



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1986A -

ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Chiesa Carlo

MATERIA: Scienza delle costruzioni II - Prof. Chiaia

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

In aggiunta agli argomenti riportati in queste dispense, sono da considerarsi richiesti anche i seguenti capitoli:

- Metodo degli Spostamenti applicato alle bielle e alle travi;
- Principi di Calcolo Automatico dei telai piani e spaziali;
- Metodo degli Elementi Finiti;
- Metodo delle Differenze Finite applicato alle lastre piane;
- Cenni sull'Analisi Incrementale Plastica applicata alle travi;

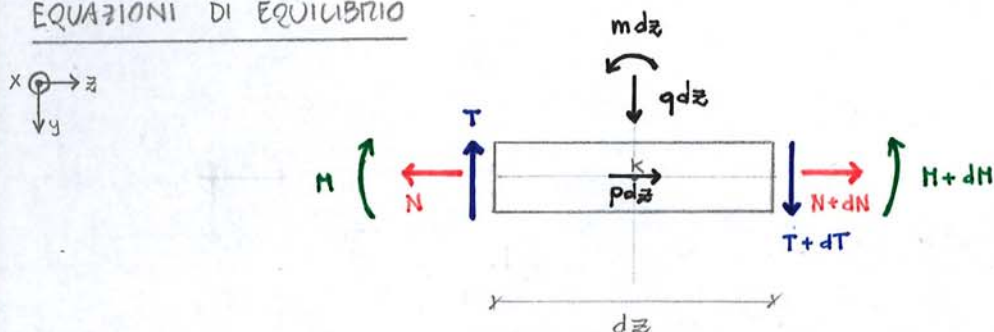
Per essi si consiglia di prendere visione di testi autorevoli inerenti la Scienza delle Costruzioni, quali quelli suggeriti all'inizio del corso.

I) TRAVI PIANE AD ASSE RETTILINEO

Descriveremo l'elemento-trave per mezzo delle equazioni che governano il suo specifico problema elastico, ossia quel particolare sistema di equazioni differenziali con relative condizioni al contorno da cui possiamo risalire alle caratteristiche statiche e deformative della trave soggetta a determinate condizioni di carico e di vincolo.

Iniziamo con le equazioni di equilibrio, quindi vedremo le equazioni cinematiche e, infine, le equazioni costitutive della trave. Per i primi due gruppi verrà inoltre evidenziata una proprietà molto importante dal punto di vista sia teorico sia applicativo: la "dualità statico-cinematica".

EQUAZIONI DI EQUILIBRIO



Si consideri un concio di trave di lunghezza infinitesima dz soggetto ai carichi distribuiti mdz , qdz , pdz le cui risultanti si considerino agenti nel punto K dove si intersecano le normali alle sezioni estreme con la mediana di dz . Le sezioni sono ortogonali all'asse del concio dz e sono genericamente sollecitate da cds che si distinguono fra loro per un incremento proporzionale a dz .

$$\rightarrow -N_z + p_z dz + N_z + dN_z = 0$$

$$\uparrow T_y - q_y dz - T_y - dT_y = 0$$

$$\curvearrowright -M_x - T_y \frac{dz}{2} + m_x dz - T_y \frac{dz}{2} - dT_y \frac{dz}{2} + M_x + dM_x = 0$$

effetti del II ordine
quindi trascurabili
→ 0

$$\begin{cases} \frac{dN_z}{dz} + P_z = 0 \\ \frac{dT_y}{dz} + q_y = 0 \\ \frac{dM_x}{dz} - T_y + m_x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dz} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dz} & 0 \\ 0 & -1 & \frac{d}{dz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_z \\ T_y \\ M_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_z \\ q_y \\ m_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[\partial] \{Q\} + \{F\} = \{0\}$$

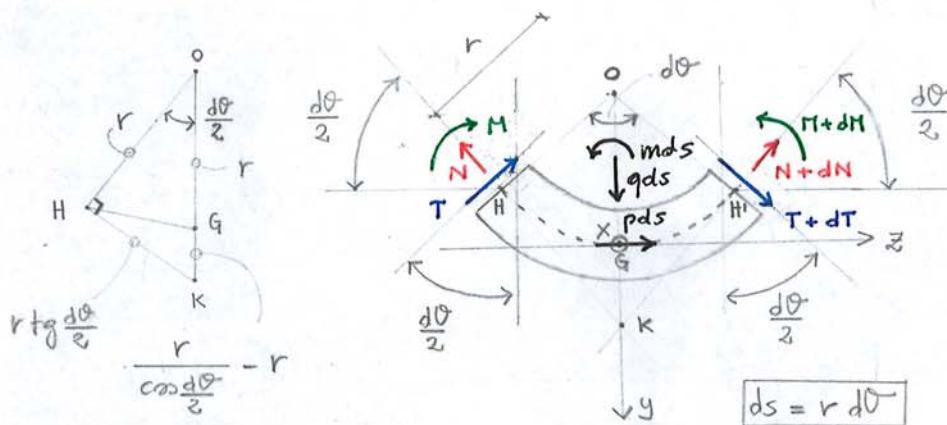
EQUAZIONI DI EQUILIBRIO (DESCRIZIONE STATICA)

II) TRAVI PIANE AD ASSE CURVILINEO

Anche in questo caso descriviamo l'elemento-trave tramite i diversi gruppi di equazioni che governano il problema elastico. La dualità statico-cinematica sarà una proprietà ugualmente valida e se ne darà una doppia dimostrazione, ossia come si è fatto per la trave rettilinea e, in più, per mezzo dell'integrazione per parti applicata nell'ambito del Principio dei Lavori Virtuali.

Prima di iniziare, ricordiamo che la trave ad asse curvilineo presenta due tipi di curvatura:
 CURVATURA GEOMETRICA (χ_g) \rightarrow reciproco del raggio di curvatura locale dell'asse;
 CURVATURA ELASTICA (χ_e) \rightarrow rapporto locale tra momento flettente e rigidità flessionale.
 La novità, rispetto alle travi rettilinee, è rappresentata dal primo tipo.

EQUAZIONI DI EQUILIBRIO



- O = centro di curvatura geometrica locale;
- $d\theta$ = ampiezza angolare del conico;
- r = raggio di curvatura locale del conico;
- $ds = r d\theta$ = lunghezza del conico;
- x, y, z = assi di scomposizione del carico totale agente sul conico ds (locali, non globali);
- G = baricentro del conico e origine del sistema di coordinate locali x, y, z ;
- K = punto di riferimento per l'equilibrio alla rotazione ($N, N+dN$ presentano momento nullo rispetto a K).

Le caratteristiche della sollecitazione sono sempre le stesse della trave rettilinea; tuttavia, l'asse rispetto al quale si sviluppano in ciascuna sezione del conico non è fisso, ma cambia direzione in ragione della curvatura geometrica. Avremo perciò che:

- M risulta sempre applicato nel baricentro della sezione, qualunque esso sia;
- T risulta tangente al piano della sezione;
- N risulta normale al piano della sezione.

$$\begin{aligned}
 z \rightarrow & -N_z \cos \frac{d\theta}{2} + T_y \sin \frac{d\theta}{2} + (N_z + dN_z) \cos \frac{d\theta}{2} + (T_y + dT_y) \sin \frac{d\theta}{2} + p_z ds = 0 \\
 y \downarrow & -N_z \sin \frac{d\theta}{2} - T_y \cos \frac{d\theta}{2} - (N_z + dN_z) \sin \frac{d\theta}{2} + (T_y + dT_y) \cos \frac{d\theta}{2} + q_y ds = 0 \\
 x (K) & -T_y r \operatorname{tg} \frac{d\theta}{2} - M_x - (T_y + dT_y) r \operatorname{tg} \frac{d\theta}{2} + M_x + dM_x - p_x ds \left(\frac{r}{\cos \frac{d\theta}{2}} - r \right) + m_x ds = 0
 \end{aligned}$$

2) Partiamo dalle equazioni di equilibrio:

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & \frac{1}{r} & 0 \\ -\frac{1}{r} & \frac{d}{ds} & 0 \\ 0 & -1 & \frac{d}{ds} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_z \\ T_y \\ M_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_z \\ q_y \\ m_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

s = ascissa curvilinea
 r = raggio di curvatura locale
 P, q, m = carichi distribuiti

Tramite il PLV ricaviamo ora le equazioni cinematiche. Definiamo invariabilmente i seguenti vettori:

- $\{\eta\} = \{w_z, v_y, \varphi_x\}^T$: vettore spostamento nella generica sezione di ascissa curvilinea s
 - w_z = spostamento tangente all'asse baricentrico locale;
 - v_y = spostamento normale all'asse baricentrico locale;
 - φ_x = rotazione sul piano ortogonale alla sezione.
- $\{q\} = \{\epsilon_z, \gamma_y, \chi_x\}^T$: vettore delle caratteristiche deformative nella generica sezione di ascissa curvilinea s
 - ϵ_z = dilatazione assiale;
 - γ_y = scorrimento angolare;
 - χ_x = curvatura meccanica.

PLV:

$$\hookrightarrow L_{vi} = \int_0^l \{Q\}^T \cdot \{q\} ds = \int_0^l [(N_z \cdot \epsilon_z) + (T_y \cdot \gamma_y) + (M_x \cdot \chi_x)] ds$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow L_{ve} &= \left[\{Q\}^T \cdot \{\eta\} \right]_{s=0}^{s=l} + \int_0^l \{F\}^T \cdot \{\eta\} ds \\ &= \left[(N_z \cdot w_z) + (T_y \cdot v_y) + (M_x \cdot \varphi_x) \right]_{s=0}^{s=l} + \int_0^l [(P_z \cdot w_z) + (q_y \cdot v_y) + (m_x \cdot \varphi_x)] ds \end{aligned}$$

Sostituiamo al posto di P_z, q_y, m_x le loro espressioni derivate dalle equazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} L_{ve} &= \left[(N_z \cdot w_z) + (T_y \cdot v_y) + (M_x \cdot \varphi_x) \right]_{s=0}^{s=l} + \int_0^l \left[\left(\overbrace{\left(-\frac{dN_z}{ds} - \frac{T_y}{r} \right)}^{P_z} w_z \right) + \left(\overbrace{\left(\frac{N_z}{r} - \frac{dT_y}{ds} \right)}^{q_y} v_y \right) + \left(\overbrace{\left(T_y - \frac{dM_x}{ds} \right)}^{m_x} \varphi_x \right) \right] ds \\ &= \left[(N_z \cdot w_z) + (T_y \cdot v_y) + (M_x \cdot \varphi_x) \right]_{s=0}^{s=l} - \int_0^l \left[\left(\left(\frac{dN_z}{ds} + \frac{T_y}{r} \right) w_z \right) + \left(\left(\frac{dT_y}{ds} - \frac{N_z}{r} \right) v_y \right) + \left(\left(\frac{dM_x}{ds} - T_y \right) \varphi_x \right) \right] ds \end{aligned}$$

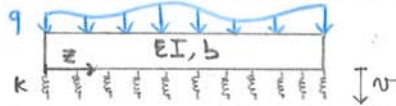
Integrando per parti il secondo termine del membro destro otteniamo

$$\begin{aligned} & - \int_0^l \left[\left(\left(\frac{dN_z}{ds} w_z \right) + \left(\frac{dT_y}{ds} v_y \right) + \left(\frac{dM_x}{ds} \varphi_x \right) \right) + \left(\left(-\frac{N_z}{r} v_y \right) + \left(\frac{T_y}{r} w_z \right) - (T_y \varphi_x) \right) \right] ds = \\ & = - \left[(N_z \cdot w_z) + (T_y \cdot v_y) + (M_x \cdot \varphi_x) \right]_{s=0}^{s=l} + \int_0^l \left[\left(N_z \frac{dw_z}{ds} \right) + \left(T_y \frac{dv_y}{ds} \right) + \left(M_x \frac{d\varphi_x}{ds} \right) \right] ds + \int_0^l \left[\left(N_z \frac{v_y}{r} \right) - \left(T_y \left(\frac{w_z}{r} - \varphi_x \right) \right) \right] ds \end{aligned}$$

Rimane così che, uguagliando L_{vi} e L_{ve} , si avrà

$$\int_0^l [(N_z \cdot \epsilon_z) + (T_y \cdot \gamma_y) + (M_x \cdot \chi_x)] ds = \int_0^l \left[\left(N_z \left(\frac{dw_z}{ds} + \frac{v_y}{r} \right) \right) + \left(T_y \left(-\frac{w_z}{r} + \frac{dv_y}{ds} + \varphi_x \right) \right) + \left(M_x \frac{d\varphi_x}{ds} \right) \right] ds$$

TRAVE SU SUOLO ELASTICO



L'ipotesi costitutiva che adottiamo per il terreno è quella di Winkler, secondo la quale esso può venire modellato con un letto di molle elastiche, lineari, indipendenti fra loro, ossia tali che l'abbassamento di ciascuna singola molla sia proporzionale al carico che essa riceve, indipendentemente da quello che accade alle altre molle vicine.

L'abbassamento di una molla provoca quindi una reazione locale nel suolo. Dovendo però essere verificata in ogni punto l'ipotesi di congruenza degli spostamenti verticali, ad ogni cedimento del terreno sarà associato uno spostamento della corrispondente sezione di trave. Tali spostamenti, qualora non lineari in x (ascissa della trave), provocheranno deformazioni e sollecitazioni nel corpo-trave con effetti via via più attenuati con la distanza da dove vengono applicati i carichi.

CARICHI DISTRIBUITI

Modello del suolo : $\begin{cases} k_w = \text{coefficiente di Winkler} \\ b = \text{spessore della trave} \end{cases} \rightarrow \boxed{k = k_w b}$ RIGIDEZZA DELLA MOLLA EQUIVALENTE AL SUOLO

Come possiamo osservare, la rigidità del suolo dipende dalle caratteristiche del suolo e dal tipo di fondazione.

Ipotesi di partenza : $q_{\text{suolo}} = -k \cdot v \rightarrow$ La reazione del suolo è proporzionale all'abbassamento del suolo stesso.

Si consideri l'equazione della linea elastica per una generica trave :

$$\frac{d^4 v}{dz^4} = \frac{q + q_{\text{suolo}}}{EI}$$

$$\frac{d^4 v}{dz^4} = \frac{q - kv}{EI}$$



$$\frac{d^4 v}{dz^4} + \frac{k}{EI} v = \frac{q}{EI}$$

$$\frac{d^4 v}{dz^4} + \beta^4 v = \frac{q}{EI}$$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE DELLA TRAVE SU SUOLO ELASTICO

dove $\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}$ esprime il rapporto tra la rigidità del suolo e quella della trave.

La soluzione di questa equazione differenziale è data dalla somma di :

- SOLUZIONE PARTICOLARE : $v_p(z)$, proporzionale al carico q ;
- SOLUZIONE DELL'OMOGENA ASSOCIATA : $v_o(z)$, con condizioni al contorno.

Iniziamo dalla prima soluzione, per carichi distribuiti con legge di potenza :

• $q = q(z) = Cz^n \rightarrow$ sostituendo nell'equazione assumendo che sia $n \leq 3$ ($d^4 v / dz^4 = 0$ poiché $v \propto z^n$) $\rightarrow \frac{k}{EI} v = \frac{Cz^n}{EI} \rightarrow \boxed{v_p(z) = \frac{Cz^n}{k}}$ SOLUZIONE PARTICOLARE (8)

($n=0$: q costante \rightarrow abbassamento costante)
 ($n=1$: q lineare \rightarrow abbassamento lineare)

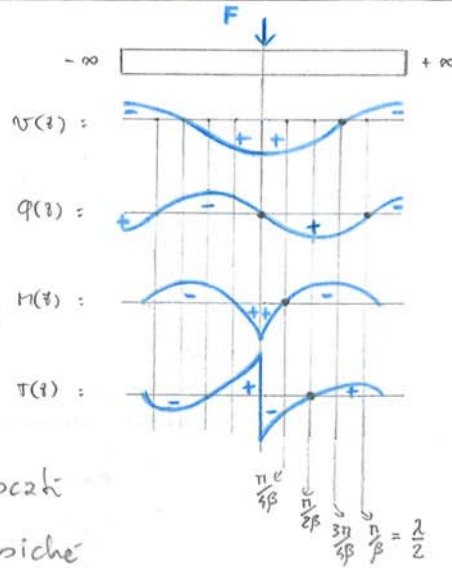
Da ciò segue che :

$$v(z) = \frac{F\beta}{2k} [e^{-\beta z} (\cos(\beta z) + \sin(\beta z))] = \frac{F\beta}{2k} A_{\beta z}$$

$$\varphi(z) = -\frac{dv}{dz} = \frac{F\beta^2}{k} [e^{-\beta z} \sin(\beta z)] = \frac{F\beta^2}{k} B_{\beta z}$$

$$M(z) = -EI \frac{d^2v}{dz^2} = \frac{F}{4\beta} [e^{-\beta z} (\cos(\beta z) - \sin(\beta z))] = \frac{F}{4\beta} C_{\beta z}$$

$$T(z) = -EI \frac{d^3v}{dz^3} = -\frac{F}{2} [e^{-\beta z} \cos(\beta z)] = -\frac{F}{2} D_{\beta z}$$



Ad una distanza $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ gli effetti provocati dalle forze esterne alla trave si annullano poiché le funzioni $A_{\beta z}$, $B_{\beta z}$, $C_{\beta z}$, $D_{\beta z}$ sono sinusoidali smorzate. Abbiamo infatti che, per ognuna di queste sarà :

$$f_{\beta z}(z+\lambda) \approx e^{-2\pi} f_{\beta z}(z) = \frac{f_{\beta z}(z)}{535,5} \ll f_{\beta z}(z)$$

Il tratto sollecitato sarà quindi quello compreso in $z \in [-\lambda; +\lambda]$.

Per capire se una trave si comporta come illimitata (effetti dei carichi nulli alle estremità) oppure no, dunque, per un dato rapporto β fissato, sta tutto nel confronto fra la semi-lunghezza della trave, detta l , e la sua lunghezza critica $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$:

$l > \lambda \rightarrow$ trave illimitata (estremi non sollecitati)

$l < \lambda \rightarrow$ trave finita (estremi sollecitati)

Poiché $\beta \propto \frac{k}{EI}$, λ cresce quando EI prevale su k e ci avviciniamo alla condizione di trave finita.

Nel primo caso le condizioni agli estremi non sono importanti; per cui, se vogliamo trovare le costanti di $v(z)$ basta applicare le condizioni al contorno nel punto in cui è applicato il carico (z). Se invece ci troviamo nel secondo caso, gli effetti alle estremità della trave non sono più trascurabili e quindi dovremo imporre le condizioni al contorno sia dove è applicato il carico sia agli estremi ($\pm l$), eventualmente sfruttando la simmetria del sistema.

Detto $z=0$ il punto di applicazione del carico, quando $l < \lambda$ (trave finita), si definiscono "cedevoli" i seguenti rapporti :

$\lambda_{FF} = \frac{v(0)}{F} \rightarrow$ spostamento duale al taglio provocato da una forza applicata unitaria;


$\lambda_{HF} = \frac{\varphi(0)}{F} \rightarrow$ rotazione duale al momento flettente provocato da una forza applicata unitaria;


$\lambda_{Fm} = \frac{v(0)}{m} \rightarrow$ spostamento duale al taglio provocato da una coppia applicata unitaria;

$\lambda_{mm} = \frac{\varphi(0)}{m} \rightarrow$ rotazione duale al momento flettente provocato da una coppia applicata unitaria.

Il segno dipende da dove viene applicato il carico F o m , cioè se in $z=0$ o in $z=l$ (limitandosi a considerare il tratto $z > 0$).

La stabilità dell'arco dipende in modo diretto non solo dalla resistenza meccanica del materiale che lo costituisce, ma soprattutto dalla posizione della curva delle pressioni. Essa, lo ricordiamo, è l'involuppo delle rette d'azione delle forze risultanti successive che agiscono spostandosi da un estremo all'altro della struttura. Se l'arco ha esattamente la stessa forma della curva delle pressioni ($y = y_0$), il momento flettente deve risultare nullo su tutto lo sviluppo dell'arco stesso. Questo comporterebbe che l'unica caratteristica di sollecitazione presente lungo l'arco è la spinta, ossia lo sforzo normale, di compressione. I materiali non devono così sopportare sforzi di trazione, rispetto ai quali, peraltro spesso non risultano indicati.

Occorre pertanto che ogni sezione dell'arco lavori interamente in compressione ($\sigma_s < 0$) e che la risultante complessiva degli sforzi cada entro la sezione dei piedritti. Allorché quest'ultima condizione non fosse verificata si può ovviare al problema e garantire la stabilità al rovesciamento del piedritto () con il suo ingrossamento o con l'introduzione di adeguate componenti verticali o orizzontali della risultante.

Non essendo ammessi sforzi di trazione (obiettivo della verifica degli archi) e non potendo i conci né compenetrarsi, né scorrere gli uni rispetto agli altri, l'unico cinematico consentito che può provocare uno svincolamento interno dell'arco (e in alcuni casi il collasso) è dato dalla rotazione relativa di due conci rispetto a uno dei loro punti di contatto, all'intradosso o all'estradosso. 

