NUMERO: 1976A - ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Venezia Angela

MATERIA: Fisica I - Prof. Ferrero

1/03/2011

Introduzione alla fisica

FISICA: scienza che guarda come si comporta l'ambiente intorno a noi. Si analizza in modo sperimentale e si trovano leggi per ipotizzare situazioni e predire un comportamento futuro.
Ci possono essere due approcci:
- ATTIVO → si scrivono le leggi per risolvere problemi
- PASSIVO → si guarda solo il fenomeno

METODO SCIENTIFICO

- schematizzazione: concetto di modello
- misura
- osservazione sperimentale
- leggi
- previsione
- modifica sperimentale

• È un mix tra deduzione e induzione
→ faccio ipotesi e verifico che siano corrette

Si cerca di trovare il modello più semplice che serva a risolvere il problema.
Ad esempio per la cinematica si considera il punto materiale o particella che non esiste nella realtà ma che ci serve per capire.
Schematizziamo ciò che capita attorno a noi.
Si dovrà associare al modello un osservabile fisico (= caratteristica del sistema) in modo da confrontarlo con un'unità di misura fissa.
Se l'osservazione sperimentale verifica il modello è accettabile se no le possibili cause d'errore possono essere dati sbagliati o considerazioni mancanti.

FISICA CLASSICA: è quella studiata fino a fine XIX secolo.
Si ha data una spiegazione chiara di come funzionano le cose. È divisa in due blocchi:
- meccanica (come si muovono le cose)
- elettromagnetismo (concetto di onda)

ci sono quindi oggetti e onde che si propagano e non sono dotati di massa.

A fine '800 si scoprono situazioni problematiche ad esempio non erano spiegabili alcuni fenomeni termodinamici, in particolare nel mondo microscopico e inoltre si sono osservati oggetti che si muovevano a velocità simile a quella della luce.
Vengono quindi sviluppate nuove teorie che ampliano la visione del mondo intorno a noi, ad esempio la relatività e la meccanica quantistica e la meccanica relativistica

Teoria della misura

03/03/2016

① Premessa: osservazione scientifica e logica della sperimentazione

Guardare il mondo intorno a noi vuol dire porsi delle domande. Alcune domande possono essere oggettivate, altre hanno parametri soggettivi (es. bellezza)

- La fisica può dare risposta ad alcune domande, quelle suscettibili a una risposta quantitativa (1,2,4,6) attraverso un procedimento di misura / confronto dopo aver stabilito una opportuna unità di misura
- è difficile stabilire l'unità di misura di bellezza, profumo, musicalità ...

Dobbiamo cercare di tradurre in un linguaggio universalmente valido ciò che vediamo

Il processo di misura è un aspetto centrale in questo approccio della fisica (che sia deduttivo o induttivo)

METODO SPERIMENTALE
- Schematizzazione
- Misura
- Osservazione sperimentale
- Leggi
- Previsione
- Modifica sperimentale → fare un modello

Le osservazioni sono importanti sia per la conoscenza di un fenomeno sia per fare un qualche cosa ad esempio fare un controllo di un processo o di un fenomeno (es. termostato)

Ogni volta che vado ad osservare qualche cosa io in qualche modo interagisco con il sistema. Posso anche in qualche modo alterare il sistema che sto analizzando; posso minimizzare la perturbazione sul sistema osservato.
Nella fisica classica posso arrivare ad annullare la perturbazione; in quella quantistica non si riesce a minimizzare a zero, esiste una incertezza intrinseca. Dal determinismo si passa al probabilismo.

Per analizzare il sistema fisico devo usare un altro sistema fisico; inevitabilmente il processo di misurazione c'è una interazione di un sistema incognito e uno di riferimento

② Grandezza fisica o osservabile fisico: definizione operativa, unità di misura, analisi dimensionale

Definizione operativa: per la descrizione di un fenomeno si devono usare solo quei parametri che sono trasformabili in numeri con la misurazione, cioè quei termini che sono definibili OPERATIVAMENTE, attraverso

SISTEMA INTERNAZIONALE (S.I)

FONDAMENTALI	LUNGHEZZA	METRO	m
	MASSA	KILOGRAMMO	kg
	INTERVALLO DI TEMPO	SECONDO	s
	INTENSITA' DI CORRENTE ELETTRICA	AMPERE	A
	TEMPERATURA	KELVIN	K
	INTENSITA' LUMINOSA	CANDELA	cd
	QUANTITA' DI MATERIA	MOLE	mol
SUPPLEMENTARI	ANGOLO PIANO	RADIANTE	rad
	ANGOLO SOLIDO	STERADIANTE	sr

In generale in meccanica, le dimensioni di una grandezza fisica possono essere scritte

$$\boxed{[G] = [L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma}]}$$

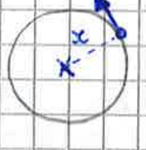
es. $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{m}{s}$ $\quad \frac{[L]}{[T]} = [LT^{-1}]$

$G \rightarrow m, s, kg \quad [L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma}]$

$a \rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \frac{m}{s} \cdot \frac{1}{s} \quad [LT^{-2}]$

Equazioni dimensionali → posso ricavare delle leggi fisiche
le equazioni dimensionali consentono di fare l'analisi dimensionale delle relazioni fisiche
→ ricavo la legge fisica dall'analisi dimensionale
Se le dimensioni della grandezza a primo membro non sono le stesse di quelle che compare al secondo membro la relazione è sicuramente sbagliata (non è detto il contrario)

esempio



$v = cost \quad \vec{v} \quad a?$
modulo costante ma cambio direzione → accelerazione

$a = K v^{\alpha} r^{\beta}$

$\frac{m}{s^2} \quad \frac{m}{s} \quad m$

$[LT^{-2}] = [L^{\alpha} T^{-\alpha}][L^{\beta}]$

$1 = \alpha + \beta$
$-2 = -\alpha \rightarrow \alpha = 2$
$\rightarrow \beta = -1$

$\rightarrow a = K \frac{v^2}{r}$ accelerazione centripeta errore assoluto: differenza algebrica tra un valore indicato (da uno strumento) e un valore di confronto

errore relativo: rapporto tra l'errore assoluto e il valore di confronto (adimensionale)

errore relativo percentuale: errore relativo per 100

esempio: $G \pm \Delta G$ $\quad h = 1{,}0 \pm 0{,}1$ m

$\frac{\Delta G}{G}$ $\quad \frac{\Delta h}{h} \quad \frac{0{,}1}{1{,}0} = 0{,}1$

$\frac{\Delta G}{G} \cdot 100 \quad \frac{\Delta h}{h}\% = 0{,}1 \cdot 100 = 10\%$

le incertezze sono classificate in due gruppi:

- Tipo A: sono prodotte da effetti di tipo casuale, si possono ridurre (fluttuazioni statistiche)
- Tipo B: sono effetti sistematici, non si possono stimare né ridurre

04/03/2016

Precisione e accuratezza

Esempio del tiro a bersaglio, ipotesi di conoscenza dell'obiettivo

- effettuo tante misure, riusciamo a concentrare i tiri intorno al centro (conoscendo bene il centro) → misura accurata e precisa
- riesco a identificare un intorno intorno al centro, il valore presunto vero → accurato ma non preciso perché ho valori dispersi
- se ho valori concentrati ma non intorno al valore vero ho scarsa accuratezza ma grande precisione
- sono lontano dal centro e ottengo valori dispersi (né preciso né accurato)

Precisione → Tipo A

Accuratezza → Tipo B

Ideale avere misure accurate e precise

Accuratezza di misura: esprime il grado di accordo tra il risultato di una misura e un valore convenzionalmente vero del misurando

Accuratezza di uno strumento di misura: esprime il massimo scarto ottenibile fra il valore indicato dallo strumento ed il valore realizzato da un campione di riferimento

Precisione di uno strumento di misura: esprime la finezza della scala graduata (potere risolutivo dello strumento)

Risoluzione di uno strumento di misura: è la più piccola variazione del misurando che provoca una variazione nel valore indicato

5 Analisi statistica - Distribuzione Gaussiana

Raccolgo tanti valori con un righello centimetrato
Faccio una tabella per raccogliere i dati, tabulo i dati

x_k (cm)	n_k
10	3
11	3
12	2
13	2

$N = \sum_{k=1}^{4} n_k = 10$ misure — k possibili numeri che posso ricevere

Media dei risultati ottenuti: $\boxed{\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i}$

$M(x) = \bar{x} = \langle x \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{10} x_i$ cm

Questa stessa media la posso scrivere come

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{4} x_k n_k = \sum_{k=1}^{4} x_k \frac{n_k}{N}}$$

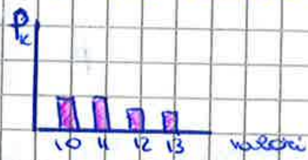
evento
k=1 → 10 3 volte
k=2 → 11 3 volte
k=3 → 12 2 volte
k=4 → 13 2 volte

Introduciamo le frequenze $\boxed{P_k = \frac{n_k}{N}}$ (o probabilità)
Le frequenze ci dicono come sono distribuiti i risultati
La media si scrive

$$\boxed{\bar{x} = M(x) = \sum_{k=1}^{4} x_k P_k}$$

E' utile fare dei grafici (istogramma) che mi dicono come i dati sono distribuiti
Se sommo tutte le frequenze ottengo 1

$$\boxed{\sum_k P_k = 1}$$



Ripeto il processo di misurazione cambiando lo strumento, uso un righello millimetrato

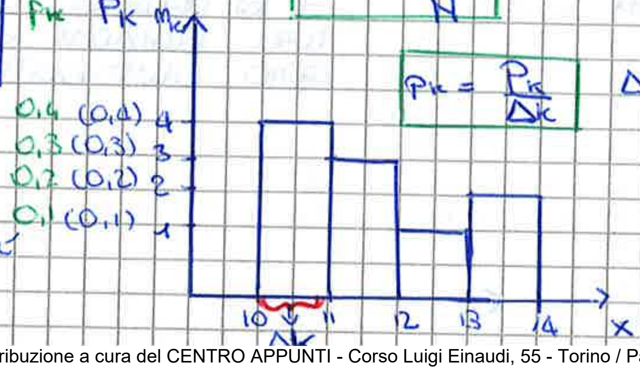
x_k (cm)	n_k
10.1	1
11.8	1
11.3	1
13.1	1
10.3	1
10.9	1
11.2	1
12.3	1
13.3	1
10.2	1

Se faccio l'istogramma di queste misure non ottengo informazioni.
Creo degli intervalli e vedere quante volte vedo la mia misura in questi intervalli.
Vado a contare i possibili eventi
Abbiamo di nuovo una frequenza P_k che è il numero degli eventi favorevoli su quelli totali

intervalli	eventi
10 - 11	4
11 - 12	3
12 - 13	1
13 - 14	2

$\boxed{P_k = \frac{n_k}{N}}$ $N = 10$

$\boxed{p_k = \frac{P_k}{\Delta k}}$ $\Delta k = 1$



In questo caso p_k coincide con P_k perché $\Delta k = 1$

Se voglio considerare cosa capita tra due punti a e b

$\int_a^b p(x)\,dx = P_{a,b}$ numero, probabilità di trovare il valore nell'area

$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1 = P(-\infty,\infty)$ area totale, probabilità di ottenere un risultato

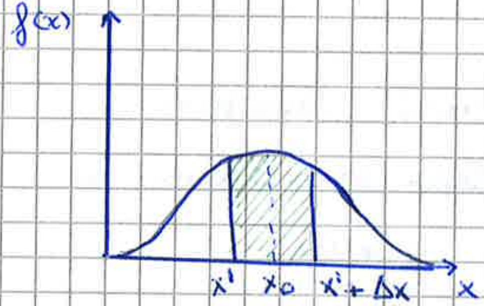
Questa relazione esprime il fatto che la funzione $p(x)$ è normalizzata, l'area totale è uguale a 1

Questa curva si approssima sempre di più alla curva ideale con l'aumento delle misure

Densità di probabilità: curva matematica simmetrica rispetto al valor medio dei valori

$$p(x) = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$ è una densità di probabilità

in cui $\int_{x'}^{x'+\Delta x} f(x)\,dx$ rappresenta la probabilità che la misura dia un valore della grandezza x compreso tra x' e $x'+\Delta x$

