa}$

Esercizi sullo "Stato di deformazione":

(7)  $E = 75 \text{ GPa}$   $\nu = 0,3$   
 "  $75 \cdot 10^3$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 120 & -150 & 0 \\ -150 & 240 & 0 \\ 0 & 0 & 108 \end{bmatrix}$$

• tensore deformazioni:  $[E]$

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] = \frac{1516}{75600} = 0,0020 = 2 \cdot 10^{-4}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] = 0,00228 = 2,3 \cdot 10^{-3}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = -0,0052 \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = 0 \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = 0$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{75 \cdot 1000}{2 \cdot 1,3} = 28.846,15$$

$$[E] = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 10^{-4} & -2,6 \cdot 10^{-3} & 0 \\ -2,6 \cdot 10^{-3} & 2,3 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

③ *Relax*

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 150 & 0 & -130 \\ 0 & K & 0 \\ -130 & 0 & 250 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$$E = 70.000 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0,3$$

④  $K$  affinché sia uno stato di deformazione piano.

def. piano:  $\epsilon_{zz} = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0$

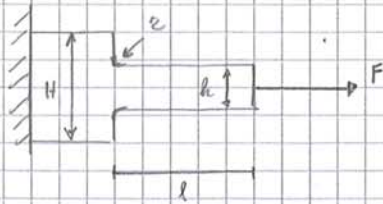
$$\sigma_{yy} = K \quad \sigma_{yy} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{zz})$$

$$\sigma_{yy} = 0,3 (150 + 250)$$

$$K = 120 \text{ MPa}$$



④



$l = 200 \text{ mm}$        $r = 10 \text{ mm}$   
 $h = 80 \text{ mm}$   
 $H = 120 \text{ mm}$   
 $b = 20 \text{ mm}$   
 $F = 64.000 \text{ N}$   
 $\sigma_s = 510 \text{ MPa}$   
 $\sigma_c = 355 \text{ MPa}$

•  $K_t$  (fattore di concentrazione delle tensioni)

$$K_t = \frac{\sigma_{MAX} \text{ all' intaglio}}{\sigma_{NOMINALE} \text{ senza intaglio.}}$$

$\frac{z}{h} = \frac{10}{80} = 0,125$        $\frac{H}{h} = \frac{120}{80} = 1,5$        $K_t = 1,95$

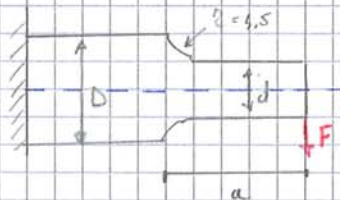
$\sigma_N = \frac{N}{A} = \frac{64.000}{20 \cdot 80} = 40 \text{ MPa}$  ;       $\sigma_{MAX} = K_t \cdot \sigma_N = 1,95 \cdot 40 = 78 \text{ MPa}$

eq. di progetto.       $\sigma_m \cdot K_t \leq \frac{\sigma_s}{S}$        $S = \frac{\sigma_s}{K_t \cdot \sigma_N} = \frac{355}{78} = 4,55$        $S = 4,55$

⑤

$D = 45 \text{ mm}$        $d = 30 \text{ mm}$        $r = 4,5 \text{ mm}$        $F = 500 \text{ N}$

•  $K_t = ?$        $\sigma_{MAX} = ?$        $\sigma_s = ?$        $S = 1,7$        $\alpha = 1,5 \text{ m}$



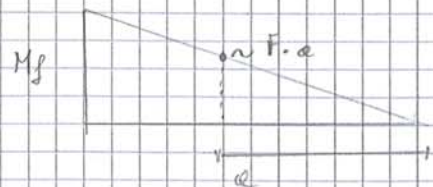
$\frac{r}{d} = \frac{4,5}{30} = 0,15$

$\frac{D}{d} = \frac{45}{30} = 1,5$        $K_t = 1,51$

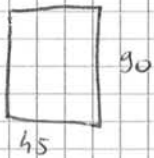
$M_f = F \cdot \alpha = 750.000 \text{ MPa}$

$\sigma_m = \frac{32 M_f}{\pi d^3} = 283 \text{ MPa}$

$\sigma_{MAX} = K_t \cdot \sigma_N = 1,5 \cdot 283 = 424 \text{ MPa}$



EQ. DI PROGETTO       $\sigma_m \cdot K_t \leq \frac{\sigma_s}{S}$  ;       $\sigma_s \leq \sigma_m \cdot K_t \cdot S = 726 \text{ MPa}$



$$M_y = 15 \text{ kNm} \quad N = -80.000 \text{ N}$$

$$S = ?$$

$$J_z = \frac{b \cdot h^3}{12} = 2.733.750 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_y = \frac{M_y}{J_z} \cdot y = \frac{15.000}{2.733.750} \cdot 45 = 0,246 \cdot 247 \text{ MPa}$$

$$\sigma_N = \frac{N}{A} = \frac{-80.000}{4050} = -20 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s = 255$$

$$\sigma_A = 410$$

$$\sigma_{22} = 247 - 20 = 227$$

$$227 \leq \frac{255}{S} \quad S = \frac{227}{255}$$

(7)  $\sigma_a = 80 \text{ MPa}$     $\sigma_m = 10 \text{ MPa}$     $K_t = 2$     $q = 0,7$