II) TIPOLOGIE

L'arco può essere classificato in base all'andamento dell'intradosso e al suo comportamento statico. Senza entrare nel merito dei singoli casi, per i quali si rimanda ad altri testi, ci limitiamo a elencare i nomi delle tipologie più importanti:

GEOMETRIA :

- ↳ arco a tutto sesto;
- ↳ arco a sesto acuto;
- ↳ arco a sesto ribassato;
- ↳ arco a sesto rialzato;
- ↳ arco rampante.

COMPORTAMENTO STATICO :

- ↳ arco incastrato;
- ↳ arco a due cerniere;
- ↳ arco a tre cerniere;
- ↳ arco a spinta eliminata (con catene).

Esiste, inoltre, la possibilità di sfruttare il criterio della continuità statica combinando fra loro archi e travi: si parla di "sistemi arco-trave". In questi casi le travi lavorano come bicelle e possono essere tutte compresse, tutte tese o anche in parte compresse e in parte tese. (12)

Scriviamo a questo punto le 6 componenti deformative $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial W}{\partial x} z \right) = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} z & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial W}{\partial x} z \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial W}{\partial y} z \right) = -2z \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial W}{\partial y} z \right) = -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} z & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial W}{\partial x} z \right) + \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \text{ perche' } w \text{ non e' funzione di } z & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial W}{\partial y} z \right) + \frac{\partial W}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

Questi risultati evidenziano un fatto importante: l'ipotesi cinematica di Kirchhoff implica che la lastra sia soggetta ad uno stato deformativo piano, dove il piano interessato e' xy , cioè quello della superficie caricata, o, se vogliamo, il piano medio della lastra.

Tale aspetto costituisce una novità importante rispetto alla teoria della trave, per la quale avevamo che, in generale, il campo deformativo e' completo. Più avanti avremo un'ulteriore evidenza di questa differenziazione.

Volendo riassumere simbolicamente i risultati non nulli visti in precedenza, scriveremo

$$\begin{cases} \epsilon_x = \chi_x z \\ \epsilon_y = \chi_y z \\ \gamma_{xy} = \chi_{xy} z \end{cases} \text{ dove } \begin{cases} \chi_x = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} & \text{e' la curvatura meccanica indotta intorno all'asse } y, \\ \chi_y = -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} & \text{e' la curvatura meccanica indotta intorno all'asse } x, \\ \chi_{xy} = -2\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} & \text{e' la curvatura meccanica di torsione (o twist).} \end{cases}$$

Se ipotizziamo anche uno stato tensionale piano, avremo le seguenti relazioni costitutive inverse e dirette:

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{1}{E} (\delta_x - \nu \delta_y) \\ \epsilon_y = \frac{1}{E} (\delta_y - \nu \delta_x) \\ \delta_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \end{cases} \quad \begin{cases} \delta_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \\ \delta_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) \\ \tau_{xy} = G \gamma_{xy} \end{cases} \text{ dove } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

In realtà, non potremmo avere uno stato deformativo piano e tensionale piano allo stesso tempo, ma avendo inizialmente assunto h molto piccolo, le δ_z che si possono sviluppare lungo lo spessore della lastra saranno in ogni caso molto piccole se paragonate alle δ_x e alle δ_y , onde per cui trascurabili perche' non tali da comportare criticità nei materiali comunemente impiegati per le lastre. Questo vale per carichi statici o dinamici con frequenze medio-basse, ma non per forze impulsive (urti).

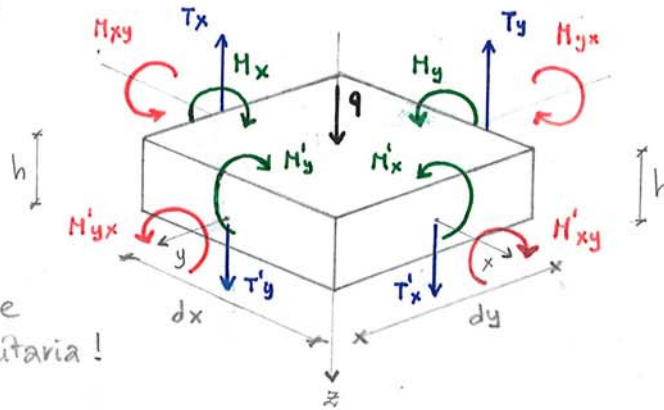
Se confrontiamo le tensioni normali sulla sezione per una trave e le tensioni normali sulla sezione ortogonale a uno degli assi del piano medio per una lastra piana, entrambe soggette a flessione, si nota che le tensioni nella lastra sono maggiori perche' e' maggiore la rigidità flessionale, grazie al contributo delle strisce ortogonali a quella lungo cui si valutano le tensioni stesse e che si esplica tramite il coefficiente di Poisson ν . Se questo fosse nullo i due casi risultano indistinti. La dimostrazione e' semplicissima e viene illustrata di seguito.

Si consideri ora un elemento infinitesimo $dx dy h$ di lastra caricato in modo uniformemente distribuito da $q(x,y)$:

$$[T] = [N \cdot m^{-1}]$$

$$[M] = [N \cdot m \cdot m^{-1}]$$

↳ sforzi per strisce di lunghezza unitaria!



È possibile, a questo punto, scrivere i sistemi di equazioni che descrivono il comportamento flessionale della lastra piana dal punto di vista statico e cinematico, dimostrando ancora una volta la dualità statico-cinematica. In seguito illustreremo la formulazione del problema elastico per questo tipo di elementi strutturali.

EQUAZIONI DI EQUILIBRIO

Explicitiamo innanzitutto le seguenti cds:

$$\begin{aligned} T'_x &= T_x + \frac{\partial T_x}{\partial x} dx & T'_y &= T_y + \frac{\partial T_y}{\partial y} dy \\ M'_x &= M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx & M'_y &= M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy \\ M'_{xy} &= M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx & M'_{yx} &= M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy \end{aligned}$$

Le equazioni che possiamo scrivere sono 3: equilibrio alla traslazione lungo l'asse z, alla rotazione intorno all'asse x e alla rotazione intorno all'asse y.

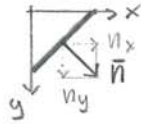
$$\begin{aligned} \uparrow z \quad -T_x dy + (T_x + \frac{\partial T_x}{\partial x} dx) dy - T_y dx + (T_y + \frac{\partial T_y}{\partial y} dy) dx + q dx dy &= 0 \\ \frac{\partial T_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial T_y}{\partial y} dx dy + q dx dy &= 0 \quad \rightarrow \text{novità rispetto alla trave} \\ \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + q &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \curvearrowright x \quad M_{xy} dy - (M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx) dy + M_y dx - (M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy) dx + T_y dx \frac{dy}{2} + \\ + (T_y + \frac{\partial T_y}{\partial y} dy) dx \frac{dy}{2} &= 0 \quad - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy - \frac{\partial M_y}{\partial y} dx dy + T_y dx dy + \frac{\partial T_y}{\partial y} dx \frac{dy^2}{2} = 0 \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - T_y - \frac{\partial T_y}{\partial y} dy &= 0 \quad \rightarrow \text{perché infinitesimo di ordine superiore} \quad \rightarrow \text{novità rispetto alla trave} \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - T_y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \curvearrowright y \quad M_{yx} dx - (M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy) dx + M_x dy - (M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx) dy + T_x dy \frac{dx}{2} + \\ + (T_x + \frac{\partial T_x}{\partial x} dx) dy \frac{dx}{2} &= 0 \quad \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - T_x = 0 \\ \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - T_x &= 0 \quad \rightarrow \text{novità rispetto alla trave} \end{aligned}$$

Per l'equilibrio globale dovrà inoltre valere che $M_{xy} = M_{yx}$.

$[N]^T = \begin{bmatrix} n_x & n_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_x & 0 & n_y \\ 0 & 0 & 0 & n_x & n_y \end{bmatrix}$ rappresenta il passaggio dal vettore delle cds $\{T_x, T_y, M_x, M_y, M_{xy}\}^T$ al suo omologo $\{T_n, M_{nx}, M_{ny}\}^T$, dove n rappresenta la normale uscente dal contorno della lastra in un suo generico punto.



A questo punto, poiché ciò che accomuna $\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$ è la dipendenza dallo spostamento puntuale w (essendo queste delle curvature) e poiché $\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$ sono a loro volta variabili delle cds legate al regime flessionale della trave $T_x, T_y, M_x, M_y, M_{xy}$ (le quali, indotte dal carico distribuito $q_z(x, y)$, concorrono a garantire l'equilibrio) vogliamo trovare un'equazione che permetta, se risolta con le opportune condizioni al contorno, di determinare la funzione $w(x, y)$ provocata nella lastra da un certo carico $q_z(x, y) = q$ agente in modo genericamente distribuito sulla sua superficie.

EQUAZIONE DI SOPHIE-GERMAIN

Partiamo dalle equazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} 1) & \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + q &= 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - T_x &= 0 \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - T_y &= 0 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Deriviamo la (2) rispetto a x e la (3) rispetto a y , quindi sostituiamo i risultati nella (1):

$$\frac{\partial(2)}{\partial x}: \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial T_x}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial T_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2)^*$$

$$\frac{\partial(3)}{\partial y}: \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial T_y}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial T_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (3)^*$$

$$(1)^*: \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q = 0$$

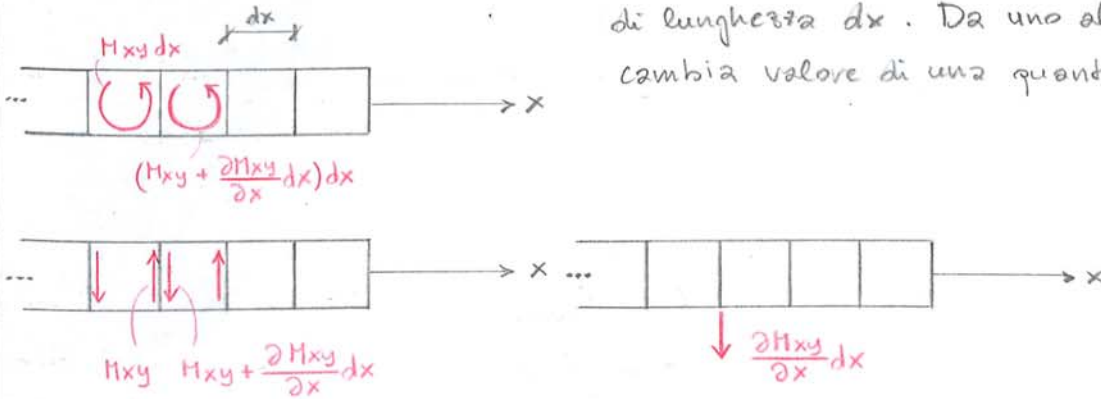
A questo punto introduciamo le equazioni costitutive nella (1)*

$$\begin{cases} M_x = D(\chi_x + \nu \chi_y) = D\left(\frac{\epsilon_x}{z} + \nu \frac{\epsilon_y}{z}\right) = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ M_y = D(\chi_y + \nu \chi_x) = D\left(\frac{\epsilon_y}{z} + \nu \frac{\epsilon_x}{z}\right) = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ M_{xy} = D \frac{1-\nu}{2} \chi_{xy} = D \frac{1-\nu}{2} \frac{\gamma_{xy}}{z} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{assumendo } D = \text{cost.} \\ \gamma(x, y) \in S \end{array}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[-D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + q = 0$$

$$\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] + \left[\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] + \left[2(1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] = \frac{q}{D}$$

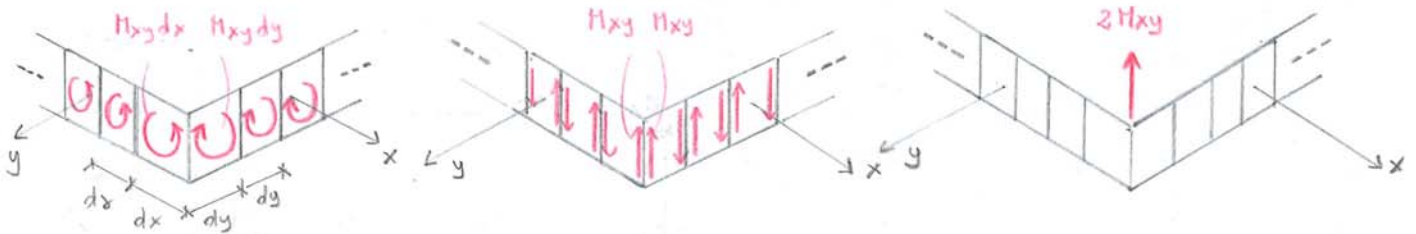
Per giustificare questi ultimi risultati consideriamo un tratto di lastra parallelo all'asse x e caricato con un momento torcente M_{xy} . Lo si suddivide in tratti infinitesimi di lunghezza dx . Da uno all'altro il torcente cambia valore di una quantità $\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx$.



Il taglio sul lato parallelo all'asse x e quindi normale all'asse y sarà dato allora dalla somma di due contributi: il taglio propriamente detto T_y e l'effetto indotto dal momento torcente $\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$. La somma dei contributi prende il nome di "taglio di Kirchhoff" ed è quindi il taglio per le lastre piane inflesse, dove l'interazione fra le strisce ortogonali produce una compartecipazione a generare sollecitazione, nelle une come nelle altre:

$$\bar{V}_y = T_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (\text{e analogamente } \bar{V}_x = T_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}) \quad \text{TAGLIO DI KIRCHHOFF}$$

Quanto appena visto vale sui lati della lastra; mentre negli spigoli sarà



$$F = |2M_{xy}| \begin{cases} A, C: F = -2M_{xy} \\ B, D: F = 2M_{xy} \end{cases}$$

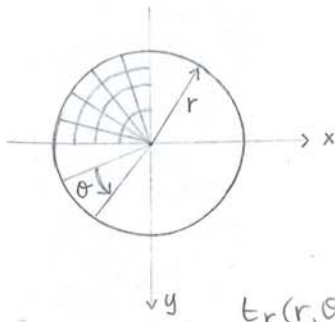
L'equazione di S-G. può essere risolta anche per via numerica, senza cioè impostare un problema alle equazioni differenziali, bensì approssimando le derivate con i rapporti incrementali e assegnando le condizioni al contorno in maniera congrua. Per fare questo, il metodo più usato è quello delle Differenze Finite (FDM).

ASSENZA DELL'EFFETTO POISSON E RUOLO DEL MOMENTO TORCENTE NELLE LASTRE PIANE INFLESSE

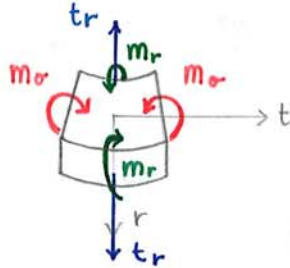
La conservazione delle sezioni piane sulle direzioni x e y per le lastre piane inflesse comporta che vi siano 2 ordini di strisce reciprocamente ortogonali che hanno comportamento simile alle travi, ma non uguale. Questo avviene perché se nelle travi avevamo l'effetto di Poisson per cui la sezione si allargava laddove era tesa e si restringeva laddove era compressa ($\uparrow \boxplus \downarrow$), nelle lastre invece le strisce di uno stesso ordine esercitano le une sulle altre un'azione di confinamento tale per cui queste deformazioni non sono $\textcircled{20}$

TIPI DI LASTRE PIANE INFLESSE

1) LASTRE CIRCOLARI



$$\left. \begin{aligned} t_r(r, \theta) \\ m_r(r, \theta) \\ m_\theta(r, \theta) \end{aligned} \right\} \text{ cds}$$

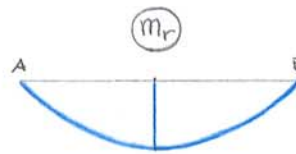
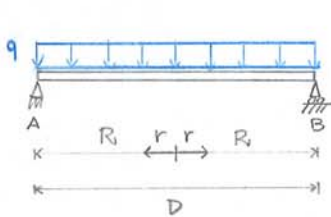


Massimizzano il comportamento "a lastra" (come quelle quadrate).
I due ordini di strisce che si studiano sono quelle radiali e quelle circolari (direzioni r e θ).

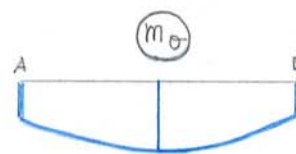
Indichiamo le cds con le lettere minuscole solo per ricordare che esse sono espresse per unità di lunghezza delle strisce rispetto alle quali vengono misurate.

Si noti che se il carico è polarmente simmetrico avremo il taglio t_r , ma non la torsione $m_{r\theta}$. Vediamo ora alcuni esempi di condizioni di carico e di vincolo:

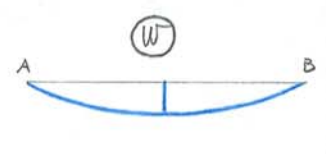
• LASTRA CIRCOLARE APPOGGIATA AL CONFINO CON CARICO UNIFORMEMENTE DISTRIBUITO



$$m_r = (3+\nu) \frac{q(R^2 - r^2)}{16}$$



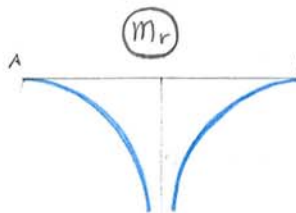
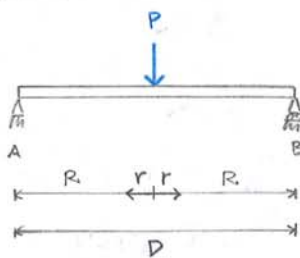
$$m_\theta = \frac{q}{16} [(3+\nu)R^2 - (1+3\nu)r^2]$$



$$\begin{cases} m_{r, \min} = 0 \\ m_{r, \max} = (3+\nu) \frac{qR^2}{16} \approx \frac{qD^2}{21} \end{cases} \quad \begin{cases} m_{\theta, \min} = (1-\nu) \frac{qR^2}{8} = (1-\nu) \frac{qD^2}{32} \\ m_{\theta, \max} = (3+\nu) \frac{qR^2}{16} = \frac{qD^2}{21} \end{cases}$$

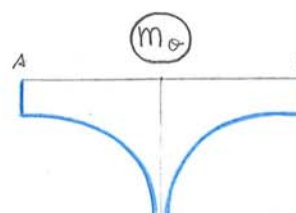
Il momento radiale è simile nella forma a quello della trave appoggiata, ma, in questo caso, il valore che assume in mezz'aria è molto più basso. Quindi la rigidità della lastra di diametro D è superiore a quella della trave di lunghezza $l = D$, a parità di condizioni di vincolo e di carico. Di conseguenza, lo spostamento w della lastra sarà minore che nella trave (circa 4 volte).

• LASTRA CIRCOLARE APPOGGIATA AL CONFINO CON FORZA CONCENTRATA AGENTE AL CENTRO



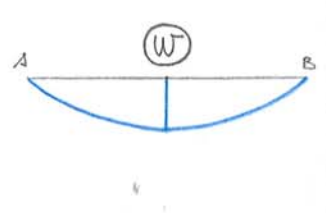
$$m_r = (1+\nu) \frac{P}{4\pi} \log\left(\frac{R}{r}\right)$$

$$\begin{cases} m_{r, \min} = 0 \\ m_{r, \max} \rightarrow +\infty \end{cases}$$

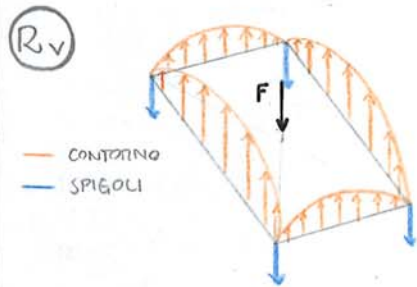
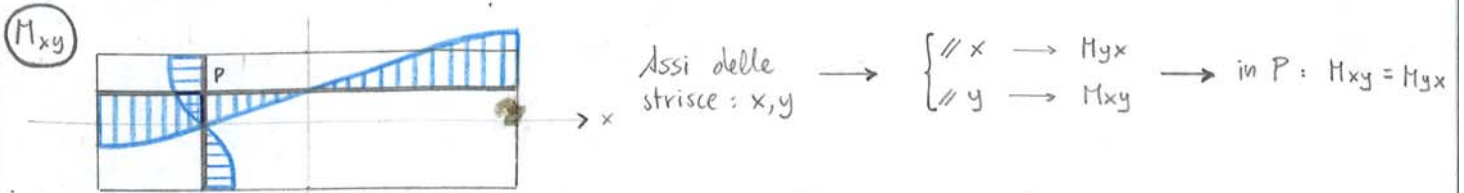


$$m_\theta = \frac{P}{4\pi} \left[(1+\nu) \log\left(\frac{R}{r}\right) + (1-\nu) \right]$$

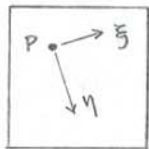
$$\begin{cases} m_{\theta, \min} = (1-\nu) \frac{P}{4\pi} \\ m_{\theta, \max} \rightarrow +\infty \end{cases}$$



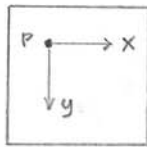
Per bloccare gli spigoli introduciamo dei vincoli puntuali che generano a loro volta dei momenti torcenti negativi (ossia opposti) lungo la diagonale.



