



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1977A -

ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Venezia Angela

MATERIA: Fisica II - Prof. Allia

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

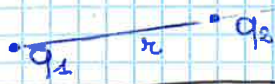
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Fisica II

Richiamo elettrostatico

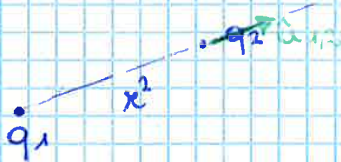
Carica elettrica $1e^- \rightarrow q = -1,60 \cdot 10^{-19} C$
 $1p^+ \rightarrow q = 1,60 \cdot 10^{-19} C$



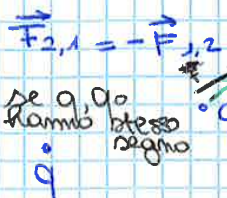
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2$$

Forza di Coulomb $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$

$\epsilon_0 =$ costante dielettrica nel vuoto $= 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$



$$\vec{F}_{1,2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{u}_{1,2}$$



$$\hat{u}_{2,1} = -\hat{u}_{1,2}$$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_0}{r^2} \hat{u}$$

$q_0 \rightarrow$ Positivo

forma vettoriale della legge di Coulomb

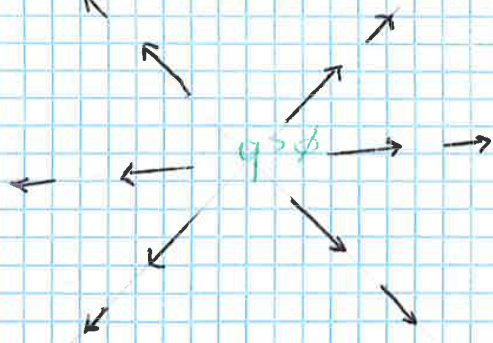
Campo elettrostatico $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$

La forza risultante su q_0 è proporzionale a q_0 . La grandezza vettoriale \vec{E} è il campo elettrostatico

Se campo esiste anche se non c'è q_0 . Il campo non lo misuro direttamente ma con q_0 . È un campo di forze

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad F = E q_0 \quad (\text{il sistema di coordinate è lo stesso di } \vec{E})$$

Se campo è radiale



$q > 0$ campo uscente

$q < 0$ campo entrante

Linee di flusso / campo / forza come rappresentare il campo

$q < 0$



direzione tangente nel punto della freccia

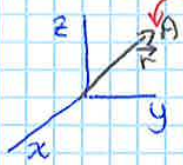


le linee di forza hanno origine dalle cariche + e si chiudono sulle -

Anche la carica di prova ha il suo campo ma facciamo riferimento a questa carica non disturba i campi macroscopici \rightarrow l'effetto del disturbo può essere trascurato

$U_e(x,y,z)$ energia potenziale in funzione del punto

$U_e(x,y,z) = U_e(\vec{r})$ *o metto q_0*



$V(\vec{r}) = \frac{U_e(\vec{r})}{q_0}$ questo è il **potenziale elettrostatico**

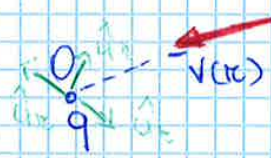
$\langle V(\vec{r}) \rangle = \int \frac{1}{c} = V_{eff} = V$

$\Delta V_{AB} = \frac{\Delta U_e}{q_0} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$ questo non dipende dal percorso



$V(B) - V(A) = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$

Quello che conta è la differenza di energia potenziale
 Potenziale di una carica puntiforme q



$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{u}_r$ *sempre uscente*
per convenzione il potenziale è 0 a $r \rightarrow \infty$

$V(r) - V(r \rightarrow \infty) = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{1}{r^2} dr = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{\infty}^r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$

$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$

* $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{u}_r$

* $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$ *distanza r dall'origine
 cioè dalla carica*

Il potenziale è una scalare, meno complicato

$\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$

per uno spostamento infinitesimo vale questa legge:

$dV = - \vec{E} \cdot d\vec{s}$

Una variazione infinitesima di una grandezza che dipende da x, y, z

Immaginiamo dipenda solo da x



$V(x+\Delta x) = V(x) + \left(\frac{dV}{dx}\right) \Delta x + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right) \Delta x^2 + \dots + \frac{1}{m!} \left(\frac{d^m V}{dx^m}\right) \Delta x^m$

se la funzione è derivabile e vogliamo conoscere in un altro punto quanto vale. Noi sappiamo già in un

lungo una linea chiusa, (prendo una superficie qualsiasi) ^{sottile}
 la circuitazione di \vec{E} è uguale al flusso del rotore
 di \vec{E} lungo una superficie qualsiasi \rightarrow = a zero
 perché su una linea chiusa $\oint \vec{E} = 0$

$$\nabla \times \vec{E} = [\text{rotore di } \vec{E}]$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint$$


$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \hat{u}_n dS = \oint$$

stante l'arbitrarietà della superficie, implica che
 l'integrandando sia uguale a zero in ogni punto

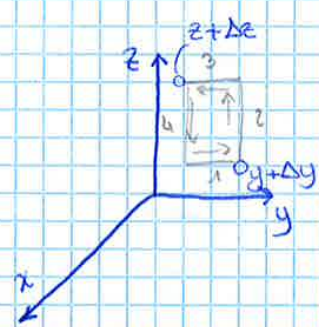
implica $\nabla \times \vec{E} = 0$

teorema del rotore applicato ad un circuito elementare semplice

se il vettore <rotore di A> è definito (in coordinate cartesiane ortog)
 è uguale:

$$\nabla \times A = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{u}_z$$

$$\begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$



Rettangolo nel piano y, z : x è sempre costante
 $\oint A \cdot ds = \int_1 A \cdot ds + \int_2 A \cdot ds + \int_3 A \cdot ds + \int_4 A \cdot ds$
 Tratto 1 (x, z fissi, y varia)

$$ds = dy \hat{u}_y$$

$$A \cdot ds = A_y(x, y, z) dy$$

$$\int_1 A_y(x, y, z) dy = \bar{A}_y(x, z) \Delta y$$

→ valore medio

Tratto 2 (x, y fissi, z varia)

$$ds = dz \hat{u}_z$$

$$A \cdot ds = A_z(x, y + \Delta y, z) dz$$

$$\int_2 A_z(x, y + \Delta y, z) dz = \bar{A}_z(x, y + \Delta y) \Delta z$$

Tratto 3 (x, z fissi, y varia)

$$ds = -dy \hat{u}_y$$

$$A \cdot ds = -A_y(x, y, z + \Delta z) dy$$

$$- \int_3 A_y(x, y, z + \Delta z) dy = -\bar{A}_y(x, z + \Delta z) \Delta y$$

Tratto 4 (x, y fissi, z varia)

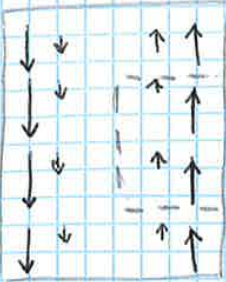
$$ds = -dz \hat{u}_z$$

$$A \cdot ds = -A_z(x, y, z) dz$$

$$- \int_4 A_z(x, y, z) dz = -\bar{A}_z(x, y) \Delta z$$

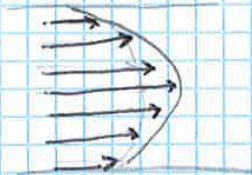
$$\oint A \cdot ds = - \underbrace{[\bar{A}_y(x, z + \Delta z) - \bar{A}_y(x, z)]}_{\text{tratto 3}} \Delta y + \underbrace{[\bar{A}_z(x, y + \Delta y) - \bar{A}_z(x, y)]}_{\text{tratto 4}} \Delta z$$

Esempi in cui il rotore è \neq da zero



La circolazione non è uguale a zero e il rotore è \neq da zero

Se immaginiamo di mettere una papaverina ruota

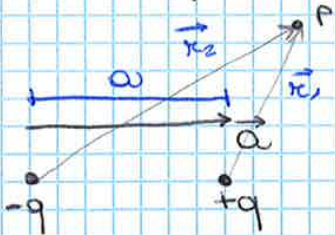


Sono tutti campi rotazionali dove il rotore è \neq da zero

Ma... un campo elettrostatico non è un campo di velocità di un fluido. Non esistono "vortici a pale". Tuttavia il concetto rimane lo stesso. Si potrebbe immaginare uno strumento ideale che misura la rotazione del campo elettrico (misura scalare ma non funzionale mai, ma può ruotare).

Il campo elettrostatico non è rotazionale

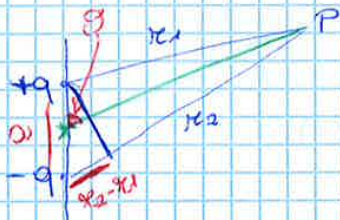
Esercizio sul dipolo elettrico



$$\vec{p} = q \vec{a}$$

↳ momento del dipolo elettrico

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$



$$(r_2 - r_1) \approx a \cos \theta$$

keca approssimazione su grande distanza

$$r_1 \cdot r_2 \approx r^2$$

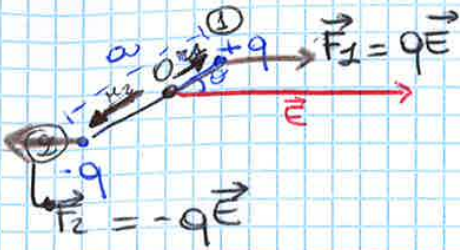
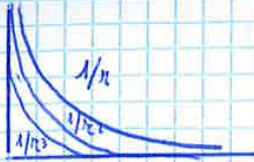
$$V(P) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \cos \theta}{r^2}$$

$$p = qa$$

$$V(P) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

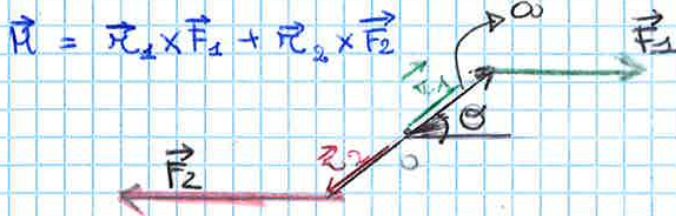
$$V(r, \theta) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

espressione tipica del potenziale



$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \emptyset$ centro di simmetria del sistema (centro massa) non si muove (non c'è accelerazione)

considero il polo O, al centro del sistema



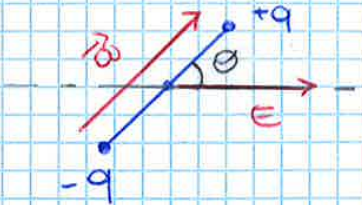
$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

$$\vec{M} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1$$

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{d}$$

$$\vec{M} = q\vec{d} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

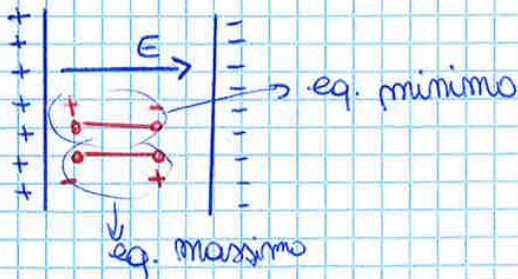
Il momento della forza, torcente, meccanico
E campo elettrico uniforme



$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

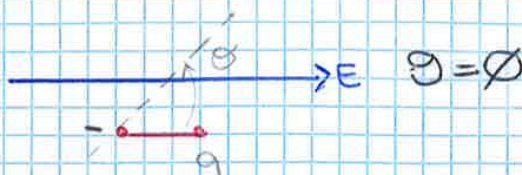
$$M = pE \sin \theta$$

$$M = pE \sin \theta$$



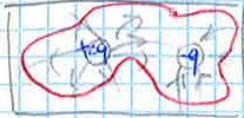
$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

$$M = pE \sin \theta$$



$$W = \int_0^\theta M d\theta' = pE \int_0^\theta \sin \theta' d\theta' = -pE \cos \theta' \Big|_0^\theta = -pE (\cos \theta - 1)$$

- Nuovamente traslato. Attorno a una carica negativa $(-q)$ vi è un flusso entrante del campo elettrostatico. Il flusso è negativo in accordo con il fatto che era proporzionale a $-q$.
- La superficie contiene due cariche



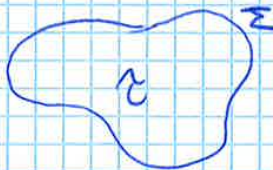
Se il flusso è positivo $(2q - q = +q)$ vi sono + linee di flusso uscenti dalla superficie che linee di flusso entranti.

- La superficie contiene tre cariche $(2q - q - q = 0)$ il flusso è nullo perché la carica netta contenuta è pari a zero. Tutte le linee di flusso uscenti dalla superficie si ricreano.