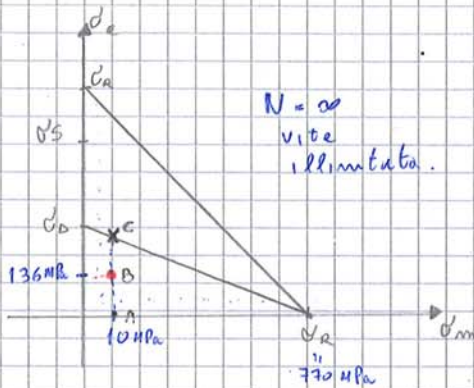
met. duttile :  $\sigma_R = 770 \text{ MPa}$

•  $K_f = ?$     $\sigma_{a,eff} = ?$     $\sigma_{m,eff} = ?$     $\sigma_D$  con  $m=3$

$K_f = 1 + q(K_t - 1) = 1 + 0,7(2 - 1) = 1,7$

$\sigma_{a,eff} = K_f \cdot \sigma_a = 1,7 \cdot 80 = 136 \text{ MPa}$

$\sigma_{m,eff} = \sigma_m = 10 \text{ MPa}$



$\frac{\sigma_{a,limite}}{\sigma_D} + \frac{\sigma_m}{\sigma_R} = 1$    VITA ILLIMITATA

$\sigma_{a,limite} = \overline{AC}$

$\sigma_{a,eff} = \overline{AB}$

$S = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = 3$

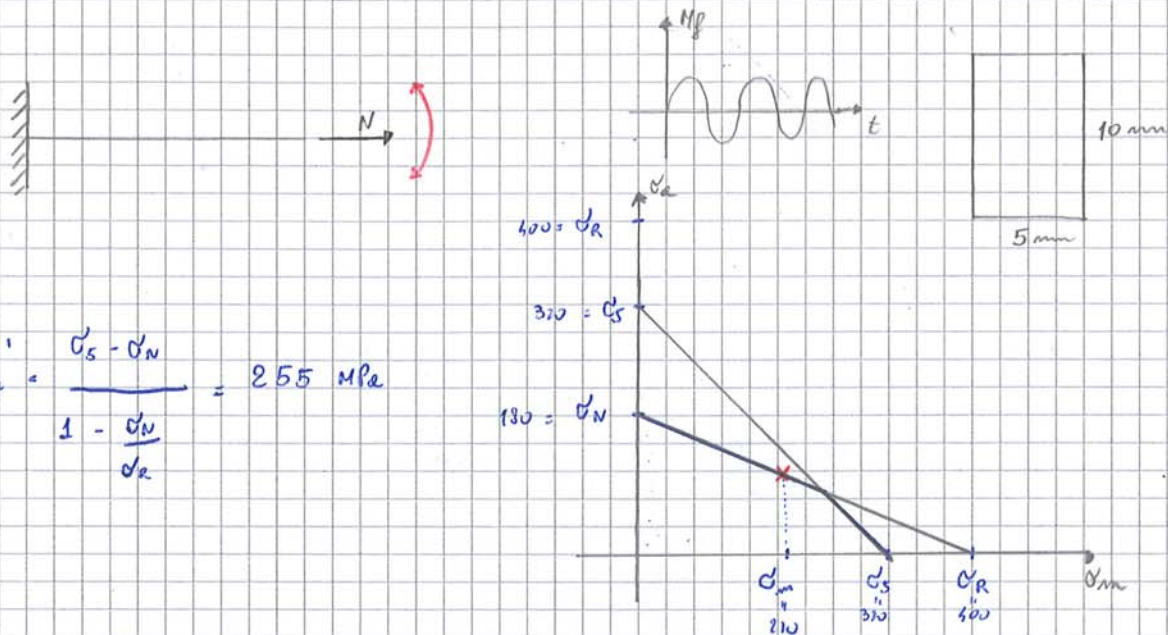
$\sigma_{a,limite} = 136 \cdot 3 = 408 \text{ MPa}$

$\sigma_D = \frac{\sigma_{a,limite}}{1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_R}} = \frac{408}{1 - \frac{10}{770}} = 413 \text{ MPa}$

②  $N = 10,5 \text{ kN}$      $M_f = M_f \sin(\omega t)$      $b = 5 \text{ mm}$      $h = 10 \text{ mm}$

• Legge di allumino ( $\sigma_R = 400 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_S = 320 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_N = 180 \text{ MPa}$  con  $N = 3 \cdot 10^5$  cicli)

• Diagramma di Haigh per  $N = 3 \cdot 10^5$  cicli.



$$\sigma_m' = \frac{\sigma_S - \sigma_N}{1 - \frac{\sigma_N}{\sigma_R}} = 255 \text{ MPa}$$

$$\sigma_m = \frac{N}{A} = \frac{N}{b \cdot h} = \frac{10.500 \text{ N}}{5 \cdot 10} = 210 \text{ MPa}$$

$$\sigma_e = \frac{6 M_f}{b h^2} = \text{?}$$

$$\frac{\sigma_{e \text{ limite}}}{\sigma_N} + \frac{\sigma_m}{\sigma_R} = 1 \quad ; \quad \sigma_{e \text{ limite}} = \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_R}\right) \cdot \sigma_N = \left(1 - \frac{210}{400}\right) \cdot 180$$

$$\sigma_{e \text{ limite}} = 85,5 \text{ MPa}$$

$$* M_f = \frac{\sigma_{e \text{ limite}} \cdot b h^2}{6} = 7,125 \text{ Nm}$$

$$\{m\} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$$\varepsilon_m = \{m\}^T \cdot [E] \cdot \{m\} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \begin{bmatrix} 1,4 \cdot 10^4 & -3,5 \cdot 10^3 & 0 \\ -3,5 \cdot 10^3 & 3,6 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \left( 0,98 \cdot 10^{-3} + 2,47 \cdot 10^{-3} ; -2,47 \cdot 10^{-3} - 2,52 \cdot 10^{-3} ; 0 \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\left( 0,002568 ; -0,00501 ; 0 \right) \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 0,00181585 + 0,003342603 + 0 = 5,35 \cdot 10^{-3}$$