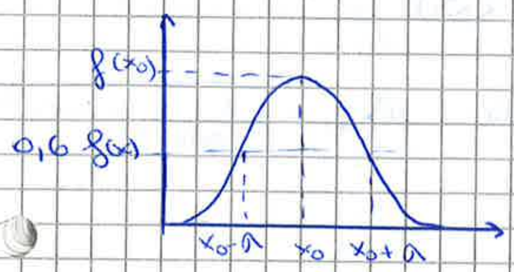


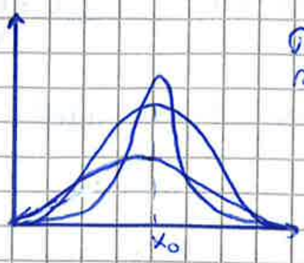
$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

I valori che la variabile x può assumere si distribuiscono secondo la $p(x)$, lungo tutto il campo di variabilità della x: quindi ciascun valore sarà più o meno lontano dalla media $\bar{x}$. La lontananza è quantificata da σ, detta varianza

Man mano che σ (altezza, ampiezza) varia e lascio fisso x_0 la campana diventa sempre più stretta e più alta in corrispondenza di x_0

σ è legato alla dispersione intorno al valor medio, sempre + stretta vuol dire + preciso fino a un punto





$\sigma <$ curva stretta e + alta

In estremo sintesi

$\boxed{G = g \pm \Delta g \; [G]}$ Devo ricavare questi due valori

poche misure $\langle x \rangle = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{N}$ g valor medio

$\frac{x_M - x_m}{2} = \Delta x$ Δg incertezza

molte misure

$\langle x \rangle = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i$ $\Delta x = \sqrt{\frac{1}{m(m-1)} \sum_{i=1}^{m} (x_i - \langle x \rangle)^2}$

si definisce errore relativo $\frac{\Delta x}{\langle x \rangle}$

ed errore percentuale $\frac{\Delta x}{\langle x \rangle} \cdot 100$

6 Propagazione delle incertezze - somme e differenze, prodotti e quozienti - Funzioni di una variabile

In un processo di misurazione in genere si osservano più osservabili fisici
Spesso bisogna determinare il valore di una grandezza fisica tramite misurazioni indirette

es. calcolare l'area di un rettangolo
il risultato sarà S ± una incertezza legata alla superficie stessa.
come si propagano le loro incertezze

Le leggi fisiche sono interpretate da leggi matematiche
lunghezza di un foglio come somma di due misurazioni

$x_{best} = y_{best} + z_{best} + \ldots + w_{best}$

$\overset{a}{\vdash\!\!-\!\!-\!\!+}\overset{b}{-\!\!\dashv}$

$L = a + b$
$a \rightarrow \Delta a$
$b \rightarrow \Delta b$

caso peggiore di incertezza: caso conservativo, se le misure sono tra loro correlate:
$\Delta L = \Delta a + \Delta b$

se le grandezze non sono tra loro dipendenti, l'errore totale è minimizzato

$\Delta L = \sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2}$ due eventi sono indipendenti se non ci sono correlazioni tra le misure quando effettuo la misurazione, la misura di uno non influisce quella dell'altro

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 186

1

Teoria della misura

Argomenti della lezione

Premessa
- Osservazione scientifica e logica della sperimentazione

Grandezze fisiche
- Definizione operativa, unità di misura, analisi dimensionale

La misura
- Definizioni, incertezze di misura, caratteristiche della misura e degli strumenti

I numeri...
- Prefissi e notazioni, cifre significative, esempi

Analisi statistica
- Media aritmetica - Distribuzione Gaussiana

Propagazione delle Incertezze
- Somme e differenze - Prodotti e quozienti - Funzioni di una variabile

Presentazione di dati e risultati
- Uso di grafici – Linearizzazione - Metodo dei minimi quadrati

Teoria della misura

Argomenti della lezione

Premessa
- Osservazione scientifica e logica della sperimentazione

Grandezze fisiche
- Definizione operativa, unità di misura, analisi dimensionale

La misura
- Definizioni, incertezze di misura, caratteristiche della misura e degli strumenti

I numeri...
- Prefissi e notazioni, cifre significative, esempi

Analisi statistica
- Media aritmetica - Distribuzione Gaussiana

Propagazione delle Incertezze
- Somme e differenze - Prodotti e quozienti - Funzioni di una variabile

Presentazione di dati e risultati
- Uso di grafici – Linearizzazione - Metodo dei minimi quadrati

Osservazione Scientifica

1. Quanto è alta la torre Eiffel?
2. Qual è l'età dell'universo?
3. E' più bello un quadro astratto o uno figurativo?
4. E' più veloce la luce nel diamante o il suono nel ferro?
5. Profuma più una violetta o una rosa?
6. E' più caldo in cima al Cervino o accanto alle piramidi di Gizah?
7. E' più musicale un *la* (440.0 Hz) o un *do* (261.6 Hz)?

Sono tutte domande che ci possiamo porre riguardo a quello che ci circonda.

- La fisica può dare risposta ad alcune domande: quelle suscettibili di una risposta quantitativa (1, 2, 4, 6) attraverso un procedimento di misura/confronto dopo aver stabilito una opportuna unità di misura.
- E' difficile stabilire l'unità di misura di bellezza, di profumo o di musicalità (anche se è possibile stabilire relative scale).

Quello che la fisica è

- Fisica (dal greco (φύσις) = *naturale* = *natura*), si basa su due assiomi:
  - le leggi della natura sono valide ovunque (in qualsiasi tempo e luogo)
  - l'osservazione porta ad una decisione sulla validità di modelli per una descrizione di eventi naturali
- Sperimentazione sulla natura a tutti i livelli, dai complessi ai più elementari, effettuata partendo dalla nozione di misura (quantitativa, riproducibile) e dalla definizione operativa di grandezza fisica attraverso il processo di misura

→ misura quantitativa, quindi suscettibile di correlazione numerica con altre misure (entro gli errori statistici di misura)

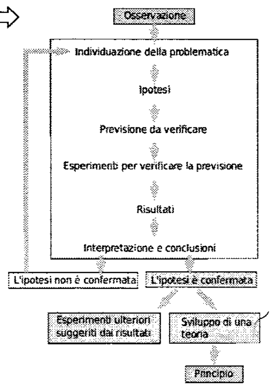
→ misura riproducibile, cioè indipendente dal soggetto che sperimenta e dall'apparato utilizzato (tenuto conto degli *errori sistematici* e della *sensibilità* dell'apparato)

Metodo sperimentale (galileiano)

"Dal mondo del pressappoco all' universo della precisione"

Strumenti **Metodo** ⇒

- Schematizzazione: *concetto di model* *"una navigazione senza bussola"*
- **Misura**
- Osservazione sperimentale
- Leggi
- Previsione
- Modifica sperimentale



Logica della sperimentazione (1)

- Un esperimento consiste in un insieme organico di osservazioni eseguite su di un fenomeno di interesse
- Osservazioni qualitative e quantitative
- Scopo della sperimentazione (ingegneristica, econometrica, ...)
  - osservazione di un processo, di un fenomeno o di una operazione
  - regolazione di un processo, di un fenomeno o di una operazione
  - controllo di qualità di un processo
  - analisi sperimentale di un problema
  - validazione di modelli numerici e/o teorie

2

Misura: definizione operativa di grandezza

Il processo di misura è centrale, fondamentale; per parlare di grandezza fisica occorre dire come si misura:

- scelta dell'unità di misura (arbitraria, comoda)
- procedimento di confronto con l'unità di misura

Esempi: massa, forza, lunghezza di un segmento, durata di un intervallo temporale ...

$$\underbrace{G}_{\text{grandezza}} = \underbrace{g}_{\text{misura}} \pm \underbrace{\Delta g}_{\text{incertezza}}\ \underbrace{[G]}_{\text{unità di misura}}$$

G: grandezza, **g**: numero puro che esprime il rapporto con l'unità di misura **[G]**

Esempio:

lunghezza = 3.5 metri

Sistemi di unità di misura

Le grandezze fisiche sono numerosissime : lunghezza, durata temporale, massa, velocità, accelerazione, frequenza, carica elettrica, intensità di corrente, ecc.

Non è conveniente scegliere un'unità di misura per ognuna di esse. Conviene invece sfruttare le correlazioni tra le varie grandezze, fissare unità di misura solo per alcune di esse e utilizzare le suddette correlazioni per definire le altre unità.

- unità di misura **fondamentali**: specie di grandezze per le quali vengono fissate le unità (scelta arbitraria)
- unità di misura **derivate**: specie di grandezze che vengono ricavate dalle fondamentali

Il numero di grandezze indipendenti (e, quindi, di unità di misura indipendenti) è finito: in meccanica è uguale a 3

Grandezze Fondamentali: Lunghezza, Massa, Tempo

Unità di misura delle grandezze fondamentali

Una qualunque unità campione deve possedere una qualche proprietà che permetta una misura affidabile, riproducibile, valida ovunque, verificabile da chiunque e invariante nel tempo.

- metro, unità di misura delle distanze – a partire dal 1983,

  1 m = distanza percorsa dalle luce nel vuoto in 1/299792458 s

- secondo, unità di misura dei tempi

  1 s = tempo necessario per 9.192631770 x 10^9 vibrazioni di una particolare riga dell'atomo del 133Cs (cesio)

- chilogrammo, unità di misura della massa

  Unica riferita rispetto ad un manufatto, cilindro di Platino Iridio di particolare geometria

Sistema Internazionale (S.I)

E' il più diffuso sistema di unità di misura costituito dall'insieme delle unità di misura delle **grandezze fondamentali**

	Grandezze	Unità	Simbolo
Fondamentali	Lunghezza	Metro	m
	Massa	Kilogrammo	kg
	Intervallo di tempo	Secondo	s
	Intensità di corrente elettrica	Ampère	A
	Temperatura	Grado kelvin	K
	Intensità luminosa	Candela	cd
	Quantità di materia	Mole	mol
Supplementari	Angolo piano	Radiante	rad
	Angolo solido	Steradiante	sr

Dimensioni delle grandezze fisiche

- una lunghezza, uno spessore, una distanza, uno spazio percorso Δx sono tutte grandezze fisiche omogenee con una lunghezza, cioè hanno tutti la stessa dimensione che si indica con [L] – si prescinde dal valore numerico

- allo stesso modo una qualsiasi superficie (cerchio, quadrato etc.) è omogenea con il quadrato di una lunghezza e si indica con $[L^2]$ – sia 15 km^2 che 0.7 μm^2, etc

- il tempo misurato a partire da un istante iniziale t_0 ed un intervallo di tempo t sono omogenei con un tempo: [T]

- in generale in meccanica:

$$[G] = [L^\alpha M^\beta T^\gamma] \quad \text{con } \alpha, \beta, \gamma = (+v_i, -v_i, 0)$$

- tutte le relazioni in fisica devono essere dimensionalmente corrette; qualsiasi sia la combinazione di grandezze che compare nella relazione, le dimensioni a dx dell'= devono essere le stesse di quelle a sx dell'= :

$$[v] = [s/t] = [LT^{-1}]$$

Equazioni dimensionali

Le equazioni dimensionali consentono di fare l'analisi dimensionale delle relazioni fisiche: sostituendo a ciascuna grandezza le sue dimensioni, e trattando i simboli delle grandezze fondamentali come quantità algebriche, la relazione può essere valida solo se ciascun membro della relazione stessa ha le medesime dimensioni (principio di omogeneità)

Se le dimensioni della grandezza a primo membro non sono le stesse di quella che compare al secondo membro la relazione è sicuramente sbagliata (non è detto il contrario)

L'analisi dimensionale consente inoltre la conversione delle misure da un sistema di unità ad un altro

Esempi

Controllare dimensionalmente l'equivalenza tra impulso e quantità di moto

$$\int_{t_0}^{t} F dt = \int_{t_0}^{t} d(mv)$$

impulso: $[F\,t]=[MLT^{-2}][T]=[MLT^{-1}]$
quantità di moto: $[mv]=[MLT^{-1}]$ OK!