Teorema della divergenza applicato ad un volume elementare semplice

Per un vettore generico $A = A_x u_x + A_y u_y + A_z u_z$ il teorema stabilisce che:

$$\Phi(A) = \oint_{\Sigma} A \cdot u_n d\Sigma = \int_{\text{volume}} (\nabla \cdot A) d\tau$$



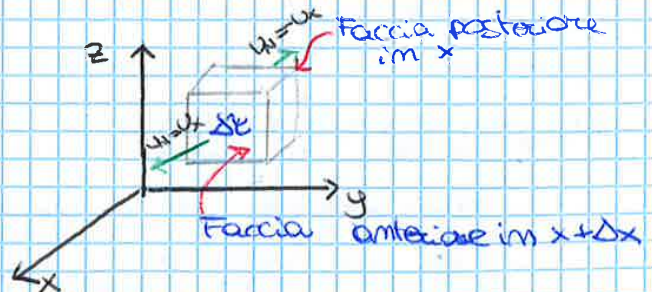
« il flusso di A attraverso una superficie chiusa Σ è uguale all'integrale di volume della grandezza scalare « divergenza di A » effettuato sul volume V racchiuso dalla superficie Σ »

la grandezza scalare « divergenza di A » è definita in coordinate cartesiane ortogonali come:

$$\nabla \cdot A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Dimostrazione/Verifica

Piccolo parallelepipedo di spigoli $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ con gli assi // agli assi cartesiani. Il volume racchiuso è $\Delta \tau = \Delta x \Delta y \Delta z$



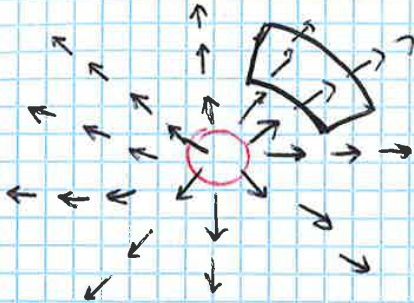
Consideriamo due facce opposte, quella anteriore sul piano di coordinata $x + \Delta x$ e quella posteriore sul piano di coordinata x . In questo caso $u_n = u_x$ sulla faccia anteriore $u_n = -u_x$ sulla faccia posteriore.

Sulla faccia anteriore $A \cdot u_n = +A_x(x + \Delta x, y, z)$; su quella posteriore $A \cdot u_n = -A_x(x, y, z)$

Un volume macroscopico \approx racchiuso da una superficie chiusa Σ è approssimabile bene quanto si vuole da un numero (tendente a ∞) di parallelepipedi elementari ciascuno di volume tendente a zero. Per il volume macroscopico il teorema della divergenza si esprime integrando e' espresso visto prima sull'intero volume τ :

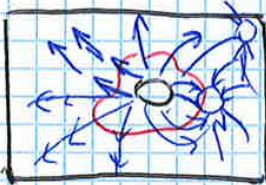
$$\Phi_{tot} = \int_{\tau} (\nabla \cdot \mathbf{A}) d\tau$$

racchiuso da Σ

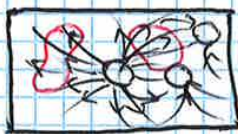


Immaginiamo che le superfici rosse e nere siano rese piccole a piacere pur mantenendo la stessa forma

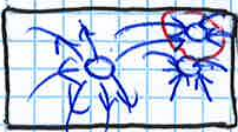
Questa è una rappresentazione 2D del campo elettrostatico generato da una carica puntiforme nell'origine. $\epsilon =$ divergenza nell'origine è diverso da zero: il flusso attraverso una superficie qualunque che circonda l'origine, piccola quanto si vuole, è diverso da zero (in questo caso positivo) giacché la divergenza in un qualunque altro punto è pari a zero (il flusso entrante e quello uscente dalla superficie (qui chiusa) nera, rese piccole quanto si vuole, si bilanciano esattamente)



Si immagini che la superficie chiusa rossa abbia dimensioni tendenti a zero e che le 3 cariche siano punti focale di divergenza di ϵ e' positivo nel punto dove è collocata la carica considerata. Attorno a questo sorgente del campo elettrostatico (valore +2 unita), vi è strettamente un flusso uscente (tutte le linee di flusso escono dalla superficie)



se punto attorno al quale si estende la superficie è a divergenza nulla. Attorno a questo punto vi è strettamente un flusso netto pari a zero (tutte le linee che entrano escono)



flusso entrante

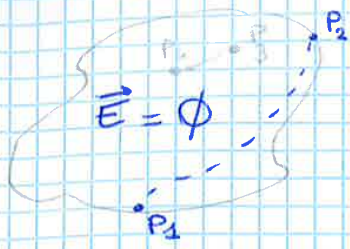
Ipotesi "misuratore di divergenza"

Nel caso del campo elettrostatico la divergenza di \mathbf{E} è diversa da zero ovunque è presente una densità di carica (e solo in tal caso). Si può immaginare uno strumento ideale per la misura della divergenza del campo \mathbf{E} ?

Lo strumento dovrebbe essere microscopico, e potrebbe essere formato da N cariche positive uguali tenute insieme da molle (sia un po' estese per via della repulsione tra le cariche). Da un punto dove la divergenza di \mathbf{E} è diversa da zero, escono radialmente le linee di forza del campo. Viene quindi applicata una forza elettrica addizionale che le estende ulteriormente le molle, o le comprime, a seconda del segno della carica locale che origina il campo.

In un campo elettrostatico lo strumento misurerebbe zero ovunque tranne che nei punti dove le cariche elettriche puntiformi sono collocate.

Elettrostatica di un corpo conduttore



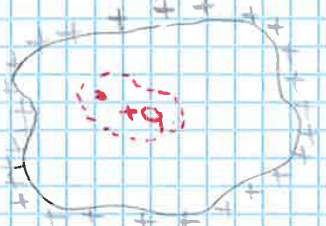
in un corpo conduttore:
 se campo elettrico ^{all'interno} non può essere
 perché siamo in elettrostatica
 dove le cariche non si muovono

lungo la linea tratteggiata ma può essere una qualsiasi

$$V(P_2) - V(P_1) = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

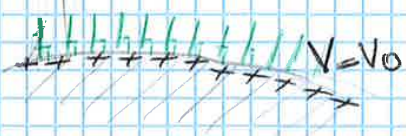
$V(P_2) = V(P_1) = V_0$ il potenziale elettrostatico è costante su tutto il conduttore

• Cariche su un conduttore

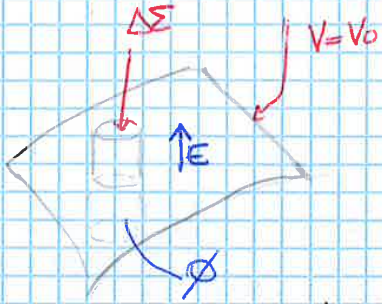


le cariche in eccesso stanno sulla superficie

ipotesi per assurdo: +q dentro la superficie
 Per Gauss dentro la superficie c'è un flusso $\neq 0$ uscente
 ma il flusso non può essere perché siamo in elettrostatica.
 le cariche in eccesso non sorgenti ma di un campo che esce fuori



direzione \perp verso uscente



"cilindro gaussiano" che taglia la superficie e altezza piccola

la superficie laterale non conta perché il prodotto scalare = 0
 conta solo Δz

$$d\Phi = E \cdot d\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0} dq = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma d\Sigma \rightarrow \text{densità superficiale di cariche}$$

$$\sigma = \frac{dq}{d\Sigma}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \hat{n}$$

si applica al campo elettrico nelle immediate vicinanze del conduttore

Esercitazione



1. $q = ?$

$q = \sigma \Sigma$

$q = \sigma \cdot 4\pi r^2$

$1,8 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot 0,2^2 = 7,54 \cdot 10^{-9} \text{ C} = 7,54 \text{ nC}$

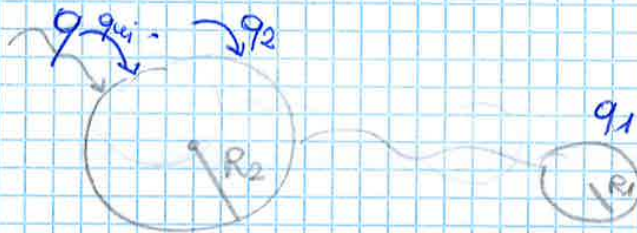
① Una sfera conduttrice di $r = 0,20 \text{ m}$ è carica positivamente con densità superficiale $\sigma = 1,5 \cdot 10^{-8} \text{ C/m}^2$

2. potenziale all'interno a distanza $r' = 10 \text{ cm}$ dal suo centro
 V sulla superficie \rightarrow raggio r

$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$

$V'(r' < r) = V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} =$ perché il V è costante = 339 V all'interno della sfera.

② Due sfere conduttrici di $r_1 = 5 \text{ cm}$ e $r_2 = 10 \text{ cm}$ sono isolate e poi vengono collegate da un filo conduttore. Una carica $q = 4 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ viene posta sulla sfera.



$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$

$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{R_1}$

$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{R_2}$

ma $V_1 = V_2$

$\left| \frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2} \right| \rightarrow \begin{cases} q_1 + q_2 = q \\ q_1 = \frac{R_1}{R_2} q_2 \end{cases}$
 $(1 + \frac{R_1}{R_2}) q_2 = q$

$\begin{cases} q_2 = \frac{q}{(1 + \frac{R_1}{R_2})} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} q \\ q_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} q \end{cases} \rightarrow \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^{-8}}{15 \cdot 10^{-2}} = 1,33 \cdot 10^{-8} \text{ C}$

$q = 4 \cdot 10^{-8} \text{ C}$
 $R_1 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
 $R_2 = 1 \cdot 10^{-1} \text{ m}$

$q_2 = 2,67 \cdot 10^{-8} \text{ C}$

$\sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi R_1^2}$

$\sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi R_2^2}$

$4,21 \cdot 10^{-7} \text{ C/m}^2$

$2,13 \cdot 10^{-7} \text{ C/m}^2$

$\frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2}$

$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{q_1}{4\pi R_1^2} \cdot \frac{4\pi R_2^2}{q_2} = \frac{q_1}{q_2} \cdot \frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{R_2}{R_1}$

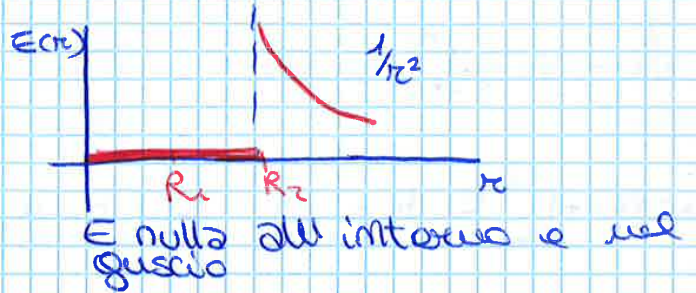
^{GAUSS}
 $E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q \leftarrow \text{costante in } \Sigma$

$E \cdot 4\pi r^2 = 0 \quad r < R_1$ $q=0$
perché la carica dentro non ci sono!

$E \cdot 4\pi r^2 = 0 \quad R_1 < r < R_2$

$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad r > R_2$

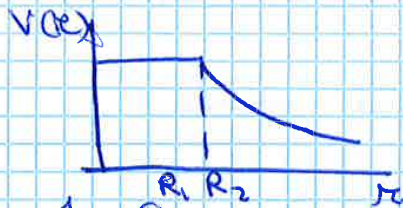
$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$



Calcolo del potenziale $r \geq R_2$

$V(r) - V(\infty) = -\int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_{\infty}^r E \cdot \hat{u}_r \cdot dr$
 $= -\int_{\infty}^r E dr = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_{\infty}^r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$

$V(R_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R_2}$



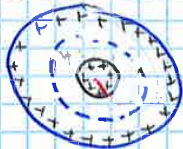
All'interno $V = V(R_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R_2}$

Più conduttori non cavi



Per l'interno $E=0$ ma all'esterno per induzione elettrostatica la carica sul secondo conduttore si distribuisce in modo da rendere nullo il campo prodotto dal conduttore più

Esempio

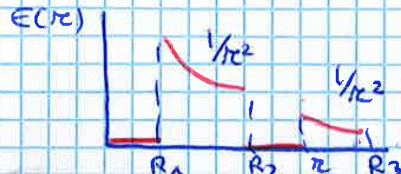


Guscio neutro conduttore contenente un conduttore sferico concentrico ulteriormente cavo (carica tot = +q)

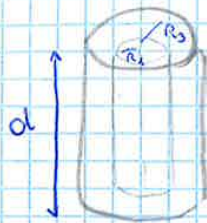
$\sigma_1 = \frac{q}{4\pi R_1^2}$ l'unico modo per far mantenere il campo del conduttore neutro nullo, la carica si deve distribuire

Prendo una sup. gaussiana di raggio $R_1 < r < R_2$

$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\text{carica cavi}}{\epsilon_0}$
 $\leftarrow E=0 \leftarrow$



$E=0$ all'interno del cond. carico e nel guscio conduttore



Cilindro conduttore cavo metallico
 inlegimito contenente un cilindro
 conduttore inlegimito coassiale unifor-
 mente carico (la cui densità lineare
 di carica è λ)

densità volumica di carica: $\rho = \frac{dq}{dV}$

densità superficiale di carica: $\sigma = \frac{dq}{dS}$

densità lineare di carica: $\lambda = \frac{dq}{dx}$

distribuzioni uniformi

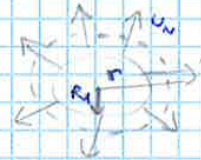
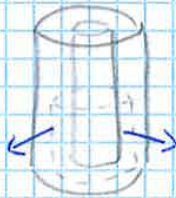
$$\rho = \frac{q}{V}$$

$$\sigma = \frac{q}{S}$$

$$\lambda = \frac{q}{l}$$

Applichiamo il teorema di Gauss

carica per unità
 di lunghezza λ



Prendiamo una superficie gaussiana cilindrica di
 altezza h e raggio r compreso tra R_1 e R_2
 se campo elettrico è radiale uscente dal conduttore
 interno
 Esiste un flusso del campo elettrico diverso attraverso
 la superficie laterale (le due basi non danno contributo
 al flusso)

$$\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \int_{S_{lat}} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \int_{S_{lat}} E \cdot dS = E \int_{S_{lat}} dS = E \cdot S_{lat} =$$

$$= E \cdot 2\pi r h$$

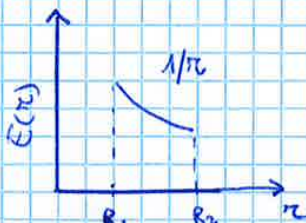
$$\Phi(E) = E \cdot 2\pi r h = \frac{1}{\epsilon_0} \lambda h$$