Per quanto riguarda i momenti flettenti calcolati lungo due generiche direzioni, essi saranno massimi in mezzeria e nulli agli estremi. Se le direzioni sono x, y in mezzeria avremo anche che $M_{xy} = M_{yx} = 0$. Per questo si dicono "direzioni principali" e i flettenti M_x, M_y "momenti principali". Essi sono quindi gli estremi massimo e minimo di momenti misurati in un certo punto della lastra rettangolare e in mezzeria coincidono con M_x e M_y . Più i momenti flettenti sono distanti in modulo fra loro, più basso sarà il momento torcente, fino ad arrivare al caso limite dei momenti principali, le cui direzioni coincidono con quelle principali di tensione (isostatiche dei momenti e delle tensioni), lungo le quali si ha quindi che $\tau_{xy} = 0$ e cioè $M_{xy} = 0$, delle x, y tali direzioni ($x \equiv \xi, y \equiv \eta$).



DIREZIONI PRINCIPALI IN P ($M_{\xi\eta} = 0$)

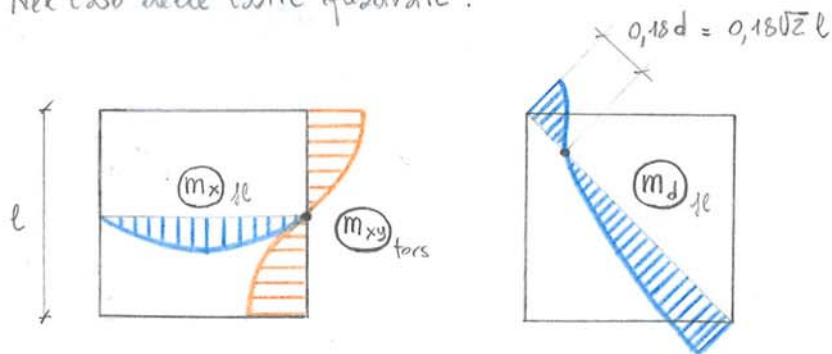


NO DIREZIONI PRINCIPALI IN P ($M_{xy} \neq 0$)

Le direzioni principali delle curvature sono due direzioni ortogonali secondo cui si annulla l'angolo unitario di torsione $\chi_{xy}/2$. Tali direzioni, se il materiale della lastra è isotropo, coincidono con le direzioni principali dei momenti (per il legame costitutivo).

Se i lati della lastra rettangolare presentano un rapporto superiore a 2, l'effetto lastra sompare del tutto e non c'è più torsione, perché il comportamento è governato dalle strisce più corte.

Nel caso delle lastre quadrate:



$m_{xy, \max} > m_{x, \max}$

Infatti si ha che $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, per cui $E = \frac{12D(1-\nu^2)}{h^3}$. Riordinando il tutto in forma matriciale, si ha

$$\begin{bmatrix} \frac{12D}{h^2} & \frac{12\nu D}{h^2} & 0 \\ \frac{12\nu D}{h^2} & \frac{12D}{h^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6(1-\nu)D}{h^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix}$$

$$[H] \cdot \{q\} = \{Q\} \quad \text{EQUAZIONI COSTITUTIVE}$$

Il problema elastico assume la stessa forma visto in precedenza per il regime flessionale.

III) EFFETTI DELLE VARIAZIONI TERMICHE

VARIAZIONI TERMICHE UNIFORMI

$\pm \Delta T$

Se la variazione termica è localizzata lungo lo spessore e non ha andamento lineare, bensì costante lungo questo, verranno indotte tensioni normali uniformemente distribuite lungo le sezioni, per cui non vi saranno momenti (sezione tutta compressa o tutta tesa con uguali valori di ϵ_x e ϵ_y). Il caso si riduce alla soluzione membrana:

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left[(\epsilon_x \mp \Delta T) + \nu (\epsilon_y \mp \Delta T) \right] \\ \epsilon_y = \frac{E}{1-\nu^2} \left[(\epsilon_y \mp \Delta T) + \nu (\epsilon_x \mp \Delta T) \right] \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{EQUAZIONI} \\ \text{COSTITUTIVE} \end{array} \quad \begin{array}{l} - \longrightarrow \Delta T \text{ positiva (espansione)} \\ + \longrightarrow \Delta T \text{ negativa (contrazione)} \end{array}$$

Il comportamento della lastra dipende dai vincoli applicati al contorno:

- LASTRA INCASTRATA ($\epsilon_x = 0, \epsilon_y = 0$)

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{E\alpha}{1-\nu^2} [\mp \Delta T (1+\nu)] = \mp \frac{E\alpha \Delta T}{1-\nu} \\ \epsilon_y = \frac{E\alpha}{1-\nu^2} [\mp \Delta T (1+\nu)] = \mp \frac{E\alpha \Delta T}{1-\nu} \end{cases}$$

- LASTRA INCASTRATA LUNGO y ($\epsilon_x = 0$)

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{E}{1-\nu^2} [\mp \Delta T + \nu (\epsilon_y \mp \Delta T)] = \frac{E}{1-\nu^2} [\nu \epsilon_y \mp \Delta T (1+\nu)] \\ \epsilon_y = \frac{E}{1-\nu^2} [(\epsilon_y \mp \Delta T) + \nu (\mp \Delta T)] = \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_y \mp \Delta T (1+\nu)] \end{cases}$$

- LASTRA LIBERA ($\epsilon_x = \pm \Delta T, \epsilon_y = \pm \Delta T$)

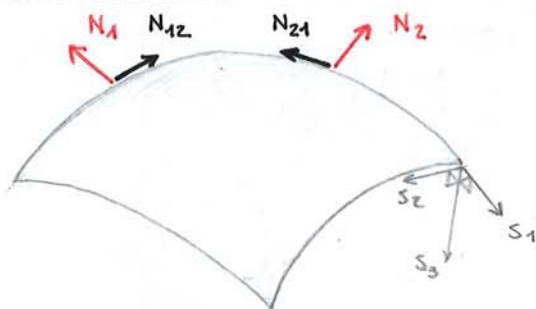
$$\begin{cases} \epsilon_x = 0 \\ \epsilon_y = 0 \end{cases}$$

LASTRE A DOPPIA CURVATURA

Come le travi possono essere ad asse curvilineo e quindi rappresentare elementi nel piano con una propria costante curvatura geometrica, così anche le lastre, anziché essere piane, possono avere una o due curvature, in quanto superfici nello spazio. In tal caso si parlerà appunto di "lastre a singola o doppia curvatura", di cui le prime sono una sottocategoria delle seconde. Una volta individuate le curvature massima e minima della lastra, cioè quelle che presentano rispettivamente raggio di curvatura minimo e massimo, si definiscono le asisse curvilinee principali s_1 ed s_2 , divise in ogni punto come la triadonia sulla lastra che descrive il rispettivo cerchio di curvatura principale.

Come per le lastre piane, assumiamo valida l'ipotesi cinematica di Kirchhoff e i suoi corollari (mantenimento di sezioni piane, spessore solido m_2 non trascurabile, campo deformativo piano). Inoltre, sempre come nelle lastre piane, esistono due regimi: flessionale (in cui intervengono tagli, flettenti e torcenti) e membranale (in cui si hanno solo sforzi normali e sforzi di scorrimento membranale, talvolta definiti anch'essi tagli, erroneamente perché non inducono flessione).

REGIME MEMBRANALE



$$\{Q\} = \{N_1, N_2, N_{12}\}^T$$

$$\{q\} = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma_{12}\}^T$$

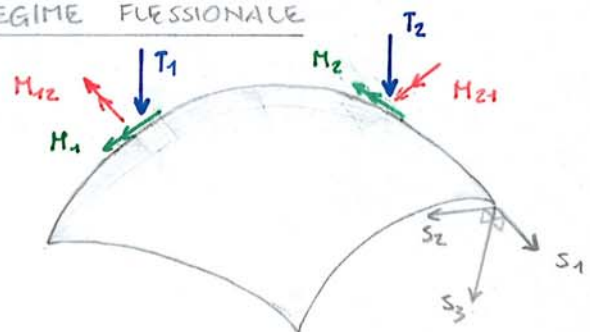
N_1, N_2 = sforzi normali;

N_{12} = sforzo di scorrimento membranale (o taglio) contenuto nel piano medio.

ϵ_1, ϵ_2 = dilatazioni principali;

γ_{12} = scorrimento tra le direzioni principali di curvatura.

REGIME FLESSIONALE



$$\{Q\} = \{T_1, T_2, M_1, M_2, M_{12}\}^T$$

$$\{q\} = \{\gamma_1, \gamma_2, \chi_1, \chi_2, \chi_{12}\}^T$$

T_1, T_2 = tagli;

M_1, M_2 = momenti flettenti;

M_{12} = momento torcente.

γ_1, γ_2 = scorrimenti tra ciascuna direzione principale di curvatura e la normale al piano tangente alla lastra;

χ_1, χ_2 = curvature flessionali;

χ_{12} = doppio dell'angolo unitario di torsione.

LASTRE DI RIVOLUZIONE

Questa famiglia di strutture rientra tra le lastre a doppia curvatura. La loro caratteristica peculiare è quella di essere generate dalla rotazione di una curva piana $r(z)$ attorno ad un asse di simmetria radiale z . Tale curva è detta "curva generatrice".

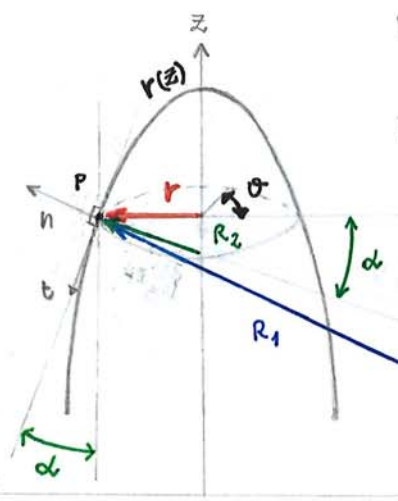
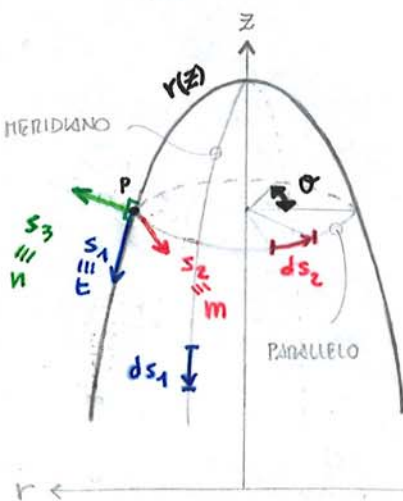
In questo caso, le curvatures principali, individuate dalle ascisse s_1 e s_2 , sono tangenti in ogni punto, rispettivamente, alla generatrice $r(z)$ e alla direttrice circolare alla quota z .

Un generico punto P sulla lastra può essere inteso come centro di una terna destrorsa $\{t, m, n\}$, anche indicata come $\{s_1, s_2, s_3\}$. Il punto P può essere supposto mobile lungo 2 direzioni:

- se P si sposta lungo la generatrice $r(z)$ individua la generatrice stessa, che prende il nome di "meridiano". I meridiani sono le infinite configurazioni che può assumere la generatrice $r(z)$ attorno all'asse di simmetria z .
- se P si mantiene alla stessa quota z e ruota semplicemente intorno all'asse di simmetria z descrive un cerchio che prende il nome di "parallelo". I paralleli sono quindi le infinite traiettorie circolari percorse dai singoli punti della generatrice $r(z)$ intorno all'asse di simmetria z .

La traiettoria del generico meridiano coincide punto a punto con s_1 , mentre quella del generico parallelo coincide punto a punto con s_2 . Nello stesso punto di s_1, s_2 il vettore s_3 è quello che completa la terna locale e risulta normale e uscente dalla superficie della lastra relativamente al punto stesso.

Se s_1 e s_2 sono curvatures principali, ciascuna di esse avrà come "alter-ego" un certo raggio di curvatura principale, rispettivamente R_1 e R_2 .



- R_1 = raggio di curvatura del meridiano passante per P ;
- r = raggio di curvatura del parallelo passante per P ;
- R_2 = raggio di curvatura ortogonale al meridiano in P .

$$\begin{cases} ds_1 = ds \approx \frac{dz}{\cos \alpha} \\ ds_2 = r d\theta \end{cases}$$

I) LASTRE DI RIVOLUZIONE CARICATE SIMMETRICAMENTE

Se il carico della lastra di rivoluzione presenta simmetria rispetto allo stesso asse z , il problema elastico si semplifica in modo considerevole:

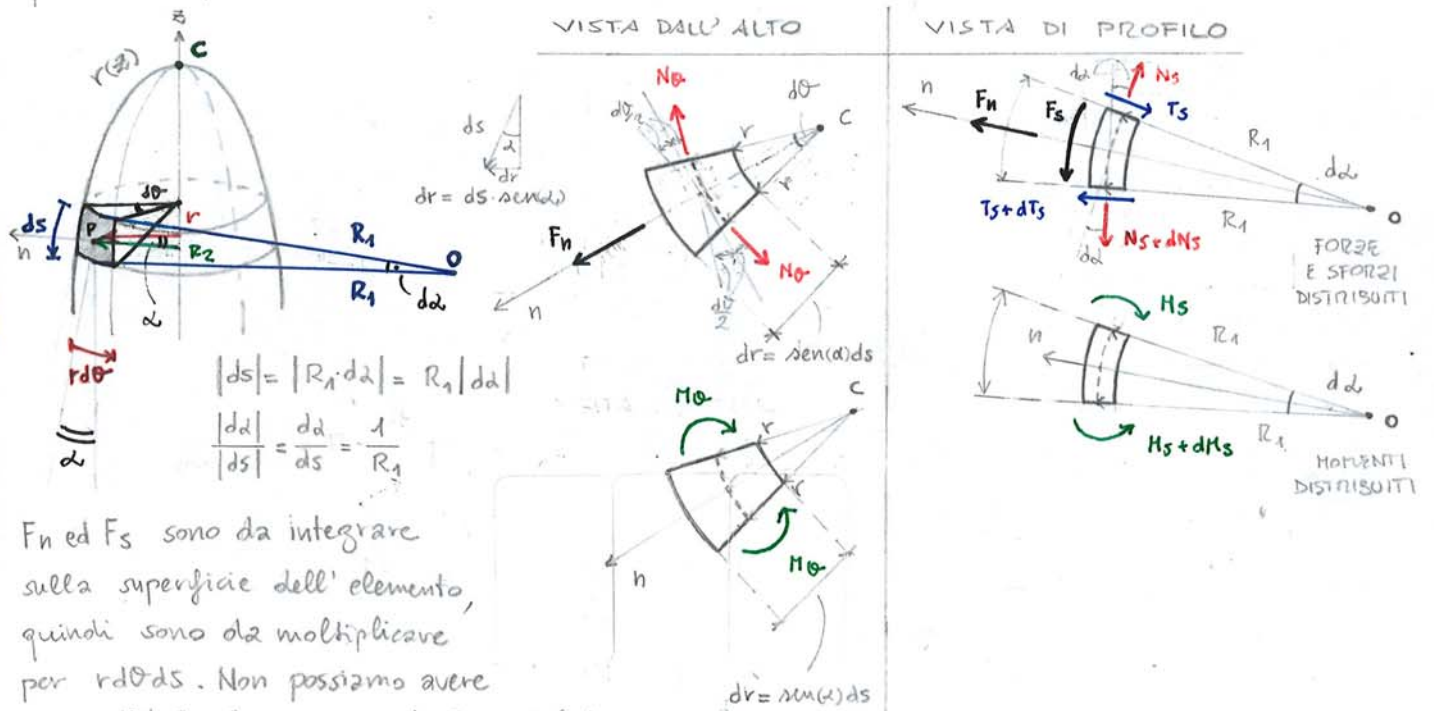
$$\begin{cases} N_{\theta} = 0 \\ T_{\theta} = 0 \\ M_{\theta} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_{\theta} = 0 \\ \gamma_{\theta} = 0 \\ \chi_{\theta} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_{\theta} = 0 \\ \varphi_{\theta} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \{Q\} = \{N_s, N_{\theta}, T_s, M_s, M_{\theta}\}^T \\ \{q\} = \{\varepsilon_s, \varepsilon_{\theta}, \gamma_s, \chi_s, \chi_{\theta}\}^T \\ \{\eta\} = \{u_s, u_n, \varphi_s\}^T \end{cases}$$

La conseguenza naturale della simmetria strutturale e di carico consiste dunque nell'annullamento di tutti i termini statici, deformativi e cinematici che siano esprimibili in funzione della derivata prima rispetto a θ .

Possiamo dunque già notare che, mentre valeva in generale per le lastre a doppia curvatura e quindi anche di rivoluzione che il sistema statico (equazioni di equilibrio) era 3 volte iperstatico ossia indeterminato ($i-e = 8-5 = 3$), per le lastre di rivoluzione caricate simmetricamente il grado di indeterminazione si riduce a 2 grazie proprio alla simmetria strutturale e di carico ($i-e = 5-3 = 2$).

Come per le travi, dunque, la simmetria riduce il grado di indeterminazione del problema di equilibrio statico relativo alle lastre.

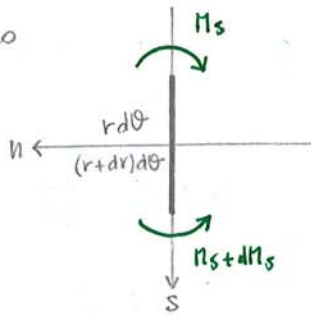
Ricaviamo quindi le equazioni di equilibrio semplificate per un concio di lastra delimitato da due meridiani posti a distanza infinitesima $ds_2 = r d\theta$ e da due paralleli posti a distanza infinitesima $ds_1 = ds$.



F_n ed F_s sono da integrare sulla superficie dell'elemento, quindi sono da moltiplicare per $r d\theta ds$. Non possiamo avere coppie distribuite m_{θ} perché non verrebbe rispettata la simmetria di carico.

Momento M_s, M_s+dM_s rispetto al parallelo

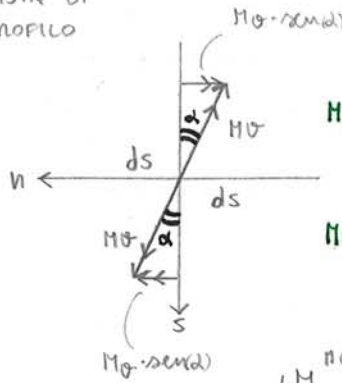
VISTA DI PROFILO



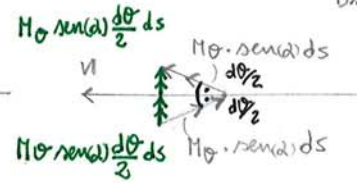
$$M_\theta^{Ns} = -M_s(r/d\theta) + M_s(rd\theta) + M_s(dr/d\theta) + dM_s(rd\theta) + dM_s(dr/d\theta) = M_s(dr/d\theta) + dM_s(rd\theta)$$

Momento di M_θ rispetto al parallelo

VISTA DI PROFILO



VISTA DALL'ALTO



$$M_\theta^{No} = -2 \left[M_\theta \sin(\alpha) \frac{d\theta}{2} ds \right] = -M_\theta \sin(\alpha) d\theta ds$$

EQUAZIONI DI EQUILIBRIO

Esse sono 3 e, in particolare, alla traslazione lungo n , lungo s e alla rotazione intorno al parallelo.

$$\leftarrow \frac{+}{n} \quad -N_s ds (rd\theta) - N_\theta (ds d\theta) \cos(\alpha) + T_s (dr/d\theta) + dT_s (rd\theta) + F_n (rd\theta ds) = 0$$

$$+\downarrow s \quad N_s (dr/d\theta) + dN_s (rd\theta) - N_\theta (ds d\theta) \sin(\alpha) + T_s ds (rd\theta) + F_s (rd\theta ds) = 0$$

$$(\theta^+) \quad -T_s (rd\theta) ds + M_s (dr/d\theta) + dM_s (rd\theta) - M_\theta \sin(\alpha) d\theta ds = 0$$

Dividendo termine a termine per $rd\theta ds$ tutte le equazioni il sistema prende la forma seguente

$$\begin{cases} -\frac{N_s ds}{ds} - \frac{N_\theta \cos(\alpha)}{r} + \frac{T_s dr}{r ds} + \frac{dT_s}{ds} + F_n = 0 \\ \frac{N_s dr}{r ds} + \frac{dN_s}{ds} - \frac{N_\theta \sin(\alpha)}{r} + \frac{T_s ds}{ds} + F_s = 0 \\ -T_s + \frac{M_s dr}{r ds} + \frac{dM_s}{ds} - \frac{M_\theta \sin(\alpha)}{r} = 0 \end{cases}$$

e ricordando poi che $\frac{dr}{ds} = \frac{1}{R_1}$, $\frac{\cos(\alpha)}{r} = \frac{1}{R_2}$ e $\frac{dr}{ds} = \sin(\alpha)$, avremo

$$\begin{cases} -\frac{N_s}{R_1} - \frac{N_\theta}{R_2} + T_s \frac{\sin(\alpha)}{r} + \frac{dT_s}{ds} + F_n = 0 \\ \frac{N_s \sin(\alpha)}{r} + \frac{dN_s}{ds} - \frac{N_\theta \sin(\alpha)}{r} + \frac{T_s}{R_1} + F_s = 0 \\ -T_s + \frac{M_s \sin(\alpha)}{r} + \frac{dM_s}{ds} - \frac{M_\theta \sin(\alpha)}{r} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \left(\frac{d}{ds} + \frac{\sin(\alpha)}{r} \right) N_s - \frac{\sin(\alpha)}{r} N_\theta + \frac{T_s}{R_1} + F_s = 0 \\ -\frac{N_s}{R_1} - \frac{N_\theta}{R_2} + \left(\frac{d}{ds} + \frac{\sin(\alpha)}{r} \right) T_s + F_n = 0 \\ -T_s + \left(\frac{d}{ds} + \frac{\sin(\alpha)}{r} \right) M_s - \frac{\sin(\alpha)}{r} M_\theta = 0 \end{cases}$$

