



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1987A -

ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Ferrero Stefano

MATERIA: Scienza delle Costruzioni 1 - Teoria per esame definitivo - Prof. Chiaia Surace

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Scienza
delle
Costruzioni
teoria

DOMANDE RICHIESTE ALL'ORALE

(alcuni esempi
di domande che
ho sentito
richiedere)

- TORSIONE TRAVE A SEZ. CHIUSA
- TENSIONI PRINCIPALI
- TEOREMA DI BETTI
- " " CLAPEYRON } saperli dimostrare benissimo!
- FLESSIONE DEVIATA
- SFORZO NORMALE ECCENTRICO
- I CRITERI DI RESISTENZA (4 criteri!)
- TENSORE DELLE DEFORMAZIONI
- " " TENSIONI
- I CERCHI DI MOHR: cosa sono, come calcolare le tensioni principali e le direzioni principali (metodo grafico e analitico)
- FORMULA DI BREDT: cos'è e a cosa serve, dimostrarla
- SOURAVSKY !!!
- CARICO CRITICO DI EULERO
- SIGNIFICATO DELLA σ_c (tensione critica)
- NOCCILO CENTRALE D'INERZIA
- PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI
- POTENZIALE ELASTICO
- SOLIDO DI DE SAINT VENANT: IPOTESI DI PARTENZA E PARTICOLARITÀ

TENSORE DELLE DEFORMAZIONI

Definisco f funzione spostamento come quella corrispondenza che associa ad ogni vettore di posizione $\{r\}$ dei punti del corpo in posizione iniziale e in configurazione indeformata, il vettore spostamento $\{\eta\}$ che tali punti subiscono portandosi il corpo in posizione finale e in configurazione deformata.



$$\begin{aligned} f: \mathcal{D} &\rightarrow \mathcal{C} \\ f: P &\mapsto P' \\ f: \{r\} &\mapsto \{r'\} \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{il dominio } \mathcal{D} \text{ della funzione } \text{è costituito dall'insieme dei punti geometrici} \\ \text{occupati dai punti materiali del corpo nello stato iniziale,} \\ \text{il codominio } \mathcal{C} \text{ è il volume occupato dal corpo nello stato finale.} \end{array} \right.$$

Si ha quindi un campo vettoriale di spostamenti, che possono venire proiettati su un S.R. fisso XYZ

$$\{\eta\} = u(x, y, z)\vec{i} + v(x, y, z)\vec{j} + w(x, y, z)\vec{k}$$

$u, v, w,$
sono le
componenti di
un vettore
spostamento

Sono nell'ipotesi di regolarità della funzione $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ che esclude fratture e compenetrazioni.
 f ed f^{-1} devono essere omeomorfismi (cioè continue e biettive)

IPOTESI

Considero un punto P , interno al corpo deformabile, e un punto Q appartenente al suo intorno infinitesimo

$$PQ = \{dr\} = (x_Q - x_P)\vec{i} + (y_Q - y_P)\vec{j} + (z_Q - z_P)\vec{k}$$



sviluppo f in serie di Taylor sino ai termini del primo ordine:

$$u_Q = u_P + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_P dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_P dy + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_P dz$$

$$v_Q = v_P + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_P dx + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_P dy + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_P dz$$

$$w_Q = w_P + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_P dx + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_P dy + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_P dz$$

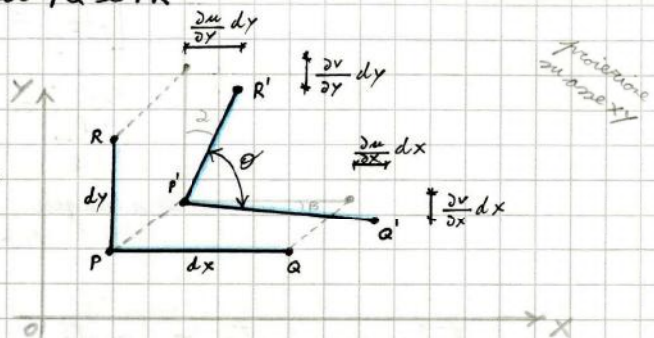
La funzione di spostamento f comprende $\left\{ \begin{array}{l} \text{DEFORMAZIONE} \Rightarrow \text{voglio trovare la deformazione} \\ \text{MOTO RIGIDO} \\ \text{(traslazione e/rotazione)} \end{array} \right.$

DILATAZIONI ϵ e SCORRIMENTI ANGOLARI γ

Considero due segmenti ortogonali PQ e PR di lunghezza infinitesima, all'interno del corpo nella posizione iniziale e nella configurazione indeformata.

Scelgo la terna di riferimento XYZ in modo che gli assi x e y siano rispettivamente // ai segmenti PQ e PR .

Quando il corpo è nella posizione finale e nella configurazione deformata, i due segmenti trasformati $P'a'$ e PR' oltre che rototraslati appaiono di lunghezza diversa da quella iniziale e non formano più un angolo retto.



MOTO RIGIDO + DEFORMAZIONE

(Come nella pag. prima, applico le eq. di sviluppo di Taylor... a questo caso che sto descrivendo)

$$Q \begin{cases} u_Q = u_P + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_P dx \\ v_Q = v_P + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_P dx \\ w_Q = w_P + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_P dx \end{cases}$$

$$R \begin{cases} u_R = u_P + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_P dy \\ v_R = v_P + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_P dy \\ w_R = w_P + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_P dy \end{cases}$$

Al terzo di infinitesimi di ordine superiore,

la DILATAZIONE SPECIFICA nella direzione asse $x = \frac{(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx) - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x$

che coincide con il primo termine diagonale della matrice delle deformazioni. E analogamente anche per ϵ_y ed ϵ_z .

Braccio gli SCORRIMENTI ANGOLARI $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$ rappresentano le diminuzioni (o variazioni negative) che gli angoli retti, formati dalle relative direzioni iniziali, subiscono a deformazione avvenuta.

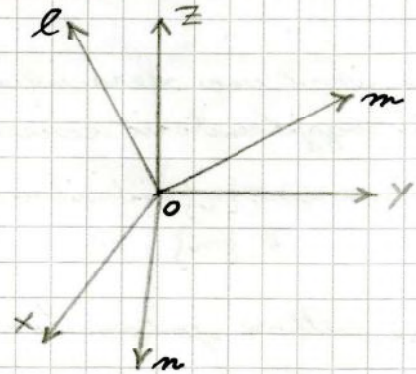
⊕ ϵ sono POSITIVE e di ALLUNGAMENTO

⊕ γ " " e RIDUCONO L'ANGOLO RETTO

$$\frac{\pi}{2} - \theta = \gamma_{xy}$$

Considero ora tre direzioni mutuamente ortogonali n, m, l , RUOTATE rispetto a quelle iniziali x, y, z .

Nel riferimento ruotato n, m, l , esprimo la legge di trasformazione della matrice delle deformazioni per rotazione del sistema di riferimento



è l'azione sottostante delle operazioni di rotazione

$$[E^*] = \begin{bmatrix} \epsilon_n & \frac{1}{2}\gamma_{nm} & \frac{1}{2}\gamma_{nl} \\ \frac{1}{2}\gamma_{nm} & \epsilon_m & \frac{1}{2}\gamma_{ml} \\ \frac{1}{2}\gamma_{nl} & \frac{1}{2}\gamma_{ml} & \epsilon_l \end{bmatrix}$$

Dalle relazioni ϵ_n e $\frac{1}{2}\gamma_{nm} = \frac{1}{2}\gamma_{mn}$ pagina prima

$$[E^*] = \begin{bmatrix} \{n\}^T [E] \{n\} & \{n\}^T [E] \{m\} & \{n\}^T [E] \{l\} \\ \{m\}^T [E] \{n\} & \{m\}^T [E] \{m\} & \{m\}^T [E] \{l\} \\ \{l\}^T [E] \{n\} & \{l\}^T [E] \{m\} & \{l\}^T [E] \{l\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{n\}^T \\ \{m\}^T \\ \{l\}^T \end{bmatrix} [E] \begin{bmatrix} \{n\} \\ \{m\} \\ \{l\} \end{bmatrix}$$

sono tre matrici quadrate (3x3)

pag. prima [ricordo la relazione $\{n_n\} = [E] \{n\}$]

la considero nel riferimento ruotato

$$[N] \{n_n\} = [E^*] [N] \{n\}$$

pre-moltiplico per $[N]^T$ entrambi i membri

$$\{n_n\} = [N]^T [E^*] [N] \{n\}$$

se pongo $\equiv [E]$ ottengo infatti $\{n_n\} = [E] \{n\}$

lunque $[E^*] = [N][E][N]^T \rightarrow$ forma compatta

ove $[N]$ è ortogonale e rappresenta la rotazione che porta dal S.R. XYZ al S.R. nml

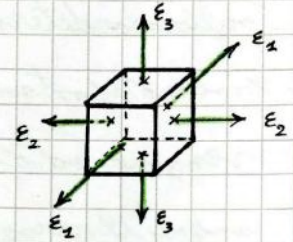
$$[N] = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \\ m_x & m_y & m_z \\ l_x & l_y & l_z \end{bmatrix}$$

CONCLUSIONE la matrice delle deformazioni è un TENSORE.

Anche la deformazione, come l'inertzia, è una grandezza fisica descrivibile solo in termini tensoriali

nei tre sistemi di riferimento appena scritti $\begin{matrix} \epsilon_1 \neq \epsilon_2 \neq \epsilon_3 \\ \epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 \\ \epsilon_1 = \epsilon_2 = -\epsilon_3 \end{matrix}$ naturalmente il tensore delle deformazioni è diagonale

dilatazioni principali $\begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix}$ essendo nulli gli scorrimenti angolari



dunque in questo caso gli invarianti della deformazione sono:

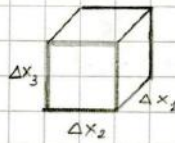
$$J_I = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$$

$$J_{II} = -(\epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_1 \epsilon_3 + \epsilon_2 \epsilon_3)$$

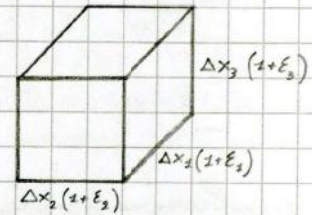
$$J_{III} = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3$$

dilatazione cubica (o volumetrica)

infatti ad esempio:



si deforma



parallelepipedo con lati orientati secondo le direzioni principali

V = volume nella configurazione indeformata

volume elemento dilatato

$$V' = V(1+\epsilon_1)(1+\epsilon_2)(1+\epsilon_3)$$

trascurando gli infinitesimi di ordine superiore

$$V' = V(1+\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3)$$

da cui ottengo la

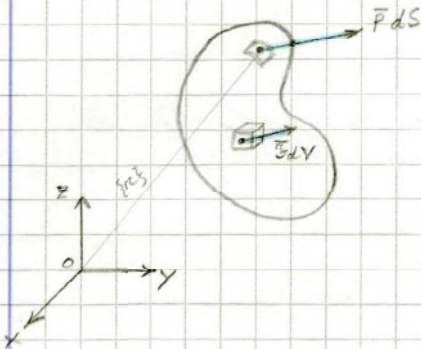
DILATAZIONE VOLUMETRICA

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{V' - V}{V} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = J_I$$

$$[t_n] = [S] \{n\}$$

matrice di trasformazione del vettore unitario nel relativo vettore tensione
 Gli elementi del tensore rappresentano le componenti speciali di tensione sui piani coordinati

TENSORE DEGLI SFORZI



Corpo in equilibrio sotto l'azione di forze distribuite sull'unità di superficie esterna $\{P\}$ e dell'unità di volume $\{F\}$.

Le eq. cardinali della statica impongono:

$$\int_S \{P\} dS + \int_V \{F\} dV = \{0\}$$

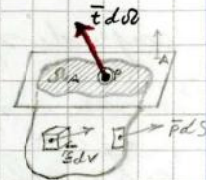
risultante forze di volume e di superficie = 0

$$\int_S \{r\} \wedge \{P\} dS + \int_V \{r\} \wedge \{F\} dV = \{0\}$$

momento risultante nullo

S = frontiera del corpo
 V = volume occupato dal corpo
 $\{r\}$ = vettore posizione punti del corpo

Seziono il corpo con un piano A per un generico punto P



Ciascuna delle delle due porzioni in cui è stato suddiviso il solido sarà in equilibrio sotto l'azione delle forze di superficie (quelle relative alla superf. periale esterna S_A e quelle relative alla sezione S_A) e di volume. e trasmesse dalla porzione complementare del corpo

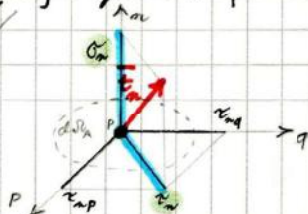
$$\int_{S_A} \{P\} dS + \int_{S_A} \{t\} dS + \int_{V_A} \{F\} dV = \{0\}$$

$$\int_{S_A} \{r\} \wedge \{P\} dS + \int_{S_A} \{r\} \wedge \{t\} dS + \int_{V_A} \{r\} \wedge \{F\} dV = \{0\}$$

$\{t\}$ vettore tensione è la forza trasmessa all'areola dS_A , che costituisce un intorno del punto P sul piano A. $\{t\}$ non è in generale ortogonale al piano A ed è funzione sia del punto P che del piano secante A. Se considero infatti una diversa sezione del corpo si troverà trova un diverso vettore tensione.