Supponiamo di voler esprimere in km/h la velocità di un'automobile che viaggia a 12.5 ms^{-1}.
Poiché 1 m= 10^{-3}km e 1 s=(1/3600) h

$$v = 12.5\frac{m}{s} = 12.5\frac{10^{-3}km}{(1/3600)h} = 12.5 \cdot 3.6\, km/h = 45\, km/h$$

3

La "misurazione"

- La misurazione è l'operazione che fornisce una misura
- E' una procedura che porta alla completa definizione della misura (valore ± incertezza) mediante l'utilizzo di strumenti di varia natura:
  - Dispositivi idonei ad effettuare la misura (strumentazione)
  - Equazioni o relazioni analitiche
- La procedura, in quanto tale, non è arbitraria né arbitrariamente modificabile; anche quando non ci sono Norme Ufficiali che le definiscano è opportuno darsele
- Ogni misura ha un costo: deve quindi essere commisurata alle esigenze

Errori vs. Incertezze 1/2

Una misurazione singola non coincide con il valore vero della grandezza misuranda: la differenza fra la misura ed il misurando costituisce un errore, errore che può essere rilevato solo dopo che sia stato stimato il (o meglio un) valore vero, al quale è associata una data incertezza.

Un errore può essere corretto o ridotto (ammesso che sia più grande dell'incertezza). Con incertezza, invece, si indica quello che non si è riuscito ad apprendere sul valore vero della grandezza misuranda.

I due termini errore e incertezza hanno un significato distinto nella teoria e pratica della misurazione!

In altri termini:
- Errore → implica la conoscenza di un valore esatto
- Incertezza di misura → Parametro, associato al risultato di una misurazione, che caratterizza la dispersione dei valori che può essere ragionevolmente attribuitaal misurando

Errori vs. Incertezze 2/2

Valore vero: il (determinativo) valore di una grandezza che si otterrebbe da una misura perfetta. Nessuna misura può essere perfetta, tuttavia il valore vero è un *utile riferimento concettuale.*

Valore convenzionalmente vero: un (indeterminativo) valore attribuito ad una grandezza avente incertezza adeguata per un dato scopo.

Può essere un valore realizzato da un ***campione di riferimento***, oppure la ***migliore stima*** di una grandezza (valore di un misurando ottenuto da una misura ritenuta particolarmente attendibile), oppure un ***valore accettato per convenzione***, la cui incertezza è nulla o trascurabile.
Questo ultimo è il caso delle costanti fisiche fondamentali:

– accelerazione di gravità:	9.80665 m/s^2	(valore esatto)
– velocità della luce nel vuoto:	299792458 m/s	(valore esatto)
– costante di Boltzmann:	1,380 6503(24) × 10^{-23} $J \cdot K^{-1}$	(valore esatto)

Errore assoluto: differenza algebrica fra valore indicato (da uno strumento di misura) e un valore di confronto (Valore convenzionalmente vero).

Errore relativo: rapporto fra l'errore assoluto e il valore di confronto

Nota: per "errore" ("error" in inglese) non si intende "sbaglio" ("mistake" o "blunder" in inglese) ma lo *scarto inevitabile* fra il risultato di una misura ed il valore vero del misurando.

Utilizzeremo come sinonimi i termini "incertezza" ed "errore", per conformità con il **linguaggio comune, ben consci della differenza di fondo fra di essi**

Incertezza di tipo A e B

Le incertezze di misura sono classificate in due gruppi distinti:

– ***Tipo A***: Sono le Incertezze che si possono valutare ed eventualmente ridursi con metodi statistici, e sono cioè prodotte da effetti di tipo casuale.).

– ***Tipo B***: Sono le Incertezze relative ad effetti sistematici (che si ripetono ad ogni ripetizione della misura nelle medesime condizioni), e che non si possono stimare (né ridurre) con metodi statistici.

Incertezza di tipo B

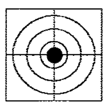
Le sorgenti di informazione per la stima dell'incertezza tipo B sono le conoscenze a priori che l'operatore di misura può reperire anche in modi diversi come :

- dati di misure precedenti
- esperienza o conoscenza circa il comportamento di materiali o strumenti
- specifiche del costruttore
- dati di taratura o di altri certificati
- incertezza assegnata a dati di riferimento presi in manuali o banche dati e bibliografia scientifica
- previsioni circa le variazioni di grandezze d'influenza o della grandezza d'ingresso stessa (es., comportamento dinamico).

Misure precise ed accurate

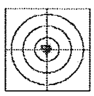
dalla teoria della misura basata sul valore vero si usa distinguere tra le cause di errore quelle di natura casuale (A) da quelle di natura sistematica (B).
Una misura per la quale sia trascurabile il contributo delle prime è detta precisa, mentre se è trascurabile il contributo delle seconde è detta accurata.

Il tiro al bersaglio può chiarire questa binomia: colpi raggruppati ma lontani dal centro indicano un tiro preciso ma non accurato, colpi dispersi intorno al centro indicano un tiro accurato ma impreciso, infine colpi raccolti intorno al centro indicano un tiro preciso ed accurato.
Supponiamo di avere un bersaglio e di sapere che il valore vero ricada al centro di esso (zona blu)



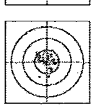
valore vero = 100 m

Eseguendo una misura possono verificarsi i 4 casi rappresentati a destra, dove ogni punto rosso è una misura fatta sul campione.



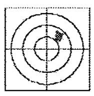
Grande accuratezza
Piccola incertezza (grande precisione)

Misura A = (100 ± 5) m



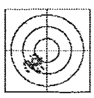
Grande accuratezza
Grande incertezza (scarsa precisione)

Misura B = (100 ± 12) m



Scarsa accuratezza
Piccola incertezza (grande precisione)

Misura C = (50 ± 5) m



Scarsa accuratezza
Grande incertezza (scarsa precisione)

Misura D = (50 ± 12) m

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 186

Ripetibilità

Grado di accordo tra i risultati di successive misurazioni del medesimo misurando, ottenute nelle MEDESIME condizioni di misura

Condizioni di ripetibilità:

- La medesima procedura di misurazione
- Il medesimo operatore
- Il medesimo strumento di misura, utilizzato nelle stesse condizioni
- La medesima collocazione spaziale
- Ripetizione delle misure in un tempo relativamente breve

Riproducibilità

Grado di accordo tra i risultati di misurazioni del medesimo misurando, ottenute in condizioni di misura DIFFERENTI

Variazioni delle condizioni di misura:

- Principi di misura =
- Metodi di misura =
- Operatore ≠
- Strumento di misura ≈
- Campioni standard di riferimento =
- Localizzazione spaziale della misura ≠
- Condizioni di utilizzo dell'apparecchiatura ≠
- Tempo ≠

Discrepanza

se due misure della stessa grandezza sono in disaccordo, allora vi è una discrepanza. La discrepanza può essere o non essere significativa.

Esempio: misura di una resistenza elettrica

Due operatori misurano la stessa resistenza ed ottengono (40 ± 5) ohm e (42 ± 8) ohm

La discrepanza (42 - 40) ohm = 2 ohm è minore dei loro errori

→ le 2 misure sono **consistenti**

Nel caso in cui si ottenga (35 ± 2) ohm e (45 ± 1) ohm

La discrepanza (45-35) ohm = 10 ohm è maggiore dei loro errori

→ le 2 misure sono **inconsistenti**

Esempi: errori in misura diretta

1. Misura di una lunghezza con un righello.

- *errore **casuale*** > (operatore)

interpolazione tra due tacche della scala. Uguale probabilità di sovrastimare o sottostimare la lunghezza.

- *errore **sistematico*** > (strumento)

deformazione del righello. La ripetizione delle misure non evidenzierà questa sorgente di errore.

Esempi: errori in misura indiretta

2. Misura del valore di una resistenza elettrica attraverso impiego di un voltmetro.

- *errore **casuale*** > (strumento)

dipendenza del valore misurato dal rumore termico. Uguale probabilità di sovrastimare o sottostimare la lunghezza.

- *errore **sistematico*** > (strumento)

presenza di una impedenza di ingresso del voltmetro caratterizzata da un valore finito confrontabile con quello del misurando. La ripetizione delle misure non evidenzierà questa sorgente di errore.

Teoria della misura

Argomenti della lezione

Premessa
- Osservazione scientifica e logica della sperimentazione

Grandezze fisiche
- Definizione operativa, unità di misura, analisi dimensionale

La misura
- Definizioni, incertezze di misura, caratteristiche della misura e degli strumenti

I numeri...
- Prefissi e notazioni, cifre significative, esempi

Analisi statistica
- Media aritmetica - Distribuzione Gaussiana

Propagazione delle Incertezze
- Somme e differenze - Prodotti e quozienti - Funzioni di una variabile

Presentazione di dati e risultati
- Uso di grafici - Linearizzazione - Metodo dei minimi quadrati

5

Teoria della misura

Argomenti della lezione

Premessa
- Osservazione scientifica e logica della sperimentazione

Grandezze fisiche
- Definizione operativa, unità di misura, analisi dimensionale

La misura
- Definizioni, incertezze di misura, caratteristiche della misura e degli strumenti

I numeri...
- Prefissi e notazioni, cifre significative, esempi

Analisi statistica
- Media aritmetica - Distribuzione Gaussiana

Propagazione delle Incertezze
- Somme e differenze - Prodotti e quozienti - Funzioni di una variabile

Presentazione di dati e risultati
- Uso di grafici - Linearizzazione - Metodo dei minimi quadrati

Descrizione di Risultati di Misure Ripetute

Misura della Lunghezza del Filo di Sospensione del Pendolo

Supponiamo di aver raccolto questa sequenza di valori di x_i, avendo utilizzato un righello centimetrato:

$$x_i(\text{cm}) = 10,\ 12,\ 11,\ 13,\ 10,\ 11,\ 11,\ 12,\ 13,\ 10$$

Una tabella sintetizza efficacemente i risultati raccolti

$x_k(cm)$	n_k
10	3
11	3
12	2
13	2

Dove n_k è il numero di volte che ciascun valore x_k è stato ottenuto, con

$$N = \sum_{k=1}^{4} n_k = 10$$

k = possibili numeri che posso rilevare

Media dei risultati

Media dei Risultati Ottenuti

$$\overline{x} \equiv M(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{10} x_i \ \ cm$$

che, tenendo conto della tabella, si può scrivere anche

$$\overline{x} \equiv M(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{4} x_k n_k = \sum_{k=1}^{4} x_k \frac{n_k}{N} = \left(10\frac{3}{10} + 11\frac{3}{10} + 12\frac{2}{10} + 13\frac{2}{10}\right)$$

Introduciamo le frequenze:

$$P_k = \frac{n_k}{N}$$

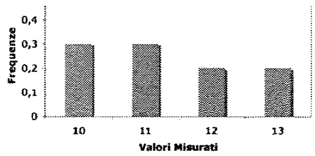
Media dei risultati e istogrammi

La media si scrive

$$\overline{x} \equiv M(x) = \sum_{k=1}^{4} x_k P_k$$

Le frequenze P_k indicano come i dati raccolti sono distribuiti fra i valori possibili; per questo si dice che esse descrivono la distribuzione dei risultati. Si verifica la relazione di normalizzazione

$$\sum_k P_k = 1$$



Rappresentazione dei Risultati

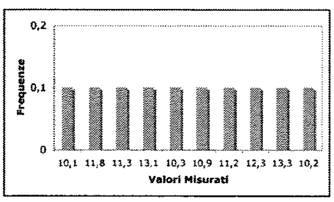
I risultati ottenuti vengono convenientemente riassunti da un istogramma, dove le frequenze Pk sono rappresentate in funzione dei vari valori x_k

Nuovamente sulle misure ripetute

Usando un righello millimetrato

x_i = 10.1, 11.8, 11.3, 13.1, 10.3, 10.9, 11.2, 12.3, 13.3, 10.2

$x_k(cm)$	n_k
10.1	1
11.8	1
11.3	1
13.1	1
10.3	1
10.9	1
11.2	1
12.3	1
13.3	1
10.2	1

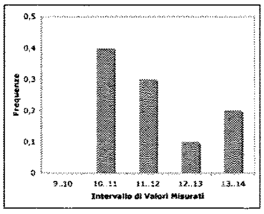


L'istogramma evidenzia il fatto che tutti i valori sono stati ottenuti con la stessa frequenza: l'istogramma è poco significativo, perché non comunica nessuna informazione immediata sui risultati della misura effettuata.