E' facile osservare che nelle lastre di rivoluzione caricate simmetricamente, ma anche nelle lastre a doppia curvatura in genere, il regime membranale e quello flessionale non siano disaccoppiati, a differenza di quanto accadeva per tutte le lastre piane (come abbiamo dimostrato in precedenza). Si ha infatti che T_s compare in tutte le equazioni (ricordo). (33)

III) Applicazione del teorema di Green ai termini in cui le cds sono derivate rispetto alla variabile s :

$$= \int_A \frac{dN_s}{ds} (u_s r) d\theta ds = \int_A \frac{d(u_s r)}{ds} N_s d\theta ds - \oint_C \underbrace{N_s (u_s r)}_{gh} d\theta$$

$$- \int_A \frac{dT_s}{ds} (u_n r) d\theta ds = \int_A T_s \frac{d(u_n r)}{ds} d\theta ds - \oint_C T_s (u_n r) d\theta$$

$$- \int_A \frac{dM_s}{ds} (\varphi_s r) d\theta ds = \int_A M_s \frac{d(\varphi_s r)}{ds} d\theta ds - \oint_C M_s (\varphi_s r) d\theta$$

IV) Riscriviamo L_{ve} alla luce di questi risultati:

$$\begin{aligned} L_{ve} &= \int_A N_s \frac{d(u_s r)}{ds} d\theta ds - \oint_C N_s (u_s r) d\theta - \int_A \left[\frac{\sin(\alpha)}{r} N_s - \frac{\sin(\alpha)}{r} N_\theta + \frac{T_s}{R_1} \right] u_s r d\theta ds \\ &+ \int_A T_s \frac{d(u_n r)}{ds} d\theta ds - \oint_C T_s (u_n r) d\theta - \int_A \left[-\frac{N_s}{R_1} - \frac{N_\theta}{R_2} + \frac{\sin(\alpha)}{r} T_s \right] u_n r d\theta ds \\ &+ \int_A M_s \frac{d(\varphi_s r)}{ds} d\theta ds - \oint_C M_s (\varphi_s r) d\theta - \int_A \left[-T_s + \frac{\sin(\alpha)}{r} M_s - \frac{\sin(\alpha)}{r} M_\theta \right] \varphi_s r d\theta ds \\ &+ \oint_C [N_s u_s + T_s u_n + M_s \varphi_s] r d\theta = \int_A \left[\frac{d(u_s r)}{ds} N_s + \frac{d(u_n r)}{ds} T_s + \frac{d(\varphi_s r)}{ds} M_s \right] d\theta ds \\ &- \int_A \left[\left(\frac{\sin(\alpha)}{r} u_s - \frac{u_n}{R_1} \right) N_s + \left(-\frac{\sin(\alpha)}{r} u_s - \frac{u_n}{R_2} \right) N_\theta + \left(\frac{u_s}{R_1} + \frac{\sin(\alpha)}{r} u_n - \varphi_s \right) T_s + \frac{\sin(\alpha)}{r} \varphi_s M_s \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin(\alpha)}{r} \varphi_s M_\theta \right] r d\theta ds \end{aligned}$$

V) Sviluppiamo le derivate dei prodotti presenti nel primo integrale di superficie di L_{ve} :

$$\int_A \left[\frac{d(u_s r)}{ds} N_s \right] d\theta ds = \int_A \left[\frac{du_s}{ds} r + \frac{dr}{ds} u_s \right] N_s d\theta ds = \int_A \left[\frac{du_s}{ds} r + \sin(\alpha) u_s \right] N_s d\theta ds = \int_A \left[\frac{du_s}{ds} + \frac{\sin(\alpha)}{r} u_s \right] N_s r d\theta ds$$

$$\int_A \left[\frac{d(u_n r)}{ds} T_s \right] d\theta ds = \int_A \left[\frac{du_n}{ds} + \frac{\sin(\alpha)}{r} u_n \right] T_s r d\theta ds$$

$$\int_A \left[\frac{d(\varphi_s r)}{ds} M_s \right] d\theta ds = \int_A \left[\frac{d\varphi_s}{ds} + \frac{\sin(\alpha)}{r} \varphi_s \right] M_s r d\theta ds$$

VI) Sostituiamo questi risultati in L_{ve} e raggruppiamo i termini che hanno in comune la stessa cds:

$$\begin{aligned} L_{ve} &= \int_A \left[\left(\frac{du_s}{ds} + \frac{\sin(\alpha)}{r} u_s \right) N_s + \left(\frac{du_n}{ds} + \frac{\sin(\alpha)}{r} u_n \right) T_s + \left(\frac{d\varphi_s}{ds} + \frac{\sin(\alpha)}{r} \varphi_s \right) M_s \right] r d\theta ds \\ &- \int_A \left[\left(\frac{\sin(\alpha)}{r} u_s - \frac{u_n}{R_1} \right) N_s + \left(-\frac{\sin(\alpha)}{r} u_s - \frac{u_n}{R_2} \right) N_\theta + \left(\frac{u_s}{R_1} + \frac{\sin(\alpha)}{r} u_n - \varphi_s \right) T_s + \frac{\sin(\alpha)}{r} \varphi_s M_s - \frac{\sin(\alpha)}{r} \varphi_s M_\theta \right] r d\theta ds \\ &= \int_A \left[\left(\frac{du_s}{ds} + \frac{u_n}{R_1} \right) N_s + \left(\frac{\sin(\alpha)}{r} u_s + \frac{u_n}{R_2} \right) N_\theta + \left(-\frac{u_s}{R_1} + \frac{du_n}{ds} + \varphi_s \right) T_s + \frac{d\varphi_s}{ds} M_s + \frac{\sin(\alpha)}{r} \varphi_s M_\theta \right] r d\theta ds \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & \frac{1}{R_1} \\ \frac{\sin(\alpha)}{r} & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_s \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_s \\ \epsilon_\theta \end{bmatrix}$$

$$[a] \cdot \{u^*\} = \{q\}$$

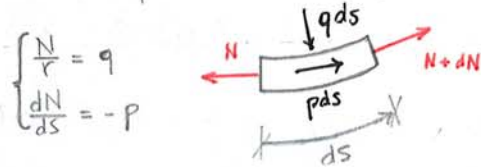
EQUAZIONI CINETICHE (DESCRIZIONE CINETICA)

EQUAZIONI COSTITUTIVE

Esse coincidono a quelle delle lastre a doppia curvatura riferite alle caratteristiche statiche e deformative non nulle. Anche il problema elastico e' in tutto e per tutto simile nella forma.

ANALOGIE E DIFFERENZE TRA MEMBRANE (2D) E FUNI (1D)

Le funi sono elementi strutturali monodimensionali, privi di rigidezza flessionale e capaci unicamente di sopportare gli sforzi di trazione. Per descriverle staticamente possiamo usare le stesse equazioni di equilibrio delle travi curve imponendo però $T=0$ ed $M=0$:



Abbiamo due equazioni nell'unica incognita N. Le equazioni mostrano che la fune, a differenza delle membrane, non può assumere qualsiasi forma, ma e' costretta ad allinearsi sulla propria curva delle pressioni.

Le membrane invece sono tali che la soluzione del problema statico può essere trovata sempre e indipendentemente dalla forma che assumono di volta in volta.

In caso di vincoli non membranali, tali cioè che si realizzino sforzi flessionali al bordo di una volta sottile, tali sforzi si oppongono a quelli membranali. E' comunque dimostrabile che gli sforzi flessionali indotti dai vincoli non membranali si smorzano rapidamente allontanandosi dai vincoli stessi.

Consideriamo ora la seconda equazione di equilibrio delle membrane e delle volte sottili; da essa ricaviamo N_θ :

$$-\frac{N_s}{R_1} - \frac{N_\theta}{R_2} + F_n = 0 \rightarrow N_\theta = R_2 \left(F_n - \frac{N_s}{R_1} \right)$$

Sostituiamo il risultato nella prima equazione di equilibrio, imponendo però $F_s = 0$ (struttura caricata solo ortogonalmente alla superficie):

$$\frac{dN_s}{ds} + \frac{\sin(\alpha)}{r} N_s - \frac{\sin(\alpha)}{r} N_\theta = 0 \rightarrow \frac{dN_s}{ds} + \frac{\sin(\alpha)}{r} N_s - \frac{\sin(\alpha)}{r} \left[R_2 \left(F_n - \frac{N_s}{R_1} \right) \right] = 0 \rightarrow R_2 = \frac{r}{\cos(\alpha)}$$

$$\frac{dN_s}{ds} + \frac{\sin(\alpha)}{r} N_s - \frac{\sin(\alpha)}{r} \left[\frac{r}{\cos(\alpha)} \left(F_n - \frac{N_s}{R_1} \right) \right] = \frac{dN_s}{ds} + \frac{\sin(\alpha)}{r} N_s - \tan(\alpha) \left(F_n - \frac{N_s}{R_1} \right) = 0$$

Se si trascura il termine $\frac{\sin(\alpha)}{r} N_s$ inerente lo spessore dr della membrana, che come detto e' trascurabile, rimane in definitiva

$$\frac{dN_s}{ds} + \frac{\tan(\alpha)}{R_1} N_s = \tan(\alpha) F_n$$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE DELLE MEMBRANE E DELLE VOLTE SOTTILI NELLA SOLA VARIABILE $N_s(s)$.

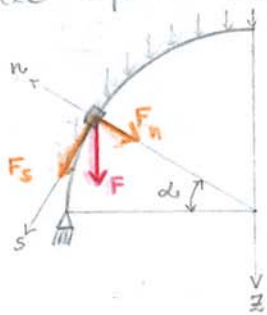
La tensione lungo i meridiani è minima per $\alpha = 0$, mentre è massima per $\alpha = \pi$. Invece, per l'altra tensione, ossia quella lungo i paralleli si ha che

$$\begin{aligned} \frac{\xi_s}{R_1} + \frac{\xi_\theta}{R_2} &= \frac{P}{h} & \xi_\theta &= R_2 \left(\frac{P}{h} - \frac{\xi_s}{R_1} \right) = \frac{r}{\cos(\alpha)} \left(\frac{P}{h} - \frac{P(r^2 - r_0^2)}{2hr R_1 \cos(\alpha)} \right) \\ &= \frac{r_0 + R_1 \cos(\alpha)}{\cos(\alpha)} \left[\frac{P}{h} - \frac{P(r_0^2 + R_1^2 \cos^2(\alpha) + 2r_0 R_1 \cos(\alpha) - r_0^2)}{2hr R_1 \cos(\alpha)} \right] & &= \frac{r_0 + R_1 \cos(\alpha)}{\cos(\alpha)} \left[\frac{P}{h} - \frac{P(R_1 \cos(\alpha) + 2r_0)}{2hr} \right] \\ &= \frac{r_0 + R_1 \cos(\alpha)}{\cos(\alpha)} \left[\frac{2P(r_0 + R_1 \cos(\alpha)) - P(2r_0 + R_1 \cos(\alpha))}{2h(r_0 + R_1 \cos(\alpha))} \right] & &= \frac{1}{\cos(\alpha)} \left[\frac{2Pr_0 + 2PR_1 \cos(\alpha) - 2Pr_0 - PR_1 \cos(\alpha)}{2h} \right] \\ &= \frac{1}{\cos(\alpha)} \left[\frac{PR_1 \cos(\alpha)}{2h} \right] = \frac{PR_1}{2h} & \xi_\theta &= \frac{PR_1}{2h} \quad \forall \text{ punto del toroide.} \end{aligned}$$

Si ha che ξ_θ corrisponde alla tensione ξ generica di una sfera di raggio R_1 , o alla ξ_θ di una membrana cilindrica avente raggio $r = \frac{R_1}{2}$ del toroide.

III) CUPOLE IN MURATURA

Sono lastre di rivoluzione in cui i carichi accidentali sono trascurabili rispetto al carico permanente strutturale, ossia al peso proprio. Per tale motivo si considera solamente quest'ultimo come un carico simmetrico agente in direzione verticale. I vincoli alle imposte sono generalmente membranali. Prendiamo ad esempio una cupola emisferica di spessore

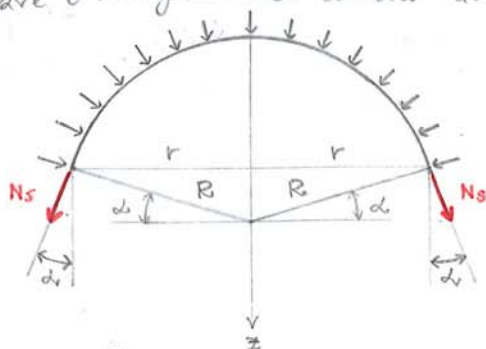


$F = \gamma h =$ peso proprio per unità di superficie, $h = \text{cost} =$

$F_s = F \cdot \cos(\alpha) = \gamma h \cos(\alpha) =$ componente tangenziale (positiva perché diretta come \vec{s});
 $F_n = F \cdot \sin(\alpha) = -\gamma h \sin(\alpha) =$ componente normale (negativa perché diretta in verso opposto a \vec{n}).

A questo punto applichiamo le equazioni di equilibrio delle volte sottili per trovare N_s ed N_θ . Convenzionalmente, infatti, si valuta solo il regime membranale, perché queste strutture vanno generalmente in crisi per problemi di trazione, mentre i flessimenti vengono assorbiti dallo spessore della sezione.

Esiste anche un altro modo per arrivare allo stesso risultato, ossia quello di calcolare l'integrale dei carichi dovuti al peso proprio ed eguagliarlo allo sforzo membranale.



$$R_1 = R_2 = R$$

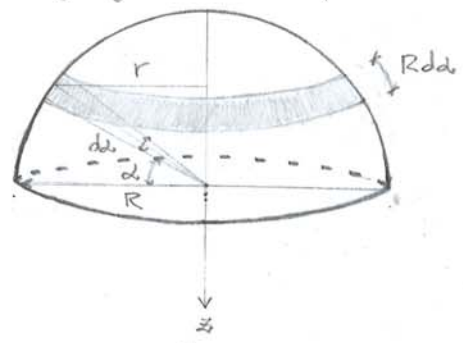
$$r = R \cos(\alpha)$$

$$Q(\alpha) = \int_A \gamma h dA$$

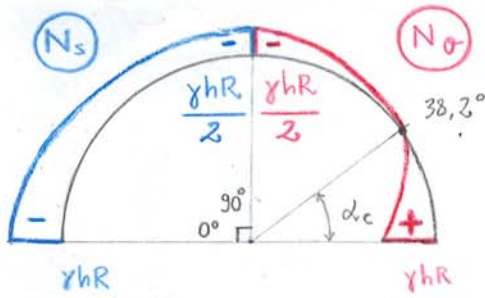
dove

$$dA = (2\pi r)(R d\alpha)$$

$$= 2\pi R^2 \cos(\alpha) d\alpha$$



$$Q(\alpha) = \int_{\alpha}^{\pi/2} 2\pi R^2 \gamma h \cos(\alpha) d\alpha = 2\pi R^2 \gamma h \int_{\alpha}^{\pi/2} \cos(\alpha) d\alpha = 2\pi R^2 \gamma h [\sin(\alpha)]_{\alpha}^{\pi/2} = 2\pi R^2 \gamma h (1 - \sin(\alpha))$$



Se abbiamo dei vincoli non membranali alle imposte della cupola, solitamente incastri, la distanza alla quale si annulla il momento flettente M_s rispetto al piano d'imposta dipende dallo spessore della cupola: tanto più questa è sottile (come una volta sottile) tanto più velocemente l'effetto flessionale si smorza anche se non scompare mai del tutto (cupola c.d.p.).

IV) LASTRE CIRCOLARI CARICATE SIMMETRICAMENTE

Le abbiamo già viste parlando delle lastre piane, ma le richiamiamo ora, alla luce di quanto visto per le lastre di rivoluzione caricate simmetricamente onde darne le equazioni statiche e cinematiche e soprattutto per definire il modo con cui se ne studia la deformata in base al carico. Dovrà valere che $R_1 \rightarrow \infty$ e $d = \frac{\pi}{2}$. La curvatura principale $s_1 = s$ coincide con il raggio r .

EQUAZIONI DI EQUILIBRIO

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) & -\frac{1}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) & -\frac{1}{r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_r \\ N_\theta \\ T_r \\ M_r \\ M_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_r \\ F_n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

EQUAZIONI DI EQUILIBRIO (DESCRIZIONE STATICA)

EQUAZIONI CINEMATICHE

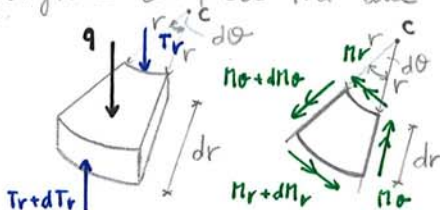
$$[\partial]^* \{Q\} + \{F^*\} = \{0\}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dr} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dr} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dr} \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_r \\ u_n \\ \varphi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_r \\ \chi_r \\ \chi_\theta \end{bmatrix}$$

$$[\partial] \cdot \{\eta^*\} = \{q\}$$

EQUAZIONI CINEMATICHE (DESCRIZIONE CINEMATICA)

Se ci limitiamo ad osservare il regime flessionale, avendo $F_n = -q$ e $u_n = w$, esprimeremo l'azione delle caratteristiche T_r, M_r, M_θ su un settore circolare infinitesimo di superficie compreso tra due meridiani distanti $r d\theta$ e tra due paralleli distanti dr .



Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore a 2. si avrà

$$\begin{cases} dT_r(r d\theta) + T_r(dr d\theta) - q(r dr d\theta) = 0 \\ -T_r(dr d\theta)r + dM_r(r d\theta) + M_r(dr d\theta) - M_\theta(dr d\theta) = 0 \end{cases}$$

I risultati che si ottengono per carico distribuito in modo uniforme o carico concentrato, vincoli esterni di tipo incastro o appoggi semplici, sono gli stessi che abbiamo già elencato in precedenza riguardo alle lastre piane inflesse.

$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_\theta) = 0 \quad \rightarrow \quad \epsilon_x = -\nu \epsilon_\theta$$

$$N_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_\theta + \nu \epsilon_x) \quad \rightarrow \quad N_\theta = Eh \epsilon_\theta$$

Dalla equazione cinematica (IV) vediamo che l'allungamento del parallelo è $\epsilon_\theta = \frac{w_x}{R} = \frac{w}{R}$; segue che $N_\theta = Eh \frac{w}{R}$.

D'altra parte, sempre per il legame costitutivo si ha che:

$$M_x = D \chi_x + \nu D \chi_\theta = D \chi_x \quad \rightarrow \quad = 0 \text{ perche' } \chi_\theta = 0 \text{ (eq. cinematiche)}$$

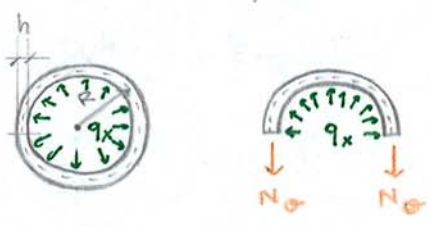
Abbiamo però che $\chi_x = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$; pertanto:

$$M_x = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \rightarrow \quad \text{dalla eq. statica (3)} \quad \rightarrow \quad T_x = -D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$$

Ecco allora che l'equazione della linea elastica, associata ad un generico elemento infinitesimo della lastra cilindrica soggetto solo a T_x, M_x, N_θ per effetto di q_x , diventa, in definitiva:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{Eh}{R^3} w = q_x \quad (i-e = 1-1=0 \rightarrow \text{problema determinato, se abbiamo 4 condizioni al contorno})$$

Solitamente si usa scrivere $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4\beta^4 w = \frac{q_x}{D}$, dove $\beta = \sqrt[4]{\frac{Eh}{4DR^3}}$ e' funzione del rapporto tra la rigidità dell'anello di spessore h e raggio R , ossia il parallelo, e la rigidità della lastra, entrambe nei confronti della flessione. A tal proposito, dimostriamo perche' l'anello ha rigidità $\frac{Eh}{R^2}$:



$$2N_\theta = 2(\sigma_0 h) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} q_x \cdot R \cdot \sin\theta \, d\theta = 2q_x R [-\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2q_x R$$

$$\sigma_0 = \frac{q_x R}{h} = E \epsilon_\theta = E \frac{w}{R} \quad \rightarrow \quad q_x = \left[\frac{Eh}{R^2} \right] w$$

RIGIDEZZA FLESSIONALE DELL'ANELLO

Questa relazione e' anche utile, perche' qualora si vogliamo ricavare w e le c.d.s. ad esso riconducibile (T_x, M_x, N_θ) per l'anello generico della lastra, non occorre risolvere l'equazione differenziale, ma semplicemente ricordarsi il legame tra q_x e w e le espressioni di T_x, M_x, N_θ viste in precedenza. Si noti che qualora sia $q_x = cx^n$, $\forall c \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N} = \{0, 1\}$, sarà $M_x = 0$ e quindi anche $T_x = 0$; mentre ovviamente $N_\theta = q_x R$. (positivo, quindi di trazione). Dal legame costitutivo risultava anche $M_\theta = D \chi_\theta + \nu D \chi_x = \nu M_x$: sempre in questo caso, perciò, sarà $M_\theta = 0$.