Come varia E con la distanza $\rightarrow E(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$

$$r \geq R_1$$

$$r \leq R_2$$

non può
 essere
 piccolo
 Non c'è
 divergenza
 a 0



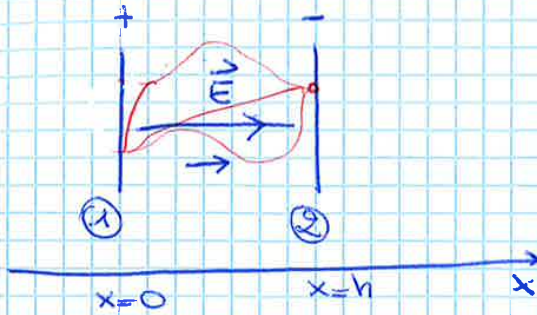
$$V_1 - V_2 = - \int_{R_2}^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} =$$

$$V_1 - V_2 = - \int_{R_2}^{R_1} \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} dr = - \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \lambda \int_{R_2}^{R_1} \frac{dr}{r}$$

$$d\vec{s} = dr \hat{u}_r$$

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \hat{u}_r$$

$$= - \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \lambda \ln r \Big|_{R_2}^{R_1} =$$



$$V_1 - V_2 = - \int_h^0 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$
 dove $\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \hat{u}_x$
 $d\vec{s} = dx \hat{u}_x$

$$V_1 - V_2 = - \int_h^0 \frac{\rho}{\epsilon_0} dx = - \frac{\rho}{\epsilon_0} \Big|_h^0 = \frac{\rho}{\epsilon_0} h = E h$$

$$E = \frac{V_1 - V_2}{h}$$

PIASTRA di sup. fimita Σ

$$q = \rho \Sigma \quad V_1 - V_2 = \frac{\rho}{\epsilon_0} h$$

$$\rho = q / \Sigma$$

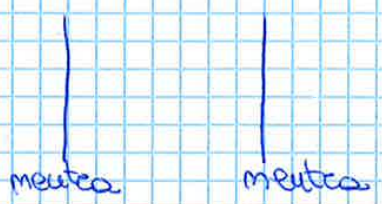
$$V_1 - V_2 = \frac{q h}{\epsilon_0 \Sigma}$$

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h}$$

↑
 DIFF. DI POTENZIALE $V_1 - V_2 \rightarrow V$ (si indica così perché > 0)

$$C = q / V$$

lavoro per caricare il condensatore



Porta le cariche



$$dW = V' dq' = \frac{q'}{C} dq'$$

$$W = \int_0^q dW = \int_0^q \frac{q'}{C} dq'$$

Operazione

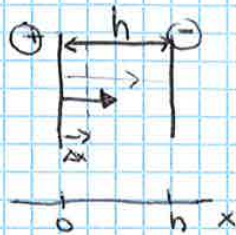
③ Condensatore di superfici Σ distanti $h \ll \sqrt{\Sigma}$
 Carica sulle armature $q = 1 \text{ mC}$ Fra le armature
 c'è il vuoto. Calcolare $\rightarrow E? F?$

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 \Sigma}$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \quad q = 1 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

$$\Sigma = 400 \text{ cm}^2 = 400 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$E = \frac{1}{8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{1 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-2}} = 2,82 \cdot 10^3 \text{ V/m}$$



Immagino che trasi
 in avanti per un Δx
 spostamento piccolo a piacere

$F \cdot \Delta x$ (lavoro fatto dal campo)

$$F \cdot \Delta x = -\Delta U_e$$

$$U_e = U_e^{(i)}$$

$$\Delta U_e = U_e^{(f)} - U_e^{(i)}$$

$$U_e^{(i)} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \Sigma h$$

$$U_e^{(f)} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \Sigma (h - \Delta x)$$

$$\Delta U_e = U_e^{(f)} - U_e^{(i)} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \Sigma [(h - \Delta x) - h] = -\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \Sigma \Delta x$$

$$F \cdot \Delta x = +\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \Sigma \Delta x \rightarrow F = \frac{1}{2} E^2 \epsilon_0 \Sigma$$

forza che esercita una piastra all'altra

~~$F = qE$~~ \rightarrow no perché non ho cariche puntiformi
 ma non è neanche tanto semplice
 $F = \epsilon_0 E^2 \Sigma$

$$F = \frac{1}{2} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot (2,82 \cdot 10^3)^2 \cdot 4 \cdot 10^{-2} = 1,42 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

④ Condensatore piano con armature a distanza $h = 5 \text{ mm}$
 e tensione $V = 100 \text{ V}$ $h' = 18 \text{ mm}$, $\Sigma = 200 \text{ cm}^2$

$$C = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h} \quad q = CV = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h} V$$

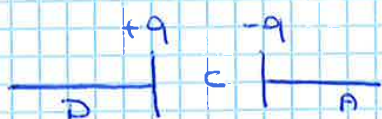
Se carica rimane la stessa, cambia capacità e V

$$C \rightarrow C' = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h'} \quad \left| \frac{C}{C'} = \frac{h'}{h} \right|$$

$$V' = \frac{q}{C'} = \frac{CV}{C'} = \frac{h'}{h} V \quad \left(\frac{18}{5} \text{ V}, V' \text{ aumenta} \rightarrow 3,6 \text{ V} \rightarrow V' = 360 \text{ V} \right)$$

$$V_D - V_A = (V_D - V_B) + (V_B - V_A)$$

$$\downarrow \sqrt{\quad} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) q$$



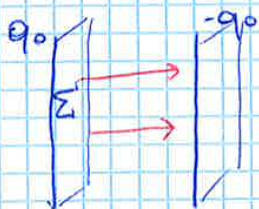
$$\frac{V}{q} = \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{C_2 + C_1}{C_1 C_2}$$

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Se ho condensatori in serie si sostituisce con un condensatore equivalente con $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$

Condensatore con materiale al centro
 → isolante (olio, aria, no metallo!)

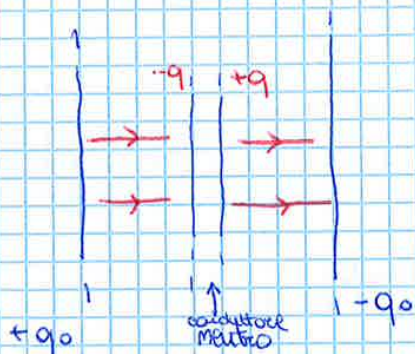


condensatore piano

$$D_0 = \frac{q_0}{\Sigma}$$

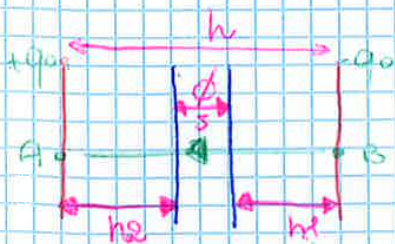
$$E_0 = \frac{1}{\epsilon_0} D_0 \quad V_0 = E_0 h \quad C_0 = \frac{q_0}{V_0}$$

• metto un conduttore che non tocca le pareti



avvengono un fenomeno di induzione elettrostatica completa

è come se avessi diviso il condensatore in 3 aree
 il campo E_0 non è cambiato
 (q sempre q_0 ; q_0 sempre q_0)
 cambia V !



$$V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_0 h_1 + \phi \cdot S + E_0 h_2$$

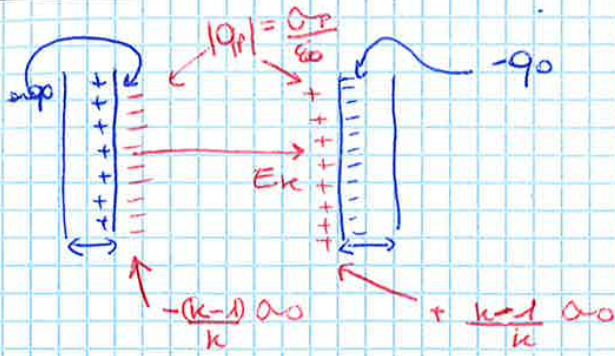
$$h = h_1 + h_2 + S$$

$$h_1 + h_2 = h - S$$

$$V = E_0 (h - S) \quad \text{dopo inserimento}$$

$$V_0 = E_0 h \quad \text{prima inserimento}$$

$$V < V_0$$



$$\sigma_p = \frac{k-1}{k} \sigma_0 \quad - \left(\sigma_0 - \frac{k-1}{k} \sigma_0 \right)$$

se dielettrico si polarizza

$$q_0 = \sigma_0 \cdot \Sigma$$

$$C_k = \frac{q_0}{V_k} = k \frac{q_0}{V_0} = k C_0$$

$$C_k > C_0$$

VUOTO $\rightarrow \epsilon_0$

DIELETTRICO $\rightarrow E = E_0 k \quad k = \epsilon / \epsilon_0$

Condensatore piano

$$C_k = k C_0 = k \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h} = \frac{\epsilon \Sigma}{h}$$

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h}$$

$$U_e = \frac{1}{2} C_0 V_0^2$$

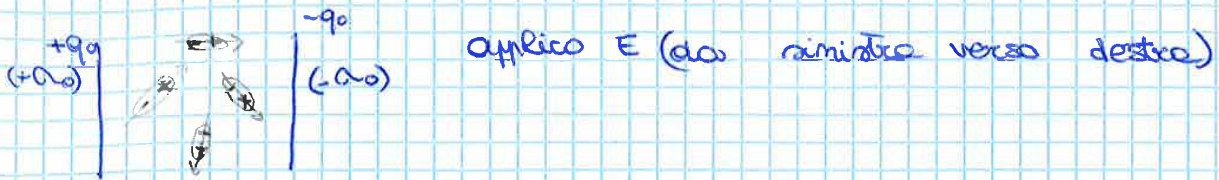
dielettrico $\rightarrow U_e = \frac{1}{2} C_k V_k^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon \Sigma}{h} E_k^2 h^2 = \frac{1}{2} \epsilon E_k^2 \Sigma h$

$$= \frac{1}{2} \epsilon E_k^2 \Sigma h$$

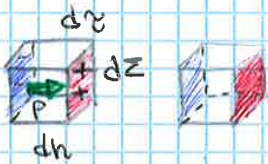
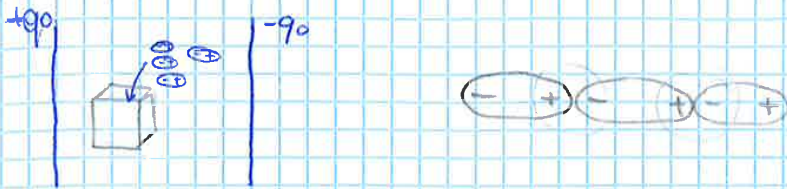
densità di energia:

$$U_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$$

dielettrico $\rightarrow U_e = \frac{1}{2} \epsilon E_k^2$



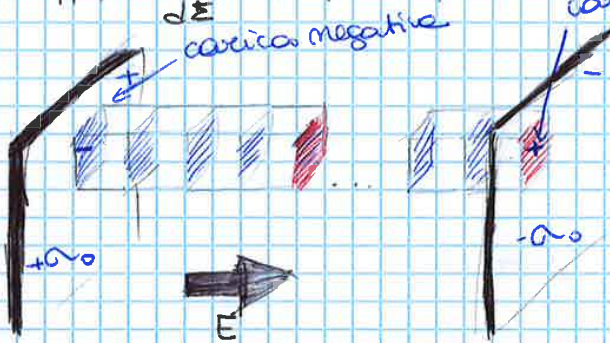
Immagino di prendere un cubetto piccolo con tanti dipoli



$$dq_p = P dx = P d\Sigma dz = dq_p dz$$

$$P \equiv \sigma_p$$

$$P = |\vec{P}| = \frac{dq_p}{d\Sigma} = \sigma_p$$



$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n} = P \cos \theta$$

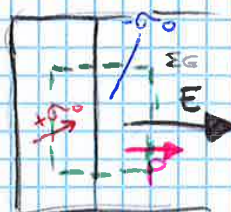
carica positiva a contatto con l'armatura
 gli effetti si cancellano
 σ_p all'interno si annulla
 ma alle estremità
 avremo $-\sigma_p$ e $+\sigma_p$

carica negativa a contatto con l'armatura



carica negativa sulla superficie del dielettrico a contatto con l'armatura

Armatura Dielettrica



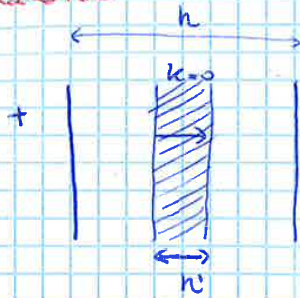
algebrico

$$\Phi(E) = \oint \vec{E} \cdot \hat{n} d\Sigma = \frac{Q_{lib} + q_p}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_0 \Sigma q}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_p \Sigma q}{\epsilon_0}$$

$$Q_{lib} = \sigma_0 \Sigma q$$

Esercitazione

1



Tra le armature di un condensatore piano carico su una superficie S e poste a distanza $h = 3 \text{ cm}$ e " ad esso, viene introdotta una lastra ($k=20$ $h' < h$) - ϵ_0 . Determinare h' tale che $C = 2C_0$

$$E_0 = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{q_0}{\epsilon_0 S}$$