Istogrammi ad intervalli

Per rendere più significativi gli istogrammi, dividiamo la serie di valori in intervalli e contiamo quanti valori misurati cadono in ciascun intervallo. Scegliendo 4 intervalli, possiamo riportare i risultati in tabella

intervallo(cm)	10 – 11	11 – 12	12 – 13	13 – 14
eventi nell'intervallo	4	3	1	2



L'altezza p_k del rettangolo avente per base Δ_k è scelta in modo tale che l'area $p_k\Delta_k$ sia uguale alla frazione P_k di misure che cadono nell'intervallo stesso:

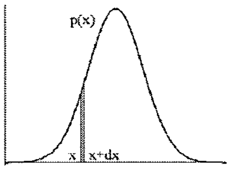
$$p_k \Delta_k = P_k = \frac{n_k}{N}$$

frazione di misure nell'intervallo Δ_k

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 186

6

Distribuzioni continue



La frazione di misure $P(x, x+dx)$ che cadono in un intervallo compreso fra x e $x+dx$ è data da $p(x)dx$, che rappresenta l'area della striscia evidenziata in figura:

$$P(x, x+dx) = p(x)dx = \text{frazione di misure nell'intervallo } (x, x+dx)$$

Distribuzioni continue

Valori in un Intervallo

La frazione di valori misurati che cadono fra $x = a$ e $x = b$, è data da

$$P(a, b) = \int_a^b p(x)dx = \text{frazione di misure nell'intervallo } (a, b)$$

In particolare, se l'intervallo è l'intero asse reale si ha:

$$P(-\infty\ ,\ +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$$

Questa relazione esprime il fatto che la funzione $p(x)$ è normalizzata.

Queste relazioni non ci dicono niente sull'esito di una singola misura, ma ci dicono qualcosa su quello che "ci aspettiamo" di misurare **quando facciamo un numero molto grande di misure**

Distribuzioni Discrete, Distribuzioni Continue e Probablità

Sul Concetto di Aspettativa nell'Effettuare Misure

Una volta ricostruitita la distribuzione limite $p(x)$ (che nel nostro caso è la distribuzione di Gauss) facendo un gran numero di misure

- ci aspettiamo che le misure che faremo in futuro - nelle stesse condizioni sperimentali - andranno a distribuirsi in modo da formare un istogramma che si avvicina tanto più alla $p(x)$ quanto maggiore è il numero di misure fatte
- la frazione di misure $p(x)dx$ che secondo l'esperienza del passato sono cadute nell'intervallo $(x, x+dx)$ può essere ragionevolmente interpretata come la probabilità $P(x, x+dx)$ che, effettuando in futuro una nuova misura della grandezza x, si ottenga un risultato che cade nell'intervallo $(x, x+dx)$

Ciò significa che la distribuzione limite $p(x)$ può essere interpretata come la distribuzione (o densità) di probabilità relativa alle misure della grandezza x, che assume il ruolo di una variabile casuale.

Caratteristiche di una Distribuzione Limite

Media o Valor Medio

Il valor medio (o valore di aspettazione) $\overline{x} \equiv M(x)$ della grandezza x, intesa come variabile casuale è definito da:

$$\overline{x} \equiv M[x] \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$$

Questa è la versione continua della definizione discreta

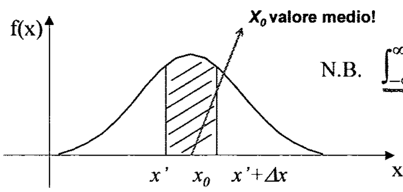
$$\overline{x} \equiv M(x) \doteq \sum_{k=1}^{n} x_k P_k = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k \Delta_k$$

al limite per $n \to \infty$.

Funzione di distribuzione normale: espressione analitica

$$p(x) = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right]$$ è una densità di probabilità

per cui $\int_{x'}^{x'+\Delta x} f(x)dx$ rappresenta la probabilità che la misura dia un valore della grandezza x compreso tra x' e x'+Δx



N.B. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Scostamento rispetto ai dati

I valori che la variabile x può assumere si distribuiscono secondo la $p(x)$, lungo tutto il campo di variabilità della x: quindi ciascun valore sarà più o meno lontano dalla media $\overline{x} \equiv M[x]$. Come facciamo a quantificare questa lontananza?

$$p(x) = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right]$$

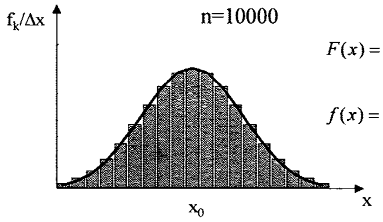
Il parametro da considerare è la varianza (*o deviazione standard o deviazione quadratica media*) σ presente nell'espressione analitica appena analizzata.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 186

7

Operativamente
Analisi statistica

Funzione di distribuzione normale o funzione di Gauss



$$F(x)=\frac{n}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[\frac{-(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$f(x)=\frac{F(x)}{n}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[\frac{-(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Rappresenta, per un determinato valore di σ e di x_0 che variano di caso in caso, la distribuzione delle misure per una estesa classe di grandezze fisiche.

N.B. *f(x)=F(x)/n* fornisce la probabilità di ottenere un dato valore x della grandezza in seguito ad una misura.

Operativamente
Analisi statistica

Il valore più probabile della misura

La misurazione di una grandezza non dà mai il valore 'vero'.

E' possibile dimostrare che il **valore più probabile** della grandezza è fornito dalla **media aritmetica** <x> degli n valori x_1, x_2,…,x_n ottenuti nella sua misurazione ripetuta (fissato il sistema di misura!)

$$<x>=\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

Qualora il numero **n** delle misurazioni sia sufficientemente grande (N>30) in modo che l'istogramma visto prima possa essere approssimato dalla funzione di Gauss, il valore medio <x> coincide con il valore x_0, per cui la gaussiana assume il suo valore massimo.

➡ Ora occorre stimare l'incertezza del valore più probabile! (σ)

Operativamente
Analisi statistica

Deviazione standard

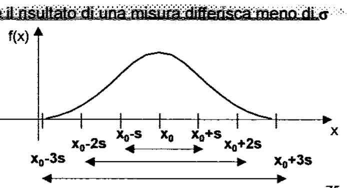
La *incertezza media* su *ciascuna* delle misure effettuate è data dalla **deviazione standard**, definita dalla relazione:

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-<x>)^2}$$

Essa esprime, quindi, una valutazione sulla bontà "media" di ogni singola misura.

Rappresenta l'incertezza in una misura e fornisce il cosiddetto **limite di confidenza** della misura. Si dimostra infatti che:

- vi è il **68.3 % di probabilità** che il risultato di una misura differisca meno di σ dal valore vero
- il **95.4 % di probabilità** che la misura cada entro 2σ dal valore vero
- il **99.7 % di probabilità** che la misura cada entro 3σ dal valore vero



Operativamente
Analisi statistica

La deviazione standard della media

Si dimostra che l'incertezza nella stima del valor medio (migliore approssimazione al valore vero), è data dalla relazione:

$$\sigma_{<x>}=\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-<x>)^2}\quad \text{con}\quad <x>=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

deviazione standard della media (errore medio empirico della media aritmetica).

- **68.3 %** di probabilità che il valore medio <x> si discosti da quello vero per meno di $\sigma_{<x>}$
- **95.4 %** che <x> si discosti per meno di $2\sigma_{<x>}$
- **99.7 %** <x> si discosti per meno di $3\sigma_{<x>}$.

In estrema sintesi.....

Analisi statistica

Calcolo dell'errore:
numero di misure piccolo (semidifferenza)

Misura diretta della grandezza, numero piccolo di misure ripetute di x (es. n = 5÷10), in alternativa all'applicazione della distribuzione statistica precedente, considerare la media aritmetica come il valore più plausibile di x.

$$<x>=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

Fra gli n valori x_i misurati vi sarà un massimo x_M e un minimo x_m assumere la semidifferenza come intervallo di incertezza

$$\Delta x=\frac{x_M-x_m}{2}$$

come l'errore massimo presumibilmente commesso nella misurazione.

$$x=<x>\pm\Delta x$$

8

Propagazione: somme e differenze

La migliore stima di x è la somma/differenza delle migliori stime delle singole misure:

$$x_{best} = y_{best} + z_{best} + \dots + w_{best}$$

Per quanto riguarda le incertezze occorre distinguere due casi:

1. Le incertezze sono tutte statistiche ed indipendenti

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 + \dots + (\Delta w)^2}$$

2. le incertezze hanno un rapporto di dipendenza allora

$$\Delta x = \Delta y + \Delta z + \dots + \Delta w$$

Propagazione: prodotti e quozienti

La migliore stima di x è il prodotto/quoziente delle migliori stime delle singole misure:

$$x_{best} = y_{best} \times z_{best} \times \dots \times w_{best}$$

Per quanto riguarda le incertezze occorre distinguere due casi:

1. Le incertezze sono tutte statistiche ed indipendenti

$$\frac{\Delta x}{|x_{best}|} = \sqrt{\left(\frac{\Delta y}{y_{best}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{y_{best}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\Delta w}{w_{best}}\right)^2}$$

Somma dei quadrati delle incertezze relative

2. le incertezze hanno un rapporto di dipendenza → "deterministiche"

$$\frac{\Delta x}{|x_{best}|} = \frac{\Delta y}{y_{best}} + \frac{\Delta z}{z_{best}} + \dots + \frac{\Delta w}{w_{best}}$$

Propagazione: funzioni di una variabile

Per dedurre l'incertezza in una funzione *y(x)* basta ricavare il modulo della derivata prima della funzione rispetto ad *x* e moltiplicarlo per l'incertezza di *x*:

$$\Delta y = \left|\frac{dy}{dx}\right| \Delta x$$

Esempio:

Si supponga di aver misurato x = 4,3 ± 0,2 e di voler calcolare y = e^x con la relativa incertezza

$$y_{best} = e^{x_{best}} \cong 73.7$$

pretesto per calcolare
non posso fare
l'esponenziale
di un metro
le funzioni
matematiche
devono essere
fatte sui numeri

Per calcolare l'incertezza bisogna derivare e^x e prendere il modulo

$$\left|\frac{d(e^x)}{dx}\right| = |e^x| \cong 73.7$$

$$\Delta y = |e^x| \Delta x \cong 14.7 \implies y = 73.7 \pm 14.7$$

Propagazione: formula generale (*monomia*)

Propagazione degli errori "deterministica": se le incertezze sono dipendenti fra loro

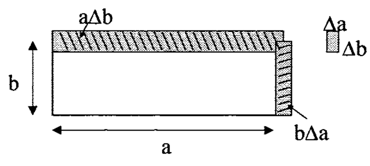
$$\boxed{\Delta y = \sum_i \left|\frac{\partial y}{\partial x_i}\right| \Delta x_i}$$

Propagazione degli errori "statistica": se le incertezze sono indipendenti fra loro

$$\boxed{\sigma^2(y) = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \sigma^2(x_1) + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \sigma^2(x_2) + \dots}$$

Esempio: (prodotto)

Supponiamo di voler misurare l'area **S** di un rettangolo di cui si sono misurati i lati **a** e **b** con i loro rispettivi errori **Δa** e **Δb**.



Infinitesimo di ordine superiore

$$S = (a \pm \Delta a)(b \pm \Delta b) = ab \pm (a\Delta b + b\Delta a) + \Delta a \Delta b$$

$$\Delta S = (a\Delta b + b\Delta a) \xrightarrow{\text{nel caso più sfavorevole}} |\Delta S| = (|a\Delta b| + |b\Delta a|)$$

La misura dell'area del rettangolo è quindi data da

$$S = ab \pm |\Delta S|$$

con

$$|\Delta S| = (|a\Delta b| + |b\Delta a|)$$

Considerando la funzione a due variabili S = ab, e posto che

$$a = \frac{\partial S}{\partial b} \qquad b = \frac{\partial S}{\partial a}$$

$$|\Delta S| = (|b\Delta a| + |a\Delta b|) \xrightarrow{\text{Sostituendo a,b}} |\Delta S| = \left|\frac{\partial S}{\partial a}\Delta a\right| + \left|\frac{\partial S}{\partial b}\Delta b\right|$$

9

Metodo dei minimi quadrati

Accade spesso di dover misurare due diverse grandezze fisiche, per investigare la relazione matematica tra le due.

Es. lasciamo cadere un corpo da una certa altezza. Tale corpo sarà soggetto all'accelerazione di gravità g. E' noto che al tempo t = 0 esso possiede una velocità iniziale $v = v_0$, la sua velocità v dovrebbe essere una funzione lineare del tempo t,

$$v(t) = v_0 + gt$$

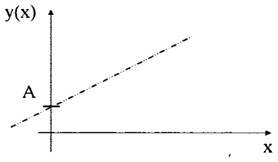
tale relazione è **lineare** del tipo

$$y(x) = A + Bx$$

dove A e B sono costanti.