Una volta noti $\{r\}$ e $\{n\}$ posso definire il vettore tensione $\{t\} = \{t(\{r\}, \{n\})\} = \{t_n\}$

vettore di posizione
 versione normale all'areola dS



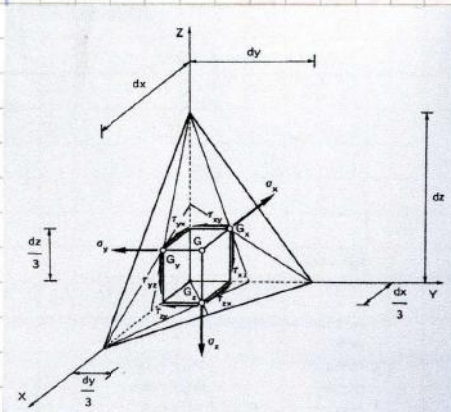
componenti di $\{t_n\}$ rispetto ad una terna locale, con uno degli assi coordinati coincidente con la normale all'areola dS e gli altri due giacenti sul piano di sezione

$$\{t_n\} = [\sigma] \{n\}$$

matrice SFORZI \Rightarrow matrice di trasformazione del vettore normale $\{n\}$ nel relativo vettore tensione $\{t_n\}$

M.B. ANALOGIE $\{t_n\} = [\sigma] \{n\}$ \rightarrow tensore del II ordine che trasforma il vettore $\{n\}$ nel vettore tensione $\{t_n\}$
 $\{e_n\} = [\epsilon] \{n\}$ \rightarrow " " " " " " " " " spostamento $\{e_n\}$

! σ e ϵ sono grandezze puntuali, sono presenti e definite in ogni punto del solido. Per questo si parla di campo



Considerando l'equilibrio alla rotazione del tetraedro si dimostra che la matrice $[\sigma]$ è simmetrica

Trova i baricentri delle varie facce e li unisci trovando un cubo (G_x, G_y, G_z)

Il cubo ha lato $\frac{dx}{3}, \frac{dy}{3}, \frac{dz}{3}$

Il baricentro G dell'area triangolare $d\Omega_n$ ha come proiezioni sui piani coordinati i baricentri delle aree $d\Omega_x, d\Omega_y, d\Omega_z$. Si applicano i vettori tensione a tali baricentri G_x, G_y, G_z , e si esprimano le condizioni di equilibrio

alla rotazione del tetraedro rispetto agli assi GG_x, GG_y, GG_z .

Nel caso ad esempio dell'asse GG_x , le cinque componenti speciali $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \sigma_y, \sigma_z$, presentano braccio nullo, mentre τ_{yx} e τ_{zx} sono parallele all'asse.

Le uniche due componenti che contribuiscono al momento rispetto all'asse GG_x sono τ_{zy} e τ_{yz}

$$\text{equilibrio: } \tau_{zy} d\Omega_z \frac{dz}{3} - \tau_{yz} d\Omega_y \frac{dy}{3} = 0$$

TENSIONE ELEMENTINO BRACCIO

ed avendo il volume del tetraedro $\frac{1}{3} A_{base} \cdot \text{altezza} = dV$

$$\frac{1}{3} d\Omega_y dy = \frac{1}{3} d\Omega_z dz = dV$$

otteniamo $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ così come anche

reciprocità tensioni tangenziali

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \text{e} \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

La matrice $[\sigma]$ è dunque simmetrica, con soltanto 6 componenti significative

Legge di trasformazione del tensore degli sforzi per ROTAZIONI del sistema di riferimento

- La proiezione del vettore tensione $\{t_n\}$ su una generica direzione di versore $\{m\}$ vale: $t_{nm} = \{m\}^T [\sigma] \{n\}$
- La proiezione del vettore tensione $\{t_m\}$ sulla direzione di versore $\{n\}$ vale: $t_{mn} = \{n\}^T [\sigma] \{m\}$

↳ Sviluppando le espressioni di t_{nm} e t_{mn} si ottiene la legge di reciprocità per le proiezioni del vettore tensione

$$t_{nm} = t_{mn} = \sigma_x n_x m_x + \sigma_y n_y m_y + \sigma_z n_z m_z + \tau_{xy} (n_x m_y + n_y m_x) + \tau_{xz} (n_x m_z + n_z m_x) + \tau_{yz} (n_y m_z + n_z m_y)$$

$n_x \ n_y \ n_z$
 componenti versore $\{n\}$

 $m_x \ m_y \ m_z$
 componenti versore $\{m\}$

Se i versori $\{n\}$ ed $\{m\}$ sono ortogonali, le proiezioni t_{nm} e t_{mn} diventano componenti speciali tangenziali:

$$\tau_{nm} = \tau_{mn} = \{m\}^T [\sigma] \{n\} = \{n\}^T [\sigma] \{m\}$$

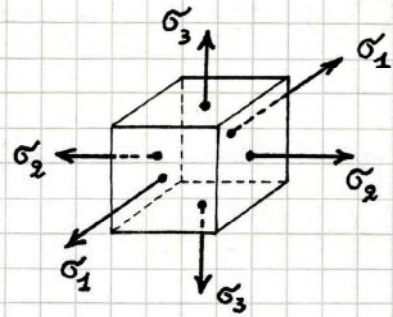
legge di reciprocità delle tensioni tangenziali

⇒ la simmetria della matrice $[\sigma]$ è un chiaro esempio

ORA: individuo la terna principale, rispetto alla quale il tensore diventa diagonale e le tensioni tangenziali quindi si annullano

DIREZIONI PRINCIPALI

della TENSIONE



Determino le giaciture rispetto alle quali sono presenti solo tensioni normali \nearrow figura

ciò significa che il vettore $\{n\}$ normale ad una tale giacitura, dovrà essere \parallel al relativo vettore tensione $\{t_n\}$

$$\{t_n\} = \sigma_n \{n\}$$

in generale vale però anche $\{t_n\} = [\sigma] \{n\}$ } $\xrightarrow{\text{da cui}}$ per la proprietà transitiva si ottiene

l'equazione agli autovalori che regge il problema: $([\sigma] - [I] \sigma_n) \{n\} = \{0\}$

in termini espliciti:

$$\begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_n) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_n) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La soluzione ovvia di tale sistema non ha significato fisico, dovendo i coseni direttori obbedire alla relazione di normalità $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$

La soluzione è diversa dalla ovvia, è rappresentata una **direzione principale** se e solo se il Det matrice coefficienti = 0

Tale condizione fornisce un'eq. algebrica di 3° grado nell'incognita σ_n

$$\sigma_n^3 - J_1 \sigma_n^2 - J_2 \sigma_n - J_3 = 0$$

invarianti scalari della tensione

[Moltiplicare e dividere per 3 il primo invariante]

Al posto del fattore 3, J_1 , assume il significato fisico di TENSIONE NORMALE MEDIA

$$J_1 = 3 \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = 3 \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = 3\bar{\sigma}$$

Ogni tensore degli sforzi, relativo ad una terna generica di riferimento, sarà quindi rappresentabile come:

$$\sigma = [\sigma^i] + [\sigma^d]$$

TENSORE IDROSTATICO

TENSORE DEVIATORICO

legato solo alle variazioni di volume

$$[\sigma^i] = \begin{bmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{bmatrix}$$

non dipende dalla terna di riferimento

[è detta idrostatica perché i liquidi in pressione si scambiano sforzi interni di tale tipo il vettore tensione è sempre normale a d.d. le tensioni principali sono tutte e tre uguali e quindi tutte le direzioni sono principali.]

$$[\sigma^d] = \begin{bmatrix} \sigma_x - \bar{\sigma} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \bar{\sigma} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \bar{\sigma} \end{bmatrix}$$

varia al variare dell'orientazione della terna di riferimento

legato alle distorsioni e ai cambiamenti di forma

ORA invece si dovrà, al problema delle tensioni principali, un'interpretazione grafica basata sul metodo dei cerchi di Mohr [da pag 225 a 231 libro]

→ nelle prossime pagine

Suppongo che tra le tensioni principali esista la relazione d'ordine $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$

Dovento risultare positive le espressioni a secondo membro delle precedenti relazioni, ottengo le seguenti disequazioni:

$$\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) \geq 0$$

$$\tau_n^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

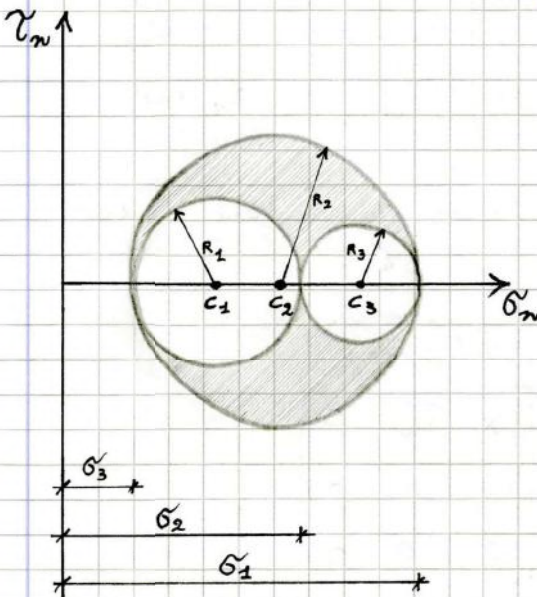
$$\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_3) \leq 0$$

$$\tau_n^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

$$\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) \geq 0$$

$$\tau_n^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2$$

tali diseq. sono equivalenti a queste



Queste equazioni ricordano la formula del cerchio:

$$y^2 + (x - x_{centro})^2 = \text{Raggio}^2$$

e infatti graficamente otteniamo i 3 cerchi di Mohr

Sul piano di Mohr tutte le coppie di componenti di normale σ_n e tangenziale τ_n , che si ottengono al variare del versore $\{n\}$, sono rappresentate dall'intersezione dei 3 domini.

Il primo è quello esterno alla circonferenza che ha centro sull'asse σ_n nel punto C_1 e raggio R_1

Il secondo dominio è quello interno alla circonferenza di centro C_2 $\left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0\right)$ e raggio $R_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$

Il terzo dominio è quello esterno alla circonferenza di centro C_3 $\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0\right)$ e raggio $R_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$

Nel caso in cui una oppure due delle tensioni principali sono nulle, vi saranno una oppure due intersezioni delle circonferenze con l'asse σ_n , coincidenti con l'origine

la prima eq. fornisce un risultato già noto poiché per ipotesi $\tilde{\sigma}_3 = 0$,
 la seconda eq. fornisce le due tensioni principali $\neq 0$, σ_1 e σ_2 .
 Risolvendo la seconda eq. si ottiene la coppia di radici:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

ascissa del centro C diametro del cerchio

Si può ottenere lo stesso risultato diagonalizzando il tensore degli sforzi (rendendo la matrice diagonale \rightarrow imponendo $\tilde{\tau}_{xy} = 0$)

$$[\sigma^*] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

annullando il termine non diagonale si ha

$$\tau_{xy}^* = \tau_{xy} \cos 2\theta - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta = 0$$

e quindi l'angolo di cui deve ruotare il sistema xy per raggiungere il sistema principale

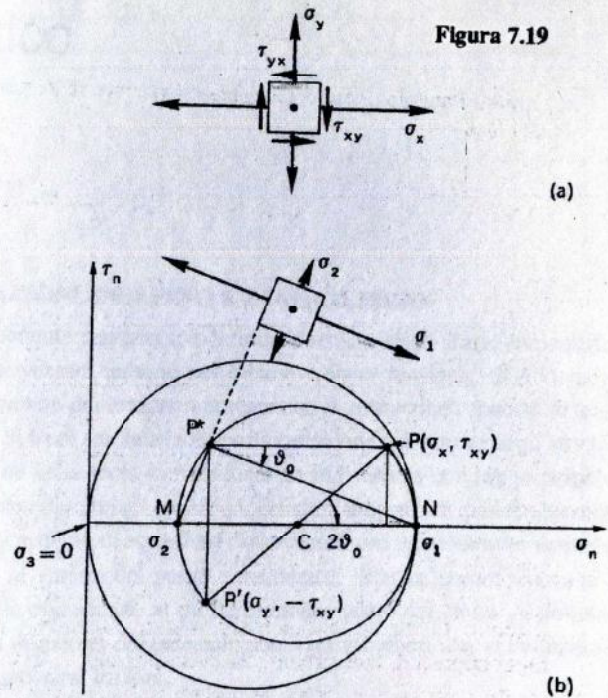
vale $\theta_0 = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)$

con $-\pi/4 < \theta_0 < \pi/4$

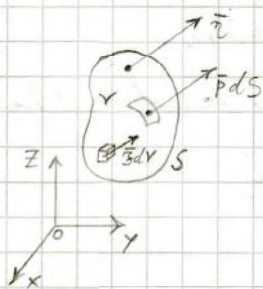
La costruzione grafica del cerchio di Mohr, rappresentativo di tutte le coppie di tensioni normali σ_n e tangenziali τ_n , che si hanno al variare dell'orientazione dell'areola $d\Omega$ in modo tale che il versore $\{n\}$ appartenga al piano delle tensioni, avviene in modo del tutto analogo a quanto si è già mostrato al Capitolo 2 per la geometria delle aree. Si immagini di conoscere le tensioni $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, agenti su un parallelepipedo elementare con i lati paralleli agli assi $XY3$ (fig. 7.19.a). Si consideri positiva la tensione tangenziale τ_{xy} se tende a fare ruotare in senso orario l'elemento (viceversa per τ_{yx}). Si fissino sul piano di Mohr (fig. 7.19.b) i due punti notevoli: $P(\sigma_x, \tau_{xy}), P'(\sigma_y, -\tau_{xy})$. L'intersezione del segmento PP' con l'asse σ_n fornisce il centro C del cerchio di Mohr, mentre i segmenti CP e CP' rappresentano due raggi opposti di tale cerchio. Si tracci poi per P la parallela all'asse σ_n e per P' la parallela all'asse τ_n . Queste due rette si incontrano nel polo P^* . Le rette congiungenti P^* con i punti M ed N dell'asse σ_n , intersezioni della circonferenza con tale asse, forniscono le direzioni dei due assi principali. Naturalmente i punti M ed N hanno ciascuno per ascissa il valore di una tensione principale. In particolare nella fig. 7.19.b, l'ascissa di M è σ_2 e l'ascissa di N è σ_1 , poiché si è supposto $\sigma_x > \sigma_y$ e le relazioni d'ordine si mantengono:

- (7.93.a) $\sigma_x > \sigma_y \Rightarrow \sigma_1 > \sigma_2$,
- (7.93.b) $\sigma_x < \sigma_y \Rightarrow \sigma_1 < \sigma_2$.