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{h}$$

$$V = E_0 h$$

Diel. $E_k = \frac{E_0}{k}$

$$V' = E_0 (h - h') + \frac{E_0}{k} h' = \frac{q_0}{\epsilon_0} \left[h - h' + \frac{1}{k} h' \right] = \frac{q_0}{\epsilon_0} \left[h - \frac{k-1}{k} h' \right]$$

E_0 in regione di spessore $h - h'$

E_k " " h'

$$C' = \frac{q_0}{V'} = \frac{\epsilon_0 S}{\frac{q_0}{\epsilon_0} \left[h - \frac{k-1}{k} h' \right]} = \frac{\epsilon_0 S}{h - \frac{k-1}{k} h'}$$

$$C' = 2C_0$$

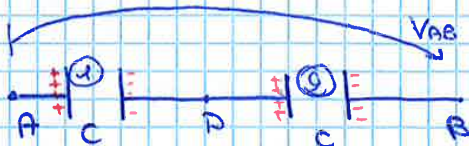
$$\frac{\epsilon_0 S}{h - \frac{k-1}{k} h'} = \frac{2 \epsilon_0 S}{h} \rightarrow \frac{h}{h - \frac{k-1}{k} h'} = 2$$

$$h = 2 \left[h - \frac{k-1}{k} h' \right]$$

$$h = \frac{2k-1}{k} h'$$

$$h' = \frac{1}{2} \frac{k}{k-1} h = \frac{1}{2} \frac{20}{9} \cdot 3 \cdot 10^{-2} = \frac{5}{3} \cdot 10^{-2} \text{ m} \approx 1,67 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

2



$$V_1 = \frac{V_{AB}}{2} = 225 \text{ V}$$

$$V_2 = \frac{V_{AB}}{2} = 225 \text{ V}$$

$$q_1 = C V_1 = 4,5 \cdot 10^{-7} \text{ C}$$

$$q_2 = C V_2 = 4,5 \cdot 10^{-7} \text{ C}$$

$$C_1 = C k \quad q_1 = q_2 \quad V_1' = V_2$$

$$V_1' = \frac{q}{C_1} = \frac{q_1}{C k} = \frac{V_1}{k} = \frac{225}{20} = 11,25 \text{ V}$$

a) Due condensatori $C = 2 \cdot 10^{-8} \text{ F}$
 $V_{\text{Tot}} = 450 \text{ V}$
 Quanto valgono V_1, V_2, q_1, q_2 ?

b) Armatura ① $\rightarrow k = 20$
 spessore uniforme
 occupa tutto lo spazio
 q_1, q_2, V_1, V_2 ?

c) lavoro fatto dalle forze del campo elettrico durante l'inserimento del dielettrico

d) q polarizzazione?

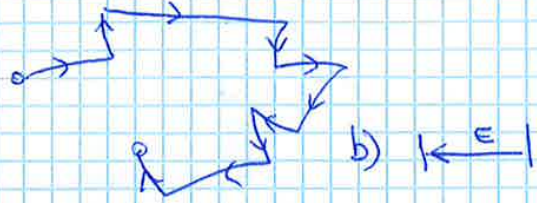
Corrente elettrica

Modello del moto di un singolo e^- in un conduttore

- a) in assenza di campo applicato
- b) con un campo E costante applicato



un singolo e^- modo caotico



Velocità di deriva

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{v}_i = \phi \text{ media aritmetica delle velocità di tutti gli } e^-$$



Applicando E comporta una forza F diretta antiparallela al campo

$$\vec{F} = -e\vec{E} \quad \vec{a} = -\frac{e}{m}\vec{E}$$

subito dopo un urto \vec{v}_i

$\tau_i \rightarrow$ "tempo di volo" tra un urto e il successivo

subito prima dell'urto successivo \vec{v}_{i+1}

$$\vec{v}_{i+1} = \vec{v}_i \quad \begin{cases} \vec{E} \neq \phi \\ \vec{v}_{i+1} = \vec{v}_i - \frac{e\vec{E}}{m}\tau_i \end{cases}$$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{v}_{i+1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{v}_i - \frac{e\vec{E}}{m} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tau_i$$

↓ valore medio delle velocità subito prima dell'urto successivo
↓ valore medio della velocità subito dopo l'urto (casuali=0)
↓ valore medio dei tempi di volo

$$\tau = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tau_i > \phi$$

velocità media subito prima dell'urto successivo non è zero!

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{v}_{i+1} = -\frac{e}{m}\vec{E}\tau \leftarrow \text{velocità di deriva}$$

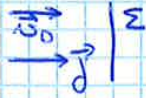
\rightarrow tutti gli e^- si sono spostati nel tempo τ con velocità

$$\vec{v}_D = -\frac{e\vec{E}}{m}\tau$$

l'effetto di una forza esterna non fa accelerare ma fa andare a una velocità costante

la corrente elettrica è legata alla velocità di deriva, si sovrappone una velocità uguale per tutti

Se $\vec{v}_0 \parallel \vec{j} \parallel \hat{u}_n$ ovunque, ossia se la sezione Σ \perp a \vec{j} e piana



$i = j \int_{\Sigma} d\Sigma = j \Sigma$ Sezione piana \perp alla corrente

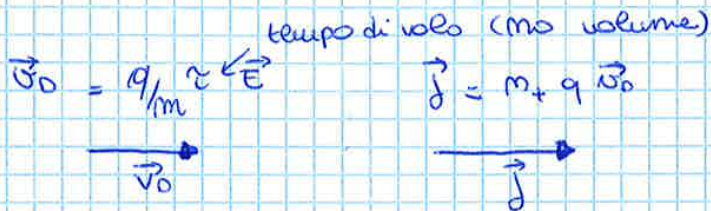
$j = \frac{i}{\Sigma}$ $\langle j \rangle = A/cm^2$

Se $q = -e$ e ho n elettroni per unita di volume

$\vec{j} = -n e \vec{v}_0$



$q > 0$



$-e < 0$



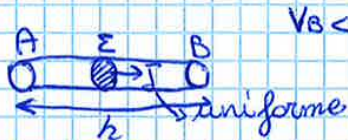
Legge di Ohm nella conduzione elettrica
 Il vettore densità \vec{j} di corrente ha la direzione e il verso del campo applicato e dipende anche da \vec{E}

$\vec{j} = \sigma \vec{E}$

conduttività elettrica

$\vec{E} = \frac{1}{\sigma} \vec{j} = \rho \vec{j}$ $\vec{j} = E/\rho$

$\rho = 1/\sigma$ resistività elettrica



$i = j \Sigma = E/\rho \Sigma$

$E = \frac{\rho i}{\Sigma}$

$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$

$V_B < V_A$ $V = V_A - V_B$

$V = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{x_A}^{x_B} E dx = E (x_B - x_A)$

$V = E h \Rightarrow V = \frac{\rho h}{\Sigma} i = R i$ $R = \text{resistenza elettrica}$

lunghezza del tratto da A a B $\rightarrow h$

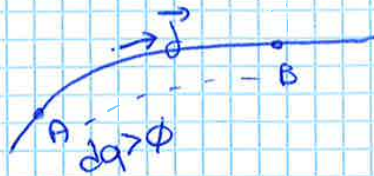
Modello classico della conduzione elettrica

$$\vec{v}_0 = -\frac{e\hbar}{m} \vec{E}$$

$$\vec{j} = -me(-e) \frac{\hbar}{m} \vec{E} = \frac{me^2\hbar}{m} \vec{E}$$

$$a = \frac{me^2\hbar}{m}$$

$$\vec{j} = a\vec{E}$$



Potenza ed effetto Joule

$$dW = -dUe = -(V_B - V_A)dq = (V_A - V_B)dq = Vdq$$

$$i = dq/dt$$

$$V = V_A - V_B > \phi$$

$$dW = V i dt$$

$$P = \frac{dW}{dt} = V i \quad (V_A, (j/n) \rightarrow W)$$

$$V = R i$$

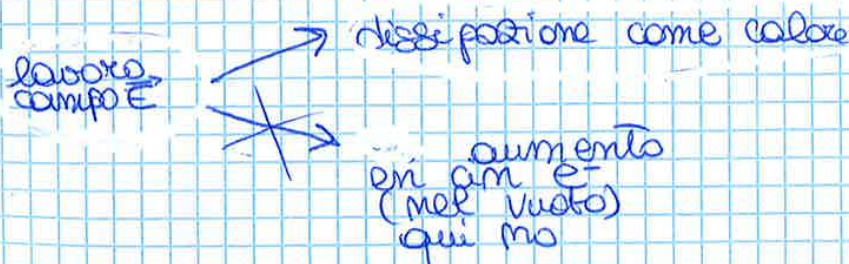
$$P = R i^2 = \frac{V^2}{R}$$

$$\text{Lavoro } W = \int_0^t P dt' = R \int_0^t i^2(E') dt'$$

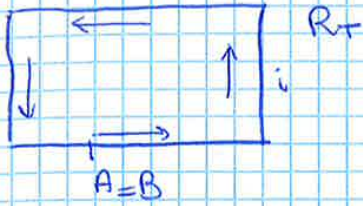
→ corrente stazionaria $i = \text{costante}$

$$W = R i^2 \int_0^t dt' = R i^2 t$$

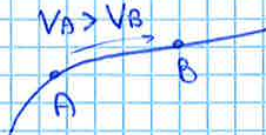
Effetto Joule → spreco di energia
ma viene usato anche nelle stufe



Forza elettromotrice



$$\oint \vec{E}_{el} \cdot d\vec{s} = \phi$$



$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E}_{el} \cdot d\vec{s}$$

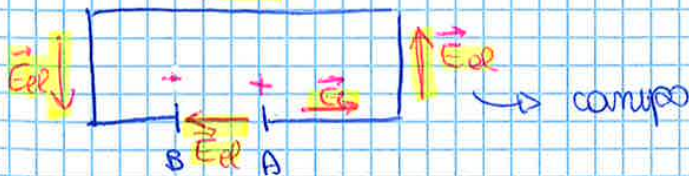
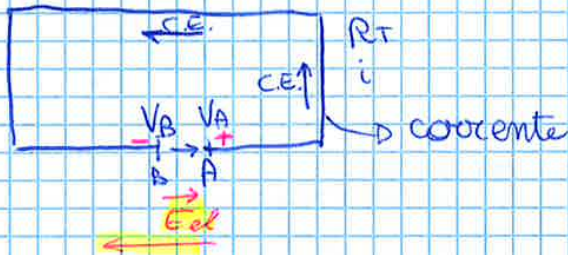
$$V = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}_{el} \cdot d\vec{s} = R_{AB} i$$

Ohm

$$\oint \vec{E}_{el} \cdot d\vec{s} = \phi$$

~~$$\oint \vec{E}_{el} \cdot d\vec{s} = R_T i$$~~

non
ciò
per
ho considerato
che può
corrente
grazie



Il campo è conservativo

$$\oint \vec{E}_{el} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{E}_{el} \cdot d\vec{s} + \int_B^A \vec{E}_{el} \cdot d\vec{s} = (V_A - V_B) + (V_B - V_A) = \phi$$

(esterno) (nel generatore)

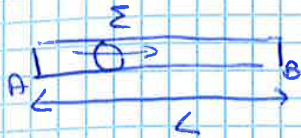
Il campo elettrostatico non lavora: il circuito grazie a qualcosa nel generatore (ma gravità)

A

B

↓ da guaina

- $d = 0,9 \text{ mm} \quad (3 \text{ mm})$
- $L = 65 \text{ m}$
- $j_{\text{max}} = 3,5 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$
- $\rho = 1,4 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$
- $d = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$



$$i_{\text{max}} = j_{\text{max}} \Sigma = j_{\text{max}} \cdot \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,5 \cdot 10^6 \cdot 3,14 \cdot 9 \cdot 10^{-6}}{4} = 13,30 \text{ A}$$

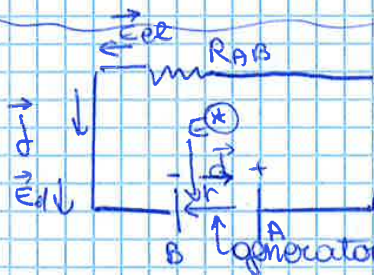
$$V = i_{\text{max}} R = i_{\text{max}} \rho \frac{L}{\Sigma} = \frac{13,30 \cdot 1,4 \cdot 10^{-8} \cdot 65}{3,14 \cdot \frac{9 \cdot 10^{-6}}{4}} = 3,19 \text{ V}$$

Il campo è uniforme all'interno $E = \rho j$

$$V = E \cdot L \rightarrow E = \frac{3,19}{65} = 4,9 \cdot 10^{-2} \text{ V/m}$$

$$P_{\text{max}} = i_{\text{max}} V = 13,30 \cdot 3,19 = 42,4 \text{ W}$$

$$W_{\text{max}} = \int_0^{15} P_{\text{max}}(t) dt = 42,4 \int_0^{15} dt = 42,4 \cdot 15 = 636 \text{ J}$$



totale resistenza del generatore
 $R_T = R_{AB} + r$
 $\oint \vec{E}_{el} \cdot d\vec{s} = \phi$ ~~$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = R_T i$~~

$$\vec{E} = \vec{E}_{el} + \vec{E}^*$$

↑ campo elettromotore

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint \vec{E}_{el} \cdot d\vec{s} + \oint \vec{E}^* \cdot d\vec{s} = R_T i$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_B^A \vec{E}^* \cdot d\vec{s} = R_T i$$