Metodo dei minimi quadrati

Se le due variabili sono in relazione come y(x) = A + Bx, allora un grafico di y in funzione di x dovrebbe essere una linea retta che ha pendenza (coefficiente angolare) B e interseca l'asse y in y = A.

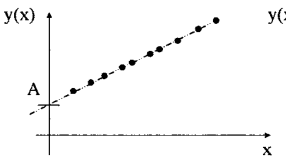


N.B. I punti $y_1, y_2, \ldots, y_N$ sono N misure della stessa grandezza, ma in istanti temporali diversi!

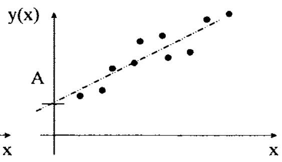
Se si misurassero N diversi valori di $x_1, x_2, \ldots, x_N$ e i valori corrispondenti $y_1, y_2, \ldots, y_N$ e se le misure non fossero soggette ad incertezze, allora ciascuno dei punti (x_i, y_i) dovrebbero giacere esattamente sulla retta

Metodo dei minimi quadrati

In realtà, essendo presenti delle 'incertezze', i punti potranno risultare 'sparpagliati' intorno alla retta.



Caso ideale



Caso reale

Se prendiamo 'per garantito' che **y** e **x** soddisfano una relazione lineare, ci si può porre il problema di trovare la miglior retta per interpolare un insieme di punti misurati $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_N, y_N)$, cioè trovare un **fit lineare (regressione lineare o curva dei minimi quadrati per una retta).** Si dovranno trovare quindi le migliori stime dei coefficienti della retta A e B.

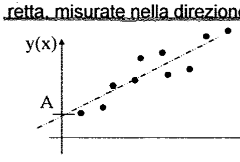
Metodo dei minimi quadrati

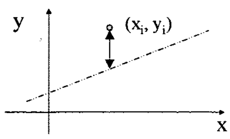
Il procedimento è il seguente: si eseguono **n** misure corrispondenti alle coppie $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_N, y_N)$.

Sapendo che la relazione è lineare si calcolano gli scarti $v_i = y_i - (A\text{-}Bx_i)$, dopodiché si calcolano i quadrati e si sommano

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (A + Bx_i)\right)^2$$

Si cercano i valori di A e B per cui ϕ sia la minima possibile. Questo equivale a rendere minimi i quadrati delle distanze dei punti (x_i, y_i) dalla retta, misurate nella direzione dell'asse y





Metodo dei minimi quadrati

Per far questo differenziamo ϕ rispetto ad A e B e poniamo le derivate uguali a zero:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial A} = -2\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - A - Bx_i\right) = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial B} = -2\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\left(y_i - A - Bx_i\right) = 0 \end{cases}$$

Queste due equazioni possono essere riscritte come equazioni simultanee per A e B:

$$\begin{cases} A \cdot n + B\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ A \cdot \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i + B\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases}$$

Equazioni 'normali'

Metodo dei minimi quadrati

$$\begin{cases} A \cdot n + B\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ A \cdot \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i + B\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases}$$

$$A = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\right)}{N\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$B = \frac{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

Migliori stime per le costanti A e B

7/03/2016

Esercitazione

- notazione scientifica: 3 cifre decimali massimo
- usare multipli e sottomultipli → notazione ingegneristica
- deve essere corretta l'analisi dimensionale, grandezze omogenee

$V_{H_2O} = 50\ cm^3$
$V_a = 50\ cm^3$
$V_{TOT} = 100\ cm^3$

$m_{H_2O} = \rho_{H_2O} \cdot V_{H_2O} = \frac{1\ kg}{dm^3} \cdot 50 \frac{dm^3}{1000} = 0.5\ kg = 50\ g$

- incertezza al valore medio, strumento sempre con errore

$\boxed{\text{righello}}$
risoluzione 1 mm

$h = 2,5\ mm \pm 0,5\ mm$
10 monete
$h_{10} = 23,5\ mm \pm 0,5\ mm$
$h = 2,35\ mm \pm 0,05\ mm$ → riduco incertezza, valore medio migliore

- Accorgimenti di misura o strumenti più precisi
- Propagazione delle incertezze
- misure relative → approccio statistico distribuzione di Gauss

$x_0 \pm \sigma$ → 68,3% delle misure
$x_0 \pm 2\sigma$ → 95,4%

deviazione standard: i-esima incertezza dell'i-esima misura → incertezza media delle singole misure

$\sigma_{\langle k \rangle} = \frac{\sigma_k}{\sqrt{N}}$

deviazione standard della media: rappresenta l'incertezza media del valor medio → rappresenta la migliore stima di k

esempio pendolo

$\boxed{T = k\, L^\alpha M^\beta g^\gamma}$ $[g] = m/s^2$

$T = L^\alpha M^\beta (LT^{-2})^\gamma = k\, L^{\alpha+\gamma} M^\beta T^{-2\gamma}$

$\alpha + \gamma = 0$
$\beta = 0$
$-2\gamma = 1$ $\quad \gamma = -\frac{1}{2} \rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$

$\Big\}\ T = k\, L^{1/2} g^{-1/2} \rightarrow T = k\sqrt{\frac{L}{g}}$

8/03/2016

Cinematica

Meccanica che si rifà a quella Newtoniana. Moto oggetti.
→ come? cinematica
→ per quale motivo? (le cause) dinamica

Meccanica: modellizzare i fenomeni fisici quotidiani: ci sono casi particolari (microcosmo) → si sviluppa la meccanica quantistica

Torna il concetto di modello: schematizziamo la realtà intorno a noi per poi generalizzarla

Studio dei corpi rigidi: insieme continuo di tanti punti materiali dove le distanze reciproche tra i singoli punti non mutano. È una approssimazione (ad esempio può deformarsi sotto calore...).

PUNTO MATERIALE: definizione astratta con cui chiamiamo l'oggetto.
Che cosa succede al movimento di un oggetto detto punto materiale, trascuro le proprietà geometriche del corpo
Per studiare il movimento di un oggetto ho bisogno di punti di riferimento. Si parla di sistema di riferimento i cui punti sono considerati fissi.
Devo poi definire un sistema di coordinate che mi permettono di definire un punto nello spazio con dei numeri
Ci sono vari sistemi di riferimento, devo scegliere quello più conveniente dal punto di vista ingegneristico (es. coordinate polari, sferiche, cilindriche)

Punto materiale
Descrivere il moto di un corpo di forma arbitraria può essere molto complicato.
- punto materiale
- coordinate
- traiettoria

Alcuni casi tridimensionali possono ridursi a bidimensionale

Traiettoria
Luogo dei punti dello spazio dove posso trovare il mio punto materiale
Le grandezze chiave sono posizione, tempo, velocità, accelerazione

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Se faccio tendere a zero l'intervallo di osservazione ($\Delta t \to 0$ (s))

Quindi sto facendo

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Rapporto incrementale, derivata di x rispetto al tempo

Questa grandezza prende il nome di velocità istantanea

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = v(t)$$

Non ho più un numero, è una velocità che si riferisce a cosa capita relativamente a un intervallo infinitesimo. È una informazione puntuale

Anche questa è in funzione del tempo

L'unità di misura della velocità è il m/s

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

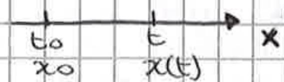
- legge matematica
- istante per istante
- m/s

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

- ci dà un numero
- inizio / fine
- m/s

Ricavare la legge oraria $x(t)$?

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$



$$\frac{dx}{dt} = v(t) \xrightarrow{\text{moltiplico per } dt} dx = v(t)\,dt$$

$$\longrightarrow \int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

$$x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

l'integrale di destra non lo so a priori, devo conoscere l'espressione di v

relazione integrale visione globale

$$\boxed{x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt}$$

So anche che:

$$\boxed{v(t) = \frac{dx}{dt}}$$

equazione differenziale → eq. puntuale

Queste due relazioni generali (insieme all'accelerazione) descrivono ogni moto della cinematica

Moto rettilineo uniformemente accelerato

$$\left.\begin{array}{l} t_2 - t_1 = \Delta t \\ v_2 - v_1 = \Delta v \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$

L'accelerazione media è il rapporto tra una differenza di velocità in una variazione di tempo
L'unità di misura dell'accelerazione è una unità di misura derivata. È il m/s^2

Per avere informazioni più precise facciamo tendere Δt a 0
$\Delta t \to 0$ (s), facciamo cioè

$$\boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv(t)}{dt} = a}$$

Questa grandezza prende il nome di accelerazione istantanea

$$dv(t) = a(t)dt$$

$$\int_{v_0}^{v(t)} dv(t) = \int_{t_0}^{t} a(t)dt$$

$$v(t) - v_0 = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt \rightarrow \boxed{v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt}$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \qquad v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)dt \qquad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

Devo conoscere x_0, t_0, v_0, a_0

Se l'accelerazione è costante:

$$\begin{cases} a(t) = a = \text{costante} \\ v(t) = v_0 + a\int_{t_0}^{t} dt \rightarrow v(t) = v_0 + a(t-t_0) \\ x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t}[a(t-t_0) + v_0]dt = x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)^2 \end{cases}$$

Cause $\rightarrow$ forme integrale
traiettoria $\rightarrow$ forma differenziale

Moto rettilineo smorzato

$v(t) = \frac{dx}{dt}$

$$\left.\begin{array}{l} a(t) = \frac{dv}{dt} \\ a = -kv \end{array}\right\} \frac{dv}{dt} = -kv$$

$k \to$ coeff. costante

$dv = -kv\,dt \to \frac{dv}{v} = -k\,dt \to \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -\int_{t_0}^{t} k\,dt$

$\log v |_{v_0}^{v}$

$\log v - \log v_0$

$\ln \frac{v}{v_0} = -k(t - \overset{=0}{t_0})$

$\ln \frac{v}{v_0} = -kt \to \frac{v}{v_0} = e^{-kt}$ dice come determinare la velocità in funzione del tempo

11/03/2016

Moto rettilineo smorzato: l'accelerazione dipende da v

Arrivo alle equazioni

$$\boxed{\begin{cases} v(t) = v_0 e^{-kt} \\ x = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt}) \end{cases}}$$

L'argomento di una funzione matematica deve essere un numero

Qui k ha le dimensioni di un inverso di un tempo

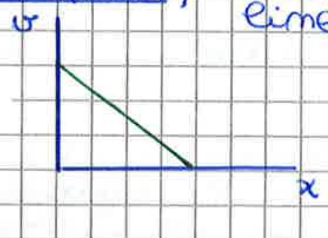
velocità in funzione dello spazio, decresce in modo lineare

$-k\cancel{v} = \cancel{v}\frac{dv}{dx}$

$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{x_0}^{x} -k\,dx$

$v - v_0 = -k(x)$ $\quad x_0 = 0\,(m)$

$\boxed{v(x) = v_0 - kx}$



$$\begin{cases} v(t) = v_0 e^{-kt} \\ x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt \end{cases}$$

$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_0 e^{-kt}\,dt$

$x(t) = x_0 + v_0\left(-\frac{1}{k}\right)(e^{-kt} - e^{-kt_0})$ $\quad t_0 = 0$

$x(t) = x_0 + v_0\left(-\frac{1}{k}\right)(e^{-kt} - 1)$

$x(t) = x_0 + \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})$

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

$v(t) = \dfrac{dx}{dt}$ $\quad a(t) = \dfrac{dv}{dt}$ $\quad a(t) = \dfrac{d^2x}{dt^2}$

$$\boxed{v(t)} = -A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)\cdot\omega = \boxed{-\underbrace{\omega A}_{\text{ampiezza}}\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)}$$

ampiezza $[\omega A] = \dfrac{m}{s}$

$$\boxed{a(t)} = -\omega A\cos(\omega t + \varphi)\cdot\omega = \boxed{-\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi)}$$