Quando $\sigma_x = \sigma_y, \tau_{xy} \neq 0$, è indifferente ruotare il sistema di riferimento XY di $\pi/4$ in senso orario oppure in senso antiorario, per ottenere le direzioni principali. Quando poi $\sigma_x = \sigma_y, \tau_{xy} = 0$, il cerchio di Mohr degenera in un punto. Si osservi d'altra parte che, supposto $\sigma_3 = 0$, l'insieme delle coppie (σ_n, τ_n) al variare del versore $\{n\}$ anche al di fuori del piano delle tensioni, è rappresentato dalla circonferenza con centro nel punto $(\sigma_x/2, 0)$ e raggio pari a $\sigma_x/2$. Il problema, cioè, resta pur sempre tridimensionale.



Tali equazioni costituiscono un sistema di tre eq. differenziali alle derivate parziali, nelle 6 funz. incognite $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$.
 Tale sistema è quindi tre volte indeterminato, in seguito aggiungendo le eq. cinematiche e le eq. costitutive alle eq. statiche, il problema diventerà complessivamente determinato.



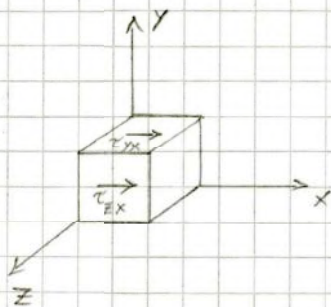
Sulla frontiera del dominio V , il vettore tensione deve coincidere con la forza di superficie $\{p\}$, applicata dall'esterno:

CONDIZIONI DI EQUIVALENZA AL CONTOURNO

$$\begin{cases} t_{nx} = \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z = p_x \\ t_{ny} = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z = p_y \\ t_{nz} = \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z = p_z \end{cases}$$

→ rappresentando una delle due condizioni al contorno relative al problema generale della meccanica dei solidi elastici (che verrà introdotto a breve)

Notazione delle τ



τ_{ij} = $\begin{cases} i = \text{normale uscente} \\ j = \text{asse //} \end{cases}$

Per quanto riguarda l'EQUILIBRIO ricordo le equazioni indefinite di equilibrio, anch'esse in forma matriciale e con le componenti di tensione ordinate nel vettore delle tensioni

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

EQ.
S
T
A
T
I
C
H
E

in forma compatta:

$$[\partial]^T \{\sigma\} + \{\beta\} = \{0\}$$

NB L'operatore differenziale statico $[\partial]^T$ risulta essere esattamente il trasposto di quello cinematico $[\partial]$

Per finire, anche alle eq. di equivalenza al contorno si può dare una forma matriciale esplicita:

$$\begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & n_y & n_z & 0 \\ 0 & n_y & 0 & n_x & 0 & n_z \\ 0 & 0 & n_z & 0 & n_x & n_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

e in forma compatta

$$[\mathcal{N}]^T \{\sigma\} = \{P\}$$

CONDIZIONI AL
CONTORNO

Oss: perfetta la corrispondenza tra $[\partial]^T$ e $[\mathcal{N}]^T$

il libro ora apre una digressione per dimostrare la regola di integrazione per parti su un dominio tridimensionale (è un'estensione del T. Green)

→ alla fine ottengo
$$\int_S f g n_x dS = \int_V \frac{\partial f}{\partial x} g dV + \int_V f \frac{\partial g}{\partial x} dV \quad (*)$$

• S: frontiera dell'intero dominio tridimensionale V

• è partito considerando due funz. delle tre coord. cartesiane $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ definite su un dominio tridimensionale

Chiedo sulla base di questa equazione e utilizzando la formulazione matriciale compatta, ottengo l'eq. dei lavori virtuali.

Considero il lavoro virtuale compiuto dalle $\{\beta_a\}$ per gli $\{\eta_b\}$

$$L_F = \int_V \{\beta_a\}^T \{\eta_b\} dV$$

appartengono a sistemi del tutto indipendenti

applicando le eq. statiche

$$[\sigma] \{\sigma_a\} = -\{\beta_a\}$$

$$L_F = \int_V ([\sigma] \{\sigma_a\})^T \{\eta_b\} dV$$

Nota che che sotto il segno di trasposizione c'è un operatore differenziale che trasforma una funzione vettoriale, e ricorrendo alla (*) ottengo:

$$L_F = \int_V \{\sigma_a\}^T [\sigma] \{\eta_b\} dV - \int_S \{\sigma_a\}^T [\sigma] \{\eta_b\} dS$$

applicando

le eq. cinematiche $[\sigma] \{\eta_b\} = \{\epsilon_b\}$

e le cond. di equivalenza al contorno $[\sigma] \{\sigma_a\} = \{p_a\}$

$$L_F = \int_V \{\sigma_a\}^T \{\epsilon_b\} dV - \int_S \{p_a\}^T \{\eta_b\} dS$$

e quindi:

$$\overset{L_{vi}}{\int_V \{\sigma_a\}^T \{\epsilon_b\} dV} = \overset{L_{ve}}{\int_V \{\beta_a\}^T \{\eta_b\} dV + \int_S \{p_a\}^T \{\eta_b\} dS}$$

prodotto scalare tra i vettori tensione e deformazione

Principio dei Lavori Virtuali per corpi deformabili

Il PLV è valido in generale SEMPRE, per qualsivoglia legge costitutiva del materiale (natura del materiale)

Oss: il lavoro degli incrementi delle forze $\{dP\}$ e $\{dF\}$, per gli incrementi di spostamento $\{d\eta\}$, risulta essere un infinitesimo di ordine superiore ed è quindi trascurabile

è un lavoro REALE

$$dL_e = \int_S \{P\}^T \{d\eta\} dS + \int_V \{F\}^T \{d\eta\} dV$$

$$dL_i = \int_V \{\sigma\}^T \{d\epsilon\} dV$$

incrementi di ϵ sul sistema (b)
 tensioni generate sul sistema (a)

e per il PLV vale l'uguaglianza: $dL_e = dL_i$

ORA: un corpo deformabile si definisce **ELASTICO** quando il lavoro infinitesimo è un "differenziale esatto" = è una funzione che ammette potenziale

Dunque affinché dL_i sia un differenziale esatto è necessario che lo sia l'integrando: $\{\sigma\}^T \{d\epsilon\} = d\Phi$

La funzione $\Phi = \Phi(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ funzione delle componenti di deformazione

deve dunque essere una funzione di stato ed è detta **POTENZIALE ELASTICO**, poiché è possibile dedurne le componenti di tensione mediante derivazione parziale:

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_x} d\epsilon_x + \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_y} d\epsilon_y + \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_z} d\epsilon_z + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{xy}} d\gamma_{xy} + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{xz}} d\gamma_{xz} + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{yz}} d\gamma_{yz}$$

$$d\Phi = \sigma_x d\epsilon_x + \sigma_y d\epsilon_y + \sigma_z d\epsilon_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{xz} d\gamma_{xz} + \tau_{yz} d\gamma_{yz}$$

→ ottengo le componenti di tensione:

$$\sigma_x = \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_x}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_y}$$

$$\sigma_z = \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_z}$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{xy}}$$

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{xz}}$$

$$\tau_{yz} = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{yz}}$$

Ma considero il lavoro VIRTUALE infinitesimo $d\psi = \{d\sigma\}^T \{\epsilon\}$

Ricordando $d\Phi = \{\sigma\}^T \{d\epsilon\}$ ottengo: $d\Phi + d\psi = d(\{\sigma\}^T \{\epsilon\})$

Il potenziale elastico Φ e il prodotto scalare $\{\sigma\}^T \{\epsilon\}$ sono entrambi funzioni di stato \Rightarrow quindi $d\Phi$ e $d(\{\sigma\}^T \{\epsilon\})$ sono differenziali esatti.

discende \swarrow

che anche $d\psi$ è un differenziale esatto e che quindi ψ è una funzione di stato.

La funzione $\psi = \psi(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$ è il **POTENZIALE ELASTICO COMPLEMENTARE**

e ne deduce le componenti di deformazione mediante derivazione parziale:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_x} d\sigma_x + \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_y} d\sigma_y + \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_z} d\sigma_z + \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{xy}} d\tau_{xy} + \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{xz}} d\tau_{xz} + \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{yz}} d\tau_{yz}$$

mentre esplicitando $d\psi = \{\sigma\}^T \{\epsilon\}$:

$$d\psi = \epsilon_x d\sigma_x + \epsilon_y d\sigma_y + \epsilon_z d\sigma_z + \gamma_{xy} d\tau_{xy} + \gamma_{xz} d\tau_{xz} + \gamma_{yz} d\tau_{yz}$$

ottengo le componenti di deformazione:

$$\epsilon_x = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_y}$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{xy}}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{xz}}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{yz}}$$

con trovo $\sigma_x = \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_x}$

ELASTICITÀ LINEARE

Sviluppo la funzione potenziale elastico $\Phi = \Phi(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ in serie di Maclaurin nell'intorno dell'origine, cioè nell'intorno dello stato indeformato:

$$\Phi(\epsilon_x, \epsilon_y, \dots, \gamma_{yz}) = \Phi(0) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_x}\right)_0 \epsilon_x + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_y}\right)_0 \epsilon_y + \dots + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{yz}}\right)_0 \gamma_{yz} + \left. \begin{aligned} &+ \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_x^2}\right)_0 \epsilon_x^2 + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_y^2}\right)_0 \epsilon_y^2 + \dots + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_{yz}^2}\right)_0 \gamma_{yz}^2 + \right. \\ &+ 2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_x \partial \epsilon_y}\right)_0 \epsilon_x \epsilon_y + 2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_x \partial \gamma_{yz}}\right)_0 \epsilon_x \gamma_{yz} + \dots + 2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_{xz} \partial \gamma_{yz}}\right)_0 \gamma_{xz} \gamma_{yz} \left. \right\} + \dots \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{1° ordine} \\ \text{2° ordine} \\ \text{ordini successivi} \end{array}$$

derivata parziale rispetto a $\epsilon_x \rightarrow$ mi dà la tensione σ_x

in fatto qui ho 36 quantità non nulle

OK

Se le deformazioni sono sufficientemente piccole posso trascurare i termini di ordine superiore al secondo.

Bolte, dato che le tensioni si ottengono per derivazione di Φ , il valore della funzione nell'origine risulta essere una costante arbitraria, che posso assumere nulla: $\Phi(0) = 0$. Anche i coefficienti dei termini del primo ordine sono dunque nulli, poiché rappresentano le tensioni nello stato indeformato

la derivata prima mi dà la tensione \rightarrow la tensione nello stato indeformato è nulla

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_x}\right)_0 = \sigma_x(0) = 0$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_y}\right)_0 = \sigma_y(0) = 0$$



Così quindi ridurre lo sviluppo in serie ad una forma quadratica, con 21 coefficienti che posso ordinare in una matrice Hessiana (6x6)

$$[H] = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_x^2}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_x \partial \epsilon_y}\right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_x \partial \gamma_{yz}}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_y \partial \epsilon_x}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_y^2}\right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_y \partial \gamma_{yz}}\right)_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_{yz} \partial \epsilon_x}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_{yz} \partial \epsilon_y}\right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_{yz}^2}\right)_0 \end{bmatrix}$$

e in forma matriciale compatta:

$$\Phi = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T [H] \{\epsilon\}$$

è una forma quadratica DEFINITA POSITIVA perché il potenziale DEVE essere SEMPRE positivo

Φ non è MAI negativo

qui ci sono tutte le 36 derivate seconde

PROBLEMA ELASTICO LINEARE

Voglio trovare lo stato tensionale e deformativo (6 componenti di tensione) sotto l'azione delle forze esterne.