"forza elettromotrice" $\rightarrow \mathcal{E}$

$$\mathcal{E} = R_T i$$

$$\mathcal{E} = \int_B^A \vec{E}^* \cdot d\vec{s} = - \int_B^A \vec{E}_{el} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{E}_{el} \cdot d\vec{s} = V_A - V_B$$

(generatore) (circuito esterno)

$$V_A - V_B = R_{AB} i$$

→ troverò $q = q(t)$ sapendo che $q = \phi$ per $t = \phi$
 e so anche che dopo un tempo lungo $q_0 = CE$

$$R \frac{dq}{dt} = E - q/C$$

$$\frac{dq}{E - q/C} = \frac{dt}{R} \quad \text{moltiplico per } -1/C$$

$$\frac{dq}{q - EC} = -\frac{dt}{RC}$$

$$\int \frac{dq}{q - EC} = -\frac{1}{RC} \int dt + A \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{costante} \\ \text{arbitraria} \end{array}$$

$$\log(q - CE) = -\frac{t}{RC} + A$$

$$q - CE = e^{-t/RC} \cdot (e^A) = B \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{costante} \\ \text{arbitraria} \end{array}$$

$$q - CE = B e^{-t/RC}$$

$$q = CE + B e^{-t/RC}$$

condizione iniziale $t = \phi$

$$\phi = CE + B e^{\phi} = 1$$

$$B = -CE$$

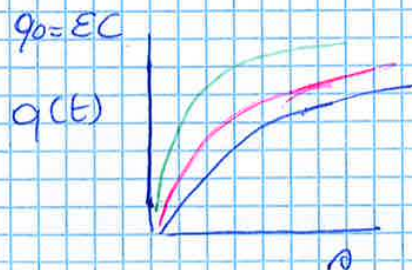
• $q = CE (1 - e^{-t/RC})$ per $t = 0 \rightarrow q = 0$
 per $t \rightarrow \infty \rightarrow q = CE$

• $V_c(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{E}{C} (1 - e^{-t/RC})$

• $i = \frac{dq}{dt} = -CE \left(-\frac{1}{RC}\right) e^{-t/RC} = \frac{E}{R} e^{-t/RC}$

• $V_R = R i = E e^{-t/RC}$

τ "costante di tempo" = RC

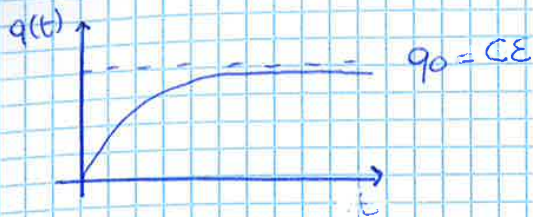


è sempre + lento al crescere di t

$$t \ll RC$$

$$t \ll \tau$$

Ver



$$q = CE (1 - e^{-t/\tau}) \quad \tau = RC$$

Potenza necessaria

$$P = \mathcal{E}i = \mathcal{E} \frac{dq}{dt}$$

corrente elettrica transitoria $i = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau}$

$$dW = P dt = \mathcal{E} dq$$

$$W = \int dW = \mathcal{E} \int_0^{q_0} dq = \mathcal{E} q_0$$

$$W = \mathcal{E} q_0 = CE^2 \quad (\text{lavoro speso})$$

energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore

$$U = \frac{1}{2} CE^2 \quad \text{è una differenza di potenziale}$$

l'altra metà si è dissipata; per caricare il condensatore

Potenza dissipata:

$$P = Ri^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-2t/\tau}$$

$$\text{lavoro dissipato: } W_{\text{diss}} = \int_0^{\infty} P dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-2t/\tau} dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \left(-\frac{\tau}{2} \right) e^{-2t/\tau} \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{\mathcal{E}^2}{R} \frac{R}{2} = \frac{\mathcal{E}^2}{2} RC = \frac{\mathcal{E}^2 C}{2}$$

Magnetismo

Esistono forze di natura non elettrica molto intense

magnete permanentemente neutro ma crea un campo di forza

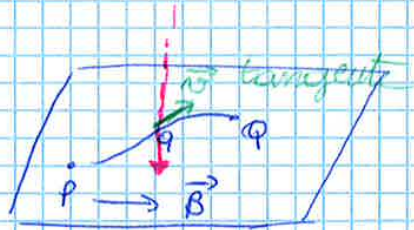
Solo alcuni corpi sentono questa forza

Poli magnetici \rightarrow poli positivi e poli negativi

Linee di forza di campo elettrico \rightarrow linee di forza di campo magnetico

Linee di flusso di campo elettrico (dipolo) si riuniscono a questi

Un dipolo elettrico si può rompere in due poli magnetici. Oppure sempre coppie di poli cioè esistono solo dipoli magnetici



$$d\vec{s} = \vec{v} dt$$

$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$ perché \vec{F} ed $d\vec{s}$ sempre tra loro \perp

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

quindi una forza magnetica non compie lavoro mai!

$$W = 0$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = 0$$

non cambia mai l'energia cinetica su qualsiasi il modulo della velocità

$$|v_f| = |v_i|$$

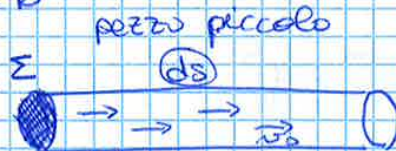
accelerazione in 3D: cambio o modulo o direzione o verso

Qui c'è accelerazione: quindi non cambia modulo ma può cambiare verso

Forza magnetica su un conduttore percorso da corrente

1 e⁻ che si muove con velocità di deriva v_0 filo neutro percorso da corrente
forza su e⁻:

$$\vec{F}_i = -e \vec{v}_0 \times \vec{B}$$



(carica negativa, corrente verso opposto)

$$\vec{j} = -ne \vec{v}_0$$

Nel tratto di filo, quanti e⁻ ci sono?

Area per il numero $-n \Sigma ds$

la forza $d\vec{F} = n \Sigma ds \vec{F}_i = -n e \Sigma ds \vec{v}_0 \times \vec{B}$

$$d\vec{F} = \vec{j} \times \vec{B} \Sigma ds$$



$$\vec{j} = j \hat{u}_r$$

$$da = ds \hat{u}_r$$

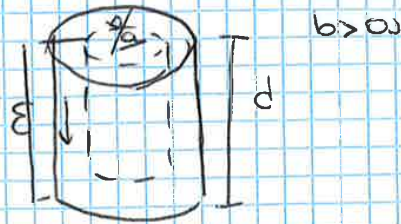
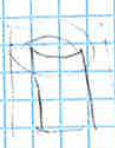
$$\Sigma \vec{j} = - \Sigma \int \hat{u}_r$$

$$d\vec{F} = i ds \hat{u}_r \times \vec{B} = i d\vec{s} \times \vec{B}$$

2a legge elementare di Laplace

esercizi

1 conduttore cilindrico cavo



$d = 2 \text{ cm}$
 $a = 2 \text{ mm}$
 $b = 5 \text{ mm}$
 $\rho = 2 \text{ } \Omega \cdot \text{m}$
 $\mathcal{E} = 20 \text{ V}$

$$\Sigma = \pi b^2 - \pi a^2$$

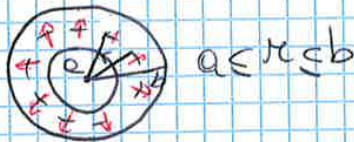
$$R = \frac{\rho d}{\Sigma} = \frac{\rho d}{\pi(b^2 - a^2)} = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{3,14(25 - 4) \cdot 10^{-3}} = 606 \text{ } \Omega$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E} \pi (b^2 - a^2)}{\rho d} = \frac{20 \text{ V}}{606 \text{ } \Omega} = 0,033 \text{ A}$$

$$P = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \frac{\mathcal{E}^2 \pi (b^2 - a^2)}{\rho d} = \frac{400}{606} = 0,67 \text{ W}$$

$$i = \int \vec{j} \cdot \hat{n} d\Sigma = j \Sigma$$

$$j = \frac{i}{\Sigma} = \frac{\mathcal{E} \pi (b^2 - a^2)}{\rho d \pi (b^2 - a^2)} = \frac{\mathcal{E}}{\rho d} = \frac{20}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 500 \text{ A/m}^2$$



La sezione è la superficie laterale del cilindro

$$\Sigma(r) = 2\pi r d$$

No: $R = \frac{\rho(b-a)}{\Sigma(r)}$ deve valere localmente

$R = \frac{\rho dr}{\Sigma(r)}$ spostamento infinitesimo radiale

$$dR = \frac{\rho dr}{\Sigma(r)} \rightarrow R = \int dR = \int_a^b \frac{\rho dr}{2\pi r d} = \frac{\rho}{2\pi d} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi d} (\log b - \log a)$$

$$= \frac{\rho}{2\pi d} \log \frac{b}{a} = \frac{2}{2 \cdot 3,14 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} \ln \frac{5}{2} = 14,5 \text{ } \Omega$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{20}{14,5} = 1,37 \text{ A}$$

$$P = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = 27,4 \text{ W}$$

$$j = \frac{i}{\Sigma}$$

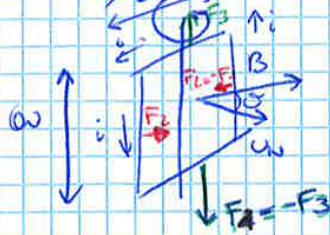
$$j(a) = \frac{i}{\Sigma(a)} = \frac{i}{2\pi a d} = 5,45 \cdot 10^3 \text{ A/m}^2$$

Momenti meccanici

Momento meccanico agente su una spira rettangolare percorsa da corrente stazionaria, per effetto di un campo B uniforme

$$F_2 = F_1 = i a B \sin \theta$$

$$F_{41} = F_3 = i b B \sin \theta$$



e sopra e sotto verso opposto

$$\vec{F} = i \vec{l} \times \vec{B}$$

$$F = i b B \sin \theta$$

dall'alto vedo



$$F_1 = i a B$$

$$M = F_1 b \sin \theta = i a b B \sin \theta$$

$$M_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \quad M_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

$$\vec{M} = -\vec{r}_1 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_2$$

$$\vec{r}_2 + (-\vec{r}_1) = 2\vec{r}_2$$

$$\vec{M} = 2 \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = 2 r_2 F_2 \sin \theta \hat{u}_z$$

$$|\vec{M}| = 2 r_2 F_2 \sin \theta = b F_1 \sin \theta$$

$$\Sigma = ab$$

$$\vec{m} = i \Sigma \hat{u}_N$$



i circolo in senso antiorario

momento meccanico agente sulla spira:

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

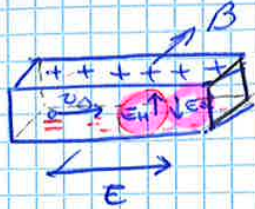
$$M = m B \sin \theta = i \Sigma B \sin \theta$$

$\underbrace{\quad}_{ab}$

\vec{m} → momento di dipolo magnetico
lo si chiama così per analogia

nel caso elettrico: momento di dipolo elettrico $\vec{P} = p \vec{E}$

Coppia di forze: portare all'equilibrio portare $\vec{u}_N \parallel \vec{B}$
 $\sin \theta = 0$
 $\theta = \pi$ o 0



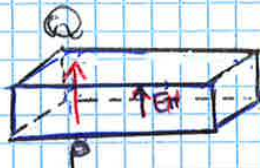
$q > 0$

più alta caricata in
alto positiva
polarizzazione
dal campo magnetico
in basso negativa

$$\vec{E}_H = \frac{F_H}{q} = \vec{v}_0 \times \vec{B}$$

Allo equilibrio $\vec{E}_H + \vec{E}_{el} = 0$

differenza di potenziale di Hall



$$E_H = \int_P^Q \vec{E}_H \cdot d\vec{s} = E_H \int_P^Q ds = E_H b$$



$q < 0$

e- migrano
in direzione
opposta al campo
ma qui sono
cariche negative
nasce E_H verso
l'alto

$$E_H = \int_P^Q \vec{E}_H \cdot d\vec{s} = -E_H \int_P^Q ds = -E_H b$$

$$E_H = \vec{v}_0 \times \vec{B} = v_0 B = \frac{j}{mq} B$$

$$E_H = E_H b = \frac{j B b}{mq} = \frac{j B}{mq \omega}$$

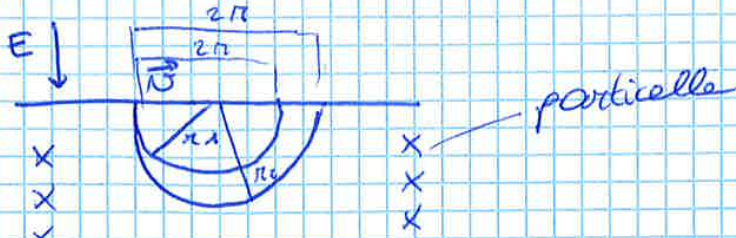
Dal segno di E_H si possono determinare i
segni dei portatori di carica.
Nota: i moduli di E_H e B si può ricavare la
densità di carica m e dei portatori.