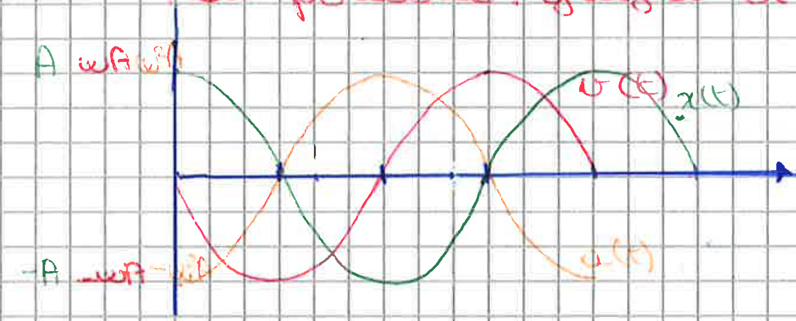
$[\omega^2 A] = \dfrac{m}{s^2}$

Sia $v(t)$ che $a(t)$ non sono costanti, lineari; hanno cioè una propria espressione

$$\boxed{a(t) = -\omega^2 x(t)}$$

L'accelerazione è uguale a meno di una costante alla funzione iniziale

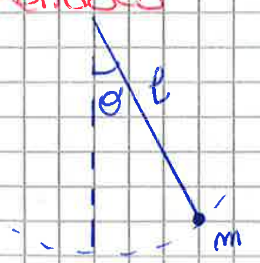
Moto periodico: grafico di x, v, a



$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$
$v(t) = -\omega A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$
$a(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi)$

Attenzione: non hanno la stessa ampiezza, sono normalizzate

Pendolo



$\theta(t) = \theta_0\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$

$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

Il moto del pendolo è un esempio di moto periodico

Con il tempo θ diventa sempre più piccolo, fenomeno dissipativo

Questo modello quindi è valido solo per un numero di oscillazioni

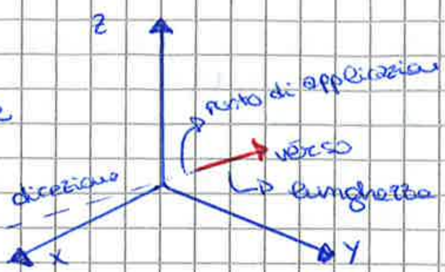
Oscillazioni piccole θ e senθ confrontabili

14/03/2016

Esercitazione

Vettore: segmento orientato, origine, direzione, verso, modulo identificato con la lettera minuscola

Sistema di coordinate

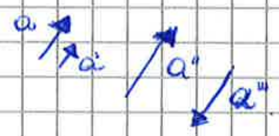


moltiplico per uno scalare, ottengo un vettore

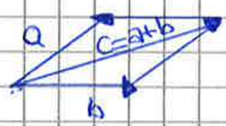
$\alpha a = a'$ $\quad 0 < \alpha < 1$

$\alpha a = a''$ $\quad \alpha > 1$

$\alpha a = a'''$ $\quad \alpha < 0$

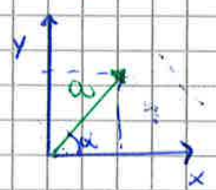


somma di vettori
- parallelogramma



$a - b = a + (-b)$

componenti cartesiane



$a_x = a\cos\alpha$

$a_y = a \operatorname{sen}\alpha$

$c = a + b \longrightarrow (c_x, c_y) = (a_x + b_x, a_y + b_y)$

prodotto scalare

prodotto dei moduli per il coseno dell'angolo compreso

$\longrightarrow$ associa ad $a \cdot b$ un numero (scalare)

$a \cdot b = b \cdot a = ab\cos\alpha$ $\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} & ab = 0 \\ \alpha = 0 & a \cdot b = ab \end{cases}$

prodotto vettoriale

genera un vettore

$c = a \times b = a \wedge b$

il modulo $c = ab \operatorname{sen}\alpha$

direzione $\perp$ al piano definito da a e b

verso ?

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 186

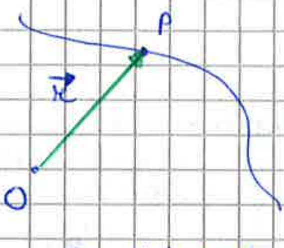
15/03/2016

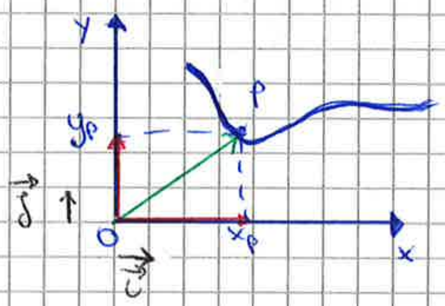
Moto nel piano

Concetto di vettore che individua il punto nel piano. Posizione individuata anche da coordinate (cartesiane e polari)

In 2D un punto P nello spazio può muoversi nel tempo. Come varia la sua posizione?

Scelgo un origine O la sua posizione è identificata da un vettore $\vec{r}$ (anche scritto in grossetto). Il raggio vettore identificato da modulo, direzione, verso





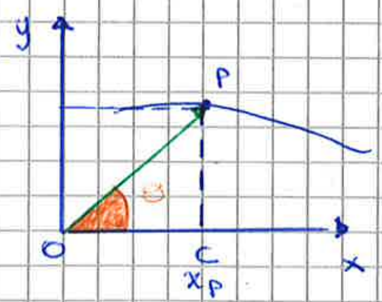
In un sistema cartesiano

$P(x_P, y_P)$

versore: vettore di modulo unitario $(\vec{i}, \vec{j})$

$\vec{r} = x_P\vec{i} + y_P\vec{j}$

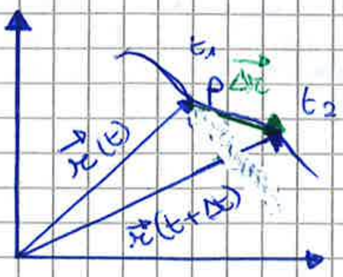
Un sistema alternativo è quello polare



Quanto è distante da O (r)
Orientazione (θ)

$P(r, \theta)$

$x_P = r\cos\theta$ $\qquad r = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$
$y_P = r\,\text{sen}\,\theta$ $\qquad \theta = \text{arctg}\left(\frac{y_P}{x_P}\right)$



il raggio vettore cambia nel tempo

$\vec{r}(t)$ identifica il generico vettore
$\vec{r}(t+\Delta t)$

$\left(\begin{array}{l}\Delta x = x_2 - x_1 \\ \Delta t = t_2 - t_1\end{array}\right)$ $\qquad \begin{array}{l}\vec{\Delta r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) \\ \Delta t = t_2 - t_1\end{array}$

Velocità media

$\left(v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$ $\qquad \vec{v}_m = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}$

è sempre un vettore perché divido un vettore per uno scalare. È orientato come $\vec{\Delta r}$. L'unità di misura è sempre m/s

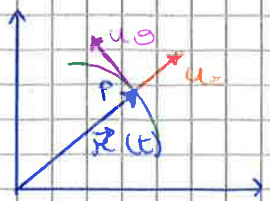
Velocità istantanea

$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$

17/03/2016

Moto nel piano - coordinate polari

La posizione di un punto materiale è individuato da r e θ



Abbiamo bisogno di rappresentare questo vettore. (Sottointendiamo il tempo t per non appesantire le formule)

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Useremo due versori ⊥ tra di loro, uno parallelo e concorde al vettore $\vec{r}(t)$, l'altro a esso ⊥.
Quindi la relazione diventa

$\vec{r} = r\vec{u}_r$ (sarebbe $\vec{r}(t) = r(t)\vec{u}_r$)

Analizziamo anche le altre equazioni

$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r(t)\cdot\vec{u}_r) \Rightarrow$

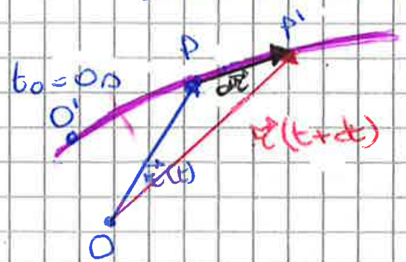
Se il punto si muove, cambia la derivata perché è in funzione del tempo
Quindi devo fare la derivata del prodotto

$\Rightarrow \boxed{\vec{v}(t) = \overbrace{\frac{dr}{dt}\cdot\vec{u}_r}^{v_r} + \overbrace{r(t)\frac{d\vec{u}_r}{dt}}^{v_\theta}}$ $\left(\vec{v}(t) = \dot{r}\vec{\lambda} + r\omega\vec{\mu}\right)$

$r\frac{d\theta}{dt}u_\theta$

Coordinate intrinseche

Supponiamo un punto P in moto su una traiettoria. Considero O che mi serve per definire la posizione di P. Dopo un istante infinitesimo siamo in P'



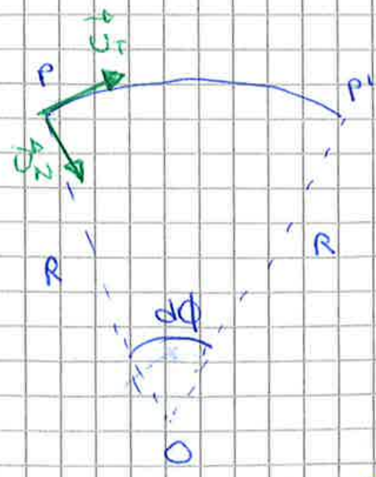
$s(t)$ = ascissa curvilinea
spazio percorso da P sulla traiettoria

$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$

$d\vec{r} = ds\,\vec{u}_t$

ds: posso confondere l'archetto come una circonferenza

$\vec{u}_t$: versore tangente alla traiettoria punto per punto



$$\boxed{ds = R\,d\phi} \qquad d\phi = \frac{ds}{R}$$

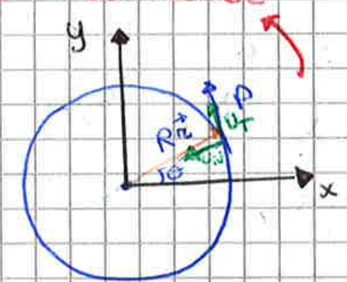
$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + v\,\frac{ds}{dt}\cdot\frac{1}{R}\,\vec{u}_N$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = \underbrace{\frac{dv}{dt}\vec{u}_t}_{\text{acc. tangenziale}} + \underbrace{\frac{v^2}{R}\vec{u}_N}_{\text{acc. centripeta/normale}}}$$

accelerazione: componente tangenziale e componente normale (centripeta) alla traiettoria
componente normale ⟶ tiene conto della variazione della direzione, verso
componente tangenziale ⟶ tiene conto della variazione del modulo di velocità

Se il punto si muovesse di un moto dove v = costante su una traiettoria sparisce il primo termine (v_T) della accelerazione, ma resta il secondo

Moto circolare



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{r}(t) = -R\,\vec{u}_N$$

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\cdot\vec{u}_t = R\,\frac{d\theta}{dt}\cdot\vec{u}_t$$

$\frac{d\theta}{dt}$ ⟶ variazione angolare nel tempo
velocità angolare ω

Nel moto circolare ω è la pulsazione o velocità angolare

ω = rad/s ci dà un tasso di variazione dell'angolo nel tempo

$\theta(t)$

$\frac{d\theta}{dt} = \omega \qquad \theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega(t)\, dt$

$\frac{d\omega}{dt} = \alpha \qquad \omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha(t)\, dt$

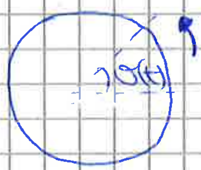
Analogia con $x(t)$, $v(t)$, a
Quindi posso analizzare dei casi particolari

- $\alpha = 0$ ... moto circolare uniforme
  $\omega(t) = \text{costante} = \omega_0$
  $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 (t - t_0)$ $\qquad t_0 = 0$
  $\theta(t) = \omega_0 t$ $\qquad \theta_0 = 0$

  $x(t) = R\cos(\omega t)$
  $y(t) = R\,\text{sen}(\omega t)$

  Equazioni del moto armonico se scompongo il punto sulla x e y ne ho due

- se $\alpha(t) = \text{costante} = \alpha$

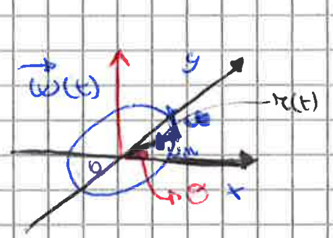


Equazioni simili al moto rettilineo unif. accelerato

$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$
$\theta(t) = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$

Supponiamo di considerare una direzione $\perp$ al piano dove sta avvenendo il moto
ω è anche una grandezza vettoriale



$v = \omega \wedge r$

$k = i \wedge j$

Sempre in senso antiorario parto da $\vec{i}$, poi $\vec{j}$ risultante $\vec{k}$

$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega \wedge r)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \wedge r + \omega \wedge \frac{dr}{dt}$

$\boxed{a = \alpha \wedge r + \omega \wedge v}$

$\frac{d\omega}{dt} = \alpha$ orientato come ω, stesso verso

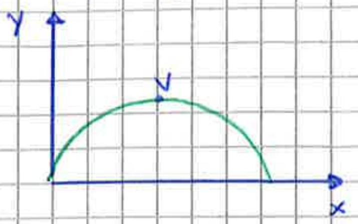
se $\omega = \text{cost} \rightarrow \alpha$ non c'è quindi
$a = \omega \wedge v$

Traiettoria: y in funzione di x

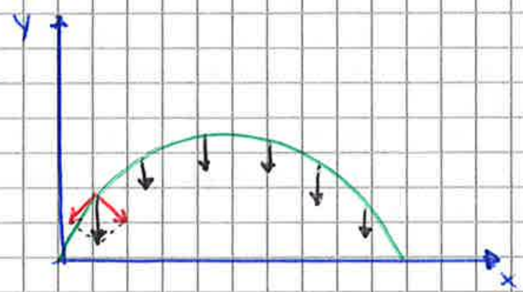
$t = \frac{x(t)}{v_0 \cos\theta}$ e lo inserisco in $y(t) = v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2$

$$\boxed{y = v_0 \sin\theta \frac{x}{v_0\cos\theta} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right)^2 = x \operatorname{tg}\theta - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta} x^2}$$

$\rightarrow$ parabola con concavità rivolta verso il basso



$\rightarrow$ vertice
$\rightarrow$ gittata



Punto per punto avrò un'accelerazione tangenziale e normale alla traiettoria, g è la risultante. Nel punto di max ho solo acc. normale, nel vertice c'è solo la velocità lungo x che è costante e quindi l'accelerazione è nulla

- Al variare del tempo v_y si annullerà, quando si annulla? cioè quando $v_0(t') = 0$?