Le 3 equazioni indefinite di equilibrio sono insufficienti per determinare le 6 componenti di tensione.

In forma matriciale posso dare una rappresentazione sintetica ed esplicita del problema elastico lineare, considerando come incognita primaria il vettore spostamento $\{\eta\}$

Abbiamo:

- Eq. Equilibrio: $[\sigma]^T \{\sigma\} = -\{\beta\}$ eq. statica: $[\sigma]^T \{\sigma\} + \{\beta\} = \{0\}$
- Eq. costitutive: $\{\sigma\} = [H] \{\epsilon\}$ legge costitutiva
- Eq. congruenza: $\{\epsilon\} = [D] \{\eta\}$ eq. cinematica

Dunque ho: $[\sigma]^T \{\sigma\} = -\{\beta\}$

$$[\sigma]^T [H] \{\epsilon\} = -\{\beta\}$$

$$([\sigma]^T [H] [D]) \{\eta\} = -\{\beta\}$$

Eq. di Lamé in forma operatoriale

$$[L] \{\eta\} = -\{\beta\}$$

OPERATORE DI Lamé

(3x3) è un operatore matriciale e differenziale del 2° ordine

Richiamando le eq. di equivalenza al contorno $[\sigma]^T \{\sigma\} = \{P\}$ e supponendo che esse valgano su una porzione S_p della superficie esterna del corpo, e che sulla porzione complementare S_n venga imposto un campo congruente di spostamenti $\{\eta_0\}$, il problema elastico tridimensionale è:

sono equazioni lineari



$$([\sigma]^T [H] [D]) \{\eta\} = \{P\}$$

$$\{\eta\} = \{\eta_0\}$$

$$\forall P \in V$$

$$\forall P \in S_p$$

$$\forall P \in S_n$$

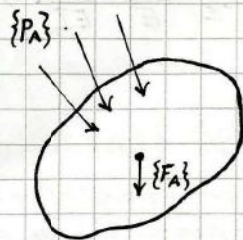
1) Vale l'eq. di Lamé

2) Vettore tensione \equiv vettore F. surf.

Posso trovare una soluzione alla matrice di 6 incognite

Nel Principio e Teoremi fondamentali dell'elasticità lineare il primo è:

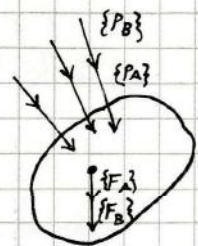
PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI



Trivarsi il campo degli spostamenti

$$\{u_A\} \rightarrow \text{trovo } [E_A] \rightarrow [\sigma_A]$$

Che in un secondo momento aggiungo al corpo un nuovo sistema di forze P_B sommato al precedente. Corso studiare il secondo carico separatamente



$$\{u_B\} \rightarrow \text{trovo } [E_B] \rightarrow [\sigma_B]$$

Che se li ho studiati separatamente ci interessa il problema della simultaneità, cosa capita in questo caso?

Empiricamente si SOMMANO I RISULTATI ottenendo che la Σ totale $\bar{\epsilon}$ = alla Σ delle sollecitazioni

Quindi avremo:

$$\{u_A\} + \{u_B\} \quad \{E_A\} + \{E_B\} \quad [\sigma_A] + [\sigma_B]$$

Non interessa in che ordine arrivano i carichi, ma solamente il loro totale

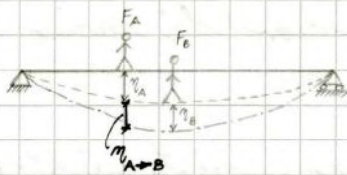
N.B. L'unica cosa che non si sovrappone è l'ENERGIA

FONDAMENTALE

TEOREMA DI BETTI

(valido sempre sull'ipotesi di elasticità lineare)

Mostra come il Principio di Sovrapposizione degli Effetti nell'elasticità lineare vale solo per spostamenti, deformazioni e tensioni ma **NON È** applicabile invece al lavoro di deformazione (ovvero in caso di lavoro mutuo)



$$L_A = \frac{1}{2} F_A \cdot u_A$$

$$L_B = \frac{1}{2} F_B \cdot u_B$$

Per capire di cosa parliamo

Nonostante il carico sia applicato in B, anche A ha risentito della seconda sollecitazione

$$L_{A \rightarrow B} = F_A \cdot u_{A \rightarrow B}$$



non mette $\frac{1}{2}$ perché non è più l'area di un triangolo in cui la trave partiva da scarico, ma risulta essere un rettangolo in cui la trave è carica prima che F_B sia applicato

Se è solo il corpo è IPERELASTICO: $L_{A+B} = L_{B+A}$

$$L_A + L_B = L_{A \rightarrow B}$$

Se due sistemi sono energeticamente ortogonali \Rightarrow NON generano lavoro mutuo

Prof.

CHIAIA

ci dice che (dimostra) i lavori mutui generati da due o più sistemi di forze sono tra loro eguali.

Questo teorema si basa sullo studio di due sistemi di forze che agiscono su un corpo \rightarrow calcolerò il lavoro mutuo ipotizzando una successione inversa dei carichi portati.

N.B. Il Principio di Sovrapposizione degli Effetti è molto comodo perché ci consente dato un qualunque sistema di forze di poterle scomporre, studiarle singolarmente e quindi studiarne gli effetti

è valido solo per spostamenti, deformazioni e tensioni

Come possiamo vedere il lavoro mutuo?

lavoro di trascinamento

Q1
L'applicazione del sistema (b) in aggiunta al sistema (a) già presente, produce il lavoro di trascinamento L_{AB} delle forze del sistema (a) per gli spostamenti indotti dal sistema (b)

DOMANDA ESAME

LAVORO MUTUO

$$L_{ab} = \int_V \{F_a\}^T \cdot \{u_b\} dV + \int_S \{P_a\}^T \{u_b\} dS$$

non compare $\frac{1}{2}$!

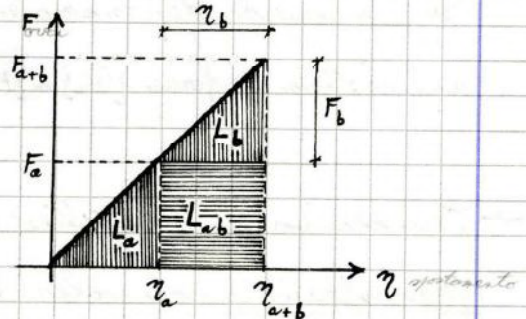
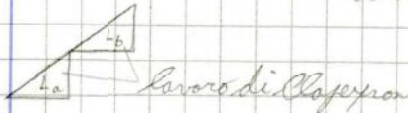
perché la forza $\{F_a\}$ e $\{P_a\}$ è già presente sul corpo con il suo valore finale \Rightarrow qui (L_{ab}) non vale il T. Clapeyron

[è un lavoro di forze (a) che sono già presenti; "in attesa", "ferme", sferragliate, fatte lavorare in modo indiretto per trascinamento per effetto degli spostamenti di (b)]

Quindi il lavoro totale

$$L_{a+b} = L_a + L_b + L_{ab}$$

del sistema a + sistema b



DOMANDA ESAME

Partendo dall'origine applichiamo gradualmente in un processo statico il sistema di forze (a) finché la forza arriva al valore F_a , lo spostamento al valore u_a , e l'energia immagazzinata è il triangolo L_a .

Dal valore finale di F_a vedo ad aggiungere una forza F_b , questa forza cresce in modo lineare, insieme allo spostamento che diventa u_{a+b} . L'energia del sistema (b) è L_b .

Mentre le forze (b) stanno compiendo il lavoro triangolare di Clapeyron, le forze (a) vengono trascinate per effetto dello spostamento u_{a+b} e compiono lavoro di trascinamento rettangolare.

Questo mi dimostra che il Principio di Sovrapposizione degli effetti non è valido per il lavoro di deformazione

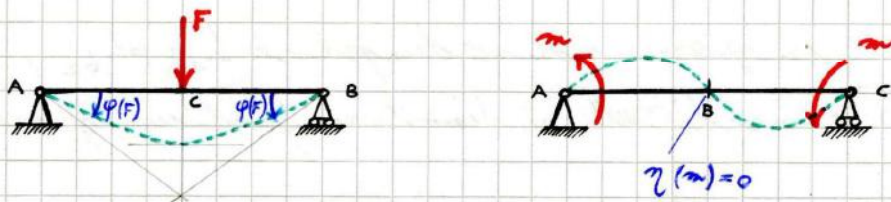
* già presente sul corpo e che ha già raggiunto il suo valore finale (forze e spostamenti)

In generale i lavori mutui di due sistemi di forze sono uguali
 al loro e $\neq 0$.

Quando i lavori mutui sono entrambi nulli, i due
 sistemi di forze si dicono essere **ENERGICAMENTE ORTOGONALI** e
 il Principio di Sovrapposizione degli effetti diventa valido
 anche per il lavoro di deformazione.

ESEMPIO

Trave appoggiata costituita di materiale elastico lineare



3 due sistemi di forze esterne: la forza concentrata F in
 mezzavia e i due momenti concentrati m applicati in senso
 concorde alle estremità, sono **energeticamente ortogonali**.

Infatti il loro lavoro mutuo è nullo:

$$S_{12} = S_{21} = 0$$

$$F \times \phi = m \cdot \varphi(F) - m \cdot \varphi(F)$$

essendo nullo l'abbassamento in mezzavia nel secondo schema,
 che è antisimmetrico, e risultando uguali e opposte le rotazioni
 elastiche estreme nel primo schema, che è simmetrico

⇒ vedremo in seguito che: le caratteristiche della sollecitazione
 interna della trave sono energeticamente
 ortogonali tra loro (eccetto pochi casi)

Nel solido di D.S.V. le sollecitazioni applicate alle travi sono tra
 loro ortogonali ⇒ M, N, T sono tra loro en. ort. Potrà applicare il princ. di sovr. effetti.

Potrò fare una somma delle energie
 del lavoro di deformazione

ISOTROPIA

new
IPOTESI:

Il nostro corpo oltre a essere elastico lineare e iperelastico è anche ISOTROPO.

⇒ sotto le ipotesi di isotropia il comportamento elastico può essere descritto da 2 sole costanti indipendenti e non 21 come nel caso generale dell'elasticità lineare



Def.
corpo
deformabile
isotropo

Ciò significa che le proprietà meccaniche sono considerate identiche in tutte le direzioni uscenti dal punto P.

⇒ Non esistono quindi direzioni preferenziali, il pot. elastico complementare Ψ dipenderà dai valori delle tre tensioni principali, e non dall'orientazione del sistema principale di riferimento:

$$\Psi = \Psi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

essendo Ψ una forma quadratica delle componenti di tensione, possiamo scrivere:

$$\Psi = \frac{1}{2E} \left\{ \overbrace{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)}^{\text{quadrati}} - 2\nu \overbrace{(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)}^{\text{prodotti misti}} \right\}$$

Da 21 coefficienti si riducono quindi a due (costanti del materiale) E, ν [ad] ^{elastici} _{indipendenti} ^{della matrice [II] tensoriale} ^{di isotropia}

[N.B.: Se in più il materiale è omogeneo $\Rightarrow E$ e ν saranno le stesse in tutti i punti del corpo] richiamando gli invarianti $\Psi = \frac{1}{2E} \{ J_I^2 + 2 J_{II} (1+\nu) \}$

Conseguenze di invarianti anche in funzione delle generiche componenti, su un sistema che non sia quello principale: di $\{\sigma\}$

$$\Psi = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)$$

POT. ELAST. COMPLEMENTARE NEL CASO DI ELASTICITÀ LINEARE E ISOTROPA

$$\rightarrow G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

La G è una combinazione di E e ν (compare quando entrano in gioco τ)

Raccolgo i termini in forma matriciale e scrivo

vettore deformazioni $\epsilon = [H]^{-1} \cdot$ vettore tensioni σ

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}$$

matrice Hessiana inversa che nasce fuori nelle ipotesi di isotropia, contiene al suo interno le tre costanti elastiche E, ν, G ma G è una funzione di E e ν ($G = \frac{E}{2(1+\nu)}$) dunque ci sono soltanto 2 costanti indipendenti: E, ν

RICORDO che la matrice Hessiana è definita positiva (affinché lo stato deformato sia un minimo assoluto $\text{Det}[H] > 0$). Positivi dovranno dunque essere anche i minori principali; ricavo che queste due condizioni:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{bmatrix} > 0 \quad \frac{1}{G} > 0$$

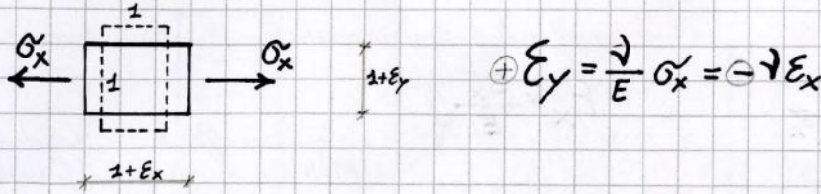
esse mi danno delle restrizioni sui segni e ai valori delle costanti elastiche

limitazioni MATEMATICHE che nascono fuori dalla richiesta di invertibilità della Hessiana in caso ISOTROPO

$$\left\{ \begin{array}{l} E > 0 \\ -1 < \nu < \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

(un'osservazione fisica mi darà a breve una limitazione ulteriore su ν)

ν = Coef. di contrazione trasversale = coeff. di Poisson



Al seguito di un allungamento ϵ_x nella direzione σ_x si ha una contrazione del cubetto ϵ_y , di segno opposto alla tensione agente.