Le crescenti dalla soluzione che andiamo a scrivere:

$$w_0(x) = e^{-\beta(l-x)} [c_1 \cos(\beta(l-x)) + c_2 \sin(\beta(l-x))]$$

dove le due costanti c_1 e c_2 sono determinabili imponendo le prime due BC.

In definitiva sarà:

$$w(x) = w_0(x) + \tilde{w}(x) = e^{-\beta(l-x)} \left\{ \left[-\frac{\gamma R^2}{Eh} e \cos(\beta(l-x)) \right] + \left[\frac{\gamma R^2}{Eh} \left(\frac{1-\beta l}{\beta} \right) \sin(\beta(l-x)) \right] \right\} + \frac{\gamma R^2}{Eh} x$$

Le condizioni al contorno ③ e ④ sono automaticamente soddisfatte in quanto le sollecitazioni provocate da $w(x)$ si smorzano rapidamente, e oltre $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ svaniscono, sicché in testa taglio e momento flettente sono nulli.

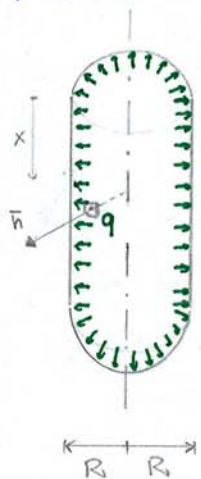
Un altro modo per pervenire a tale soluzione sarebbe ipotizzare sollecitazioni al piede tali che

$$\begin{cases} w(x=l) = \tilde{w}(x=l) + [\lambda_{FF} T(x=l) + \lambda_{FH} M(x=l)] = 0 \\ \varphi_x(x=l) = \tilde{\varphi}_x(x=l) + [\lambda_{HF} T(x=l) + \lambda_{mH} M(x=l)] = 0 \end{cases}$$

dove $\lambda_{FF}, \lambda_{FH} = \lambda_{HF}, \lambda_{mH}$ sono le cedevolezza della trave su suolo elastico (modello utilizzabile anche in questo caso) con D al posto di EI .

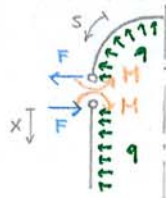
Risolvendo il sistema 2×2 nelle incognite $T(x=l), M(x=l)$ e' possibile riscrivere l'espressione di $w(x)$ in funzione di $T(x=l), M(x=l)$ e delle funzioni armoniche smorzate che valgono anche per la trave su suolo elastico con variabile indipendente $\beta(l-x)$.

II) SERBATOIO CILINDRICO IN PRESSIONE CON FONDI EMISFERICI



$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

RIGIDEZZA FLESSIONALE DELLA LASTRA DI SPESORE h



Per trovare il taglio e il momento flettente nel punto di unione tra il corpo cilindrico e uno qualunque dei due fondi emisferici, imponiamo la condizione di congruenza per la traslazione orizzontale e per la rotazione intorno al parallelo di confine. Questo coincide con l'applicazione del metodo delle forze: svincoliamo e trattiamo separatamente cilindro e semisfera caricate in modo assialsimmetrico dallo stesso carico uniforme q .

CILINDRO

$$\begin{aligned} x \downarrow N_x(2\pi R) &= q(\pi R^2) \rightarrow N_x = \frac{qR}{2} \\ 2N_\theta &= 2qR \rightarrow N_\theta = qR \\ \delta\theta &= \frac{N_\theta}{h} = \frac{qR}{h} \end{aligned}$$

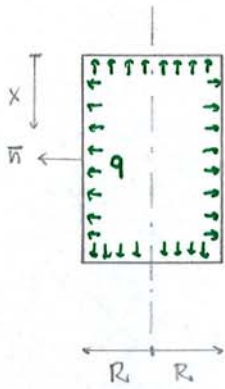
SOLUZIONE MEMBRANALE CILINDRICA

SFERA

$$\begin{aligned} s \downarrow N_s(2\pi R) &= q(\pi R^2) \rightarrow N_s = \frac{qR}{2} \\ N_\theta &= N_s = \frac{qR}{2} \text{ (per la simmetria sferica del solido)} \\ \delta\theta &= \frac{N_\theta}{h} = \frac{N_s}{h} = \frac{qR}{2h} \end{aligned}$$

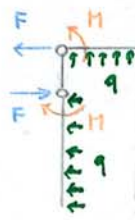
SOLUZIONE MEMBRANALE SFERICA

III) SERBATOIO CILINDRICO IN PRESSIONE CON FONDI PIANI



$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

RIGIDEZZA FLESSIONALE DELLA LASTRA DI SPESORE h



Anche in questo caso, se cerchiamo di valutare taglio F e momento flettente M al confine tra il cilindro e la piastra circolare che funge da fondo, possiamo svincolare e creare una biella; quindi imponendo la congruenza interna in tale punto si risolve il problema.

Per il cilindro non abbiamo alcuna differenza rispetto al caso precedente, mentre per il cerchio di base sarà:

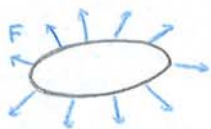
$$\tilde{w}(x=0)_{\text{CERCHIO}} = 0 \rightarrow \text{perché } q \text{ è un carico verticale, quindi non produce spostamenti orizzontali.}$$

$$\tilde{\varphi}(x=0)_{\text{CERCHIO}} = \frac{qR^3}{8D(1+\nu)}$$

dalla teoria delle lastre circolari caricate simmetricamente con un carico normale distribuito.

$$(\lambda_{FH})_{\text{CERCHIO}} = (\lambda_{HF})_{\text{CERCHIO}} = 0 \rightarrow \text{poiché } F \text{ è una forza orizzontale, quindi non produce rotazioni.}$$

$$(\lambda_{FF})_{\text{CERCHIO}} : \quad \delta_r = \delta_\sigma = \frac{F}{h} \rightarrow \epsilon_r = \epsilon_\sigma = \frac{1}{E}(\delta_r - \nu \delta_\sigma) = \frac{1}{E}(\delta_\sigma - \nu \delta_r) = \frac{F}{Eh}(1-\nu)$$



$$u_r = \epsilon_r \cdot R = F \left[\frac{R}{Eh} (1-\nu) \right]$$

CEDEVOLEZZA DEL CERCHIO $(\lambda_{FF})_{\text{CERCHIO}}$

$$(\lambda_{MH})_{\text{CERCHIO}} : \quad \varphi(x=0)_{\text{CERCHIO}, H} = M \left[\frac{R}{D(1+\nu)} \right]$$

CEDEVOLEZZA DEL CERCHIO $(\lambda_{MH})_{\text{CERCHIO}}$



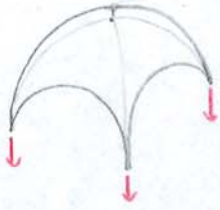
dalla teoria della trave - rotazioni notevoli, sostituendo EI con D e introducendo l'effetto di confinamento (Poisson):

$$\varphi(x=0)_{\text{CERCHIO}} = \frac{mL}{3EI} + \frac{mL}{6EI} = \frac{mL}{2EI} \rightarrow \frac{M(R)}{2D(1+\nu)} = \left[\frac{R}{D(1+\nu)} \right] M$$

↳ COPPIA VICINA ↳ COPPIA LONTANA

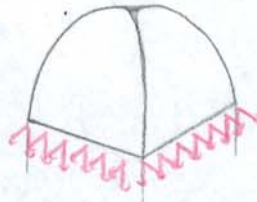
$$\begin{cases} w(x=0)_{\text{CIL}} = w(x=0)_{\text{CERCHIO}} \\ \varphi(x=0)_{\text{CIL}} = \varphi(x=0)_{\text{CERCHIO}} \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{w}(x=0)_{\text{CIL}} + (\lambda_{FF})_{\text{CIL}} F + (\lambda_{FH})_{\text{CIL}} M = 0 + (\lambda_{FF})_{\text{CERCHIO}} F + (\lambda_{FH})_{\text{CERCHIO}} M \\ (\lambda_{HF})_{\text{CIL}} F + (\lambda_{MH})_{\text{CIL}} M = \frac{qR^3}{8D(1+\nu)} + (\lambda_{HF})_{\text{CERCHIO}} F + (\lambda_{MH})_{\text{CERCHIO}} M \end{cases}$$

VOLTA A CROCIERA (COMPOSTA)



È data dall'unione di quattro unghie. Scarica puntualmente sui piedritti e il comportamento statico è guidato da archi diagonali consolidati fra loro.

VOLTA A PADIGLIONE (COMPOSTA)



Scarica sulle pareti portanti e riveste spazi quadrati o rettangolari. Il flusso delle tensioni è come quello della volta a botte.

VOLTA A BOTTE CON TESTA A PADIGLIONE (COMPOSTA)

VOLTA A SCIFFO (COMPOSTA)

CUPIOLA COMPOSTA (COMPOSTA)

ESOSCHELETRI ED ENDOSCHELETRI

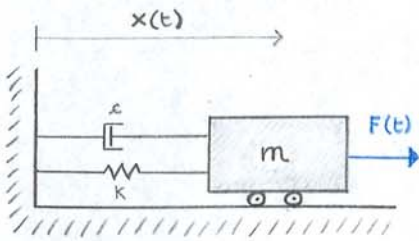
La natura ha sviluppato particolari strategie contro certi tipi di fragilità fifiche. L'uomo ha poi replicato questi modelli in ambito strutturale inserendo controventi e altri tipi di elementi statici per migliorare la resistenza degli edifici di grande altezza (grattacieli) nei confronti delle azioni variabili orizzontali (vento, sismi). Questi sistemi, detti "esoscheletri", sono vantaggiosi per assorbire forzanti con basse frequenze se non addirittura nulle, mentre non hanno grande efficacia nei confronti delle forzanti impulsive come gli urti o le esplosioni.

D'altra parte, gli "endoscheletri" si confondono molto più facilmente con il tessuto strutturale, non fosse altro perché sono composti da elementi strutturali molto più comuni e che seguono logiche statiche più consolidate nella pratica ingegneristica.

ALTE

DINAMICA STRUTTURALE

SISTEMI AD UN GRADO DI LIBERTÀ (x)



- FORZA DI RICHIAMO ELASTICO: si oppone allo spostamento;
- FORZA DI ATTRITO VISCOSO: si oppone alla velocità;
- FORZA DI INERZIA: si oppone alla accelerazione;
- FORZANTI ESTERNE: possono essere costanti, periodiche, impulsive, generiche o anche assenti.

Le forze che agiscono sul sistema di massa m sono classificabili nel seguente modo:

INTERNE AL SISTEMA	PASSIVE $\rightarrow -m\ddot{x}(t)$ ATTIVE $\left\{ \begin{array}{l} -Kx(t) \\ -c\dot{x}(t) \end{array} \right.$	+	$-m\ddot{x}(t) - c\dot{x}(t) - Kx(t) + F(t) = 0$	FORZANTE ESTERNA (RISULTANTE)
--------------------	---	---	--	-------------------------------

ESTERNE AL SISTEMA $\rightarrow F(t)$

$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + Kx(t) = F(t)$

EQUAZIONE DI EQUILIBRIO DINAMICO DEL SISTEMA m (O DEL MOTO DEL SISTEMA m) AD UN SOLO GRADO DI LIBERTÀ x

Nella realtà le strutture complesse hanno infiniti gradi di libertà; tuttavia, e' uso comune, in ingegneria, suddividerle in un numero finito e ragionevole di unità costituenti, ciascuna delle quali e' caratterizzata da tot gradi di libertà. In questo modo il problema dell'analisi dinamica può essere gestito comodamente assegnando i parametri richiesti dal modello di calcolo, le forzanti esterne (ossia i carichi di progetto) e quindi alimentando un opportuno codice di calcolo, normalmente agli Elementi Finiti, che evidenzia la risposta del sistema in termini di sollecitazioni e spostamenti.

Vediamo quindi come risponde un sistema schematizzabile grazie ad un solo elemento discreto e con un solo grado di libertà.

I) OSCILLAZIONI LIBERE NON SMORZATE ($F(t) = 0, c = 0$)

$$m\ddot{x} + Kx = 0 \quad \ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0 \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

dove $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ e' la "pulsazione propria" del sistema, ossia quella con cui esso tende naturalmente a vibrare se non e' smorzato.

Una soluzione per questa equazione può essere $x(t) = Ce^{st}$; infatti sostituendola abbiamo che:

$$(s^2 + \omega^2)Ce^{st} = 0 \quad s_{1,2} = \pm i\omega \rightarrow \text{SOLUZIONI COMPRESSE DISTINTE: } x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$$

Poiché sappiamo che $e^{\pm i\omega t} = \cos(\omega t) \pm i \sin(\omega t)$, potremo riscrivere la soluzione come

$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

$$x(t) = X \cos(\omega t - \varphi)$$

dove A, B oppure X, φ sono dettate dalle condizioni iniziali del sistema: $x(0), \dot{x}(0)$.

Abbiamo quindi che, per la prima espressione:

$$\dot{x}(0) = -\xi\omega B + A\omega_D \longrightarrow A = \frac{\dot{x}(0) + \xi\omega x(0)}{\omega_D}$$

$$x(0) = B \longrightarrow B = x(0)$$

$$T_D = \frac{2\pi}{\omega_D} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-\xi^2}} \quad \text{PERIODO SMORZATO DEL SISTEMA}$$

Per quanto riguarda la seconda invece:

$$X = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{\left[\frac{\dot{x}(0) + \xi\omega x(0)}{\omega_D}\right]^2 + [x(0)]^2} \quad \text{AMPIEZZA MASSIMA}$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{A}{B}\right) = \arctg\left(\frac{\dot{x}(0) + \xi\omega x(0)}{\omega_D x(0)}\right) \quad \text{ANGOLO DI FASE}$$

Segue che:

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} \left[\left(\frac{\dot{x}(0) + \xi\omega x(0)}{\omega_D} \right) \sin(\omega_D t) + x(0) \cos(\omega_D t) \right] =$$

$$= e^{-\xi\omega t} \left[\sqrt{\left[\frac{\dot{x}(0) + \xi\omega x(0)}{\omega_D} \right]^2 + [x(0)]^2} \cos(\omega_D t - \arctg\left(\frac{\dot{x}(0) + \xi\omega x(0)}{\omega_D x(0)}\right)) \right]$$

RISPOSTA DEL SISTEMA

Possiamo definire un ulteriore parametro del sistema, direttamente correlato a quelli già introdotti: $T_D = \frac{2\pi}{\omega_D} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-\xi^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k(1-\xi^2)}}$ detto "periodo smorzato" del sistema, ossia l'intervallo temporale che trascorrerebbe tra quando il sistema si trova in una certa configurazione $x(t)$ e quando, compiuto un ciclo intero di 2π , presenta una configurazione smorzata $x(t+T_D) < x(t)$. Questo, ovviamente, se e solo se, come per ω_D , il sistema è smorzato.

Per valutare sperimentalmente ξ prendiamo due picchi positivi x_n e x_{n+1} , ossia due configurazioni di ampiezza massima.

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} \cong e^{2\pi\xi\frac{\omega}{\omega_D}} = e^{\xi\frac{T_D}{T}}$$

$$\delta = \ln\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) = 2\pi\xi\frac{\omega}{\omega_D} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \approx 2\pi\xi \quad \text{poiché se } \xi \text{ è molto piccolo, sarà } \xi^2 \approx 0$$

$$\delta = 2\pi\xi \quad \xi = \frac{\delta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) \quad \text{dove } \delta \text{ è detto "decremento logaritmico".}$$

III) OSCILLAZIONI FORZATE ($F(t) \neq 0$)

Come detto esistono diversi tipi di forzanti; noi trattiamo, in particolare, le forzanti armoniche, periodiche, impulsive e generiche applicate su sistemi non smorzati e smorzati.

FORZANTI ARMONICHE CON SMORZZAMENTO

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \sin(\omega_f t)$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \dot{x} + \omega^2 x = \frac{F}{m} \sin(\omega_f t)$$

Ricordando che $\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega}$, avremo che:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2 x = \frac{F}{m} \sin(\omega_f t)$$

↳ SOLUZIONE DELL'OMogenea associata: $x_0(t) = e^{-\xi\omega t} (A \sin(\omega_f t) + B \cos(\omega_f t))$

↳ SOLUZIONE PARTICOLARE: $x_p(t) = C_1 \sin(\omega_f t) + C_2 \cos(\omega_f t)$

• Sostituiamo la soluzione particolare nell'equazione risolvente per trovare le costanti C_1, C_2 :

$$\begin{aligned} & [-\omega_f^2 C_1 \sin(\omega_f t) - \omega_f^2 C_2 \cos(\omega_f t)] + [2\xi\omega\omega_f C_1 \cos(\omega_f t) - 2\xi\omega\omega_f C_2 \sin(\omega_f t)] + \\ & + [\omega^2 C_1 \sin(\omega_f t) + \omega^2 C_2 \cos(\omega_f t)] = \frac{F}{m} \sin(\omega_f t) \end{aligned}$$

Separiamo in due equazioni i termini che hanno $\sin(\)$ e $\cos(\)$:

$$\begin{cases} -\omega_f^2 C_1 \sin(\omega_f t) - 2\xi\omega\omega_f C_2 \sin(\omega_f t) + \omega^2 C_1 \sin(\omega_f t) = \frac{F}{m} \sin(\omega_f t) \\ -\omega_f^2 C_2 \cos(\omega_f t) + 2\xi\omega\omega_f C_1 \cos(\omega_f t) + \omega^2 C_2 \cos(\omega_f t) = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} \text{con } m &= \frac{k}{\omega^2} \\ \text{e } \omega_f &= \beta\omega \end{aligned}$$

Tralasciando i calcoli, risulta che

$$\begin{cases} C_1 = \frac{F}{K} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \\ C_2 = \frac{F}{K} \frac{-2\xi\beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \end{cases}$$

Per cui si ha che:

$$x(t) = \underbrace{e^{-\xi\omega t} (A \sin(\omega_f t) + B \cos(\omega_f t))}_{\text{RISPOSTA TRANSITORIA}} + \underbrace{\frac{F}{K} \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} [(1 - \beta^2) \sin(\omega_f t) - 2\xi\beta \cos(\omega_f t)]}_{\text{RISPOSTA STAZIONARIA}}$$

RISPOSTA TRANSITORIA (→ "PERCORSO" LO SMORZZAMENTO COMPARA LA PRESSIONE DELL'ESPONENZIALE SMORZZANTE, CHE, ASINTOTICAMENTE, FA ESTINGUERE TUTTO QUESTO TERMINO)

RISPOSTA STAZIONARIA (STESSA PULSAZIONE DELLA FORZANTE, ω_f , MA DIVERSA FASE PERCHÉ NELLA FORZANTE C'È SOLO IL $\sin(\)$, MENTRE NELLA RISPOSTA C'È ANCHE IL $\cos(\)$!)

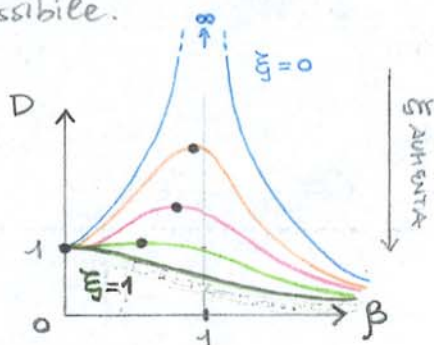
Per determinare A e B imponiamo le condizioni iniziali: $x(0), \dot{x}(0)$.

$$\dot{x}(0) = -\xi\omega B + \omega A + \frac{F}{K} \frac{(1 - \beta^2)\omega_f}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} = -\xi\omega B + \omega A + \frac{F}{K} \frac{(1 - \beta^2)\beta\omega}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}$$

$$x(0) = B - \frac{F}{K} \frac{2\xi\beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \rightarrow B = x(0) + \frac{F}{K} \frac{2\xi\beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}$$

$$A = \frac{\dot{x}(0) + \xi\omega \left(x(0) + \frac{F}{K} \frac{2\xi\beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right) - \frac{F}{K} \frac{(1 - \beta^2)\beta\omega}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}{\omega \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Il fattore di amplificazione dinamica D esprime ciò che accade alla parte non stazionaria dell'ampiezza di risposta, se la forzante continua ad agire armonicamente sul sistema nel tempo, al variare dei parametri che concorrono a definirne la formulazione: ξ, β . Qualunque sia il livello di smorzamento, purché non sia $\xi \rightarrow 1$ (valore critico), si dice che il sistema va in "condizione di risonanza" qualora si abbia che $\beta = 1$, cioè $\omega_F \equiv \omega$: se quindi la forzante ha pulsazione uguale a quella propria (o naturale) del sistema oscillante, le oscillazioni avranno di ampiezza massima maggiore che nel caso statico e raggiungeranno un picco. Il picco sarà infinitamente alto, qualora avessimo che il sistema non presenta smorzamento, ossia se $\xi = 0$. Tale condizione, di "risonanza" propriamente detta, è solo teorica e nella realtà non si verifica, ma molti sistemi vibranti possono incorrere in oscillazioni di ampiezza comunque molto estesa per β prossimi all'unità e smorzamenti talmente ridotti da non poter assorbire l'energia cinetica fornita al sistema dalla forzante armonica. Queste oscillazioni possono portare ad un danno funzionale del sistema, quando non al suo completo collasso strutturale. La dissipazione dell'energia attraverso lo smorzamento, in questo caso, è perciò quanto mai un fenomeno positivo e quindi da cercare di massimizzare, entro i limiti del possibile.