Sonda di Hall misura il campo magnetico

$$\alpha = \frac{E_H}{B} = \frac{j}{m e c \omega}$$

$$\frac{1}{2} m v \frac{q^2 B^2}{m^2} r^2 = qV$$

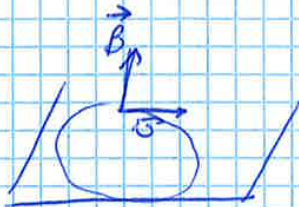
$$r^2 = \frac{2V m}{q B^2} \rightarrow r = + \sqrt{\frac{2V m}{q B^2}}$$



si determina

$$\frac{m}{q} = \frac{B^2 r^2}{2V}$$

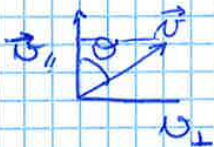
il rapporto $\frac{m}{q}$ per ogni ione risulta quindi determinato



θ generico

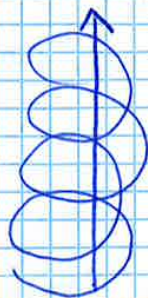
• B e v non ⊥

θ ≠ 90°



$$\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$$

con v_\perp moto circolare uniforme lungo B, circonferenze
 con v_\parallel moto rettilineo uniforme si muove nella direzione
 del campo (moto traslatorio o v costante)
 non è modificata

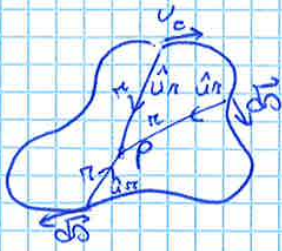


moto elicoidale

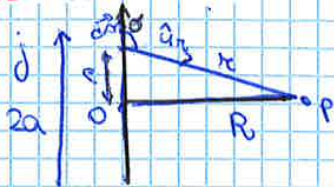
$$r = \frac{m v_\perp}{q B} = \frac{m v \sin \theta}{q B}$$

passo

$$p = \frac{2\pi m v \cos \theta}{q B} = v_p T$$



Filo rettilineo Legge di Biot-Savart



$$\int \mathbf{H} d\mathbf{s} = i$$

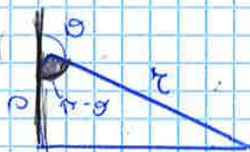
$$2\pi r H = i \quad \text{Biot-Savart!}$$

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\mathbf{s} \times \hat{u}_r}{r^2}$$

$$H = \frac{i}{2\pi r}$$

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds \sin\theta}{r^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$



$$R = r \sin(\pi - \theta) = r \sin\theta$$

$$r = \frac{R}{\sin\theta}$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2\theta}{R^2}$$

$$r = \frac{R}{\tan(\pi - \theta)} = -\frac{R}{\tan\theta}$$

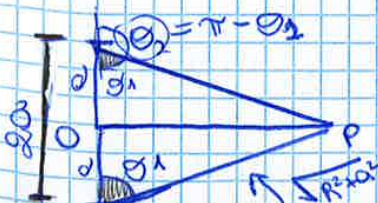
$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{R}{\tan\theta} \right)$$

$$\frac{ds}{d\theta} = -R \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\tan\theta} \right) = \frac{R}{\sin^2\theta}$$

$$ds = \frac{R d\theta}{\sin^2\theta}$$

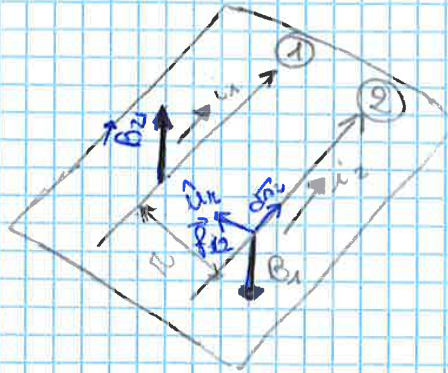
$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{R}{\sin^2\theta} d\theta \sin\theta \frac{1/\sin^2\theta}{R}$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\sin\theta}{R} d\theta = -\frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d(\cos\theta)}{R}$$



$$B = -\frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{1}{R} \int_{\cos\theta_2}^{\cos\theta_1} d(\cos\theta)$$

$$B = -\frac{\mu_0 i}{4\pi R} [\cos\theta_2 - \cos\theta_1]$$



$$\begin{aligned} d\vec{F}_{12} &= i_2 d\vec{s}_2 \times \vec{B}_1 & d\vec{s}_2 &= ds_2 \hat{u}_2 \\ &= i_2 ds_2 \hat{u}_2 \times \vec{B}_1 \end{aligned}$$

ha senso particolare di una forza per unità di lunghezza

$$\vec{f}_{12} = \frac{d\vec{F}_{12}}{ds_2} = i_2 \hat{u}_2 \times \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi r} \hat{u}_r$$

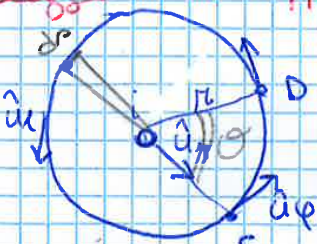
$$\vec{f}_{21} = -\vec{f}_{12}$$

$f_{21} = f_{12}$ in modulo

$$\vec{f}_{21} = i_1 \hat{u}_1 \times \vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi r} \hat{u}_r$$

se le correnti sono concordi o verso il basso o verso l'alto si attraggono se sono discordi si respingono

Legge di Ampère



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{u}_\varphi$$

$$d\vec{s} = ds \hat{u}_\varphi$$

$$\vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} ds$$

$$ds = r d\theta$$

$ds = r d\theta$ spostamento è una corda non un arco arco e corda coincidono nell'infinitesimo

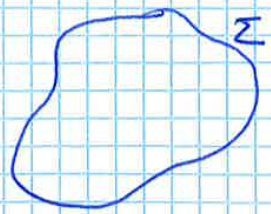
arco di circonferenza

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \int_0^{2\pi} r d\theta$$

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \Theta$$

nel risultato non c'è traccia che indica sia fatto su un arco

omologia con T. Gauss

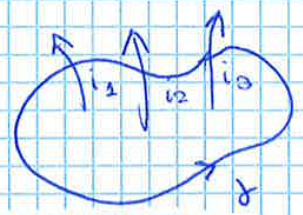


$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{u}_N d\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0} q$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{u}_N d\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0} q$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \phi$ circuitazione nulla, campo conservativo



$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i$$

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

in generale il campo è rotazionale

B non è irrotazionale, non è conservativo

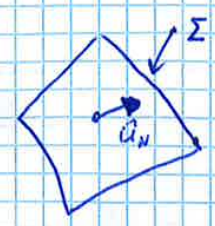
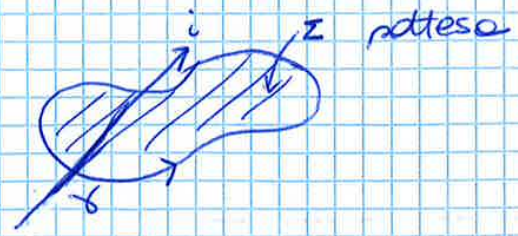
Formule locali della legge di Ampère

Il flusso di B attraverso una qualsiasi superficie chiusa deve essere = 0

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{u}_N d\Sigma = \phi$$

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i$$

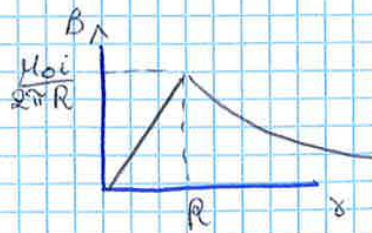
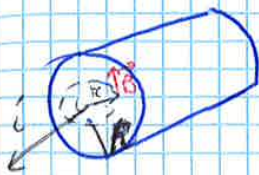
i ^{metta} concatenato



$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma} (\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{u}_N d\Sigma$$

$$i = \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \hat{u}_N d\Sigma$$

campo magnetico all'interno e all'esterno di un cavo cilindrico da corrente stazionaria



$$r < R$$

$$R > R$$

Teorema di Ampère

$$r < R$$

$$\oint_{\text{circ.}} \vec{B} \cdot d\vec{s} = I_{\text{enc}}(\pi) = \mu_0 \int_{\Sigma(\pi)} \vec{j} \cdot \hat{n} d\Sigma$$

delimitata da

$$B \oint ds = 2\pi r B = \mu_0 j \int_{\Sigma} d\Sigma$$

$$2\pi r B = \mu_0 \pi r^2 j$$

$$B = \frac{\mu_0 j r}{2}$$

$$j = \frac{I}{\pi R^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

$$r = R$$

$$B(r=R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

$$r > R$$

$$\oint_{\text{circ.}} \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \oint ds = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Proprietà magnetiche della materia. Permeabilità e suscettività magnetica.
 Introduco un nuovo vettore $\vec{H} = \vec{B}_0 / \mu_0 = ni$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} = ni$$

$$\langle H \rangle = \frac{A}{m}$$

Introduco un materiale omogeneo nel solenoide un cilindro pieno che lo riempie esattamente (come un cilindro con dielettrico nelle armature) stesso un altro valore di B

$$B > B_0$$

Il rapporto $\frac{B}{B_0} > 1$ lo chiamo k_m , numero puro

$k_m = \frac{B}{B_0}$ permeabilità magnetica relativa

$\vec{B} \parallel \vec{B}_0$ (stesse linee)

$$\vec{B} = k_m \vec{B}_0 \quad (B_0 = \mu_0 H) \rightarrow \vec{B} = \underbrace{k_m \mu_0}_{\mu} \vec{H}$$

$\mu =$ permeabilità magnetica assoluta

$$k_m = \frac{\mu}{\mu_0}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu ni$$

$$\oint \vec{B}_0 \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \quad (\text{vuoto})$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu I \quad (\text{in un mezzo omogeneo})$$

$$\vec{B} - \vec{B}_0 = (k_m - 1) \vec{B}_0 = \chi_m \mu_0 \vec{H} \quad k_m - 1 = \text{suscettività magnetica } \chi_m$$

Introduciamo un vettore ausiliario \vec{H}

$$\vec{H} = \chi_m \vec{H} = (k_m - 1) \vec{H}$$

esiste una relazione che lega \vec{H} , \vec{H} , \vec{B}

$$\vec{B} - \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$$

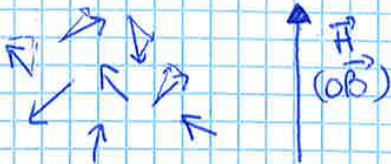
$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{H} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{H})$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{H})$$

susceettività magnetica $\rightarrow \chi_m$

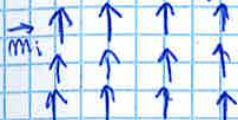
$$\vec{H} = \chi_m \vec{H}^0$$

sono mirate ad allineare un polo gli e
 del campo H
 Nel vuoto \vec{B} e \vec{H} sono pressoché uguali:

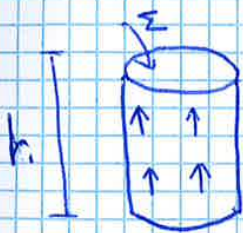


se ci fosse un campo molto grande (solo nei libri!)
 si allineano

Nei ferromagnetici sono già allineati



$$\vec{M} = \frac{N}{\tau} \langle \vec{m} \rangle = m \langle \vec{m} \rangle = m \sum \vec{m}_i$$



spine elementare \rightarrow momento magnetico
 all'interno le correnti
 elementari si annullano per
 compensazione ma non alla
 superficie, scorge una corrente

$$\tau = \sum h$$

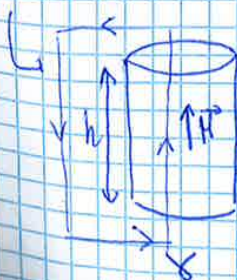
$$\vec{M} = \vec{H} \tau = M \sum h \hat{u}_z$$

il momento magnetico di questo oggetto è

$$\vec{M} = i_m \sum \hat{u}_z$$

$$M = \frac{i_m}{h}$$

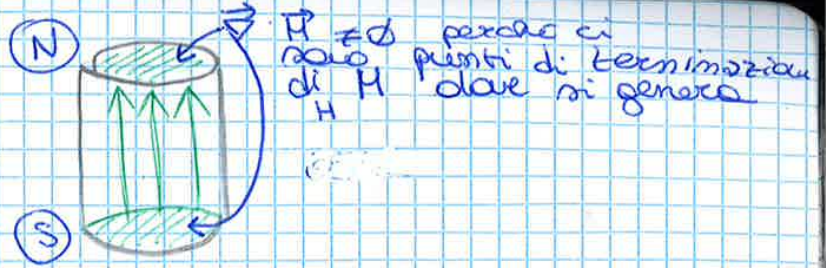
$$i_m = Mh$$



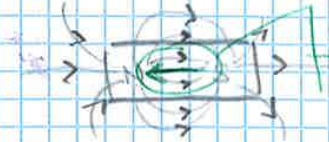
all'interno
 se tutto
 non è H
 M.h
 resto zero perché

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = Mh = i_m$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= \phi \\ \vec{B} &= \mu_0 (\vec{H} + \vec{H}') \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{H} + \vec{H}') &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= - \vec{\nabla} \cdot \vec{H}' \end{aligned}$$



superfici terminali



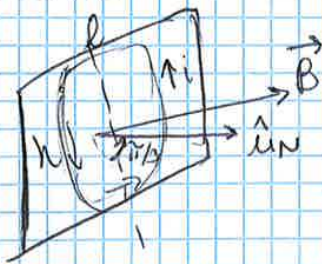
Poli di H
 andamento del campo H
 fuori dai magneti H e B
 uguali (a parte per μ_0)
 N regione sorgente
 S regione di terminazione

chiudere il cerchio → eliminare i poli N e S
 → non ci sono superfici terminali, solenoidale ideale