N.B. Se la tensione fosse di compressione avremmo invece un rigonfiamento trasversale.

Le deformazioni trasversali sono sempre di segno opposto alla tensione monoassiale dominante

ν è il rapporto tra le dilatazioni indotte nelle direzioni ortogonali a quella di sollecitazione e la dilatazione nella direzione di sollecitazione

$$\nu = \left| \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} \right| = \left| \frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} \right|$$

dilatazione trasversale

dilatazione dominante, parallela alla direzione della sollecitazione

quindi nell'esempio sopra le contrazioni trasversali valgono:

$$\epsilon_y = -\frac{\nu}{E} \sigma_x = -\nu \epsilon_x$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{E} \sigma_x = -\nu \epsilon_x$$

⇒ Poiché le dilatazioni trasversali sono sempre discordi a quelle longitudinali ⇒ ν dev'essere positivo

remember: poco fa avevo trovato che $-1 < \nu < \frac{1}{2}$ ora >

$0 < \nu < \frac{1}{2}$

dunque l'osservazione fisica mi da una limitazione più stringente

Quunque ν sempre positivo e contrazioni discordi alla dilatazione dominante

La proporzionalità diretta tra scorrimenti angolari e tensioni tangenziali

$$\delta_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \delta_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad \delta_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

ci assicura questa fondamentale proprietà dei corpi isotropi:

«Le direzioni principali di deformazione coincidono con quelle di tensione»

Es: le direzioni nelle quali sono nulle le γ sono quelle in cui saranno anche nulle le τ

Se inoltre in un corpo linearmente elastico e isotropo le funzioni E e ν sono costanti in ciascun punto \Rightarrow CORPO OMOGENEO

L'ACCIAIO e il CLS vengono (entro certi valori di soglia) considerati linearmente elastici, isotropi ed omogenei

N.B. l'ipotesi di elasticità lineare è accettabile solo nelle condizioni in cui i materiali non siano eccessivamente sollecitati.

	E (Kg/cm ²)	ν	σ_{max} (Kg/cm ²)
ACCIAIO	2100'000	0,30	2400
CALCESTRUZZO	250'000	0,15	30

1 MPa = 10 Kg/cm²
 \downarrow
 N/mm²

\downarrow
 valore della tensione normale di trazione che provoca lo scorrimento o la rottura

Nel c.a. l'armatura la si permette nella direzione di allungamento del c.l.s.

Il taglio è la causa della τ nel c.l.s. \rightarrow da lì capisci dove mettere i ferri

N.B. L'ordine di grandezza della deformazione al di sotto del quale ha senso fisico l'idealizzazione elastica lineare è compreso tra 10^{-3} e 10^{-4}

Dunque i criteri di resistenza sono differenziati per i materiali duttili e i materiali fragili.

CRITERI DI RESISTENZA



Per materiali duttili, caso monoassiale

asta tesa ← →

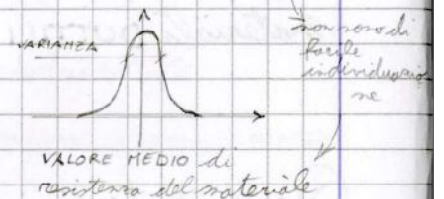
$$\sigma_z = \frac{F}{A}$$

tensione max di compressione $-\sigma_c$
 tensione max di trazione σ_t
 $-\sigma_c < \sigma < \sigma_t$
 all'interno dell'asta

γ coeff. di sicurezza > 1

tanto più grande tanto più è grande la varianza, e l'incertezza dei dati sperimentali

tensione agente sul materiale deve essere $<$ tensione limite



dividendo dunque le tensioni limite sperimentali per γ . Il coefficiente di resistenza diventa questa γ alibatte resistenza per darci sicurezza

$$-\frac{\sigma_c}{\gamma} < \sigma < \frac{\sigma_t}{\gamma}$$

coefficiente di sicurezza stabilimento = 1,2
 γ del materiale = 1,4 + 1,5 in opera

Oss: in laboratorio facciamo sempre prove ~~mono~~ monoassiali ma le strutture reali sono soggette a uno stato tensionale pluriaassiale

I criteri di resistenza servono dunque di determinare una **tensione equivalente** o **tensione ideale** σ_{eq} (funzione delle 6 componenti indipendenti di σ)

$$\sigma_{eq} = f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$$

tale che alla fine questa σ_{eq} si possa comunque confrontare con la tensione limite σ_p che viene determinata da prove

monoassiali (perché le prove pluriaassiali, triassiali, sono molto difficili da fare in laboratorio)

$$|\sigma_{eq}| < \frac{\sigma_p}{\gamma}$$

x Tresca: responsabili della crisi del materiale
 ↑ sono le tensioni tangenziali

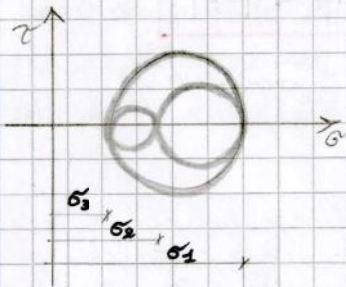
CRITERIO
TENSIONIALE

2. Criterio di Tresca (1864) e della massima tensione tangenziale

Partendo dall'osservazione sperimentale della scarsa importanza dello stato idrostatico nei confronti dello scorrimento del materiale, mentre invece per lo scorrimento sono molto importanti le nomine tensioni tangenziali:

Tresca dice che responsabile della crisi del materiale è la max tensione tangenziale

La max tensione tangenziale è il raggio del più grande dei 3 cerchi di Mohr



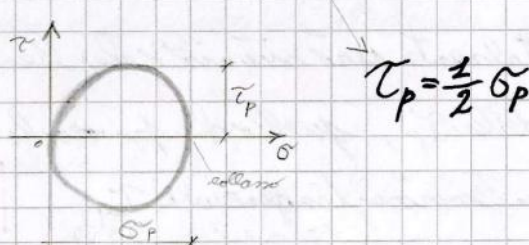
$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3| \}$$

valore massimo di differenza delle tensioni principali

ad esempio in questo caso $\tau_{max} = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_3|$

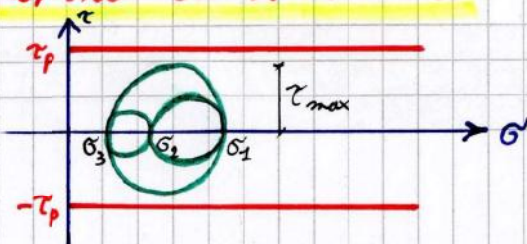
Qual è la tensione tangenziale limite da confrontare con questa τ_{max} ? → la ricavare dalla prova monassiale di laboratorio, che per i materiali DUTTILI

cerchio di Mohr relativo alla prova monassiale di trazione



$$\tau_p = \frac{1}{2} \sigma_p$$

Rappresentazione nel piano di Mohr del criterio di Tresca



$$\max \{ |\sigma_2 - \sigma_1|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3| \} < \sigma_p$$

FASCIA DI SICUREZZA

Tutti e tre i cerchi di Mohr di uno stato tensionale pluriaassiale devono essere contenuti all'interno della fascia di sicurezza di dimensione σ_p , quindi identificata tra τ_p e $-\tau_p$. Quindi τ_{max} deve essere minore di τ_p ⇒ MATERIALE VERIFICATO

sempre materiali duttili

È il criterio attualmente più diffuso nei programmi di calcolo per la resistenza dell'acciaio

CRITERIO ENERGETICO

3. Criterio di Huber (1904) - Von Mises (1913) della massima energia di distorsione

Considera responsabile della crisi puntuale del materiale l'ENERGIA DI DEFORMAZIONE relativa al tensore deviatorico.

Ricorda che un generico tensore $\sigma = \sigma^i + \sigma^d$

Componente idrostatica di tensione

$$\sigma^i = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix}$$

↓
Tensore idrostatico Tensore deviatorico

ove $\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$

Componente deviatorica di tensione

$$\sigma^d = \begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_m) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_m) & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_m) \end{bmatrix}$$

! La sovrapposizione degli effetti non vale per le ENERGIE

↓
però l'en. idrostatica e l'en. deviatorica corrispondono a SISTEMI ORTOGONALI, dunque posso scrivere $\Phi = \Phi^i + \Phi^d$

L'energia di deformazione dalla teoria

elastica lineare è pari a $\Phi = \frac{1}{2E} \{ \sum I^2 + 2 \sum II (1+\nu) \}$

pag. 967-970

il Criterio di Von Mises in forma analitica è:

$$\left[(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3) \right] < \sigma_p^2$$

quadrati delle tensioni principali

quadrato della TENSIONE IDEALE di Von Mises

doppi prodotti delle tensioni principali

tensione di snervamento del materiale σ_p

4. Criterio di Coulomb - Mohr \Rightarrow Criterio di ROTTURA per i materiali FRAGILI (chs, roccie, terreni)

Si basa su due parametri:

La resistenza aumenta con lo stato di compressione

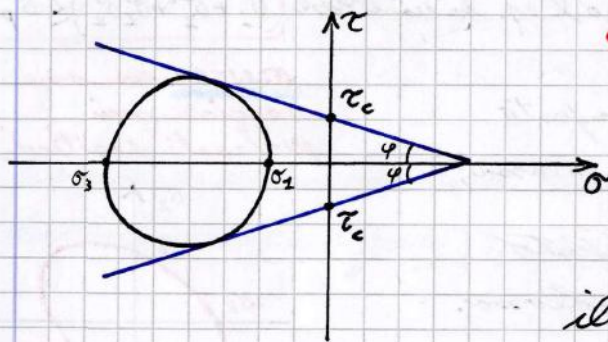
attrito interno

e coesione del materiale

Responsabile della rottura è la τ_{max} (come per Tresca)

Nel piano di Mohr:

$$\tau_{max} = \tau_c - \sigma \cdot \tan \varphi$$



COESIONE

ANGOLO DI ATTRITO INTERNO del materiale

[tipicamente i terreni] materiali che all'interno hanno attrito tra i grani

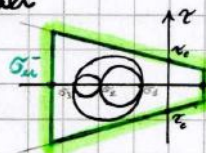
Si raggiunge il collasso quando il cerchio di Mohr relativo alla sollecitazione tocca la retta limite

i materiali fragili dunque: comportamento migliore per le compressioni ma peggiore per le trazioni

delle anche piani di scorrimento

sono le rette limite di Tresca, che per un materiale duttile sono orientati

Il dominio ammissibile per Mohr-Coulomb è un dominio tale che i cerchi di Mohr siano sempre contenuti all'interno, in funzione delle tre tensioni principali

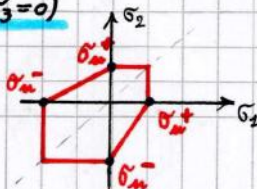


questo dominio viene limitato da due rette, viene fatto un cut-off

σ_m^+ valore critico positivo o TRAZIONE
 σ_m^- " " negativa o COMPRESSIONE

valori che limitano il Criterio e non devono essere superati

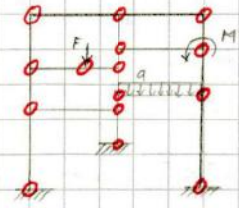
Nello stato tensionale piano ($\sigma_3=0$)



[facendo i due cut-off in trazione e compressione il dominio diventa chiuso]

Oss: in assenza di attrito interno il dominio coincide con quello di Tresca (prospetto simmetrico rispetto all'origine)

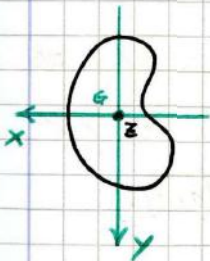
N.B. La teoria di D.S.V. non è valida nei nodi, nei vincoli e nei punti di applicazione delle forze concentrate e delle coppie applicate.
 Dunque non è valida nei punti di singolarità



Ricorda quali sono le equazioni governanti del problema elastico:

EQUAZIONI STATICHE	$[D]^T \{\sigma\} = -\{F\}$ $[N]^T \{\sigma\} = \{P\}$	equazioni di equilibrio indefinite equazioni al contorno	} 2 equaz. differenziali nell'incognita $\{\sigma\}$ <small>vettore delle tensioni</small>
EQUAZIONI CINEMATICHE	$\{\epsilon\} = [D]\{\eta\}$ $\{\eta\} = \{\eta_0\}$	equazioni di congruenza (ϵ = derivata delle spostamenti) equazioni di vincolo (in corrispondenza della parte di frontiera vincolata)	
EQUAZIONI COSTITUTIVE	$\{\sigma\} = [H]\{\epsilon\}$	collega il campo deformativo a quello tensionale tramite la matrice H matrice dell'elasticità lineare (cioè dove sono contenute le caratteristiche meccaniche del materiale)	

Se ^(di D.S.V.) ipotesi che ora vediamo ci semplificano molto la soluzione del problema elastico



L'asse z = asse della trave $\implies z$ (= luogo dei baricentri delle successive sezioni)
 gli assi x e y sono assi baricentrici centrali principali di inerzia
 $\implies I_{xy} = 0$ (bilanciamento delle aree sezione)

Il materiale si assume: elastico, lineare, omogeneo, isotropo
 caratterizzato dal modulo elastico E , dal coeff. di Poisson ν descrivono la risposta meccanica del materiale
 e dal modulo di rigidezza al taglio G \rightarrow funzione di E e ν

Se FORZE DI VOLUME si assumono NULLE \forall Punto e Volume del solido D.S.V.