5) Materiale fragile

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 250 & 80 & 0 \\ 80 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 500 \end{bmatrix}$$

a) Calcolare tens. principali.

b) tensione di rottura minima del materiale volendo un c.s di  $S = 1.8$

$z$  = direzione principale

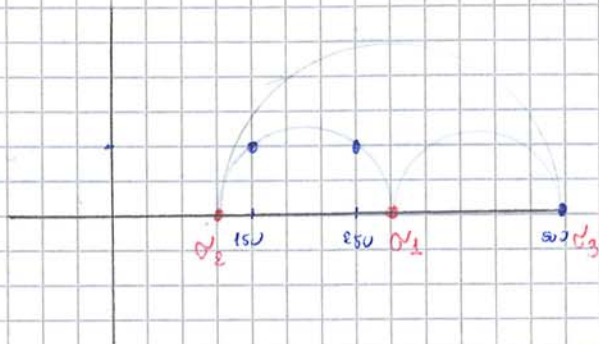
$$c = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} = 200$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 94$$

$$\sigma_1 = c + R = 294 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = c - R = 106 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = 500 \text{ MPa}$$



X materiale fragile USIAMO (IPOTESI di RANKINE)

$$\sigma_{id} = \text{MAX}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 500 \text{ MPa}$$

$$CS = \frac{\sigma_c}{\sigma_{id}}$$

$$\sigma_c = CS \cdot \sigma_{id} = 1,8 \cdot 500 = 900 \text{ MPa}$$

$$\sigma_c = 900 \text{ MPa}$$

ES 5

$$\sigma_s = 360 \text{ MPa}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} K & +1,5K & 0 \\ +1,5K & 1,5K & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Z direz principale  
 $K = ?$  per cui mzi lo snervamento  
 [TRESCA (più conservativo)]

CALCOLO TENSIONI PRINCIPALI

$$\det \begin{vmatrix} K - \sigma_p & 1,5K & 0 \\ 1,5K & 1,5K - \sigma_p & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_p \end{vmatrix} = 0 \quad \left[ (K - \sigma_p) \cdot (1,5K - \sigma_p) - (1,5K)^2 \right] (-\sigma_p) = 0$$

$$\left[ 1,5K^2 - K\sigma_p - 1,5K\sigma_p + \sigma_p^2 - (1,5\sigma_p)^2 \right] (-\sigma_p) = 0$$

$$\left[ \sigma_p^2 - 2,5K\sigma_p - 0,75K^2 \right] \cdot (-\sigma_p) = 0$$

$$\frac{2,5K \pm \sqrt{2,5K^2 + 4(0,75K^2)}}{2} = \begin{cases} 2,77K \\ -0,27K \end{cases} \quad \text{e } \sigma_p = 0$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 2,77K \\ \sigma_2 &= 0 \\ \sigma_3 &= -0,27K \end{aligned}$$

$$\sigma_{id} = \max \left( |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_2| \right) \leq \frac{\sigma_s}{S = 1}$$

$$\sigma_{id} = |2,77K + 0,27K| = \sigma_s = 360 \text{ MPa} \quad ; \quad 3,04K = 360 \quad ; \quad \boxed{K = 118 \text{ MPa}}$$

②



$$\sigma = \begin{bmatrix} 150 & 0 & -130 \\ 0 & K & 0 \\ -130 & 0 & 250 \end{bmatrix}$$

Modulo  $E = 70000 \text{ MPa}$   $\nu = 0,3$

$K = ?$  tale che sia uno stato di deformazione piano.

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

o  $K$  con tensione piano.

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} \left[ \sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right] =$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E} \left[ \sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right] =$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E} \left[ 250 - 0,3 (150 + K) \right] =$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E} \left[ K - 0,3 (150 + 250) \right]$$

$$K = \nu (150 + 250) = 120 \text{ MPa}$$



MATR. .... COGNOME ..... NOME .....

**Fondamenti di Meccanica Strutturale – Ingegneria Biomedica**  
**Esempio Tema di esame a.a. 2015-2016 – 06 Giugno**

**Esercizio n. 1**

(max punti 7)

Dato un tensore delle tensioni in cui:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 400 \text{ MPa} & \tau_{xy} &= 0 \\ \sigma_{yy} &= K & \tau_{xz} &= 40 \text{ MPa} \\ \sigma_{zz} &= 300 \text{ MPa} & \tau_{yz} &= 0 \end{aligned}$$

- 1.1 Valutare K affinché il tensore sia relativo ad uno stato di deformazione piana rispetto ad una direzione del sistema di riferimento cartesiano e determinare le tensioni principali ( $\nu = 0.3$ ,  $E = 210 \text{ GPa}$ ).
- 1.2 Disegnare i cerchi di Mohr e calcolare l'angolo  $\theta$  tra la direzione principale 1 e l'asse x. *→ essere orizzontale*
- 1.3 Valutare la tensione ammissibile del materiale con allungamento a rottura inferiore al 5% tale che garantisca un coeff. di sicurezza 2. Scegliere il criterio di rottura opportuno.