Oggetto magnetizzato: attico dentro di se' della linee di flusso

Effetto di schermo magnetico
 permeabilità magnetica assoluta, $\mu \gg \mu_0$

esercizio



bobina con + spine

$$i_{tot} = 25i = 75 \text{ A}$$

$$\vec{m} = i_{tot} \Sigma \hat{u}_n$$

momento meccanico → $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} = m B \sin(\theta)$

$$m = 25i \cdot l h = 75 \cdot 8 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-2} = 75 \cdot 4 \cdot 10^{-3}$$

$$M = M_{antagonista} = 0,25 \text{ Nm}$$

$$m B \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$B = \frac{0,25 \cdot 2}{75 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{0,50}{0,3 \cdot \frac{1}{2}} = 0,96 \text{ T}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$M = m B \frac{1}{2} = M_{antagonista}$$

$$M_{antag} = \frac{1}{3} \cdot 0,3 \cdot 0,96 = 0,14 \text{ Nm}$$

Riassunto

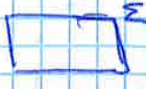
campi elettrici magnetici generati da cariche ferme stazionarie

I eq. Maxwell

→ coincide con T. Gauss

$$\Phi(E) = \int_{chiuso} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \frac{q}{\epsilon_0}$$

chiuso → nonolare $\hat{u}_n \perp$ al piano importante l'angolo



Sup. chiusa racchiude un volume

la versione differenziale (considero T. divergenza)

$$\int \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \int \nabla \cdot \vec{E} dV$$

divergenza

aggiungo dimensionale

$$\Phi(E) = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV$$

→ densità di cariche

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

vale sempre il caso statico perché non una distribuzione di cariche

II eq. Maxwell

1 eq su proprietà 1 su Teorema Qui su proprietà

Proprietà: B statico e solenoidale (non monopolo magnetico)



$$\Phi(\vec{B}) = \int_{chiuso} \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = 0$$

la versione differenziale (T. divergenza)

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

il campo è solenoidale

III eq. Maxwell

proprietà del campo elettrostatico (è conservativo)

circuitalità $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ versione integrale

la circuitalità è anche definita come forze elettromotriche

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

versione differenziale (T. Stokes, rotore)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{chiuso} \nabla \times \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = 0$$

rotore

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

\vec{E} è irrotazionale

→ sempre zero

IV eq. Maxwell

→ T. Ampere

$$\Phi(\vec{B}) = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i$$

integrale

in forma differenziale (Stokes)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i = \mu_0 \int \vec{j} \cdot \hat{u}_n d\Sigma \rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int \nabla \times \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\Sigma$$

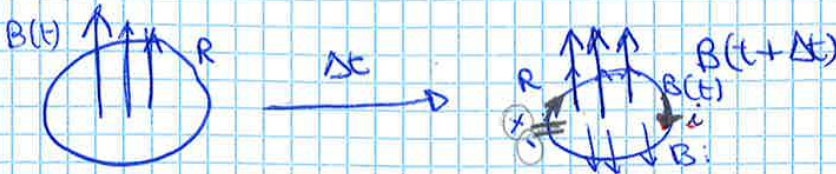
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Stesse di Lenz

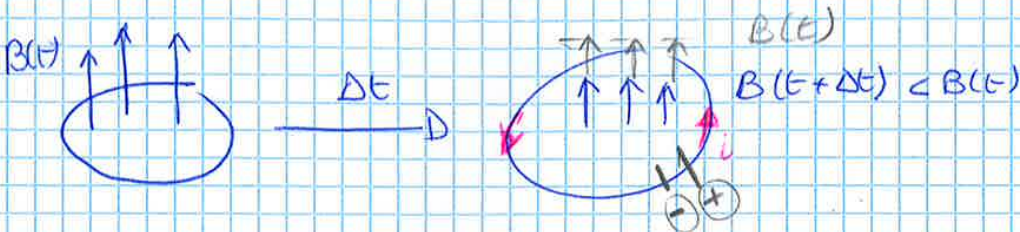
In che verso circolano le correnti?

genero un'induzione $i = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi(B)}{dt}$

Lenz parliamo del meno: il verso della corrente indotta è tale da opporsi alle variazioni che l'ha generata



se $B(t+\Delta t) > B(t) \rightarrow \Phi(t) > 0$



Esercizi - 4

1° Laplace

$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$



2° Biot Savart (filo ∞)

$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{u}_\phi$



3° Laplace

$d\vec{F} = i d\vec{s} \times \vec{B}$



$q = 2e$
 $e = 1.6 \cdot 10^{-19} C$
 $m = 6.7 \cdot 10^{-27} kg$
 $B = 1.75 T$
 $v = \frac{1}{30} c = \frac{1}{30} 3 \cdot 10^8 = 10^7 m/s$
 $r?$

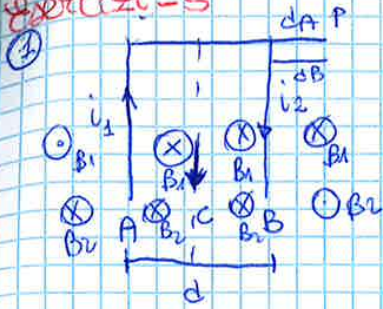
$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

$|\vec{F}| = qvB \sin\theta \rightarrow \sin\theta = 1$

$|\vec{F}| = qvB$

$|\vec{F}| = qvB = \frac{mv^2}{r} \rightarrow r = \frac{mv}{qB} = \frac{6.7 \cdot 10^{-27} \cdot 10^7}{2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 1.75} = (\sim 0.1 m) \sim 0.12 m$

ESERCIZI - 5



$d = 18 \text{ cm}$
 $i_1 = 20 \text{ A}$
 $i_2 = 30 \text{ A}$

$d_A = 30 \text{ cm}$
 $d_B = 12 \text{ cm}$

a) $B = ?$
 in $d/2$ e in P

a) B in $C = B_1 + B_2$

$$B = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi(\frac{d}{2})} + \frac{\mu_0 i_2}{2\pi(\frac{d}{2})} = \frac{\mu_0 (i_1 + i_2)}{\pi d} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 50}{\pi \cdot 18 \cdot 10^{-2}} = 1,11 \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

b) $B = B_2 - B_1$

$$= \frac{\mu_0 i_2}{2\pi d_B} - \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d_A} = 3,67 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

c) $i_3 = 7 \text{ A}$

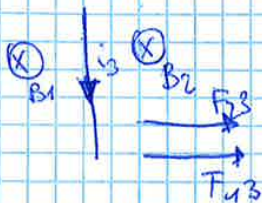


$$F_{12} = F_{21} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi d}$$

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$$

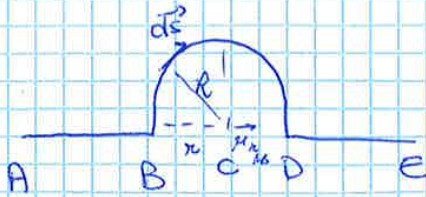
$$\frac{\mu_0 i_1 i_3}{2\pi \frac{d}{2}} + \frac{\mu_0 i_2 i_3}{2\pi \frac{d}{2}} = \frac{\mu_0 i_3 (i_1 + i_2)}{\pi d} = 7,78 \cdot 10^{-4} \text{ N/m}$$

caso $x > 0$



④ $i = 12 \text{ A}$

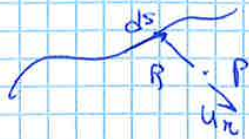
$AB = DE = 1,6 \text{ m}$
 $R = 0,8 \text{ m}$



modulo, direz, vers di \vec{B} nel punto C

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^2}$$

Non vale per filo curvo



$$|\vec{dB}|_{AB} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds \sin \theta}{R^2} = 0$$

$\theta = 0$ non c'è campo fuori dal filo

$$|\vec{dB}|_{DE} = 0$$

$$(\vec{dB})_{BD} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds \times \hat{u}_R}{R^2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin \theta = 1 \quad = \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2} ds$$

$$\vec{B}_C = \int d\vec{B}_{BD}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2} \int_0^{\pi R} ds = \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2} \pi R = \frac{\mu_0 i}{4R} = 4,71 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$



$$ds = R d\theta$$

$$\frac{ds}{R} = \tan \theta \approx \sin \theta$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2} \int_0^{\pi} R d\theta$$

$$B(t) = B_0 \frac{t}{t_0}$$

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -N \Sigma \frac{dB}{dt} = -N \Sigma \frac{B_0}{t_0} = -8 \cdot 10^{-2} \text{ V}$$

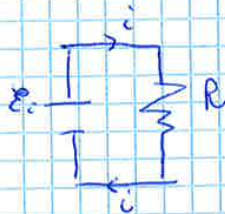
$\frac{100 \cdot 10^4}{-1000 \cdot 0,08}$

$$i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -1,6 \cdot 10^2 \text{ A}$$

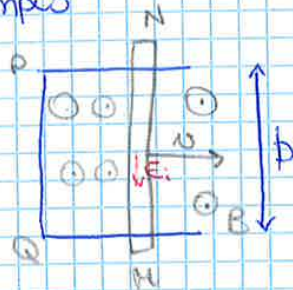
$$P = \mathcal{E}_i \cdot i \rightarrow W = P \cdot t_0 = 1,28 \cdot 10^2 \text{ J}$$

$1,28 \cdot 10^2 \cdot 10$

Circuito equivalente



esempio



B uniforme e \perp alla sup.

Approccio ① Forze di Lorentz

$$\vec{F} = -e \vec{v} \times \vec{B} = -e E_i$$

$$E_i = \vec{v} \times \vec{B} = v B \sin \theta = v B$$

$$\mathcal{E}_i = \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = \int_{MNPQ} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = \int_{MN} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} + \int_{NH} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}$$

Qui = 0 zero
perché $\vec{v} \perp \vec{B}$
ma \vec{E}_i e corrente

$$NH = MP + PQ + QM$$

$$= v B \int_{MN} d\vec{s}$$

$$(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = v B \sin \theta \cos \varphi$$

$$\theta \text{ è } \angle v \wedge B \quad \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin \theta = 1$$

$$\varphi \text{ è } \angle E_i \wedge ds \quad \varphi = 180^\circ \rightarrow \cos \varphi = -1$$

corrente e campo magnetico
causa campo magnetico

$$= -v B \int_{MN} d\vec{s} = -v B b$$

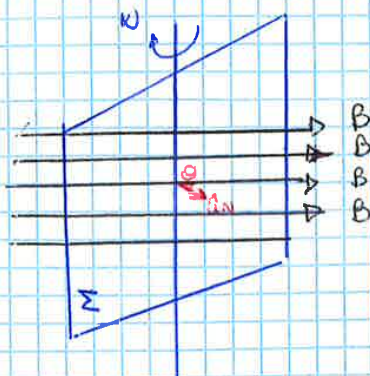
Si crea un campo elettrico

$$i = - \frac{v B b}{R+r}$$

\hookrightarrow generatore \neq R circuito

Generatore di corrente alternata

ω velocità angolare
 ω costante
 B uniforme e costante



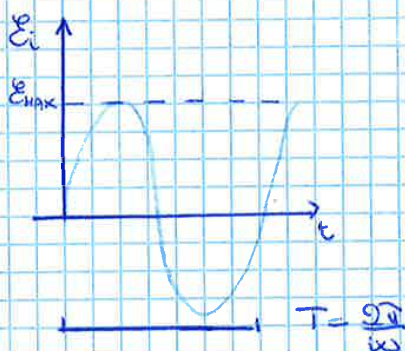
$\theta(t) = \theta_0 + \omega t$
 $\theta_0 = 0$

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi(B)}{dt}$$

$$\Phi(\vec{B}) = \int \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \int B \cos\theta dS = B \cos\theta \int dS = B S \cos\theta = B S \cos(\omega t)$$

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt} = - B S (-\omega \sin(\omega t)) = B S \omega \sin(\omega t)$$

$\mathcal{E}_i = S B \omega \sin(\omega t)$ valido per ogni spira piana



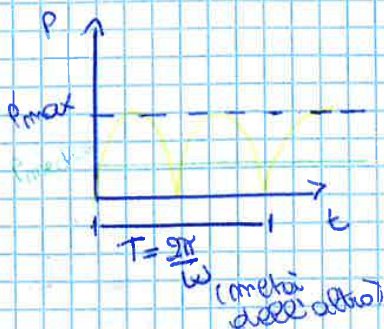
$$\mathcal{E}_{MAX} = B S \omega \leftrightarrow \sin(\omega t) = 1$$

Da \mathcal{E} em. dipende dalla variazione
 • Mele p'imbaco di 90° $\frac{d\Phi}{dt}$ varia
 molto
 Variaz. max quando passo da
 zero a \neq da zero

$$i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{B S \omega}{R} \sin(\omega t)$$

$$P = i^2 R = \frac{B^2 S^2 \omega^2}{R} \sin^2(\omega t)$$

P_{max} quando $\sin(\omega t) = 1$



$$P_m = \langle P \rangle = \frac{B^2 \omega^2 S^2}{R} \langle \sin^2(\omega t) \rangle$$

$$= \frac{B^2 S^2 \omega^2}{2R}$$

$$\rightarrow P_m = \frac{\mathcal{E}_{MAX}^2}{2R} = \frac{\mathcal{E}_{eff}^2}{R}$$