Se FORZE DI SUPERFICIE si assumono NULLE \forall Punto e Superf. laterale solido D.S.V.

Il solido di D.S.V. sarà un cilindro nello scivolo alle estremità
 con un sistema di forze che dovrà essere equilibrato autoequilibrato
 per soddisfare le condizioni cardinali della statica

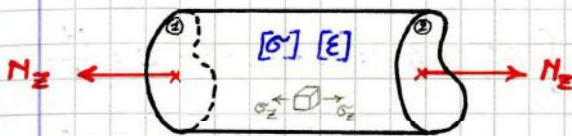
SFORZO NORMALE CENTRATO

Le travi reticolari lavorano solo a sforzo normale

$\leftarrow \square \rightarrow$ \oplus Sforzo normale **POSITIVO** = **TRAZIONE** (funi, tiranti)

$\rightarrow \square \leftarrow$ \ominus " " **NEGATIVO** = **COMPRESSIONE** (pilastri, archi)

Se la curva delle pressioni \equiv asse baricentrico \Rightarrow lo sforzo normale è centrato, NO momento flettente
 \rightarrow situazione che illustriamo ora \rightarrow



Rispetto delle eq. cond. statica
 \downarrow
 sistema equilibrato

(due forze dritto l'angolo l'asse z da un forze equilibrato)

D.S.V. vuole determinare lo stato deformativo $[E]$ e lo stato tensionale $[\sigma]$
 all'interno del solido, sotto l'azione dello sforzo normale centrato

Dato che le forze di superficie agiscono soltanto sulle basi, serve le ^{classiche} condizioni di equivalenza statiche sulle basi (sono equazioni di equilibrio proiettabili sull'asse x, y, z)

$$\int_{A_1} p \, dA = \int_{A_1} t_z \, dA = \begin{cases} \int_{A_1} \tau_{zx} \, dA = 0 & \text{perché il taglio } x \text{ è nullo} \\ \int_{A_1} \tau_{zy} \, dA = 0 & \text{" " " } y \text{ " "} \\ \int_{A_1} \sigma_z \, dA = N & \text{solo la } \sigma_z \text{ è una componente } \neq 0 \end{cases}$$

vettore tensione sulla base

integrati sulla
 spaziosa base A_1

vettore t_z perché la normale
 alle basi è la normale n_z
 (il coseno direttore n_z)

proiettando questo
 sq. vettoriale nelle sue
 3 componenti

Usa il **metodo semi inverso** = vado a ipotizzare una soluzione (in questo caso una soluzione tensionale, un campo di tensioni) e verifico che questa soluzione soddisfi le eq. che governano il problema \rightarrow le eq. del problema elastico.

Per lo sforzo normale faccio un'ipotesi tensionale

Per la flessione e torsione faccio un'ipotesi di tipo deformativo

la dilatazione assiale ha lo stesso segno della sforzo normale
 Le dilatazioni trasversali hanno segno opposto a quella dello sforzo normale, e sono in generale più piccole della dilatazione assiale perché $\nu < 0,5$

scrivendo le equazioni inverse:

$$\{\epsilon\} = [H]^{-1} \{\sigma\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \epsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} = \frac{N}{EA} \\ \epsilon_x &= \epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_z}{E} = -\nu \epsilon_z \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \end{aligned} \right.$$

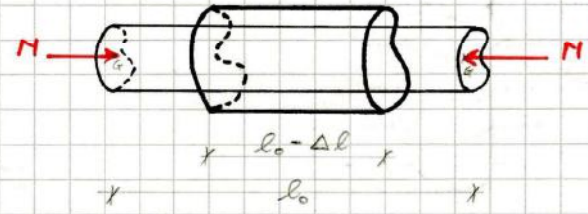
DEFORMAZIONI TRASVERSALI
 hanno segno opposto a quello della dilatazione assiale

me dicono che:

(es. nel caso di trazione) Se lo sforzo normale N è di trazione, si verifica una dilatazione uniforme in direzione assiale e contrazioni tutte uguali tra loro nelle direzioni trasversali. Gli scorrimenti angolari sono nulli.

Spotizzando uno sforzo normale centrato entrante, dal punto di vista = di COMPRESSIONE

deformativo: il solido si accorcia e subisce una dilatazione trasversale



a questa E corrisponde un accorciamento

$$\epsilon_z = \frac{N}{EA}$$

RIGIDEZZA

ESTENSIONALE DELLA SEZIONE

= capacità dell'asta ad opporsi alle deformazioni assiali

(+ grande sarà EA e + piccola sarà ϵ_z)

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{EA}$$

accorciamento allungamento

$$\frac{EA}{l}$$

RIGIDEZZA

ESTENSIONALE DELL'ASTA

= capacità di un'asta lunga l di opporsi alle deformazioni assiali

(+ grande sarà EA e + grande sarà questa capacità)

A parità di sforzo normale, di materiale e di ser. trasversale, un'asta più lunga subisce allungamenti/accorciamenti più grandi, a parità di deformazione



Nella statica: ad ogni spostamento impedito (grado di libertà impedito), corrisponde una reazione
 ↳ ↳ dualità statico-cinematica dei corpi rigidi

Ogni volta che vado ad impedire delle deformazioni/spostamenti avrò un irrigidimento della risposta della struttura e dunque la nascita di alcune sollecitazioni => non sfruttare tutto questo

INSTABILITÀ

Nelle aste snelle si può avere l'instabilità dell'equilibrio, quindi un cambiamento di forma dell'asta compressa che si instabilizza, sverglia e assume una configurazione inflessa

Le strutture snelle dunque non rispettano la teoria di D.S.V., con rischio di sverglamento o instabilità dell'equilibrio

Nella teoria di D.S.V. $\sigma = \frac{M}{A} \Rightarrow M_{max} = \sigma_{ultimi} A$ } questa non è più valida se lo spessore di instabilità

Per trovare un carico critico di una struttura snella soggetta a compressione centrata uso la teoria di Eulero

$$N_c = \frac{\pi^2 EA}{\lambda^2}$$

regidura esterna dell'asta → CARICO CRITICO DI EULERO

$$\lambda = \frac{l_0}{\rho}$$

snellera dell'elemento strutturale (asta)

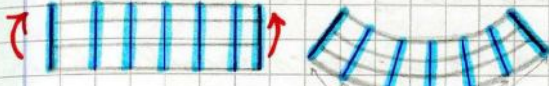
lunghezza libera di inflessione [è una quantità proporzionale alla lunghezza asta]
raggio di inerzia (minimo) della sezione

Vedremo che la lunghezza libera di inflessione dipende dall'altera dell'asta ma anche dai vincoli a cui l'asta è soggetta. Un'asta incastrata agli estremi sarà più stabile di un'asta incernierata agli estremi

Le strutture che risentono maggiormente dell'instabilità, per le quali dovrò verificare di stare sotto il carico critico di Eulero N_c sono le strutture metalliche, > spesso hanno sez. trasversali molto piccole

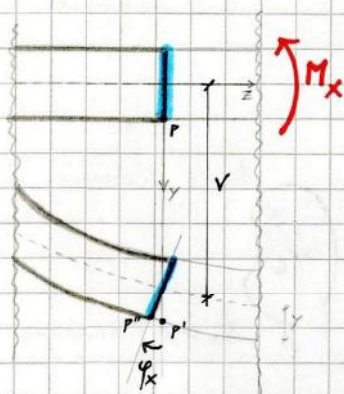
fare verifica per l'instabilità !!!

L'ipotesi che facciamo è l'ipotesi di Bernoulli Eulero (1691) (1771)



"conservazione delle sezioni piane"

Se soggetto il corpo a momento flettente le sezioni trasversali restano piane a deformazione avvenuta



La trave subisce un'inflexione (obblungamento) v in direzione axz e contemporaneamente le sezioni trasversali ruotano di un angolo φ_x attorno all'asse x .

Assumiamo $\varphi_x > 0$ ANTIORARIO (nel disegno a lato dunque φ_x)

Quasi dunque il campo di spostamenti:

$$\varphi_x = -\frac{\partial v}{\partial z} \quad \text{rotazione}$$

$w_p = \varphi_x \cdot y$ spostamento assiale del generico punto P è tanto più grande quanto più sono distanti dall'asse neutro

La deformazione assiale $\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$ SOSTITUENDO $\epsilon_z = \frac{\partial \varphi_x \cdot y}{\partial z}$

Def. CURVATURA = derivata di φ rispetto a z

dunque $\epsilon_z = -\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \cdot y$

curvatura distanza dal baricentro (del punto considerato)

Dalle equazioni costitutive so che la tensione normale $\sigma_z = E \cdot \epsilon_z =$

$$= E \cdot \left(-\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \cdot y$$

⇒ Tra seino un equilibrio alla rotazione: le equazioni statiche ci dicono che l'integrale delle coppie infinitesime generate dalla tensione σ_z nella sezione dev'essere uguale al momento flettente M_x

$$M_x = \int_A \sigma_z \cdot y \, dA$$

sostituire il σ_z da le trovate parte finale dell'equazione di derivata integrato sulla grafica sez. trasversale

$$M_x = \int_A E \left(-\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) y^2 \, dA = E \left(-\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \left(\int_A y^2 \, dA\right)$$

curvatura è il momento d'inerzia I_x

$\chi_x =$ curvatura attorno all'asse x

$$\chi_x = -\frac{M_x}{E \cdot I_x}$$

Inserendo χ_x nelle formule:

$$\epsilon_z = -\chi_x \cdot y = \frac{M_x}{E \cdot I_x} \cdot y$$

FORMULA DI NAVIER

per M_x $\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} \cdot y$

per M_y $\sigma_z = \frac{M_y}{I_y} \cdot x$

CURVATURA FLESSIONALE

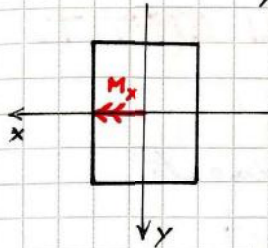
rigidezza flessionale della sezione

La flessione retta produce stati tensionali monoassiali

caratteristica intrinseca della sezione che si oppone alle rotazioni/curvature causate dal momento flettente

N.B.

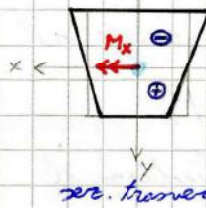
Lo stato deformativo in presenza di flessione è pluriaassiale.
Nonostante lo stato tensionale sia monoassiale, lo stato deformativo è pluriaassiale (presenza del coeff. di Poisson)!