- $\xi = 0 \rightarrow$ RISONANZA CON OSCILLAZIONI CHE TENDONO ALL'INFINITO PER $\beta \rightarrow 1$
- $0 < \xi < 1 \rightarrow$ RISONANZA CON OSCILLAZIONI CHE RAGGIUNGONO UN PICCO PER β VICINO A 1 E POI DECRESCONO PER β SUPERIORI
- $\xi = 1 \rightarrow$ RISONANZA CON RISPOSTA CHE PRESENTA UN PICCO PER $\beta = 0$ E POI DECRESCE PER β SUPERIORI.

FREQUENZE $\omega_F \ll \omega \rightarrow$ FORZANTE EQUILIBRATA PRINCIPALMENTE DALLA FORZA ELASTICA (DOMINA LA RIGIDEZZA DEL SISTEMA SULLA SUA RISPOSTA)

FREQUENZE $\omega_F \gg \omega \rightarrow$ FORZANTE EQUILIBRATA PRINCIPALMENTE DALLA FORZA D'INERZIA (DOMINA LA MASSA DEL SISTEMA SULLA SUA RISPOSTA)

FREQUENZA $\omega_F = \omega \rightarrow$ FORZANTE EQUILIBRATA PRINCIPALMENTE DALL'ATTRITO VISCOSO (DOMINA LO SMORZAMENTO DEL SISTEMA SULLA SUA RISPOSTA)

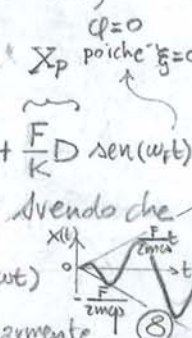
Per $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0, \xi = 0, F(t) = F \sin(\omega t)$ succede che:

$$m\ddot{x} + kx = F \sin(\omega t) \rightarrow x(t) = X_0(t) + X_p(t) = [A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)] + \frac{F}{k} D \sin(\omega t)$$

$$= \frac{F}{m(\omega^2 - \omega_F^2)} [\sin(\omega t) - \sin(\omega t)], \text{ poiché } \begin{cases} A = -\frac{F}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} \\ B = 0 \end{cases} \text{ e } D = \frac{1}{1 - \beta^2}$$

$\lim_{\omega_F \rightarrow \omega} x(t) = \frac{0}{0}$, si usa de l'Hôpital: $\lim_{\omega_F \rightarrow \omega} \frac{F \frac{d}{d\omega_F} [\sin(\omega t) - \sin(\omega t)]}{\frac{d}{d\omega_F} (\omega^2 - \omega_F^2)} = -\frac{F}{2m\omega} t \cos(\omega t)$

che per $t \rightarrow \infty$ cresce linearmente! (8)



FORZANTI IMPULSIVE

Una forza impulsiva è caratterizzata da un'ampiezza molto elevata e agisce per un intervallo di tempo molto piccolo in modo che l'integrale di tale forza nel tempo, cioè l'impulso totale, sia comunque finito.

Immaginiamo allora un sistema su cui agisce una forzante impulsiva di ampiezza F per un tempo $\Delta t_F = [0, t_F]$, con $t_F \rightarrow 0$. Per qualsiasi istante di tempo $t > t_F$, il sistema risulta essere libero. Nella prima fase, se $t_F \rightarrow 0$, possiamo supporre che $x(t)$ sia talmente piccolo da essere trascurabile, quindi la massa non potrà variare molto la propria posizione. Segue che il problema, senza smorzamento, si riduce alla forma

$$m\ddot{x} = F \quad m \frac{d\dot{x}}{dt} = F \quad m dx = F dt \quad \int_0^{x(t_F)} m ds = \int_0^{t_F} F dt \quad m\dot{x}(t_F) = \int_0^{t_F} F dt = I$$

IMPULSO LINEARE TOTALE DELLA FORZANTE F

L'impulso I è responsabile della variazione della quantità di moto della massa m . Segue che $\dot{x}(t_F) = \frac{I}{m}$. Entriamo ora nella seconda fase, dove abbiamo le condizioni iniziali prodotte dall'uscita dalla prima fase:

$$\left. \begin{matrix} x(t_F) = 0 \\ \dot{x}(t_F) = \frac{I}{m} \end{matrix} \right\} \text{ per } t_F \rightarrow 0 \quad \boxed{m\ddot{y} + ky = 0} \quad \text{dove } y(t') = x(t - t_F)$$

$$y(t') = A \sin(\omega t') + B \cos(\omega t')$$

$$x(t - t_F) = A \sin(\omega(t - t_F)) + B \cos(\omega(t - t_F))$$

Applicando le condizioni iniziali, determiniamo A e B :

$$\dot{x}(t_F) = A\omega = \frac{I}{m} \rightarrow A = \frac{I}{m\omega}$$

$$x(t_F) = B = 0 \rightarrow B = 0$$

Segue che:

$$x(t - t_F) = \frac{I}{m\omega} \sin(\omega(t - t_F)) \xrightarrow{t_F \rightarrow 0} \boxed{x(t) = \frac{I}{m\omega} \sin(\omega t)}$$

Per un impulso unitario, la risposta del sistema è, in genere, indicata con la formula

$h(t) = \frac{x(t)}{I} = \frac{1}{m\omega} \sin(\omega t)$, ossia il rapporto tra la risposta generata dall'impulso e l'impulso stesso. Se è anche presente lo smorzamento, nella prima fase esso non manifesterà effetti rilevanti dato che $t_F \rightarrow 0$. Nella seconda fase, invece, abbiamo:

$$\left. \begin{matrix} x(t_F) = 0 \\ \dot{x}(t_F) = \frac{I}{m} \end{matrix} \right\} \text{ per } t_F \rightarrow 0 \quad \boxed{m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0} \quad \text{dove } y(t') = x(t - t_F)$$

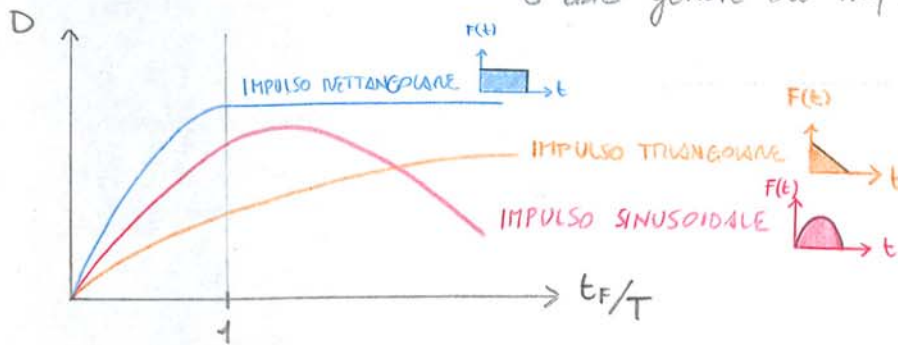
$$y(t') = e^{-\xi\omega t'} (A \sin(\omega_D t') + B \cos(\omega_D t'))$$

$$x(t - t_F) = e^{-\xi\omega(t - t_F)} [A \sin(\omega_D(t - t_F)) + B \cos(\omega_D(t - t_F))]$$

$$\dot{x}(t_F) = -\xi\omega B + A\omega_D = \frac{I}{m} \rightarrow A = \frac{I}{m\omega_D}$$

$$x(t_F) = B = 0 \rightarrow B = 0$$

- $t_F/T < 1$ (IMPULSO BREVE) $\rightarrow D$ è piccolo perché la forzante viene contrastata per lo più dalla forza di inerzia, in quanto la massa è dominante.
- $t_F/T > 1$ (IMPULSO LUNGO) $\rightarrow D$ dipende dalla rapidità con cui l'impulso raggiunge il suo massimo valore, quindi da t_F ($\rightarrow \omega_F \rightarrow \beta$), e dal genere di impulso (vedi grafico), a parità di T .



SPETTRI DI RISPOSTA DINAMICA PER DIVERSI TIPI DI FORZANTI IMPULSIVE

FORZANTI GENERICHE

Le forzanti generiche possono essere trattate come impulsi; pertanto la risposta agli impulsi potrà essere utilizzata come espressione di base per sviluppare un'espressione generale che fornisca la risposta del sistema soggetto a forzanti generiche.

La forzante $F(t)$ può essere vista come una serie di forze impulsive che agiscono per intervalli infinitesimi $d\tau$. La forza $F(\tau)$, impressa all'istante $t = \tau$, produce l'impulso $F(\tau)d\tau$; per ogni $t > \tau$ la risposta $ds(t-\tau)$ del sistema, prodotta da tale impulso, sarà data dalla risposta all'impulso unitario $h(t-\tau)$, moltiplicata per il valore dell'impulso $F(\tau)d\tau$; quindi segue che:

$$ds(t-\tau) = F(\tau) d\tau h(t-\tau) \quad \rightarrow \quad \int_0^t ds(t-\tau) = \int_0^t F(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad \therefore x(t) = \int_0^t F(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

Ricordando che $h(t-\tau) = \frac{1}{m\omega} \text{sen}(\omega(t-\tau))$, in definitiva:

$$x(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) \text{sen}(\omega(t-\tau)) d\tau$$

RISPOSTA DEL SISTEMA NON SMORTIZZATO (INTEGRALE DI CONVOLUZIONE DI DONATEL)

Questa procedura, fondata sul principio di sovrapposizione degli effetti, vale solo per sistemi lineari, come quelli che abbiamo visto fino ad ora. Inoltre la suddetta espressione è valida solo per $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$. Quando vi sia smorzamento avremo invece:

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t e^{-\xi\omega t - \tau} [F(\tau) \text{sen}(\omega_D(t-\tau))] d\tau$$

RISPOSTA DEL SISTEMA SMORTIZZATO (" " " " ")

Per condizioni iniziali non nulle, infine, abbiamo la seguente risposta:

$$x(t) = \left\{ e^{-\xi\omega t} \left[\left(\frac{\dot{x}(0) + \xi\omega x(0)}{\omega_D} \right) \text{sn}(\omega_D t) + x(0) \text{cos}(\omega_D t) \right] \right\} + \left\{ \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t e^{-\xi\omega(t-\tau)} [F(\tau) \text{sen}(\omega_D(t-\tau))] d\tau \right\}$$

RISPOSTA DEL SISTEMA SMORTIZZATO CON I.C. NON NULLE (" " " " ")

Per quanto riguarda $F(t)$, la si potrebbe scomporre in armoniche con Fourier e analizzare la risposta totale sommando le varie risposte per le forzanti armoniche di ordine n . (12)

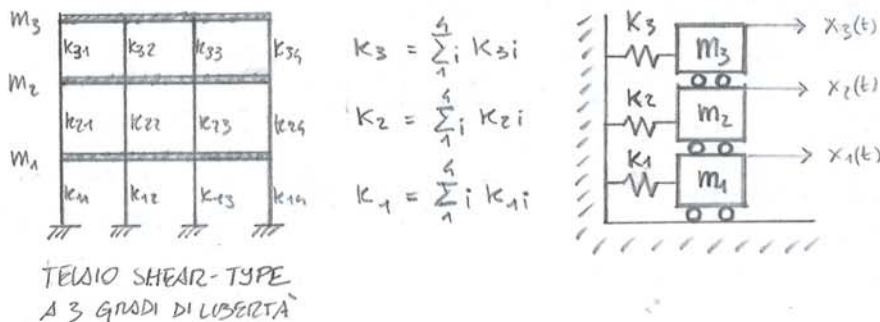
Un sistema lineare a n gradi di libertà potrà avere n pulsazioni ω_i e quindi n diversi "modi" di vibrare $\{x(t)_i\}$. Diamo le seguenti definizioni:

- PULSAZIONE FONDAMENTALE \rightarrow pulsazione minima tra le n pulsazioni ω_i possibili per il sistema;
- MODO FONDAMENTALE \rightarrow modo di vibrare associato all'autovettore relativo alla pulsazione fondamentale.

Detto di $\{A\}$, il sistema presenta soluzioni se e solo se il determinante della matrice composta $([K] - \omega^2[M])$ si annulla. Ciò è fondamentale per poter scrivere l'equazione caratteristica del sistema nell'incognita ω^2 :

$$\det([K] - \omega^2[M]) = 0 \quad \text{EQUAZIONE CARATTERISTICA DEL SISTEMA}$$

Questa condizione è alla base della cosiddetta "analisi modale" per qualsiasi sistema vibrante con più gradi di libertà. Benché infatti le strutture complesse abbiano infiniti modi di vibrare, introducendo alcune ragionevoli semplificazioni, è possibile inguadrarne il comportamento dinamico più significativo. Una delle differenze sostanziali tra strutture a telaio normali e telai shear-type, ad esempio, sarà che nel primo caso le matrici $[M]$ e $[K]$ sono assolutamente generiche, onde per cui non sparse, come invece nel secondo caso, dove le masse sono concentrate nei traversi infinitamente rigidi che si comportano come elementi in serie e le rigidità competono ai pilastri che invece lavorano in parallelo.



II) RAPPORTO DI RAYLEIGH

Un'alternativa alla risoluzione dell'equazione caratteristica per determinare gli autovalori del sistema consiste nel calcolo del cosiddetto "rapporto di Rayleigh". Partendo sempre dal sistema

$$([K] - \omega^2[M])\{A\} = \{0\}$$

premultiplichiamo per $\{A\}^T$ e otteniamo

$$\{A\}^T([K] - \omega^2[M])\{A\} = \{0\} \quad \{A\}^T[K]\{A\} = \omega^2\{A\}^T[M]\{A\}$$

Per i sistemi ad un unico grado di libertà avevamo che $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

RAPPORTO DI RAYLEIGH DEL SISTEMA

$$\omega^2 = \frac{\{A\}^T[K]\{A\}}{\{A\}^T[M]\{A\}}$$

Generalmente si assume che :

$[M]$: matrice diagonale di massa con masse equivalenti applicate ai nodi $\begin{cases} \neq 0 \text{ per ciascuna} \\ \text{traslazione nodale} \\ = 0 \text{ per ciascuna} \\ \text{rotazione nodale} \end{cases}$
 dove le masse equivalenti possono essere calcolate, in prima approssimazione, come la massa delle travi che confluiscono nei nodi divisa per due.

La reale distribuzione delle masse è possibile utilizzando codici di calcolo agli Elementi Finiti che permettono di discretizzare pilastri e travi in un numero finito di unità discrete, ciascuna delle quali ha gradi di libertà (e quindi spostamenti) propri. Questo comporta che la matrice $[M]$ non sia più diagonale, poiché ciascuna massa induce effetti anche su quelle vicine.

Nello pratica, tuttavia si usa fare un'ulteriore semplificazione rispetto alle masse concentrate, qualora i risultati siano compatibili con la realtà. Si procede alla modellizzazione dei telai generici con quelli a traversi rigidi, tipo "shear-type". Se ne scrive quindi il sistema per gli spostamenti $\{\delta(t)\}$, immaginando le masse concentrate nei traversi e le rigidità di ciascun piano fornite dalla somma delle rigidità a taglio degli n pilastri collocati nel piano stesso: $K_{dP} = \left[\frac{12EI_p}{h_p^3} \right]_d \rightarrow K_d = \sum_{i=1}^n K_{dP}$
PIANO PILASTRO DEL PIANO

Se ne cerca poi l'equazione caratteristica, da risolvere negli autovalori ω_i^2 che quindi vengono sostituiti nel sistema per ottenere gli autovettori $\{\delta_i\}$ e così le soluzioni del sistema nella forma $\{\delta(t)_i\} = \{\delta_i\} \sin(\omega_i t)$

$$\begin{cases} \delta(t)_{P_1} \\ \delta(t)_{P_2} \\ \vdots \\ \delta(t)_{P_m} \end{cases}_i = \begin{cases} \delta_{i,P_1} \\ \delta_{i,P_2} \\ \vdots \\ \delta_{i,P_m} \end{cases} \sin(\omega_i t) \quad \forall i = 1, \dots, m$$

no sfasamento se non c'è smorzamento
 dove $m =$ numero di piani (piani oscillanti) e di autovalori (modi di vibrazione) \rightarrow devono essere gli stessi!
 \hookrightarrow ampiezze = autovettore riferito all'autovalore ω_i
 \hookrightarrow pulsazione = autovalore

La pulsazione deve essere, di volta in volta, comune ad ogni piano, perché non possiamo avere degli spostamenti sfasati tra i piani (congruenza degli spostamenti nodali).

OSCILLAZIONI FORZATE

Supponiamo ora che il nostro telaio shear-type sia sollecitato a spostamenti dei vincoli a terra $\{x(t)\}$, con annesse $\{\dot{x}(t)\}$ e $\{\ddot{x}(t)\}$. Non avremo forse di richiamo elastico nel sistema, poiché queste restano dipendenti dalle sole traslazioni valutate nel sistema di riferimento solidale al suolo, mentre le forze di inerzia sono solidali alle accelerazioni del sistema di riferimento assoluto: in pratica, per le forze elastiche $\{x(t)\}$ non esiste, ma per le forze di inerzia $\{\ddot{x}(t)\}$ esiste. Pertanto trattiamo $\{\ddot{x}(t)\}$ come un vettore di funzioni note.

OSCILLAZIONI LIBERE

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{0\}$$

$m \times m$ $m \times 1$ $m \times m$ $m \times 1$ $m \times 1$

\rightarrow SOLUZIONE DEL PROBLEMA SPAZIALE (AUTOVAL/AUTOVETTORI)
 \rightarrow SOLUZIONE DEL PROBLEMA TEMPORALE
 (RISPOSTA TOTALE ADIMENSIONALE DELL'OSCILLATORE SOSTITUI)
 $\{ \delta(t) \} = \{ \delta \} \cdot f(t)$
 SEPARAZIONE DELLE VARIABILI

Sostituiamo l'espressione di $\{ \delta(t) \}$ nel sistema e premoltiplichiamo ambo i membri per $\{ \delta \}^T$:

$$\{ \delta \}^T [M] \{ \delta \} \ddot{f}(t) + \{ \delta \}^T [K] \{ \delta \} f(t) = \{ 0 \}$$

$$-\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = \frac{\{ \delta \}^T [K] \{ \delta \}}{\{ \delta \}^T [M] \{ \delta \}} = \omega^2$$

← RAPPORTO DI RAYLEIGH

Definiamo "problema temporale" $\ddot{f}(t) + \omega^2 f(t) = 0$ (equazione scalare) \rightarrow INIZIO DEL PROBLEMA TEMPORALE

Ormai sappiamo però che la soluzione generica di questo problema, nel quale l'unica variabile interessata è t , ha la forma seguente:

$$f(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

Pertanto sappiamo già che $\{ \delta(t) \} = \{ \delta \} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$ è la forma della soluzione.

Ora, il punto è determinare gli autovalori del sistema, ω_i , in quanto la suddetta pulsazione ω , desunta dal rapporto di Rayleigh che abbiamo riconosciuto nel sistema di equazioni, è assolutamente generica, quindi non assume un valore univoco, ma dipenderà, invece dalle soluzioni del "problema spaziale". Dobbiamo perciò lasciare in sospeso il problema temporale fin tanto che non avremo ricavato gli autovalori ω_i^2 e i relativi autovettori $\{ \delta_i \}$, che è, appunto, lo scopo del problema spaziale. Per far questo ci occorre l'equazione caratteristica del sistema oscillante. Sostituiamo la nuova espressione di $\{ \delta(t) \}$ nel problema iniziale e semplifichiamo eliminando le parti trigonometriche in comune ai due membri:

$$-\omega^2 [M] \{ \delta \} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) + [K] \{ \delta \} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) = \{ 0 \}$$

$$([K] - \omega^2 [M]) \{ \delta \} = \{ 0 \}$$

(equazione vettoriale) \rightarrow INIZIO DEL PROBLEMA SPAZIALE

Escludendo la soluzione ovvia $\{ \delta \} = \{ 0 \}$, dovrà valere che il polinomio caratteristico si annulla. Da ciò si ottengono gli autovalori ω_i^2 della matrice e, per sostituzione nel sistema stesso, gli autovettori $\{ \delta_i \}$ ad essi riferiti.