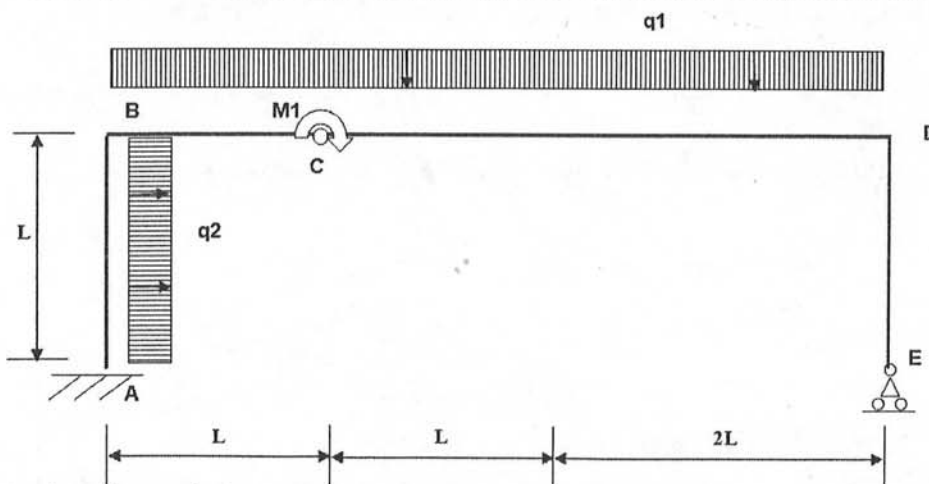
$K = 240 \text{ MPa}$        $\sigma_1 = 414 \text{ MPa}$        $\sigma_2 = 286 \text{ MPa}$        $\sigma_3 = 240 \text{ MPa}$   
 $\theta = 18^\circ$        $\sigma_{amm} = 614 \text{ MPa}$

**Esercizio n. 2**

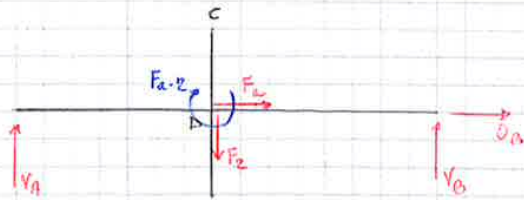
(max punti 9)

Data la struttura secondo lo schema seguente con:

- $L = 2 \text{ m}$
- $q_1 = 1000 \text{ N/m}$       carico distribuito dal punto B al punto D
- $q_2 = 500 \text{ N/m}$       carico distribuito dal punto A al punto B
- $M_1 = 500 \text{ Nm}$       coppia concentrata nel punto C applicata a destra della cerniera

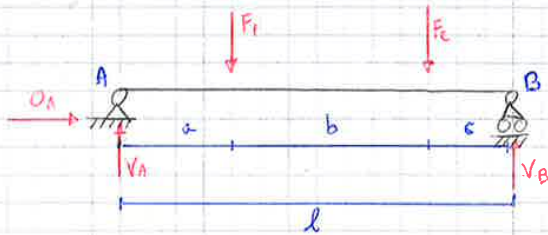


- 2.1 Determinare le reazioni vincolari.
- 2.2 Tracciare le caratteristiche di sollecitazione (indicando i valori numerici sui diagrammi).
- 2.3 Verificare la struttura a snervamento sezione circolare cava ( $D = 100 \text{ mm}$ ,  $d = 80 \text{ mm}$ ) con coeff. di sicurezza 2 e  $\sigma_s = 500 \text{ MPa}$ .



$$\overset{\curvearrowright}{A)} -F_2 \cdot c - F_2 \cdot c + V_B \cdot l = 0$$

③



$$q = 3 - 3 = 0 \quad 150$$

$$F_1 = 100 \text{ N} \quad F_2 = 200 \text{ N}$$

$$a = 60 \text{ mm} \quad b = ?$$

$$c = 45 \text{ mm} \quad l = 150 \text{ mm}$$

$$b = l - (a + c) = 45 \text{ mm}$$

$$\rightarrow^+ \quad O_A = 0 \text{ N}$$

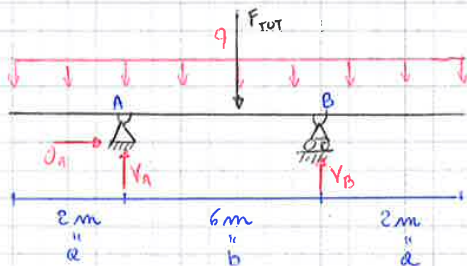
$$\uparrow^+ \quad V_A - F_1 - F_2 + V_B = 0$$

$$V_A = F_1 + F_2 - V_B = 120 \text{ N}$$

$$\overset{\curvearrowright}{A)} -F_1 \cdot a - F_2 \cdot (b+a) + V_B \cdot l = 0$$

$$V_B = \frac{F_1 \cdot a + F_2 \cdot (b+a)}{l} = 180 \text{ N}$$

⑤



$$q = 20 \text{ N/m}$$

$$a = 2 \text{ m} \quad b = 6 \text{ m}$$

$$F_{TOT} = q(2a + b) = 20(10) = 200 \text{ N}$$

$$\rightarrow^+ \quad O_A = 0 \text{ N}$$

$$O_A = 0 \text{ N}$$

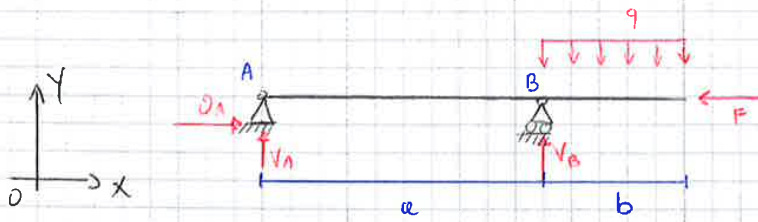
$$\uparrow^+ \quad V_A + V_B - F_{TOT} = 0$$