Sotto l'azione dell' M_x , oltre all' $\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{M_x}{EI_x} y$ avremo anche l' ϵ_x e l' ϵ_y

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\nu \cdot \epsilon_z = -\nu \cdot \frac{M_x}{EI_x} y$$

ad esempio in presenza di un momento M_x positivo



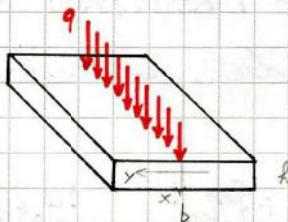
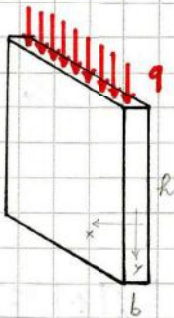
si allarga ortogonalmente alle compressioni $\epsilon_x > 0$
si contrae ortogonalmente alle tensioni $\epsilon_x < 0$

o.e. trasversale

Le dilatazioni trasversali ϵ_x e ϵ_y sono di segno opposto alla dilatazione principale assiale, e saranno più piccole di essa perché $0 < \nu < \frac{1}{2}$

Le deformazioni antielastiche (ϵ_x, ϵ_y) sono opposte a quella longitudinale (ϵ_z)

Oss. Ruolo dell'inertzia della trave



facciamo lavorare la trave secondo il suo "ASSE FORTE"

momento d'inertzia $I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$

Se carico la trave lungo y nascerà un momento M_x

avrà curvature $\chi_x < \chi_y$

$$I_x > I_y$$

"ASSE DEBOLE"

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

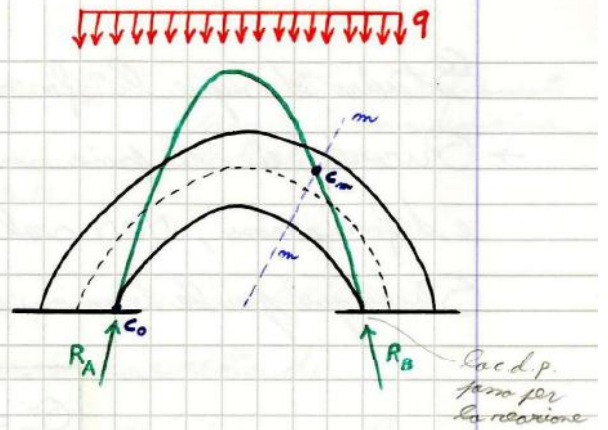
nelle formula di Navier l'inertzia compare a denominatore, dunque è molto importante

La rigidezza della trave posizionata lungo il suo asse forte è più grande e la deformabilità minore rispetto allo asse debole

Al pari di M_x le tensioni agenti nella trave lungo l'asse forte sono più piccole delle tensioni agenti quando la trave lavora secondo l'asse debole

$$\sigma_z(M_x) < \sigma_z(M_y)$$

ESEMPIO: c.d.p. arco caricato con carico distribuito



Nella generica sezione m-m l'intersezione della c.d.p. con la sez. trasversale è il centro di pressione dello sforzo normale eccentrico per quella sezione

Dunque ogni sezione dell'arco è soggetta a sforzo normale eccentrico e il centro di pressione è l'intersezione della c.d.p. dell'arco con la sezione trasversale.

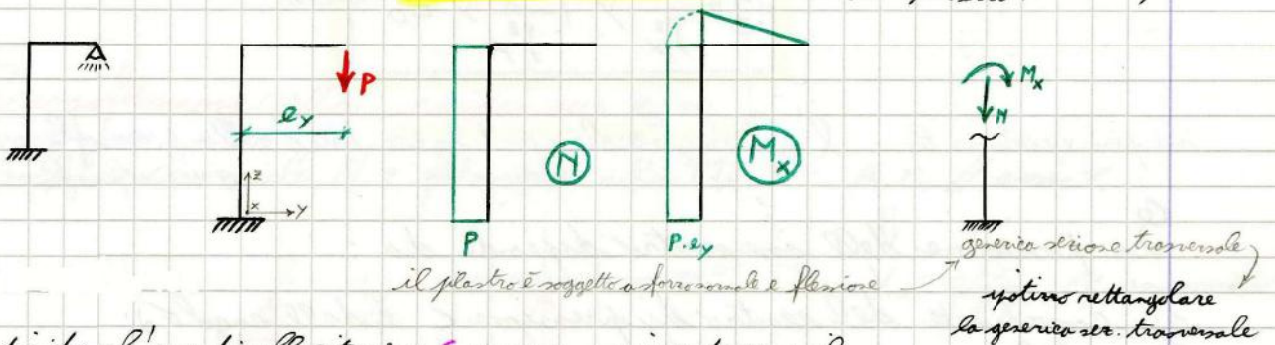
TERMINOLOGIA: \oplus N di TRAZIONE \rightarrow TENSOFFLESSIONE

\ominus N di COMPRESIONE \rightarrow PRESSOFFLESSIONE

a scada dell'asse su cui agisce il momento

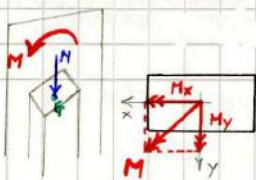
- M diretto secondo un'asse centrale di inerzia \rightarrow PRESSOFFLESSIONE RETTA & TENSOFFLESSIONE
- M diretto secondo un'asse non centrale \rightarrow PRESSOFFLESSIONE & TENSOFFLESSIONE DEVIATA

ci occupiamo della PRESSOFFLESSIONE (caso molto frequente) archi e pilastri



Individuo l'asse di sollecitazione S come congiungente CG e il piano delle sollecitazioni individuato da S e dall'asse z della trave, significa che i carichi agiscono su questo piano di sollecitazione, la cui traccia sulla sez. trasversale è S

Il momento M si ottiene trasportando lo sforzo normale nel baricentro

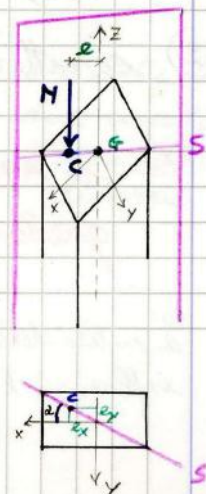


$$M = N \cdot e$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= N \cdot e_y \\ M_y &= N \cdot e_x \end{aligned} \right\} \text{composizione M secondo gli assi centrali}$$

segno secondo delle convenzioni usate e positività della trazione

$$e = \sqrt{(e_x)^2 + (e_y)^2}$$



x e y sono assi centrali !!

DISEGNARE IL DIAGRAMMA DELLE TENSIONI σ_z

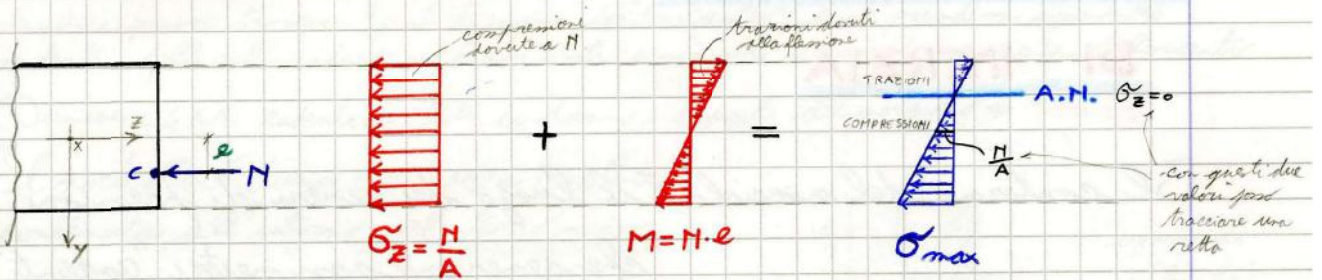
può ottenersi graficamente tramite la sovrapposizione degli effetti

1° cosa da fare è trovare la posizione dell'A.N.

L'andamento delle tensioni sarà lineare (sovrapposizione degli effetti di diagrammi lineari) si disegna tracciando una retta di riferimento ortogonale all'asse neutro e riportando i valori:

$\sigma_z = 0$ sull'A.N. tensione nulla sull'A.N.

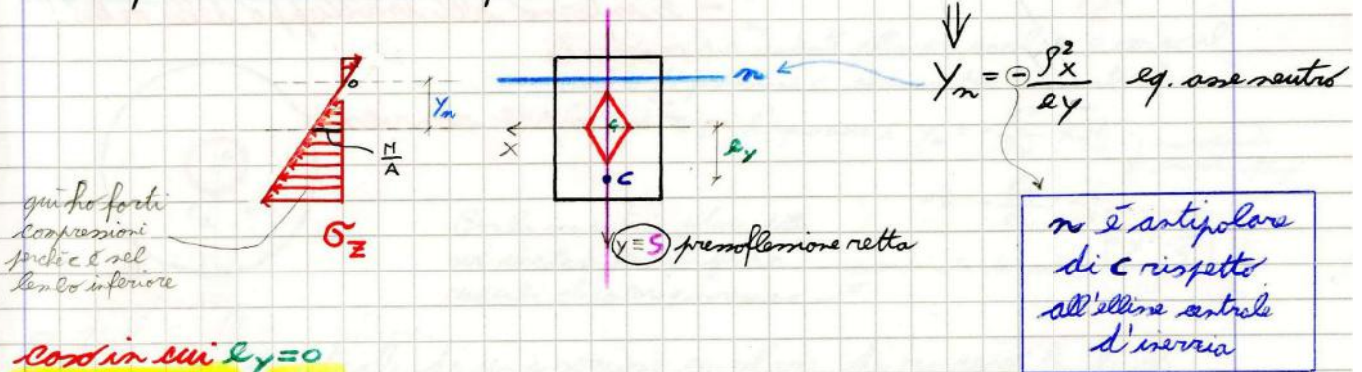
$\sigma_z = \frac{N}{A}$ nel baricentro G nel baricentro la tensione è sempre $= \frac{N}{A}$!



trasportando M nel baricentro nasce un diagramma di tensioni costante \rightarrow Diagramma del momento di trasporto = diagramma LINEARE (somma di due diag. lineari)

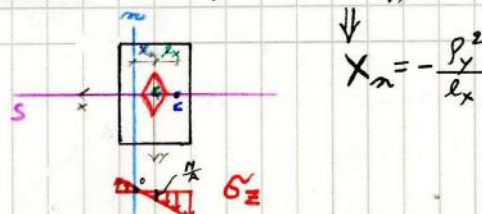
Crossflessione retta: cassini cui $e_x = 0$

Sforzo normale N + flessione retta $M_x \Rightarrow$ A.N. // asse X



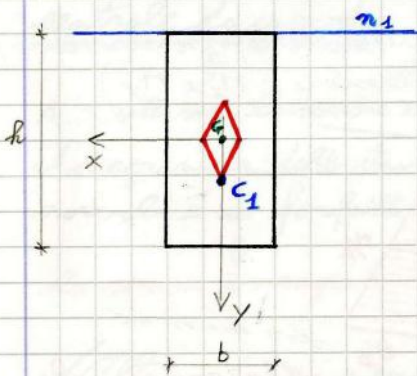
Crossflessione retta: cassini cui $e_y = 0$

Sforzo normale N + flessione retta $M_y \Rightarrow$ A.N. // asse Y



Calcolo il nocciolo centrale per la sezione rettangolare e circolare.

NOCCIOLO DI SEZIONE RETTANGOLARE



Prendo come A.N. una retta radente al lembo superiore (n_1) e cerco il centro C_1 che genera questa retta come sua antipolare.

N.B. C_1 è su $axe y \Rightarrow$ presollecitazione retta

$$y_m = -\frac{p_x^2}{2y}$$
 eq. con centro $(2y)$ incognita
 sostituendo i valori trovo: $-\frac{h}{2} = -\frac{\frac{b^2}{12}}{2y}$

$$e_y = \frac{b}{6}$$
 coordinata verticale del punto C

Simmetricamente se avessi una retta radente al lembo inferiore troverei $\frac{h}{6}$ al di sopra del baricentro; e se prendessi come rette radenti delle rette radenti ai lembi destro e sinistro troverei $\frac{b}{6}$ a dx e sx dal baricentro.

Dunque i 4 A.N. radenti ai 4 lati ci danno i 4 spigoli del nocciolo \Rightarrow **rombo**

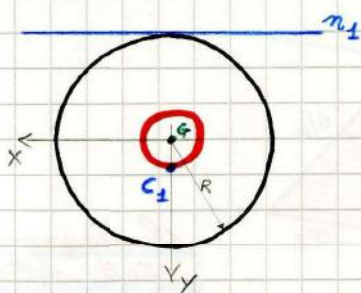
Il nocciolo è dunque un'area rombica contenuta all'interno del **terzo medio** della sezione.

I 4 lati del nocciolo sono originati da $\frac{6e_x}{b} + \frac{6e_y}{h} = 1$ tutte le rette radenti appoggiate allo spigolo (non ∞^2) descrivono un lato del nocciolo, e quindi i 4 lati del nocciolo corrispondono alle 4 infinite di rette radenti nei 4 spigoli della sezione.



ogni punto $C(x, y)$ del contorno soddisfa l'equazione $\frac{6e_x}{b} + \frac{6e_y}{h} = 1$

NOCCIOLO DI SEZIONE CIRCOLARE (ragionamento analogo)



Prendo un A.N. radente alla $ser.$ circolare e cerco il centro di pressione C che mi dà come antipolare l'asse n_1 . l'equazione è $y_n = -\frac{p_x^2}{2y}$ (A.N.)

Per la simmetria polare della $ser.$ circolare per tutti gli A.N. radenti al contorno avremo

$$-R = -\frac{R^2}{2y}$$

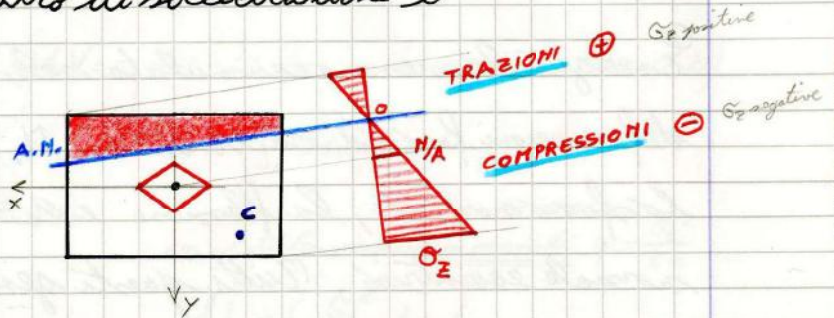
$$e_y = \frac{R}{4}$$
 sostituendo i valori ottengo
 coordinata del punto C

Il nocciolo centrale di una sezione circolare di raggio R è il **cerchio concentrico** di raggio $\frac{R}{4}$

Il problema per i materiali che non resistono bene a trazione vengono fuori quando il centro di sollecitazione è

esterno al nocciolo
centrale di inerzia

↓
A.N. interseca la sezione e
il diagramma delle tensioni
normali è a farfalla



↓
La sezione è reagente a trazione e compressione } così deve essere il materiale
per sopportare c fuori dal nocciolo

Altrimenti si verifica la parzializzazione della sezione;

se il materiale non resiste a trazione, con c come in questo caso
fuori dal nocciolo, reagirà soltanto l'area inferiore della sezione.