$\rightarrow v_0 \sin\theta - g t' = 0 \rightarrow t' = \frac{v_0}{g} \sin\theta$ (metà del tempo di volo)

- Gittata: massima distanza che il proiettile raggiunge dal punto in cui è stato sparato

$y = 0$

$$0 = \operatorname{tg}\theta \cdot x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta} x^2$$

$$x\left(\operatorname{tg}\theta - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta} x\right) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2 v_0^2}{g} \cdot \operatorname{tg}\theta \cdot \cos^2\theta \end{cases}$$

$$x = \frac{2 v_0^2}{g} \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot \cos^2\theta = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta)$$

GITTATA massima $\theta = \frac{\pi}{4}$ $\quad x = \frac{v_0^2}{g}$

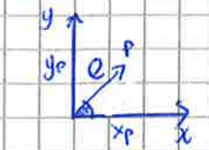
- $t' = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$ (tempo per il quale $v_0(t') = 0$)

$$y(t) = (v_0 \sin\theta)\left(\frac{v_0 \sin\theta}{g}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin\theta}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g}$$

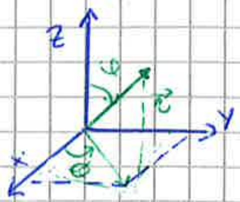
21/03/2016

Esercitazione



$P(x_P, y_P) \rightarrow$ cartesiane
$P \equiv (\rho, \theta) \rightarrow$ polari

$\rho = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$ $\quad x_P = \rho\cos\theta$
$\theta = \operatorname{arctg}\frac{y_P}{x_P}$ $\quad y_P = \rho\,\text{sen}\,\theta$



$x_P = \rho\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi$
$y_P = \rho\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi$
$z_P = \rho\cos\varphi$

Alcuni moti 3D possono diventare 2D $\rightarrow$ es. proiettile

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ $\quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ $\quad a_T = \frac{dv}{dt}$ accelerazione tangenziale

$a_N = \frac{v^2}{R}$ accelerazione normale

$\rightarrow$ la risultante in direzione dipende dalle intensità

Moto parabolico

$$\begin{cases} x(t) = v_0\cos\alpha\, t \\ y(t) = v_0\,\text{sen}\,\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

traiettoria
$$y(x) = \text{tg}\,\alpha\, x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg}(\alpha) - \frac{g}{v_0^2\cos^2(\alpha)}x = 0 \rightarrow x = \frac{v_0^2\,\text{sen}(\alpha)\cos(\alpha)}{g}$$

$t_h = \frac{v_0\,\text{sen}(\alpha)}{g}$ tempo necessario per raggiungere l'altezza massima

$x_0 = \frac{v_0^2}{g}\,\text{sen}(2\alpha)$ gittata

$t_v = \frac{2v_0\,\text{sen}(\alpha)}{g}$ tempo di volo

Moto circolare uniforme

R costante, v costante $\quad s(t) = vt$

$\rightarrow$ spazio percorso

$V = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi R f$ $\quad s = R\theta \rightarrow \theta(t) = \frac{s(t)}{R}$

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{ds(t)}{R\,dt} = \frac{1}{R}d(v\,t) = \frac{v}{R} = \text{cost}$$

$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = 0$ perché $\omega(t) =$ costante

$a = v_T\frac{dv}{dt}\Big|_{=0} + u_N\frac{v^2}{R}$ $\quad a = a_N = \omega^2 R = \omega v = \frac{v^2}{R}$

$$\begin{cases} \theta(t) = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) \\ \omega(t) = \frac{v}{R} = \text{cost} \\ a_N(t) = \omega^2 R \quad a_T = 0 \end{cases}$$

esercizio 31

$V_{ox} = 4/5\, v_0$

$V_y = 3/5\, v_0$

$D = 5800\ m$

$h = 150\ m$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{4}{5} v_0 t \\ y(t) = h + \frac{3}{5} v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D = \frac{4}{5} v_0 t_1 \\ 0 = h + \frac{3}{5} v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$\rightarrow t_1 = \frac{5D}{4v_0}$

$$x_y = 150 + \frac{3}{\cancel{5}} \cancel{v_0} \cdot \frac{5800 \cdot \cancel{5}}{4 \cancel{v_0}} - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \left(\frac{5800 \cdot 5}{4 v_0} \right)^2$$

$\rightarrow 150 + 4350 = \frac{4,12 \cdot 10^9}{v_0^2 \cdot 16} \rightarrow 16 \cdot 4500 \cdot v_0^2 = 4,12 \cdot 10^9$

- $v_0 = \sqrt{\frac{4,12 \cdot 10^9}{16 \cdot 4500}} = 239\ m/s$

- $t_1 = \frac{5800 \cdot 5}{4 \cdot v_0} = 30,3\ s$

- v_f? $\quad v_f = v_{ux} + v_{uy}$

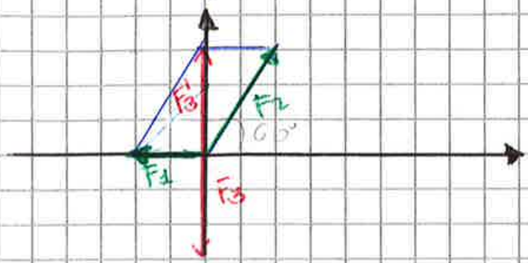
$v_{ux} = \frac{4}{5} \cdot v_0 = 191,2\ m/s$

$v_{uy} = \frac{3}{5} \cdot v_0 - 9,8 \cdot t_1 = -153,5\ m/s$

$v = \sqrt{191,2^2 + 153,5^2} = 245,2\ m/s$

Se la risultante delle forze è nulla si ha equilibrio quindi il corpo resta in quiete o si starà muovendo di moto rettilineo uniforme → condizioni di equilibrio statico o dinamico

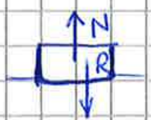
Esercizio: abbiamo un corpo soggetto a una forza $F_1 = 30$ N verso l'asse negativo della x e una forza $F_2 = 60$ N che forma un angolo di 60° con l'asse positivo della x. Determinare F_3 in modo che sia all'equilibrio



$F_1 = -30\, u_x$
$F_2 = 60 \cos\theta\, u_x + 60 \sin\theta\, u_y$
$|F_3| = \sqrt{60^2 - 30^2} = 30\sqrt{3}$ N
$F_3 = -30\sqrt{3}\, u_y$ N

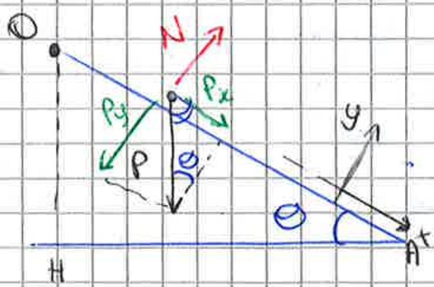
Reazioni vincolari

La reazione vincolare a cui è soggetto un corpo non è conoscibile a priori, dipende dalla situazione.



$R + N = 0$

Reazione vincolare: normale al piano
se il piano è inclinato c'è sempre una reazione normale alla superficie, in direzione diversa. Le forze non si equilibrano e l'oggetto si mette in moto.
Ogni oggetto sulla Terra è sottoposto alla forza peso $P = mg$



- Piano: vincolo
- Forza che esercita il piano, ortogonale al piano, forza normale

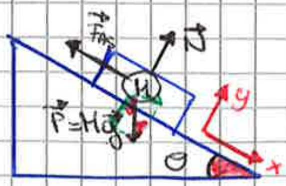
$\vec{R} = m\vec{a}$
$\vec{R} = \vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$
$\vec{P} = \vec{P}_x + \vec{P}_y = m\vec{g}$
$\vec{P}_x = |\vec{P}| \sin\theta\, \vec{i}$
$\vec{P}_y = |\vec{P}| \cos\theta\, \vec{j}$

$\vec{P}_x + \vec{P}_y + \vec{N}_y = m(\vec{a}_x + \vec{a}_y)$

x) $mg \sin\theta = m a_x$
y) $-mg \cos\theta + N = m a_y = 0$
$\underset{mg\cos\theta}{\downarrow}$

μ_s è detto coeff. di attrito statico ed il suo valore dipende dalla natura delle superfici di contatto

esempio



Cassa di legno di Massa $M = 6\ kg$ su un piano inclinato di 30°
la cassa sta ferma

$$\begin{cases} \vec{F} = m\vec{a} \\ \vec{P} = m\vec{g} \\ \vec{F}_{as} = -\mu_s N \vec{u} \end{cases}$$

$$\Sigma \vec{F}_x = m\vec{a}_x$$
$$\Sigma \vec{F}_y = m\vec{a}_y$$

$$\vec{N} + \vec{P} + \vec{F}_{as} = M\vec{a} = 0$$

(x) $\underbrace{M\vec{g}\,sen\theta}_{P_x} - \vec{F}_{as} = Ma_x = 0$

(y) $\underbrace{-M\vec{g}\cos\theta}_{P_y} + \vec{N} = Ma_y = 0$

$P_x \geq F_{as}$ si muove
$\cancel{Mg}\,sen\theta \geq \mu_s \cancel{Mg}\cos\theta$
$\mu_s \leq tg\theta$

$$F_{AS} = \mu_s N = \mu_s Mg\cos\theta$$

per $P_x \leq F_{AS}$ cosa succede? la cassa sta ferma

$$\cancel{Mg}\,sen\theta \leq \mu_s \cancel{Mg}\cos\theta \longrightarrow \underline{\mu_s \geq tg\theta}$$

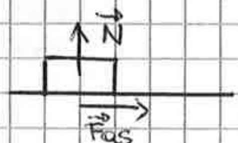
valore minimo per cui la cassa resti ferma è $tg\theta$

FORZE DI ATTRITO RADENTE DINAMICO

Cerco di spostare un oggetto, una volta messo in moto è + semplice da spostare. Questo vuol dire che la forza di attrito radente dinamico è < di quello statico

$\boxed{F_d = \mu_d N}$ $\boxed{\mu_d < \mu_s}$

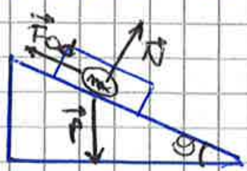
$\boxed{\vec{F}_{ad} = -\mu_d N \vec{u}}$