$$V_A = F_{TOT} - V_B = 100 \text{ N}$$

$$\overset{\curvearrowright}{A)} V_B \cdot b - F_{TOT} \cdot \left(\frac{b}{2}\right) = 0$$

$$V_B = \frac{F_{TOT}}{2} = 100 \text{ N}$$

8



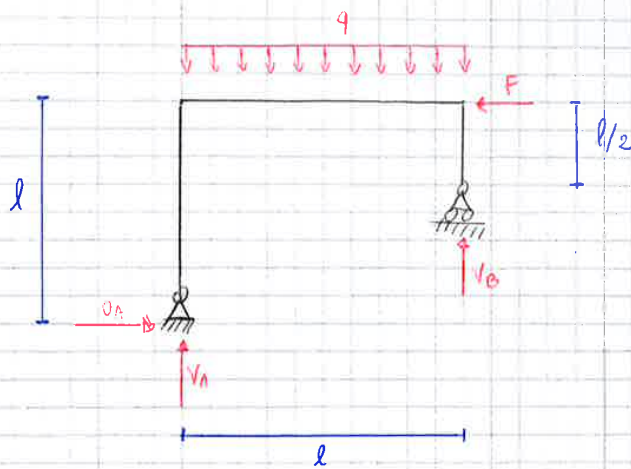
$a = 2 \text{ m}$   
 $b = 1 \text{ m}$   
 $F = 50 \text{ N}$   
 $q = 20 \text{ N/m}$

$\rightarrow^+ : OA - F = 0 \quad OA = F = 50 \text{ N}$

$\uparrow^+ : VA + VB - q \cdot b = 0 \quad VA = q \cdot b - VB = \text{---} - 5 \text{ N}$

$\curvearrowright^+ : +VB \cdot a - q \cdot b \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right) = 0 \quad VB = \frac{+q \cdot b \left(a + \frac{b}{2}\right)}{a} = +25 \text{ N}$

8



$l = 1 \text{ m} \quad F = 25 \text{ N}$   
 $q = 70 \text{ N/m}$

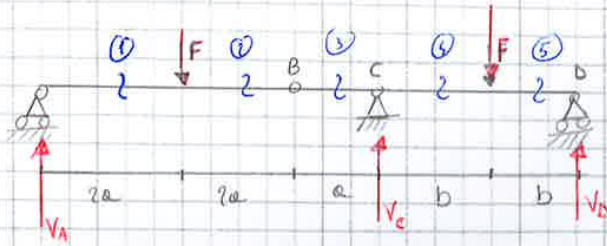
$\uparrow^+ : VA + VB - q \cdot l = 0 \quad VA = q \cdot l - VB = \text{---} 60 \text{ N}$

$\rightarrow^+ : OA = F = 25 \text{ N} \quad OA = 25 \text{ N}$

$\curvearrowright^+ : -q \cdot \frac{l^2}{2} + VB \cdot l + F \cdot l = 0 \quad VB = \frac{q \cdot \frac{l^2}{2} + F \cdot l}{l} = \text{---} 10 \text{ N}$

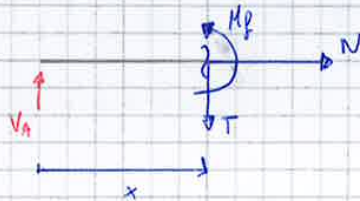
Eserc. ③

④



$F = 50 \text{ N}$   
 $a = 1,2 \text{ m}$   
 $b = 2 \text{ m}$   
 $V_A = 25 \text{ N}$   
 $V_C = 57,5 \text{ N}$   
 $V_D = 17,5 \text{ N}$

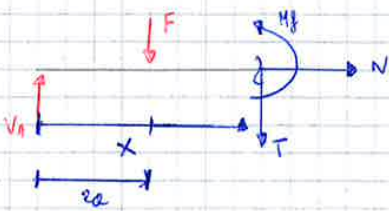
①  $0 < x < 2a$



$\rightarrow: N_x = 0$   
 $\uparrow: V_A - T_x = 0 \quad T_x = V_A = 25 \text{ N}$   
 $\curvearrowright: M_f - V_A \cdot x = 0$   
 $M_f = V_A \cdot x \begin{cases} x=0 & M_f = 0 \text{ Nm} \\ x=2a & M_f = V_A \cdot 2a = 60 \text{ Nm} \end{cases}$

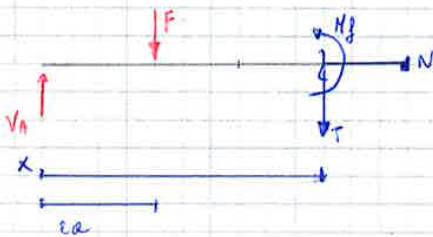


②  $2a < x < 4a$



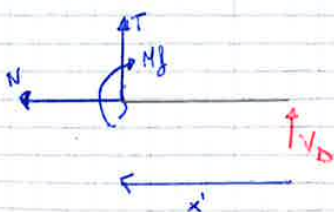
$N = 0$   
 $V_A - F - T = 0 \quad T = V_A - F = -25 \text{ N}$   
 $M_f + F \cdot (x - 2a) - V_A \cdot x = 0$   
 $M_f = V_A \cdot x - F \cdot (x - 2a) \begin{cases} x=2a & M_f = 60 \text{ Nm} \\ x=4a & M_f = 0 \text{ Nm} \end{cases}$