Non scriverà una fessura → il materiale si romperà ↑ perché

Dunque per i materiali non reagenti a trazione è SEMPRE bene
verificare che c sia interno al nocciolo centrale di inerzia.

SFORZO NORMALE ECCENTRICO

questa volta utilizzo la formula generale.

energia immagazzinata in un certo volume V del nostro corpo

$$dL = \int_V \psi dV = dV = dA \cdot dz \quad (\text{se la sez. trasversale è costante})$$

$$\rightarrow = \left(\int_A \psi dA \right) dz$$

potenziale elastico complementare (funzione delle tensioni)

in stati tensionali monassiali $\psi = \frac{\sigma_z^2}{2E}$

$$dL = \int_A \frac{\sigma_z^2}{2E} dA dz$$

$$\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2E} \int_A \left(\frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x \right)^2 dA$$

energia per unità di lunghezza (per unità d'ascissa)

sovrapposizione degli effetti
 sforzo normale centrato N
 flessione M_x
 flessione M_y

$$\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M_x^2}{EI_x} + \frac{M_y^2}{EI_y} \right) + \frac{1}{E} \left(\frac{NM_x}{AI_x} S_x - \frac{NM_y}{AI_y} S_y - \frac{M_x M_y}{I_x I_y} I_{xy} \right)$$

le due flessioni rette
 i momenti statici rispetto a xy centrali di inerzia sono nulli

Dunque le sollecitazioni elementari N, M_x, M_y sono **energeticamente ortogonali**, dunque vale la **sovrapposizione degli effetti anche per il LAVORO DI DEFORMAZIONE**

(per BETTI) il fatto essere lavoro nullo tra le sollecitazioni, sa aver notato che in questo caso le sollecitazioni non danno lavoro mutuo significa che N, M_x, M_y sono energ. ortogonali, e dunque la sovrapp. effetti che abbiamo utilizzato fin dall'inizio per calcolare le tensioni la possiamo utilizzare anche per calcolare l'energia accumulata

fine delle sollecitazioni semplici del solido di D.S.V. = sollecitazioni che generano

σ_z = tensione normale // asse z . Dalla prossima lezione: tensioni tangenziali: TAGLIO E TORSIONE

inserirsi il valore di $\varphi_z = \Theta \cdot z$ nelle componenti:

$$\begin{aligned} u &= -\Theta \cdot z \cdot y \\ v &= \Theta \cdot z \cdot x \\ w &= 0 \end{aligned}$$

applicando le \Rightarrow è immediato vedere che
 equazioni CINEMATICHE $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = 0$
 $\{\epsilon\} = [\gamma] \{\alpha\}$
 $\gamma_{zx} = -\Theta \cdot y$
 $\gamma_{zy} = \Theta \cdot x$

uniche non nulle

con le equazioni costitutive è immediato passare dalla deformazione alla tensione, inserendo le costanti elastiche del materiale

dalle equazioni costitutive $\Rightarrow \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$
 $\{\sigma\} = [H] \cdot \{\epsilon\}$
 $\tau_{zx} = -G \cdot \Theta \cdot y$
 $\tau_{zy} = G \cdot \Theta \cdot x$

Ne viene fuori uno **STATO TENSIONALE BIASSIALE**

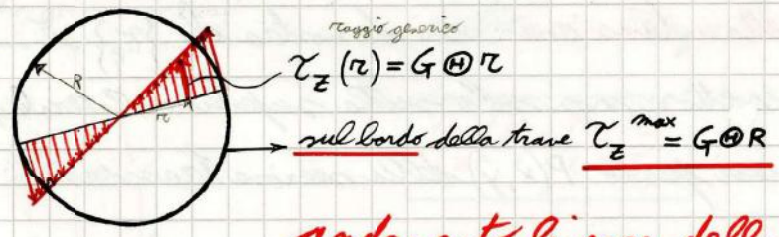
MODULO DI ELASTICITÀ TANGENZIALE DEL MATERIALE
 fun. di E e ν

$$\tau_z(r) = G \cdot \Theta \cdot r$$

TENSIONE TANGENZIALE RISULTANTE

il punto sarà caratterizzato da questa tensione
 generico raggio vettore rispetto al baricentro

Andamento delle tensioni:

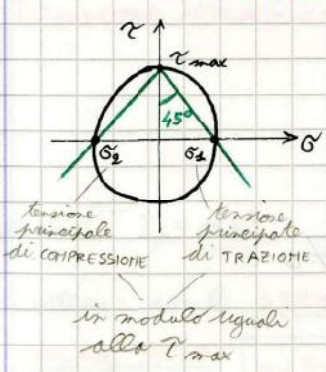


andamento lineare delle tensioni tangenziali con il massimo sul bordo esterno

l'andamento è lineare lungo ciascun diametro.

Le tensioni passano linearmente dal baricentro verso il bordo della sezione

Cerchio di Mohr

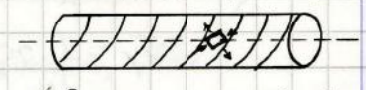


ISOSTATICHE DI TRAZIONE



(qui sono le isostatiche sul contorno, perché è lì che la tensione è massima)

ISOSTATICHE DI COMPRESIONE



(formano un reticolo ortogonale alle isostatiche di trazione)

sostituiremo in M_z appena scritto il valore di τ_z e otterremo:

$$M_z = \int_A \{r\} \wedge \{\tau_z\} dA = \int_A (x \cdot \tau_{zy} - y \cdot \tau_{zx}) dA =$$

$$= G \Theta \int_A r^2 dA = G \Theta \textcircled{I_p} \text{ momento di inerzia polare}$$

$$\Theta = \frac{M_z}{G \cdot I_p} = \frac{2 \cdot M_z}{G \cdot \pi \cdot R^4}$$

angolo unitario di torsione nella sezione circolare

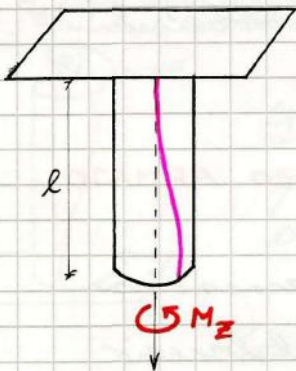
RIGIDEZZA TORSIONALE DELLA SEZIONE TRASVERSALE

sostituendo il valore di I_p per la sec. circolare = $\frac{\pi R^4}{2}$

Aumentare il raggio di una trave circolare significa ridurre di R^4 le deformazioni (quindi di molto!)

Rotazione di estremità

Si consideri la rotazione all'estremità libera di una trave incastata ad un estremo, lunga l :



$$\varphi_z(l) = \frac{M_z \cdot l}{G \cdot I_p}$$

$\frac{G \cdot I_p}{l}$ = RIGIDEZZA TORSIONALE DELL'ASTA

quindi a parità di sezione e di materiale più un'asta è lunga tanto più la sua estremità libera ruoterà

Tensione massima

utilizzando l'espressione ricavata per l'angolo unitario di torsione, la torsione tangenziale $\tau_z(r) = \frac{M_z \cdot r}{I_p}$ dunque

e poiché $I_p = \frac{\pi R^4}{2}$

si ottiene per le SEZIONI

CIRCOLARI PIENE

$$\tau_z^{\max} = \frac{2 M_z}{\pi \cdot R^3}$$

in generale

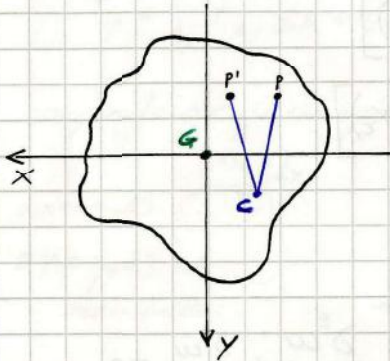
$$\tau_z^{\max} = \frac{M_z \cdot R}{I_p}$$

momento polare dell'area circolare

da cui si può notare l'analogia con la formula di Navier per la flessione retta (momento · distanza / inerzia) ovvero rispetto all'asse su cui agisce il momento flessante

TORSIONE NELLE TRAVI DI SEZIONE GENERICA

IPOTESI CINEMATICA → questa volta però la sezione generica non ruota più intorno al baricentro G



ma ruota intorno a un punto C
detto CENTRO DI TORSIONE (= è l'impronta di un asse di torsione // all'asse z attorno al quale ruotano tutte le sezioni trasversali del solido)

La sezione trasversale non resta piana, perché questa volta ci sono anche gli spostamenti w in direzione z ;

INGOBBAMENTO DELLA SEZIONE

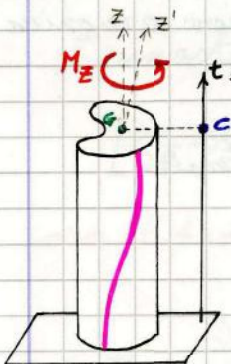
Sono quindi due sostanziali differenze rispetto alla sezione circolare:

$C \neq G$

$w \neq 0$

onde il baricentro ruota attorno a C

La sezione trasv. non resta piana



L'asse di torsione t non si deforma. Le altre fibre parallele a z subiscono la deformazione elicoidale e generano l'ingobbamento

Campo di spostamento
 si ruota intorno a C e NON a G

$$u = -\Theta z (y - y_c)$$

$$v = \Theta z (x - x_c)$$

$$w = \Theta \boxed{w(x, y)}$$

OBBIETTIVO → Una volta nota $w(x, y)$ saprò calcolare tensioni e deformazioni in ogni punto della sezione trasversale

FUNZIONE INGOBBAMENTO $[L^2]$
 è definita nella sola trasv. la dimensione di un'area

Derivando le eq. cinematiche di spostamento si ottengono le deformazioni:

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = 0$$

avrò soltanto queste due deformazioni

$$\begin{cases} \gamma_{zx} = -\Theta (y - y_c) + \Theta \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{zy} = \Theta (x - x_c) + \Theta \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases}$$

sono però rimaste fuori (incognite) le coordinate del centro di torsione, per trovarle usiamo le equazioni di annullamento dei tagli sulle basi

$$T_x = \int_A \tau_{zx} dA = G \Theta \int_A \left[\frac{\partial w}{\partial x} (y - y_c) \right] dA = 0$$

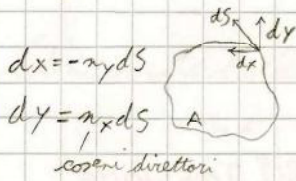
$$T_y = \int_A \tau_{zy} dA = G \Theta \int_A \left[\frac{\partial w}{\partial y} + (x - x_c) \right] dA = 0$$

da queste eq. tiro fuori x_c e y_c

espandendo gli integrali:

$$x_c = \frac{1}{A} \int_A \frac{\partial w}{\partial y} dA \Rightarrow = -\frac{1}{A} \oint_C w dx$$

$$y_c = -\frac{1}{A} \int_A \frac{\partial w}{\partial x} dA \xrightarrow{T. Green} = -\frac{1}{A} \oint_C w dy$$



integrale curvilineo sul contorno

inserisco le coordinate di c appena trovate nella condizione al contorno del problema di Neumann, si trova la condizione al contorno definitiva del problema di Neumann ove l'unica incognita è rimasta la funzione ingobbamento:

$$\left[\frac{\partial w}{\partial x} - y - \frac{1}{A} \oint_C w dy \right] n_x + \left[\frac{\partial w}{\partial y} + x + \frac{1}{A} \oint_C w dx \right] n_y = 0$$

ora il problema di Neumann è ben posto e si può risolvere

dalle condizioni di equivalenza sulle basi $M_z = \int_A \{\tau\} \wedge \{\tau_z\} dA =$

$$= G \Theta \int_A \left(x^2 + y^2 + x \frac{\partial w}{\partial y} - y \frac{\partial w}{\partial x} \right) dA$$

da cui

angolo unitario di torsione

$$\Theta = \frac{M_z}{G \cdot I_t}$$

FATTORE DI RIGIDEZZA TORSIONALE

è un fattore che dipende solamente dalla geometria della sezione

per ogni tipo di sezione per qualunque forma di sezione

$$I_t \leq I_p$$

momento d'inerzia polare

$$I_t = \int_A \left(x^2 + y^2 + x \frac{\partial w}{\partial y} - y \frac{\partial w}{\partial x} \right) dA$$