$\mathcal{E}_{eff} \rightarrow$ forza elettromotrice efficace

$$\mathcal{E}_{eff} = \frac{\mathcal{E}_{MAX}}{\sqrt{2}}$$

$$B = \mu_0 m_s i$$

i? i funzione a derivata costante

$$\frac{di}{dt} = \text{cost} \rightarrow i = a + bt$$

$$\begin{cases} t=0 & i=3A \rightarrow a=3A \\ t=0,02 & i=3+b \cdot 0,02 \stackrel{1,5}{=} \rightarrow b = \frac{1,5-3}{0,02} = -75 A/s \end{cases}$$

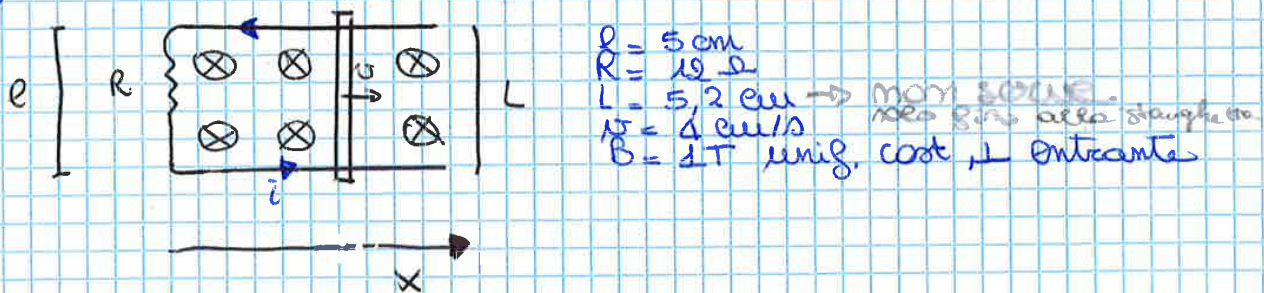
$$\frac{i_2 - i_1}{t_2 - t_1} \quad \frac{\Delta i}{\Delta t}$$

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d(B \pi r_i^2 N)}{dt} = - \pi r_i^2 N \frac{dB}{dt} = - \pi r_i^2 N \mu_0 m_s \frac{di}{dt}$$

$$= - \pi r_i^2 N \mu_0 m_s (b) = 4,47 \cdot 10^3 \text{ V}$$

campo che diminuisce la destra
nuovo campo a destra
e campo decresce

②



a) $i = ?$

$\Sigma \uparrow \rightarrow \Phi \uparrow \rightarrow \mathcal{E}_i$ e verso uscente $\rightarrow i$ anticorrente

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d \int \vec{B} \cdot \hat{n} d\Sigma}{dt} = - B \frac{d\Sigma}{dt} = - B l \frac{dx}{dt} = - B l v$$

$$i = \frac{-B l v}{R} = \frac{-1,5 \cdot 10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{12} = 1,67 \cdot 10^{-4} \text{ A}$$

b) $P_{\mathcal{E}}$?

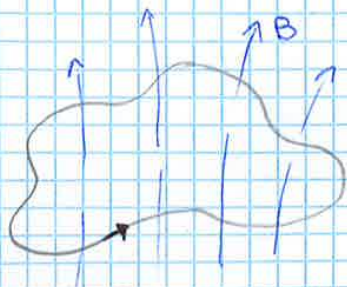
$$P_{\mathcal{E}} = i^2 R = (1,67)^2 \cdot 10^{-8} \cdot 12 = 3,3 \cdot 10^{-7} \text{ W}$$

c) F_{mecc} ?

$$\begin{aligned} W &= F \cdot l \\ P &= \frac{dW}{dt} = F \cdot v \end{aligned}$$

$$P_{\text{mecc}} = P_{\text{elet}} = F \cdot v \rightarrow F_{\text{mecc}} = \frac{P_{\mathcal{E}}}{v} = 8,4 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

Autoinduzione



giungo autocconcatenato

$$\Phi(\vec{B}) = \int \vec{B} \cdot \hat{n} d\Sigma$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} \quad \text{Ampere-Laplace}$$

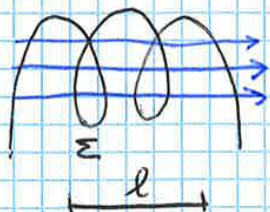
$$\rightarrow \Phi(\vec{B}) = \int_{sup} \frac{\mu_0 i}{4\pi} \left(\oint \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} \right) \cdot \hat{n} d\Sigma = \mathcal{L} i$$

\mathcal{L} = induttanza (coeff. di autoinduzione)

\mathcal{L} è un parametro geometrico, del materiale, indipendente da Φ e da i

$$\langle \mathcal{L} \rangle = \frac{\lambda \ell}{A} = \frac{V \rho}{A} = \rho \ell = H \text{ (Henry)}$$

Induttanza in solenoide



$$\mathcal{L} = \frac{\Phi(\vec{B})}{i}$$

m = dens. spira = $\frac{N}{\ell}$

N = n° spira

ℓ = lungh. sol.

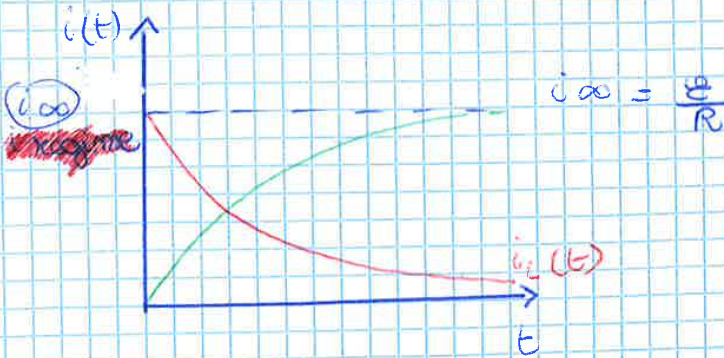
$$B = \mu_0 m i = \mu_0 \frac{N}{\ell} i$$

in un solenoide $\Phi_{\perp}(\vec{B}) = \int \vec{B} \cdot \hat{n} d\Sigma = \int B d\Sigma = B \int d\Sigma = B \Sigma = \Sigma \mu_0 m i$

$$\Phi(\vec{B}) = N \Phi_{\perp}(\vec{B}) = m \ell \Phi_{\perp}(\vec{B}) = \Sigma \mu_0 m^2 \ell i = \mathcal{L} i$$

$$\rightarrow \mathcal{L} = \mu_0 m^2 \ell \Sigma \quad (\text{si misura in H})$$

induttanza per unità di lunghezza $\rightarrow \mathcal{L}_e = \frac{\mathcal{L}}{\ell} \quad (H/m)$



$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt} = - \frac{\mathcal{E}L}{R} \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} = -\mathcal{E} e^{-t/\tau}$$

$$|i_L| = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau}$$

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau} = i_\infty - i_L \quad \text{estremamente di chiusura}$$

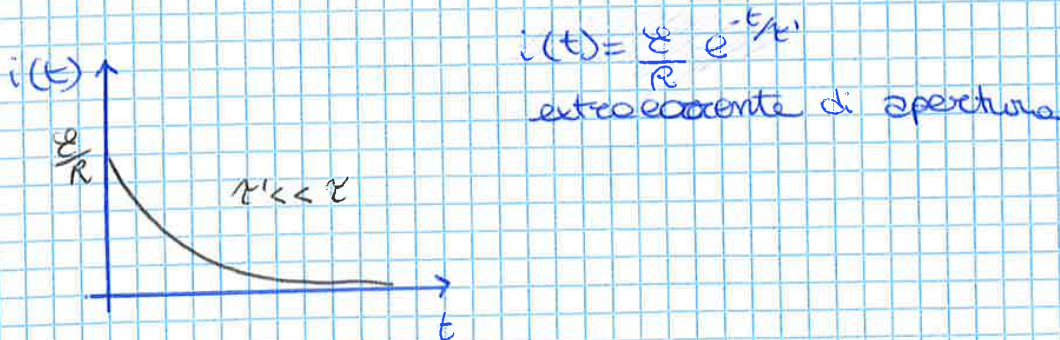
b) APERTURA DEL CIRCUITO

$$t=0 \quad i = i_\infty = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

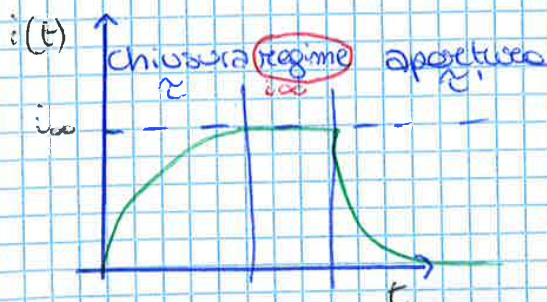
$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau'} \quad \tau' = \frac{L}{R'} \quad R' \gg R$$

$$\tau' = \frac{L}{R'} \ll \frac{L}{R} = \tau$$

→ ammortamento + veloce della carica



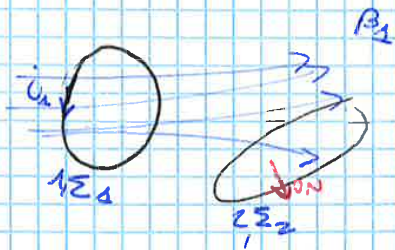
Metto insieme i operativi di chiusura/apertura cosa succede nel circuito



$$B = \mu_0 H$$

$$M_L = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 = \frac{1}{2} H B$$

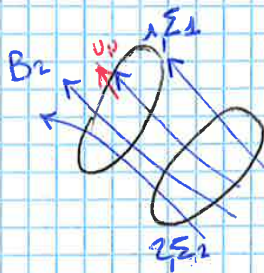
Mutua induzione



flusso del circuito 1 nel circuito 2

$$\Phi_{1,2} = \int_{\Sigma_2} \vec{B}_1 \cdot \hat{u}_2 d\Sigma_2 = M_{1,2} i_1$$

↳ coeff. di mutua induzione



$$\Phi_{2,1} = \int_{\Sigma_1} \vec{B}_2 \cdot \hat{u}_1 d\Sigma_1 = M_{2,1} i_2$$

$$M_{1,2} = \frac{\Phi_{1,2}}{i_1} = \frac{\Phi_{2,1}}{i_2} = M_{2,1} = M$$

coeff. di mutua induzione

$$\mathcal{E}_2 = - \frac{d\Phi_{1,2}(B)}{dt} = -M \frac{di_1}{dt}$$

$$\mathcal{E}_1 = - \frac{d\Phi_{2,1}(B)}{dt} = -M \frac{di_2}{dt}$$

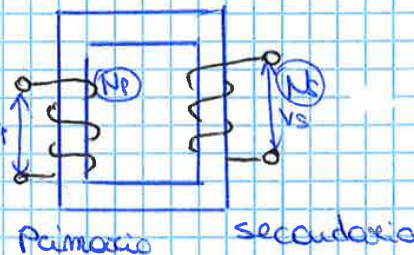
Energia magnetica immagazzinata da 2 circuiti accoppiati ($M \neq 0$)

$$U_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

Trasformatore ideale

Trasformatore a rez. costante Σ

Se il numero di spire è diverso, il flusso del primario è \neq da quello del secondario



$$V_p = - \frac{d\Phi_p(B)}{dt} = -N_p \frac{d\Phi(B)}{dt}$$

$$V_s = - \frac{d\Phi_s(B)}{dt} = -N_s \frac{d\Phi(B)}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{V_p}{V_s} = \frac{N_p}{N_s}$$

legge di Ampere-Maxwell
(4^{es} Eq. Maxwell)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i = \mu_0 (i_c + i_s) = \mu_0 \left(i_c + \epsilon_0 \frac{d\phi(\vec{E})}{dt} \right)$$

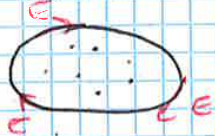
Posso generare B non solo con i ma anche con variazione di E

NO SORGENTI

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\phi(\vec{E})}{dt}$$

$$\mathcal{E}_i = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d\phi(\vec{B})}{dt}$$

B uscente



$$B \uparrow \rightarrow \phi(B) > 0 \rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} < 0$$

E aumenta



$$E \uparrow \rightarrow \phi(\vec{E}) > 0 \rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} > 0$$

in forma integrale

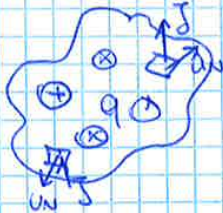
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int \nabla \times \vec{B} \cdot \hat{u} \, d\Sigma = \mu_0 \int \vec{j} \cdot \hat{u} \, d\Sigma + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot \hat{u} \, d\Sigma$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Integrale in volume

$$\int \nabla \cdot \vec{J} d\tau = -\frac{\partial}{\partial t} \int \rho d\tau = -\frac{\partial q}{\partial t} \text{ carica interna al volume}$$

$$\int \nabla \cdot \vec{J} d\tau = \int \vec{J} \cdot \hat{n}_N dS = i \rightarrow i = -\frac{\partial q}{\partial t} \text{ teorema di conservazione carica}$$



i) J uscente $\rightarrow i > 0 \rightarrow q$ diminuisce

ii) J entrante $\rightarrow i < 0 \rightarrow q, \rho$ aumento

Eq. Maxwell in vuoto, $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ sorgenti q, i

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \nabla \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Applico il rotore a Max III

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A} + \nabla(\nabla \cdot \vec{A})$$

$$\nabla^2 = \Delta = \text{laplaciano} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} + \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

eq. onda che si muove con $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$

Applico rot a Max. IV

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B} + \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{E}) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c$$

\rightarrow campo elettromagnetico

\rightarrow la luce è un'onda