③  $4a < x < 5a$



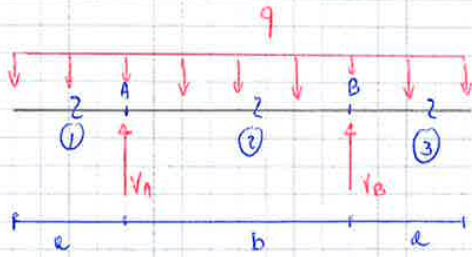
$N = 0 \text{ N}$   
 $V_A - F - T = 0 \quad T = -25 \text{ N}$   
 $M_f + F \cdot (x - 2a) - V_A \cdot x = 0$   
 $M_f = V_A \cdot x - F \cdot (x - 2a) \begin{cases} x=4a & M_f = 0 \text{ Nm} \\ x=5a & M_f = 150 - 180 \\ & M_f = -30 \text{ Nm} \end{cases}$

$0 < x' < b$

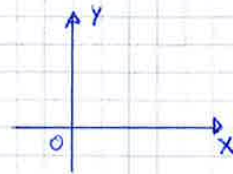


$N = 0$   
 $T + V_D = 0 \quad T = -V_D = -17,5 \text{ N}$   
 $M_f - V_D \cdot x' = 0 \quad M_f = V_D \cdot x' \begin{cases} x'=0 & M_f = 0 \text{ Nm} \\ x'=b & M_f = 35 \text{ Nm} \end{cases}$

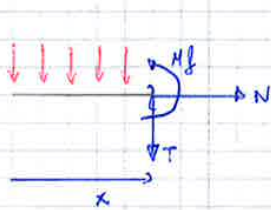
2



$V_A = 100 \text{ N}$       $a = 2 \text{ m}$   
 $V_B = 100 \text{ N}$       $b = 6 \text{ m}$   
 $q = 20 \text{ N/m}$

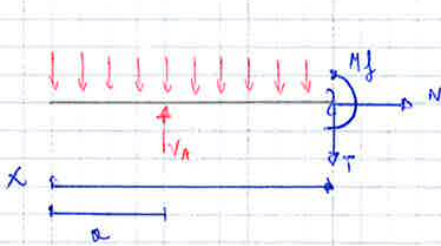


$0 < x < a$



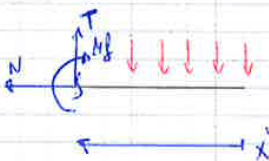
$\rightarrow^+ N = 0$   
 $\downarrow^+ T + q \cdot x = 0 \quad T = -q \cdot x \begin{cases} x=0 & T = 0 \text{ N} \\ x=a & T = -40 \text{ N} \end{cases}$   
 $\curvearrowright^+ M_f + q \cdot \frac{x^2}{2} = 0 \quad M_f = -q \cdot \frac{x^2}{2} \begin{cases} x=0 & M_f = 0 \text{ Nm} \\ x=a & M_f = -20 \text{ Nm} \end{cases}$

$a < x < b+a$

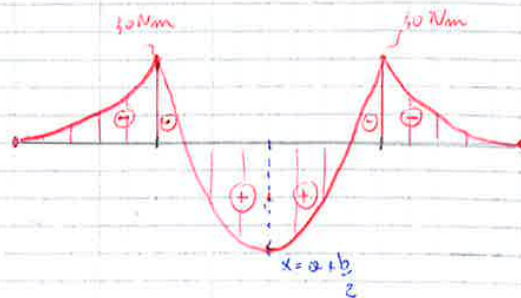


$\rightarrow^+ N = 0 \text{ N}$   
 $\uparrow^+ -T + V_A - q \cdot x = 0 \quad T = V_A - q \cdot x \begin{cases} x=a & T = 60 \text{ N} \\ x=b+a & T = -60 \text{ N} \end{cases}$   
 $\curvearrowright^+ M_f - V_A \cdot (x-a) + q \cdot \frac{x^2}{2} = 0$   
 $M_f = V_A \cdot (x-a) - q \cdot \frac{x^2}{2} \begin{cases} x=a & M_f = -40 \text{ Nm} \\ x=b+a & M_f = -40 \text{ Nm} \end{cases}$

$0 < x' < a$

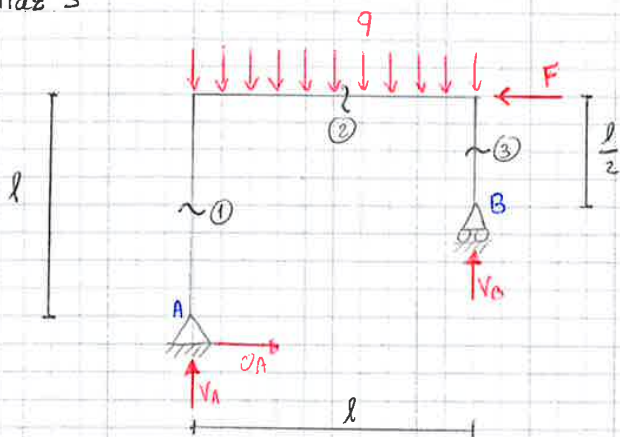


$N = 0$   
 $T - q \cdot x' = 0 \quad T = q \cdot x' \begin{cases} x=0 & T = 0 \text{ N} \\ x=a & T = 40 \text{ N} \end{cases}$   
 $-M_f - q \cdot \frac{x'^2}{2} = 0 \quad M_f = -q \cdot \frac{x'^2}{2} \begin{cases} x=0 & M_f = 0 \text{ Nm} \\ x=a & M_f = -20 \text{ Nm} \end{cases}$