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0 \rightarrow \omega_i^2 \rightarrow \omega_i = \sqrt{\omega_i^2}$$

AUTOVALORE per sostituzione nel sistema ($\{ \delta \} = \{ 0 \}$) AUTOVETTORE
 $\rightarrow \{ \delta_i \} \quad \forall i = 1, \dots, m.$

Si noti che gli autovalori sono tutti reali positivi e distinti, mentre gli autovettori sono linearmente indipendenti e ortogonali rispetto alle matrici $[M]$ e $[K]$. Quest'ultima proprietà è deducibile dalla seguente dimostrazione, siano dati due autovalori ω_j^2 e ω_k^2 tali che $\omega_j^2 \neq \omega_k^2$:

$$\{ \delta_k \}^T [K] \{ \delta_j \} = \{ \delta_k \}^T \omega_j^2 [M] \{ \delta_j \} \quad \textcircled{1}$$

$$\{ \delta_j \}^T [K] \{ \delta_k \} = \{ \delta_j \}^T \omega_k^2 [M] \{ \delta_k \} \xrightarrow{\text{traspongo}} \{ \delta_k \}^T [K] \{ \delta_j \} = \{ \delta_k \}^T \omega_k^2 [M] \{ \delta_j \} \quad \textcircled{2}$$

(18)

Per queste particolari condizioni iniziali avremmo:

$$\{\delta(t)\} = a \{\bar{\delta}_i\} \cos(\omega_i t) = \{\delta(0)\} \cos(\omega_i t)$$

Osserviamo che se la soluzione totale, all'istante iniziale è proporzionale ad uno degli autovettori normalizzati del sistema, essa vi rimarrà proporzionale nel tempo. In generale però, si ha invece che:

$$\{\delta(t)\} = \sum_1^m \{\bar{\delta}_i\} \left[(\{\delta(0)\}^T [M] \{\bar{\delta}_i\}) \cos(\omega_i t) + \left(\frac{1}{\omega_i} \{\dot{\delta}(0)\}^T [M] \{\bar{\delta}_i\} \right) \sin(\omega_i t) \right]$$

⊗
FINE DEL PROBLEMA TEMPORALE
↓ ↓
A_i B_i
E RISPOSTA DEL SISTEMA

Alla luce di quanto visto, possiamo ora riscrivere l'equazione generale che governa il problema dell'analisi dinamica:

$$[M] \{\ddot{\delta}\} + [K] \{\delta\} = \{0\} \quad \text{dove } \{\delta(t)\} = \otimes$$

$[M]$ $m \times m$ $[K]$ $m \times m$ $\{0\}$ $m \times 1$

Creiamo una matrice le cui colonne sono gli autovettori $\{\bar{\delta}_i\}$ della soluzione.

$$[\Delta] = [\{\bar{\delta}_1\}; \{\bar{\delta}_2\}; \dots; \{\bar{\delta}_m\}] \quad \text{dove } \begin{cases} \text{righe di } [\Delta] = \text{modi di vibrazione} \\ \text{colonne di } [\Delta] = \text{autovettori normalizzati} \end{cases}$$

$[\Delta]$ $m \times m$ $\{\bar{\delta}_1\}$ $m \times 1$ $\{\bar{\delta}_2\}$ $m \times 1$ $\{\bar{\delta}_m\}$ $m \times 1$

e avremo così che:

$$\{\delta(t)\} = [\Delta] \cdot \{f(t)\}$$

$\{\delta(t)\}$ $m \times 1$ $[\Delta]$ $m \times m$ $\{f(t)\}$ $m \times 1$

Sostituendo e premoltiplicando per $[\Delta]^T$ si ha che:

$$[\Delta]^T [M] [\Delta] \{\ddot{f}\} + [\Delta]^T [K] [\Delta] \{f\} = \{0\}$$

$$= [I] \text{ perche' } \quad = [\Omega^2] \text{ perche'}$$

$$\{\bar{\delta}_k\}^T [M] \{\bar{\delta}_j\} = \delta_{kj} \quad \{\bar{\delta}_k\} [K] \{\bar{\delta}_j\} = \omega_j^2 \delta_{kj}$$

↳ AUTOVALENTI DEL PROBLEMA SPAZIALE

e così otteniamo

$$\{\ddot{f}\} + [\Omega^2] \{f\} = \{0\}$$

SISTEMA DI M EQUAZIONI LINEARMENTE INDIPENDENTI

$$\begin{cases} \ddot{f}_1 + \omega_1^2 f_1 = 0 \\ \vdots \\ \ddot{f}_m + \omega_m^2 f_m = 0 \end{cases}$$

Trovate le funzioni $f_i(t) = (A_i \cos(\omega_i t) + B_i \sin(\omega_i t))$ dal suddetto sistema, queste vengono moltiplicate per i rispettivi autovettori normalizzati $\{\bar{\delta}_i\}$ così da ottenere la soluzione $\{\delta_i(t)\}$. Sommando fra loro le $\{\delta_i(t)\}$ si ottiene un'altra funzione, che, per la linearità del sistema risolto, è ancora una soluzione dello stesso; si tratta proprio di $\{\delta(t)\} = \sum_1^m \{\delta_i(t)\}$, la quale tiene conto di tutti i modi di vibrazione (pulsazioni ω_i e ampiezze $\delta_{ij} \forall i, j = 1, \dots, m$) anziché di uno solo di questi, come faceva ciascuna singola $\{\delta_i(t)\}$.

SISTEMI CONTINUI



Finora si è analizzata la dinamica dei sistemi elastici discreti, ossia di quelle strutture che presentano un numero finito di gradi di libertà, o che con essi vengono schematizzati.

Ci occupiamo adesso dei sistemi elastici continui, ossia caratterizzati da infiniti gradi di libertà. Per tutti questi (travi, funi, membrane, lastre vibranti) è possibile eseguire l'analisi dinamica, analogamente a quanto è stato fatto per i sistemi discreti. In particolare, per quanto concerne l'analisi modale, è evidente che avremo infiniti modi di vibrare. Ogni modo è definito da una frequenza propria (autovalore) e da una deformata dell'elemento (autofunzione), nota a meno di un fattore di proporzionalità.

All'aumentare dell'ordine dell'autofunzione, la deformata associata mostra un numero crescente di punti (per travi e funi) o linee (per lastre e membrane) nodali, ossia dove gli spostamenti trasversali alla linea o al piano medio sono nulli in qualunque istante di tempo durante il quale si ha vibrazione naturale. Questo fatto equivale a imporre dei vincoli fittizi per gli spostamenti trasversali nei punti o lungo le linee nodali, in aggiunta a quelli reali che sono le vere e proprie condizioni al contorno. Infatti, più aumenta l'autovalore e il numero di nodi, più la struttura sarà rigida ($\omega \propto \frac{k}{m}$), perciò incline a generare deformate meno ampie e con segni discordi su gran parte del dominio.

L'insieme delle autofunzioni è ortonormale e completo; ciò significa che ogni oscillazione viene descritta da una sommatoria (finita) o da una serie (infinita) di autofunzioni dove i coefficienti sono funzione del tempo, delle masse, della pulsazione di quel determinato ordine (modo) di vibrazione e delle condizioni iniziali. Si ricorda infatti la soluzione \oplus dei sistemi discreti a più gradi di libertà. A tal proposito, se le condizioni iniziali sono tali che il sistema parte da velocità nulla e la deformata al tempo-zero è proporzionale ad una delle autofunzioni (associata ad uno degli autovalori), e se non abbiamo forzanti, il sistema continuerà a vibrare liberamente, ma in modo sempre proporzionale alla deformata iniziale, cioè all'autofunzione. In questo caso, il sistema si comporta come se fosse ad un solo grado di libertà, poiché vibra armonicamente sempre e solo con una particolare pulsazione, cioè quella dell'autovalore che genera l'autofunzione di interesse. Essa sarà dunque l'unico parametro della deformata nel tempo, la quale si mantiene simile a se stessa e all'autofunzione. Tale proprietà, se applicata al modo fondamentale del sistema consente di ricavare, in prima approssimazione, l'autovalore minimo dello stesso (metodo di Rayleigh-Ritz). Questo approccio, così come altri, sono $\textcircled{22}$

PROBLEMA TEMPORALE $\rightarrow f(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$

PROBLEMA SPAZIALE $\rightarrow \eta(z) = C \cos(\alpha z) + D \sin(\alpha z) + E \cosh(\alpha z) + F \sinh(\alpha z)$

dove A e B si determinano con le condizioni iniziali: $f(0), \dot{f}(0)$; mentre C, D, E ed F si trovano imponendo le condizioni al contorno per la trave, ossia quelle associate ai vincoli, le quali possono essere di diversi tipi (li vedremo nel seguito). La pulsazione ω , e quindi anche α , restano tuttavia indeterminati; l'autovalore α (e conseguentemente ω) si trova imponendo le condizioni al contorno per la trave.

Per il Principio di Sovrapposizione degli Effetti $v(z,t) = \sum_1^\infty v_i(z,t) = \sum_1^\infty \eta_i(z) f_i(t)$

con $\begin{cases} f_i(t) = A_i \cos(\omega_i t) + B_i \sin(\omega_i t) \\ \eta_i(z) = C_i \cos(\alpha_i z) + D_i \sin(\alpha_i z) + E_i \cosh(\alpha_i z) + F_i \sinh(\alpha_i z) \end{cases}$

La trave oscilla proporzionalmente alla deformata iniziale e con la pulsazione corrispondente alla stessa autofunzione. Tali oscillazioni sono i modi naturali di vibrazione. Le autofunzioni godono della proprietà di ortonormalità:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^4 \eta_j}{\partial z^4} = \eta_j^{IV} = \alpha_j^4 \eta_j &\xrightarrow{\times \eta_k} \eta_j^{III} \eta_k = \alpha_j^4 \eta_j \eta_k &\xrightarrow{\int_0^l dz} \int_0^l \eta_j^{III} \eta_k dz = \alpha_j^4 \int_0^l \eta_j \eta_k dz \\ \frac{\partial^4 \eta_k}{\partial z^4} = \eta_k^{IV} = \alpha_k^4 \eta_k &\xrightarrow{\times \eta_j} \eta_k^{III} \eta_j = \alpha_k^4 \eta_k \eta_j &\xrightarrow{\int_0^l dz} \int_0^l \eta_k^{III} \eta_j dz = \alpha_k^4 \int_0^l \eta_j \eta_k dz \end{aligned} \right\} \text{ SISTEMA DI EQUAZIONI INTEGRALI}$$

Se sviluppiamo il primo integrale per parti avremo:

$$\int_0^l \eta_j^{III} \eta_k dz = \left[\eta_j^{II} \eta_k \right]_0^l - \int_0^l \eta_j^{II} \eta_k^{I} dz = \left[\eta_j^{II} \eta_k \right]_0^l - \left\{ \left[\eta_j^{I} \eta_k^{II} \right]_0^l - \int_0^l \eta_j^{I} \eta_k^{III} dz \right\} = \int_0^l \eta_j^{II} \eta_k^{II} dz$$

Questi termini si annullano sempre per qualsiasi condizione al contorno imposta alla trave l

Pertanto avremo che, se sottraiamo la prima equazione dalla seconda risulta

$$(\alpha_j^4 - \alpha_k^4) \int_0^l \eta_j \eta_k dz = \int_0^l \eta_j^{II} \eta_k^{II} dz - \int_0^l \eta_j^{II} \eta_k^{II} dz = 0$$

se $\alpha_j \neq \alpha_k$ dovrà essere $\int_0^l \eta_j \eta_k dz = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq j \\ 1 & \text{se } k = j \end{cases}$ CONDIZIONE DI ORTONORMALITÀ

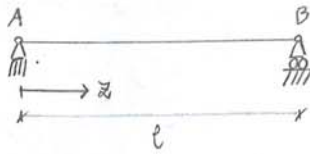
Se sostituiamo questi risultati nel sistema di equazioni integrali per trovare η_j ed η_k avremo che:

se $k \neq j \rightarrow \int_0^l \eta_j^{III} \eta_k dz = 0, \int_0^l \eta_k^{III} \eta_j dz = 0 \rightarrow v(z,t) = 0$

se $k = j \rightarrow \int_0^l \eta_j^{III} \eta_j dz = \alpha_j^4 \rightarrow \eta_j$ nota, a meno di una costante di proporzionalità.

CONDIZIONI AL CONTORNO PER LA TRAVE

• TRAVE SU DUE APPOGGI



$$A: \begin{cases} v(0) = 0 \\ M(0) = 0 \end{cases}$$

$$B: \begin{cases} v(l) = 0 \\ M(l) = 0 \end{cases}$$

Partiamo da $\eta(z) = C \cos(\alpha z) + D \sin(\alpha z) + E \cosh(\alpha z) + F \sinh(\alpha z)$

$$A: \begin{cases} \eta(0) = C + E = 0 \\ \eta''(0) = -\alpha^2(C - E) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 0 \\ E = 0 \end{cases}$$

(perché non possiamo avere tutte le costanti nulle)

$$B: \begin{cases} \eta(l) = D \sin(\alpha l) + F \sinh(\alpha l) = 0 \\ \eta''(l) = -\alpha^2(D \sin(\alpha l) - F \sinh(\alpha l)) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D \sin(\alpha l) = 0 \\ F \sinh(\alpha l) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_n = n \frac{\pi}{l} \\ F = 0 \end{cases}$$

(poiché $\alpha l \neq 0$)

Se $\alpha_n = n \frac{\pi}{l} = \sqrt{\frac{M \omega_n^2}{EI}}$, allora $\omega_n = n^2 \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{M}}$ PULSAZIONI PROPRIE DEL SISTEMA (ORDINE n)

$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2l^2}{n^2 \pi} \sqrt{\frac{M}{EI}}$ PERIODI PROPRI DEL SISTEMA (ORDINE n)

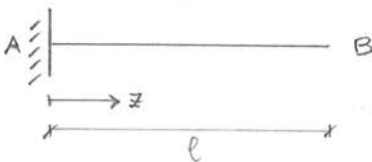
→ distanza tra due picchi di oscillazione con pulsazione naturale ω_n

n è il parametro che definisce il modo di vibrare del sistema. Occorre che una trave appoggiata sia strutturalmente verificata per $n = 1, 2, 3$ (per opere molto importanti si può verificare fino a $n = 10$).

$$\eta_n(z) = \eta_i(z) = D \sin(n\pi \frac{z}{l}) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin(n\pi \frac{z}{l})$$



• MENSOLA



$$A: \begin{cases} v(0) = 0 \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

$$B: \begin{cases} M(l) = 0 \\ T(l) = 0 \end{cases}$$

Partiamo da $\eta(z) = C \cos(\alpha z) + D \sin(\alpha z) + E \cosh(\alpha z) + F \sinh(\alpha z)$

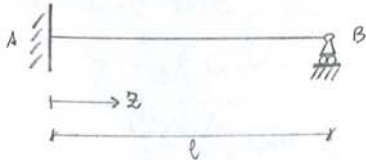
$$A: \begin{cases} \eta(0) = C + E = 0 \\ \eta'(0) = \alpha(D + F) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E = -C & \text{I} \\ F = -D & \text{II} \end{cases}$$

$$B: \begin{cases} \eta''(l) = -\alpha^2(C \cos(\alpha l) + D \sin(\alpha l) - E \cosh(\alpha l) - F \sinh(\alpha l)) = 0 & \text{III} \\ \eta'''(l) = \alpha^3(C \sin(\alpha l) - D \cos(\alpha l) + E \sinh(\alpha l) + F \cosh(\alpha l)) = 0 & \text{IV} \end{cases}$$

Sostituendo I e II in III e IV otteniamo un sistema 2x2 omogeneo che ammette soluzioni solamente per $\det(\text{matrice disegno}) = 0$:

$$\begin{cases} C(\cos(\alpha l) + \cosh(\alpha l)) + D(\sin(\alpha l) + \sinh(\alpha l)) = 0 \\ C(\sin(\alpha l) - \sinh(\alpha l)) - D(\cos(\alpha l) + \cosh(\alpha l)) = 0 \end{cases} \Rightarrow (\cos(\alpha l) + \cosh(\alpha l))^2 + (\sin^2(\alpha l) - \sinh^2(\alpha l)) = 0$$

• TRAVE INCASTRATA E APPOGGIATA



$$A: \begin{cases} v(0) = 0 \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

$$B: \begin{cases} v(l) = 0 \\ M(l) = 0 \end{cases}$$

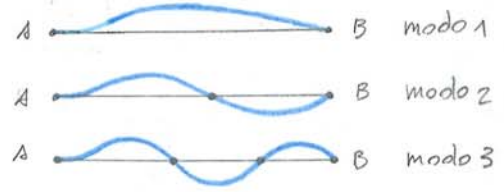
Partiamo da $\eta(z) = \dots + \dots + \dots + \dots$

$$A: \begin{cases} \eta(0) = 0 \\ \eta'(0) = 0 \end{cases}$$

$$B: \begin{cases} \eta(l) = 0 \\ \eta''(l) = 0 \end{cases}$$

Procedendo come per la mensola ...

... ..



Poiché c'è meno rigidità della trave doppiamente incastrata, ma lo è di più rispetto a quella ovviamente appoggiata, il suo periodo di ordine n, T_n , sarà intermedio tra gli omologhi delle altre due travi.

• FUNE TESA



$$\frac{d^2 M(z)}{dz^2} = -q(z)$$

EQUAZIONE INDEFINITA DI EQUILIBRIO STATICO ALLA TRASLAZIONE TRASVERSALE ALL'ASSE DELLA FUNE TESA

In questo caso $EI = 0$ (no rigidità flessionale) e il momento flettente M vale in ogni punto $M(z) = Nv(z)$ dove N è lo sforzo normale di trazione (positivo), mentre $v(z)$ è la freccia della fune, ossia lo spostamento tra la deformata e la linea indeformata. Sostituendo tale espressione nell'equazione indefinita di equilibrio, avremo

$$\frac{d^2}{dz^2} (Nv(z)) = -N \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = -q(z) = \mu(z) \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}$$

nel caso in cui $q(z)$ sia dovuto alla forza di inerzia.

$$N \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = \mu \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}$$

EQUAZIONE INDEFINITA DI EQUILIBRIO DINAMICO ALLA TRASLAZIONE TRASVERSALE ALL'ASSE DELLA FUNE TESA

Questa equazione è dello stesso tipo di quella delle onde (D'Alembert), ossia di tipo ellittico, e quindi:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

dove $c = \sqrt{\frac{N}{\mu}}$ è la velocità dell'onda che si propaga lungo la fune tesa generando una deformata con frecce trasversali al suo asse.

Tale equazione è fondamentalmente identica a quella delle onde longitudinali nelle barre elastiche perturbate:

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -F_x(x) \quad \text{dove ponendo } F_x(x) = -\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \text{ otteniamo}$$

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{con } c = \sqrt{\frac{EA}{\mu}}$$

Se per la lastra consideriamo una funzione di spostamento $w(x,y;t)$ della stessa forma ottenuta per la trave semplicemente appoggiata (con la differenza che in questo caso le direzioni lungo le quali dobbiamo valutare w sono due e non più una):

$$W(x,y;t) = \sum_1^{\infty} m \sum_1^{\infty} n \eta_m(x) \eta_n(y) f_{mn}(t) = \sum_1^{\infty} m \sum_1^{\infty} n A_{mn}(t) \text{sen}\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \text{sen}\left(n\pi \frac{y}{b}\right)$$

È facile verificare che questa funzione, rispetta le condizioni al contorno elencate in precedenza, per qualunque valore di $A_{mn}(t)$.

Poiché la soluzione $w(x,y;t)$ deve dipendere anche dal tempo e l'unico termine che può essere funzione di t è $A_{mn}(t)$, questi coefficienti diventano le nostre nuove incognite generalizzate.

Sostituendo l'espressione di $w(x,y;t)$ negli integrali di V e T , si ottengono le seguenti soluzioni:

$$W = \frac{D}{2} \pi^4 \frac{ab}{4} \sum_1^{\infty} m \sum_1^{\infty} n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 A_{mn}^2$$

$$T = \frac{ph}{2} \frac{ab}{4} \sum_1^{\infty} m \sum_1^{\infty} n \dot{A}_{mn}^2$$

Applico ora il Principio di Conservazione dell'Energia Meccanica. Per la linearità delle derivate, ho che $\frac{d}{dt}(\sum_m \sum_n (\bullet)) = \sum_m \sum_n \frac{d}{dt}(\bullet)$; quindi ciò che vale per un termine generico della doppia sommatoria vale per tutta la serie:

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{D}{2} \pi^4 \frac{ab}{4} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 A_{mn}^2 \right) + \left(\frac{ph}{2} \frac{ab}{4} \dot{A}_{mn}^2 \right) \right] = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}(x^2) = \frac{d}{dx}(x^2) \frac{dx}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{D}{2} \pi^4 \frac{ab}{4} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 2 A_{mn} \dot{A}_{mn} + \frac{ph}{2} \frac{ab}{4} 2 \dot{A}_{mn} \ddot{A}_{mn} = 0 \quad \leftarrow$$

$$ph \ddot{A}_{mn} + D \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 A_{mn} = 0$$

Dividendo per ph , si ottiene:

$$\ddot{A}_{mn} + \underbrace{\frac{D \pi^4}{ph} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}_{\omega_{mn}^2} A_{mn} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\ddot{A}_{mn} + \omega_{mn}^2 A_{mn} = 0} \quad \text{EQUAZIONE DEL MOTO}$$

$$\text{dove } \boxed{\omega_{mn} = \pi^2 \sqrt{\frac{D}{ph} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)}}$$

è la "pulsazione propria di ordine m,n " della lastra oscillante.