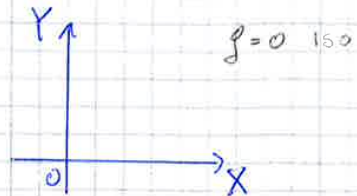


$M_f(a, \frac{b}{2}) = 50 \text{ Nm}$

① esercitaz 3



$l = 1 \text{ m}$   
 $F = 25 \text{ N}$   
 $q = 70 \text{ N/m}$



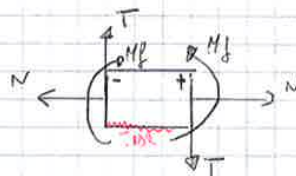
req. vincolari

$\uparrow^+ : V_A + V_B - q \cdot l = 0$   
 $\rightarrow^+ : O_A - F = 0$   
 $\curvearrowright^+ : -q \cdot \frac{l^2}{2} + F \cdot l + V_B \cdot \frac{l}{2} = 0$

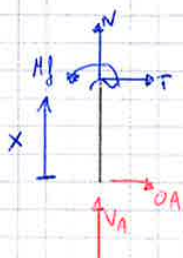
$V_A = q \cdot l - V_B = 70 - 10 = 60 \text{ N}$   
 $O_A = F = 25 \text{ N}$   
 $V_B = \frac{q \cdot \frac{l^2}{2} - F \cdot l}{l} = 10 \text{ N}$

$V_A = 60 \text{ N} \quad O_A = 25 \text{ N} \quad V_B = 10 \text{ N}$

caratt di sollecitazioni:



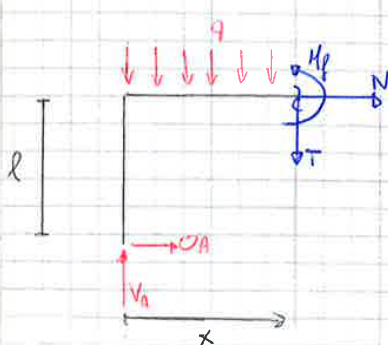
①  $0 \leq x \leq l$



$\uparrow^+ : N + V_A = 0 \quad N = -V_A = -60 \text{ N}$   
 $\rightarrow^+ : T + O_A = 0 \quad T = -O_A = -25 \text{ N}$   
 $\curvearrowright^+ : M_f + O_A \cdot x = 0 \quad M_f = -O_A \cdot x$

$M_f(0) = 0 \text{ Nm}$   
 $M_f(l) = -25 \text{ Nm}$

②  $0 < x < l$



$\uparrow^+ : V_A - T - q \cdot x = 0$   
 $\rightarrow^+ : N + O_A = 0$   
 $\curvearrowright^+ : M_f + q \cdot \frac{x^2}{2} + O_A \cdot l - V_A \cdot x = 0$

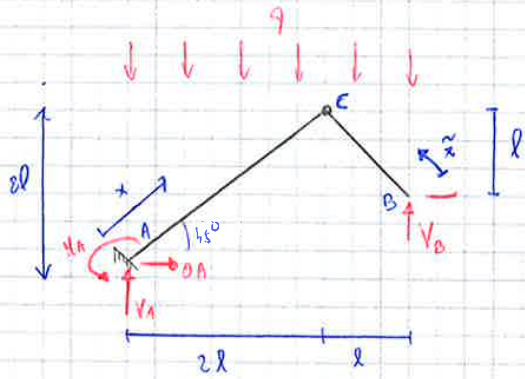
$T = V_A - q \cdot x$

$T(0) = 60 \text{ N}$   
 $T(l) = -10 \text{ N}$

$N = -O_A = -25 \text{ N}$

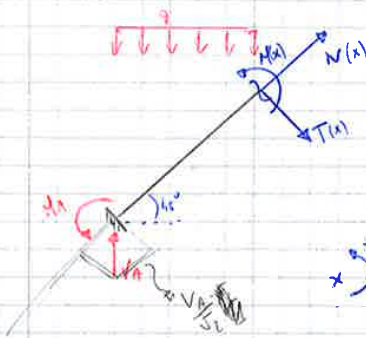
$M_f = V_A \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} - O_A \cdot l$

$M_f(0) = -O_A \cdot l = -25 \text{ Nm}$   
 $M_f(l) = 0 \text{ Nm}$



$$\begin{aligned}
 V_A &= 75 \text{ N} \\
 O_A &= 0 \text{ N} \\
 M_A &= 30 \text{ Nm} \\
 V_B &= 15 \text{ N} \\
 q &= 30 \text{ N/m}
 \end{aligned}$$

$$0 < x < 2l \cdot \sqrt{2}$$



$$N + \frac{V_A}{\sqrt{2}} - \left( q \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0$$

$$-T(x) + \frac{V_A}{\sqrt{2}} - \left( q \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$M(x) - V_A \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} + q \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \right) + M_A = 0$$

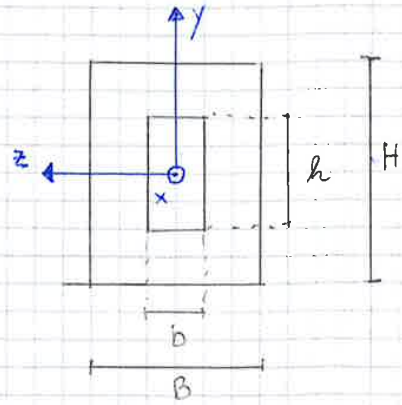
$$M(x) = V_A \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} - q \cdot \frac{x^2}{4} - M_A = \begin{cases} x=0 & M(0) = -M_A = -30 \text{ Nm} \\ x=2l\sqrt{2} & M(2l\sqrt{2}) = 0 \text{ Nm} \end{cases}$$

in e a B il momento sarà uguale a 0 (cassa interna e cavalletto)



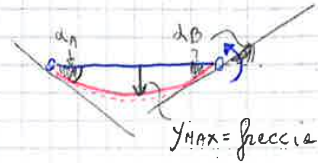
## Esercitazione 5 (linea elastica)

①



$B = 10 \text{ mm}$     $b = 6 \text{ mm}$     $H = 80 \text{ mm}$     $h = 16 \text{ mm}$   
 $C = 1 \text{ Nm}$     $l = 0,5 \text{ m}$

② Scrivere eq. linea elastica.  $E = 10^6 \text{ Pa} = 1000 \text{ MPa}$   
 $= 1000 \text{ N/mm}^2$

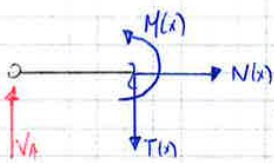


$$y''(x) = \frac{M(x)}{E \cdot J_z}$$

$$J_z = J_z^{\text{pieno}} - J_z^{\text{vuoto}} = \frac{B \cdot H^3}{12} - \frac{b \cdot h^3}{12} = 46,18 \text{ mm}^4$$

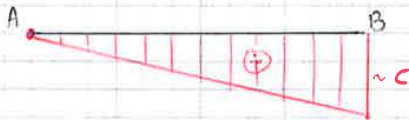
$$V_A = \frac{e}{l}$$

- carrello e cerniera esterna  $y(x) = 0$  (spost)
- incastro ( $y(x) = 0$  e  $d(x) = 0$ )
- continuità.



$$M(x) = \left(\frac{C}{l}\right) \cdot x$$

$$y''(x) = \frac{\left(\frac{C}{l}\right) \cdot x}{E \cdot J_z}$$



$$y'(x) = \frac{\left(\frac{C}{l}\right) x^2}{2 E \cdot J_z} + A_1$$

$$y'(x) = d(x)$$

$$y(x) = \frac{\left(\frac{C}{l}\right) x^3}{6 E J_z} + A_1 x + B$$

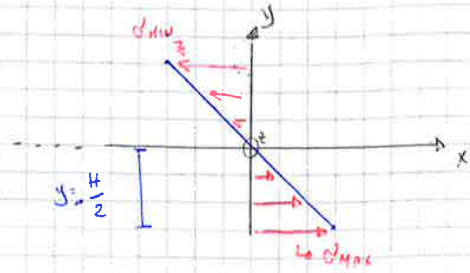
$$y(x=0) = 0 = B$$

$$y(x=l) = 0 = \frac{\left(\frac{C}{l}\right) \cdot l^3}{6 E \cdot J_z} + A_1 \cdot l \quad A_1 = -\frac{C \cdot l}{6 E J_z}$$

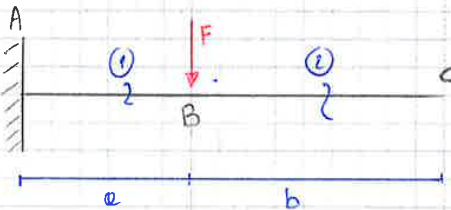
$$\sigma^f = \frac{-M(x)}{J_z} \cdot y \rightarrow \text{si prende dove il } \sigma^f \text{ è massimo, quindi in } B (x=l)$$

$$\sigma^f = -\frac{c}{J_z} \cdot y$$

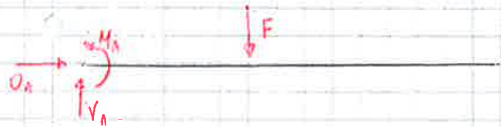
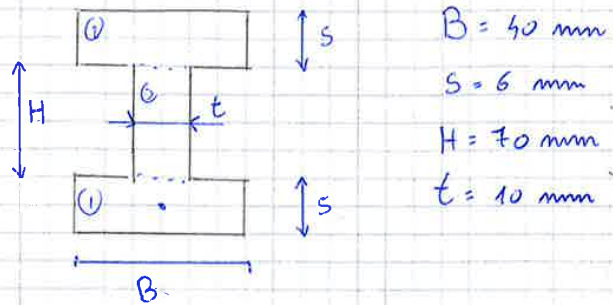
$$\sigma_{MAX}^f = -\frac{c}{J_z} \cdot \left(-\frac{H}{2}\right) = 2,2 \text{ MPa} = 2,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$



5

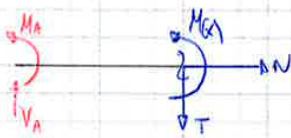


$a = 1,5 \text{ m}$      $E = 210 \text{ GPa}$   
 $b = 2,5 \text{ m}$      $F = 500 \text{ N}$



$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0 \text{ N}$   
 $\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V_A - F = 0 \text{ N} \Rightarrow V_A = F = 500 \text{ N}$   
 $\curvearrowright \sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - F \cdot a = 0 \Rightarrow M_A = +F \cdot a = +750 \text{ Nm}$

$0 < x < a$



$\curvearrowright \sum M = 0 \Rightarrow M(x) + M_A - V_A \cdot x = 0 \Rightarrow M(x) = V_A \cdot x - M_A$   
 $M(x) \begin{cases} x=0 & M(x) = -750 \text{ Nm} \\ x=a & M(x) = 0 \text{ Nm} \end{cases}$

$a < x < (b+a)$

$M(x) = 0 \text{ Nm}$