Gli indici m ed n sono fra loro indipendenti; perciò esistono pulsazioni anche con indici fra loro diversi ($\omega_{12}, \omega_{21}, \omega_{13}, \dots$). Nel caso della lastra quadrata ($a=b$), la pulsazione fondamentale ω_{11} vale $\frac{2\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{ph}}$ e la frequenza associata è $f_{11} = \frac{\omega_{11}}{2\pi} = \frac{\pi}{a^2} \sqrt{\frac{D}{ph}}$.

$$+ m_2 \frac{\dot{v}(t)}{\ell} t \dot{x}(t) + m_2 \frac{v(t)}{\ell} \dot{x}(t) + m_2 \frac{v(t)}{\ell} t \ddot{x}(t)] + kx(t) = m_2 \frac{v(t)}{\ell} t g$$

$$\left[m_1 \ddot{x}(t) + m_2 \frac{\ddot{v}(t)}{\ell} t x(t) + 2m_2 \frac{\dot{v}(t)}{\ell} x(t) + 2m_2 \frac{\dot{v}(t)}{\ell} t \dot{x}(t) + 2m_2 \frac{v(t)}{\ell} \dot{x}(t) + m_2 \frac{v(t)}{\ell} t \ddot{x}(t) \right] + kx(t) = m_2 \frac{v(t)}{\ell} t g$$

$$\left[m_1 + m_2 \frac{v(t)}{\ell} t \right] \ddot{x}(t) + 2 \frac{m_2}{\ell} \left[\dot{v}(t)t + v(t) \right] \dot{x}(t) + \left[\frac{2m_2}{\ell} \left(\frac{\ddot{v}(t)t}{2} + \dot{v}(t) \right) + k \right] x(t) = m_2 \frac{v(t)}{\ell} t g$$

La precedente equazione si semplifica notevolmente se abbiamo $v(t) = v = \text{cost.}$:

$$\left[m_1 + m_2 \frac{v}{\ell} t \right] \ddot{x}(t) + 2m_2 \frac{v}{\ell} \dot{x}(t) + kx(t) = m_2 \frac{v}{\ell} t g$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x} + 2m_2 \frac{v}{\ell} \dot{x} + kx = 0 & \text{per } t=0 \text{ (inizio corsa di } m_2 \text{ da A verso C)} \\ (m_1 + m_2) \ddot{x} + 2m_2 \frac{v}{\ell} \dot{x} + kx = m_2 g & \text{per } t = \frac{\ell}{v} \text{ (fine corsa di } m_2 \text{ da A verso C)} \end{cases}$$

Come si può notare, se $v(t) = v = \text{cost.}$, il coefficiente di smorzamento c , ossia quello che moltiplica $\dot{x}(t)$, e' anch'esso costante nel tempo, così come il fattore totale che moltiplica $x(t)$.

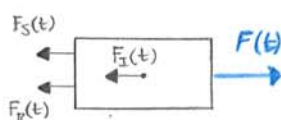
Se invece la rigidità k della molla non è costante, bensì abbiamo $k = k(t)$, la non-linearità del sistema sarà dovuta al legame costitutivo del sistema:

NON-LINEARITÀ GEOMETRICA → si rimuove l'ipotesi di piccoli spostamenti e si giunge allo studio dell'instabilità dinamica del sistema;

NON-LINEARITÀ FISICA → comportamento non elastico del materiale, per cui superata una certa soglia (snervamento) il sistema non segue più il comportamento descritto dalla legge di Hooke e si plasticizza.

"STEP-BY-STEP" INTEGRATION

Come detto, la condizione di equilibrio dinamico è stabile all'inizio e alla fine di ciascun passo; mentre la risposta completa è ottenuta utilizzando lo spostamento e la velocità, calcolati alla fine di un intervallo, come condizioni iniziali per l'intervallo successivo.



- $F_I(t)$ = forza di inerzia
- $F_S(t)$ = forza di smorzamento viscoso
- $F_R(t)$ = forza di richiamo elastico
- $F(t)$ = forzante esterna

ISTANTE t : $F_I(t) + F_S(t) + F_R(t) = F(t)$

ISTANTE $t + \Delta t$: $F_I(t + \Delta t) + F_S(t + \Delta t) + F_R(t + \Delta t) = F(t + \Delta t)$

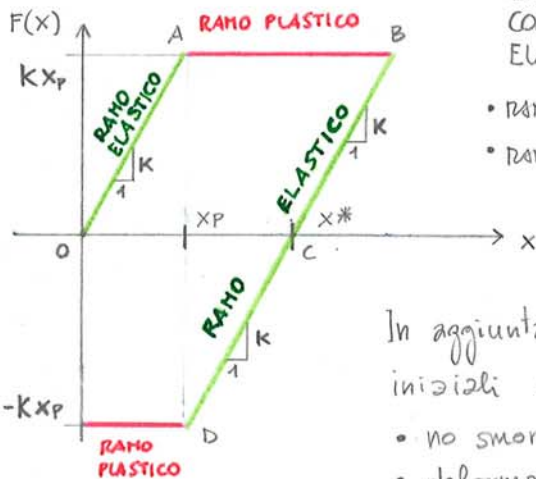
Riscrivendo la seconda in forma incrementale:

$$\Delta F_I(t) + \Delta F_S(t) + \Delta F_R(t) = \Delta F(t)$$

SISTEMI ELASTO - PLASTICI

Quando la non-linearità di un sistema oscillante è dovuta al suo particolare legame costitutivo entra in gioco la plasticità dei materiali. L'origine di questo fenomeno è, quindi, di natura unicamente fisica.

Supponiamo di avere a che fare con un sistema oscillante caratterizzato da un materiale elastico-perfettamente plastico. La sua legge costitutiva può essere schematizzata nel seguente modo:



LEGGE COSTITUTIVA ELASTICA - PERF. PLASTICA

- RAMO ELASTICO : $|F(t)| = K(x(t) - x^*)$
- RAMO PLASTICO : $|F(t)| = K X_P$

dove $\left\{ \begin{array}{l} K = \text{rigidezza del sistema} \\ X_P = \text{soglia deformativa oltre la quale il sistema si plasticizza (def. anche permanenti)} \\ X^* = \text{massima deformazione del sistema (elastico + plastica) per } F = 0 \\ F = \text{forza agente sul sistema} \end{array} \right.$

In aggiunta al legame costitutivo, imponiamo altre tre ipotesi iniziali:

- no smorzamento viscoso $\rightarrow c = 0$;
- deformazione iniziale nulla $\rightarrow x(0) = 0$;
- velocità di deformazione iniziale positiva $\dot{x}(0) > 0$.

Analizziamo ora quanto accade al sistema nei diversi intervalli temporali (e deformativi).

FASE \overline{OA}

$t \in [0, t_1] \rightarrow$ COMPORTAMENTO ELASTICO

Nei tratti a comportamento elastico l'equazione del moto sarà $m\ddot{x}(t) + kx(t) = Kx^*$. Poiché all'inizio sarà $x^* = 0$, non essendo ancora entrati nel ramo plastico, avremo semplicemente $m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$. Non essendoci forzanti, con le condizioni iniziali date, avremo

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 + IC_0: \begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) > 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{SOLUZIONE ARMONICA}} x(t) = \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \text{sen}(\omega t) \quad \text{RISPOSTA DEL SISTEMA}$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(0) \text{cos}(\omega t)$$

FASE \overline{AB}

$t \in [t_1, t_2] \rightarrow$ COMPORTAMENTO PLASTICO

La risposta si classifica in base al valore di $\dot{x}(0)$. Infatti:

se $\dot{x}(0) < \omega X_P \rightarrow \frac{\dot{x}(0)}{\omega} < X_P \rightarrow$ MASSIMA AMPIEZZA INFERIORE ALLA SOGLIA DI PLASTICIZZAZIONE \rightarrow IL SISTEMA CONTINUA A COMPORTARSI ELASTICAMENTE

se $\dot{x}(0) \geq \omega X_P \rightarrow \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \geq X_P \rightarrow$ MASSIMA AMPIEZZA SUPERIORE O UGUALE ALLA SOGLIA DI PLASTICIZZAZIONE \rightarrow IL SISTEMA INIZIA A COMPORTARSI IN MODO PERFETTAMENTE PLASTICO

Con questo valore possiamo ricavare $x(t_2)$ per sostituzione nell'espressione riferita al tratto precedente (\overline{AB}):

$$x(t_2) = x_p \left(1 + \frac{\dot{x}(0)^2}{2\omega^2 x_p^2} \cos^2(\omega t_1) \right)$$

Il dato della forza agente sul sistema (per effetto delle deformazioni permanenti) che ci manca sono le deformazioni permanenti quando il sistema viene scaricato, questo valore è $x^* = x - x_p$. Sostituendo x con $x(t_2)$, abbiamo

$$x^* = x(t_2) - x_p = \frac{\dot{x}(0)^2}{2\omega^2 x_p} \cos^2(\omega t_1)$$

L'equazione del moto diventa

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = \frac{k \dot{x}(0)^2}{2\omega^2 x_p} \cos^2(\omega t_1) \quad \xrightarrow{\omega^2 = \frac{k}{m}} \quad m\ddot{x}(t) + kx(t) = \frac{m \dot{x}(0)^2}{2 x_p} \cos^2(\omega t_1)$$

Per trovare la risposta di questo sistema utilizziamo la notazione semplificata

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + k(x - x^*) &= 0 \\ m\ddot{x} + kx &= kx^* \\ \ddot{x} + \omega^2 x &= \omega^2 x^* \quad \leftarrow \times \frac{1}{m} \end{aligned}$$

La soluzione è data dalla somma di un integrale particolare (dovuto a $\omega^2 x^*$) e di un integrale generale =

• INTEGRALE PARTICOLARE: x_{PART}

$$x_{PART} = M$$

$\dot{x}_{PART} = 0$
 $\ddot{x}_{PART} = 0$
 → perché la forzante è una costante e quindi la soluzione (ad essa proporzionale) lo è anch'essa.

$$\left. \begin{aligned} 0 + \omega^2 M &= \omega^2 x^* \rightarrow M = x^* \\ x_{PART} &= x^* \end{aligned} \right\}$$

• INTEGRALE GENERALE: x_{OH}

$$x_{OH} = N_1 \cos(\omega t) + N_2 \sin(\omega t) = N \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\dot{x}_{OH} = -\omega N \sin(\omega t - \varphi)$$

• SOLUZIONE: $x(t) = x_{PART} + x_{OH} \rightarrow x(t) = x^* + N \cos(\omega t - \varphi)$
 $\dot{x}(t) = -\omega N \sin(\omega t - \varphi)$

Le condizioni iniziali per questa fase sono

$$\begin{cases} x(t_2) = x^* + x_p \\ \dot{x}(t_2) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^* + N \cos(\omega t_2 - \varphi) = x^* + x_p \\ -\omega N \sin(\omega t_2 - \varphi) = 0 \end{cases}$$

$\left. \begin{aligned} &\rightarrow N=0 \rightarrow \text{SOLUZIONE BANALE} \rightarrow \text{NO!} \\ &\rightarrow \sin(\omega t_2 - \varphi) = 0 \rightarrow \omega t_2 - \varphi = 2n\pi \\ &\text{con } n \in \mathbb{N} \quad \varphi = \omega t_2 - 2n\pi \end{aligned} \right\}$

$$\begin{cases} N \cos(\omega t_2 - (\omega t_2 - 2n\pi)) = x_p \\ \varphi = \omega t_2 - 2n\pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N = x_p \\ \varphi = \omega t_2 - 2n\pi \end{cases}$$

Quindi, in sostanza, risulta che

$$\dot{x}(t) = -\omega x_p \sin(\omega(t - t_2) + 2n\pi)$$

$$x(t) = x^* + x_p \cos(\omega(t - t_2) + 2n\pi) = x_p \left[\frac{\dot{x}(0)^2}{2\omega^2 x_p^2} \cos^2(\omega t_1) + \cos(\omega(t - t_2) + 2n\pi) \right]$$

RISPOSTA DEL SISTEMA (36)

I) CALCOLO DELLE COMPONENTI DI [K] ED [M] ASSOCIATE AL PROBLEMA ASSIALE

$$W(z;t) = L_1(z)w_1 + L_2(z)w_2 = \{L(z)\}^T \cdot \{w(t)\}$$

assumendo che, in generale, si abbiano $w_1 \neq \text{cost}$ e $w_2 \neq \text{cost}$ nel tempo.

[K]

Sfogliamo la definizione meccanica di energia potenziale e la eguagliamo all'energia potenziale elastica assiale della trave:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \sigma \epsilon \, dV$$

ENERGIA POTENZIALE MECCANICA

Gli spostamenti w_1 e w_2 sono assiali perciò provocheranno solamente ϵ_z ed ϵ_x , fatte salve le ipotesi di piccole deformazioni e sezioni piane. Inoltre, il nostro problema considera una trave monodimensionale (modello teorico e, con buona approssimazione, valido nella realtà). Avremo perciò

$$\sigma_z = E \epsilon_z = E \frac{dw}{dz}$$

$$W = \frac{1}{2} \int_V \sigma \epsilon \, dV = \frac{A}{2} \int_0^l E \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz = \frac{EA}{2} \int_0^l \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz$$

Sostituendo l'espressione vettoriale di $w(z;t)$ nell'integrale avremo

$$W = \frac{EA}{2} \int_0^l \left[\{w(t)\}^T \frac{\{L(z)\}}{dz} \right] \left[\frac{\{L(z)\}^T}{dz} \{w(t)\} \right] dz = \frac{EA}{2} \{w(t)\}^T \left[\int_0^l \{L'(z)\} \{L'(z)\}^T dz \right] \{w(t)\}$$

L'energia potenziale elastica di una molla longitudinale si scrive come

$$W = \frac{1}{2} K w^2$$

ENERGIA POTENZIALE DI UNA MOLLA

Segue che

$$W = \frac{1}{2} \{w(t)\}^T [K] \{w(t)\} \quad \text{dove} \quad [K] = EA \int_0^l \{L'(z)\} \{L'(z)\}^T dz$$

Sviluppando le derivate di $\{L(z)\}$ ed eseguendo il prodotto scalare, avremo:

$$\{L'(z)\} = \frac{d}{dz} \{L(z)\} = \frac{d}{dz} \begin{Bmatrix} 1 - \frac{z}{l} \\ \frac{z}{l} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{l} \\ \frac{1}{l} \end{Bmatrix}, \quad \{L'(z)\}^T = \left\{ -\frac{1}{l}; \frac{1}{l} \right\}$$

$$[K] = EA \int_0^l \begin{Bmatrix} -\frac{1}{l} \\ \frac{1}{l} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{Bmatrix} dz = EA \int_0^l \begin{bmatrix} \frac{1}{l^2} & -\frac{1}{l^2} \\ -\frac{1}{l^2} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} dz = EA \begin{bmatrix} \frac{1}{l^2} & -\frac{1}{l^2} \\ -\frac{1}{l^2} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \int_0^l dz = EA \begin{bmatrix} \frac{1}{l} & -\frac{1}{l} \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix}$$

$$[K] = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRICE DI RIGIDEZZA ASSIALE (SMM)

Sostituendo l'espressione vettoriale di $v(z,t)$ otteniamo

$$W = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{dv}{dz} \right)^2 dz = \frac{EI}{2} \int_0^l \left[\{u(t)\}^T \{L''(z)\} \right] \left[\{L''(z)\}^T \{u(t)\} \right] dz = \frac{EI}{2} \{u(t)\}^T \left[\int_0^l \{L''(z)\} \{L''(z)\}^T dz \right] \{u(t)\}$$

Poiché $W = \frac{1}{2} k v^2$ ENERGIA POTENZIALE DI UNA MOLLA

Segue che

$$W = \frac{1}{2} \{u(t)\}^T [K] \{u(t)\} \quad \text{dove} \quad [K] = EI \int_0^l \{L''(z)\} \{L''(z)\}^T dz$$

Sviluppando le derivate di $\{L(z)\}$ ed eseguendo il prodotto scalare, avremo:

$$\{L''(z)\} = \frac{d^2}{dz^2} \{L(z)\} = \frac{d^2}{dz^2} \begin{Bmatrix} -l \left[\frac{z}{l} - 2 \left(\frac{z}{l} \right)^2 + \left(\frac{z}{l} \right)^3 \right] \\ 1 - 3 \left(\frac{z}{l} \right)^2 + 2 \left(\frac{z}{l} \right)^3 \\ -l \left[- \left(\frac{z}{l} \right)^2 + \left(\frac{z}{l} \right)^3 \right] \\ 3 \left(\frac{z}{l} \right)^2 - 2 \left(\frac{z}{l} \right)^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{6z}{l} - \frac{6z^2}{l^2} \\ -\frac{6}{l^2} + \frac{12z}{l^3} \\ \frac{2z}{l} - \frac{6z^2}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} - \frac{12z}{l^3} \end{Bmatrix}, \quad \{L''(z)\}^T = \left\{ \frac{6z}{l} - \frac{6z^2}{l^2}, -\frac{6}{l^2} + \frac{12z}{l^3}, \frac{2z}{l} - \frac{6z^2}{l^2}, \frac{6}{l^2} - \frac{12z}{l^3} \right\}$$

$$[K] = EI \int_0^l \begin{Bmatrix} -\frac{6z}{l} - \frac{6z^2}{l^2} \\ -\frac{6}{l^2} + \frac{12z}{l^3} \\ \frac{2z}{l} - \frac{6z^2}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} - \frac{12z}{l^3} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{6z}{l} - \frac{6z^2}{l^2}, -\frac{6}{l^2} + \frac{12z}{l^3}, \frac{2z}{l} - \frac{6z^2}{l^2}, \frac{6}{l^2} - \frac{12z}{l^3} \end{Bmatrix} dz$$

$$[K] = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 4 & -\frac{6}{l} & 2 & \frac{6}{l} \\ -\frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} \\ 2 & -\frac{6}{l} & 4 & \frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} \end{bmatrix}$$

MATRICE DI RIGIDENZA FLESSIONALE (SIMM.)

[M]

Riprendendo la definizione di energia cinetica meccanica, sarà

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho v^2 dV = \frac{1}{2} m \int_0^l \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 dz$$
 ENERGIA CINETICA MECCANICA

Dallo che $v(z) = \{L(z)\}^T \cdot \{u(t)\}$, avremo

$$T = \frac{m}{2} \int_0^l \left[\{\dot{u}(t)\}^T \{L(z)\} \right] \left[\{L(z)\}^T \{\dot{u}(t)\} \right] dz = \frac{m}{2} \{\dot{u}(t)\}^T \left[\int_0^l \{L(z)\} \{L(z)\}^T dz \right] \{\dot{u}(t)\}$$

Ricordando che vale altresì

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$
 ENERGIA CINETICA DI UNA MASSA

MATRICE DI MASSA FLESSIONALE (SIMM.)

sarà

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{u}(t)\}^T [M] \{\dot{u}(t)\} \quad \text{dove} \quad [M] = m \int_0^l \{L(z)\} \{L(z)\}^T dz$$

$$[M] = \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 4l^2 & -27l & -3l^2 & 13l \\ -27l & 156 & 13l & 54 \\ -3l^2 & 13l & 4l^2 & 27l \\ 13l & 54 & 27l & 156 \end{bmatrix}$$

$$[M] = m \int_0^l \begin{Bmatrix} -l \left[\frac{z}{l} - 2 \left(\frac{z}{l} \right)^2 + \left(\frac{z}{l} \right)^3 \right] \\ 1 - 3 \left(\frac{z}{l} \right)^2 + 2 \left(\frac{z}{l} \right)^3 \\ -l \left[- \left(\frac{z}{l} \right)^2 + \left(\frac{z}{l} \right)^3 \right] \\ 3 \left(\frac{z}{l} \right)^2 - 2 \left(\frac{z}{l} \right)^3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -l \left[\frac{z}{l} - 2 \left(\frac{z}{l} \right)^2 + \left(\frac{z}{l} \right)^3 \right], 1 - 3 \left(\frac{z}{l} \right)^2 + 2 \left(\frac{z}{l} \right)^3, -l \left[- \left(\frac{z}{l} \right)^2 + \left(\frac{z}{l} \right)^3 \right], 3 \left(\frac{z}{l} \right)^2 - 2 \left(\frac{z}{l} \right)^3 \end{Bmatrix} dz = \rightarrow$$

Se lo smorzamento c delle strutture supera il 20% dello smorzamento critico $c_c = 2m\omega$, una variazione del rapporto $\xi = \frac{c}{c_c}$ non produce sensibili variazioni di S_a .

Dall'esame degli Spettri di Risposta, ottenuti dai sismi reali di cui si possiedono gli accelerogrammi, si traggono le seguenti considerazioni:

- STRUTTURA MOLTO RIGIDA ($T \rightarrow 0$): il suo moto coincide con il moto del terreno, così come le loro accelerazioni massime ($S_a = a_g$).
- STRUTTURA MODERATAMENTE RIGIDA ($T \in [0,1 \text{ sec}; 1 \text{ sec}]$): la massima accelerazione subita dal sistema supera notevolmente la massima accelerazione del terreno ($S_a \gg a_g$);
- STRUTTURA MOLTO DEFORMABILE ($T > 2 \text{ sec}$): la massima accelerazione subita dal sistema è inferiore alla massima accelerazione del terreno ($S_a < a_g$).