~~$\vec{F}_{ad} = \mu_d \vec{N}$~~ non c'è proporzionalità in direzione

esempio

Aumento l'angolo θ. L'oggetto si muove



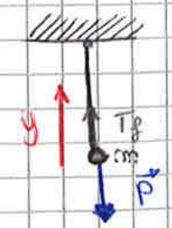
piano scabro ⟶ con attrito

$$\underbrace{\vec{N} + \vec{F}_{ad} + \vec{P}}_{\Sigma F} = m\vec{a}$$

x $\quad mg\,sen\theta - F_{ad} = ma$
y $\quad N - mg\cos\theta = 0$
$\quad F_{ad} = \mu_d N$

1/04/2016

Pendolo



Pendolo semplice, se lo perturbo dall'equilibrio inizia a muoversi

$\vec{F} = m\vec{a}$

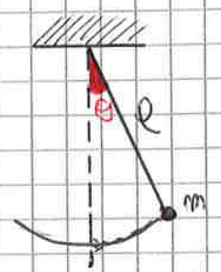
$\vec{T_f}$: tensione della fune

$\vec{P} + \vec{T_f} = 0$

fili: inestensibili, di massa nulla (trascurabile)

$y)\ -mg + T_f = 0 \qquad T_f = mg$

Se decido di perturbare l'equilibrio



$\vec{F} = m\vec{a}$

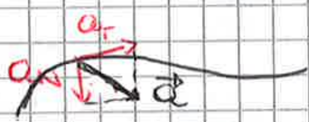
Abbiamo un moto lungo un arco di circonferenza

$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$

$a_T = \frac{dv}{dt}$

$a_N = \frac{v^2}{R}$

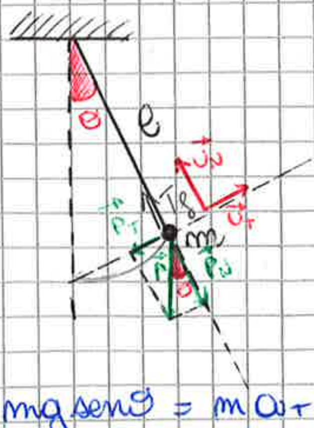
↓ raggio cerchio osculatore



$\vec{F} = m(\vec{a}_T + \vec{a}_N)$

$\vec{F}_T + \vec{F}_N = m\vec{a}_T + m\vec{a}_N$

Forze normali alla traiettoria: forze centripete



Usiamo le coordinate intrinseche

$t)\ \vec{F}_T = m\vec{a}_T$

$n)\ \vec{F}_N = m\vec{a}_N$

$|P_T| = mg\sin\theta$ forza di richiamo, sempre opposta ad a

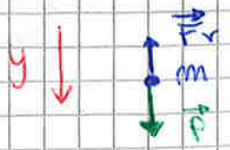
$|P_N| = mg\cos\theta$

$t)\ -mg\sin\theta = m a_T$

$n)\ -mg\cos\theta + T_f = m a_N$

$a_T = \frac{dv}{dt}$ ma il punto sta facendo un arco di circonferenza

quindi $a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}[R\omega]$



$$\vec{P} + \vec{F}_v = m\vec{a}$$

y) $mg - \beta v^{(t)} = ma^{(t)} = m\frac{dv}{dt}$

$$mg - \beta v = m\frac{dv}{dt}$$

$$-\beta\left(v - \frac{mg}{\beta}\right) = m\frac{dv}{dt}$$

$$-\frac{\beta}{m}\left(v - \frac{mg}{\beta}\right) = \frac{dv}{dt} \xrightarrow[\text{x per } dt]{\div \text{ per } (\ )} -\frac{\beta}{m}dt = \frac{dv}{v - \frac{mg}{\beta}}$$

$$\int_{v_0=0}^{v(t)} \frac{dv}{v - \frac{mg}{\beta}} = \int_{t_0=0}^{t} -\frac{\beta}{m}dt$$

$$\ln\left(v - \frac{mg}{\beta}\right)\Big|_{v_0}^{v} = -\frac{\beta}{m}t$$

$$\ln\frac{v - \frac{mg}{\beta}}{-\frac{mg}{\beta}} = -\frac{\beta}{m}t \longrightarrow \frac{v - mg/\beta}{-mg/\beta} = e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

$$v(t) - \frac{mg}{\beta} = -\frac{mg}{\beta}e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

$$v(t) = \frac{mg}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}\right)$$

Dinamica

$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

$\vec{p} = m\vec{v}$

$\vec{J} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\, dt = \Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0$ → studiare la forza nel tempo

LAVORO

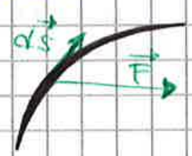
$\vec{F}$ spazio → studiare una forza nello spazio

Il prodotto tra la forza e lo spostamento infinitesimo è il lavoro infinitesimo → $F \cdot dx = d\mathcal{L}$
Il lavoro è la somma dei lavori infinitesimi ed è

$$\boxed{\mathcal{L} = \int_A^B F\, dx}$$

Il lavoro è scambiato dal sistema, è una interazione

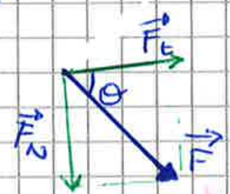
$\vec{F}$ e $\vec{ds}$ sono dei vettori. Se abbiamo una traiettoria complessa, il lavoro infinitesimo è pari al prodotto scalare della forza per lo spostamento infinitesimo



$$\boxed{d\mathcal{L} = \vec{F} \cdot \vec{ds} = F\cos\theta\, ds}$$

$$\boxed{\mathcal{L} = \int_A^B d\mathcal{L} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{ds}}$$ integrale di linea

Possiamo considerare la forza come somma di due vettori



$F_T = F\cos\theta$

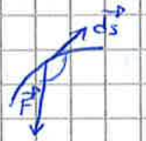
se F ha solo componente tangenziale → F_{max}
se " normale → $F = 0$

Lavorano solo le forze tangenziali, cioè quelle che sono responsabili della variazione del modulo di v

$\theta < \frac{\pi}{2}$ lavoro > 0 — la $v >$

$\theta > \frac{\pi}{2}$ lavoro < 0 — la $v <$

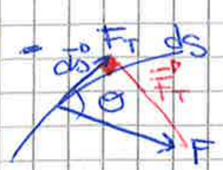
$\theta = 0$ lavoro $= 0$ — non cambia modulo



$\mathcal{L} = \int_A^B \sum_i F\, ds$

Energia cinetica

$$d\mathcal{L} = \vec{F}\cdot d\vec{s} = F_T\, ds = m a_t\, ds = m\frac{dv}{dt}\, ds = m v\, dv$$



$$\vec{F} = \vec{F}_T + \vec{F}_N = m\vec{a}_T + m\vec{a}_N \qquad F_t = m\frac{dv}{dt}$$

$$\int_A^B d\mathcal{L} = \int_A^B m v\, dv$$

$$\mathcal{L}_{A\to B} = \int_{v_A}^{v_B} m v\, dv = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = E_{k,B} - E_{k,A} = \Delta E_k$$

$E_k = \frac{1}{2} m v^2$ è l'energia cinetica misurata in Joule

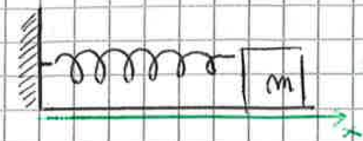
TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

Variazione dell'energia cinetica tra A e B è il lavoro effettuato nello spostamento

$$\boxed{E_c = E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2 v^2}{m} = \frac{p^2}{2m}}$$

Non è una legge oraria: descrive cosa succede nel punto iniziale e finale

Lavoro di una forza elastica



Ricordiamo la legge di Hooke:
$F = -k\Delta x\, u_x$

$$\mathcal{L} = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{s} = \int_A^B \ominus k x \vec{i}\; dx\, \vec{i} =$$

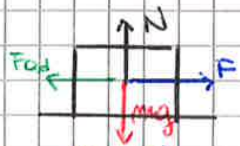
- sto andando a destra
- perché è un moto unidimensionale

$$= \int_{x_A}^{x_B} -kx\, dx = -k\frac{x^2}{2}\Big|_{x_A}^{x_B} = -\left(\frac{1}{2}k x_B^2 - \frac{1}{2}k x_A^2\right)$$

Come prima notiamo che dipende dalla posizione finale e iniziale

$\boxed{E_p = \frac{1}{2}k x^2}$ energia potenziale elastica

Lavoro di una forza radente



Ricordando che $F_{ad} = -\mu_a N \vec{u}_N$

$$\mathcal{L} = \int_A^B \vec{F}_{ad} \cdot d\vec{s} = \int_A^B -\mu_a N (\vec{u}_N \cdot d\vec{s}) =$$

sono sempre concordi tra loro; il risultato è ds

$$= \int_A^B -\mu_a N\, ds = -\mu_a N \int_A^B ds$$

dipende dal mio spostamento e dal mio percorso

N.B. non è possibile definire nessun tipo di energia potenziale ma devo definire caso per caso

Forze conservative

I primi due tipi di forze si dicono conservative perché dipendono solo dalla posizione finale e iniziale mentre le altre (come la terza) si dicono di tipo non conservativo.
Quindi se io inverto il senso di percorrenza (nel caso conservativo) il risultato sarà uguale e opposto e quindi partendo da un punto, applico una f. conservativa e torno in esso il lavoro totale sarà uguale a zero

$\oint F\, ds$ integrale di linea lungo una linea chiusa

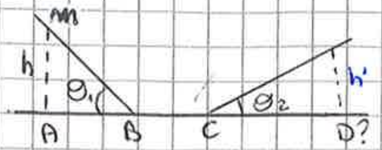
L'energia potenziale della F_p:

$E_p = mgz$

Se si usano due sistemi di riferimento per indicare i due punti (iniziale e finale) si parla di Differenza di potenziale

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 186

8/04/2016

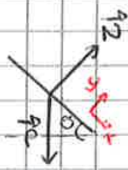


$\vec{F} = m\vec{a}$

Quanto vale l'altezza del punto D? (h')

Cosa succede nel primo tratto AB?

$\overline{AB}$



$\vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}$

x) $N = mg\cos\theta$

y) $\cancel{m}g\,sen\theta = \cancel{m}a$

Cinematica: in base alle condizioni iniziali ($t_0 = 0s$, ad altezza h rispetto al piano orizz ; $\vec{v}_0 = 0$)

l. tratto $\to \frac{h}{sen\theta}$

$v(t)$ $x(t)$

$v(t) = g\,sen\theta\,t$

$x(t) = \frac{1}{2} g\,sen\theta\,t^2$ $\quad t = \sqrt{\frac{2h}{sen\theta \cdot g\,sen\theta}}$

$v_B = ?$

$v(t)_B = g\,sen\theta \sqrt{\frac{2h}{g\,sen\theta}} = \sqrt{2hg}$

Posso anche usare il teorema dell'energia cinetica $\mathcal{L}_{A\to B} = E_{KB} - E_{KA}$ e il teorema di conservazione dell'energia $E_m = E_K + E_P$ (meccanica) $\quad \mathcal{L}_{NC} = E_{m_B} - E_{m_A}$

$E_{mA} = E_{KA} + E_{PA} = \frac{1}{2} m v_A^2 + mg y_A = 0 + mgh$

$E_{mB} = E_{KB} + E_{PB} = \frac{1}{2} m v_B^2 + mg y_B = \frac{1}{2} m v_B^2 + 0$

$E_{mB} - E_{mA} = \mathcal{L}_{NC}$

$\downarrow$

$\frac{1}{2} m v_B^2 - mgh = 0 \to \frac{1}{2} m v_B^2 = mgh \to v_B = \sqrt{2gh}$

1. farlo con piano inclinato
2. farlo con T. energia
3. cambiare sist riferimento $y \to y$ che ho ho zero in h
4. nel tratto cd attrito $\mu_d \to h''$

1. tratto BC moto rett. uniforme $v_B = v_C$

spazio $\to \frac{h'}{sen\theta_2}$

$$\begin{cases} a = g\,sen\theta_2 \\ v = v_B - g\,sen\theta_2 t \quad \to v = 0 \\ x = v_B t - \frac{1}{2} g\,sen\theta_2 t^2 \end{cases}$$

$\sqrt{2hg} = g\,sen\theta_2 t$

$t = \frac{\sqrt{2hg}}{g\,sen\theta_2}$

$x = \sqrt{2gh} \cdot \frac{\sqrt{2gh}}{g\,sen\theta_2} - \frac{1}{2} \cancel{g}\,\cancel{sen\theta_2} \cdot \frac{2hg}{g^{\cancel{2}}\,sen\theta_2^{\cancel{2}}}$

$x = \frac{2gh}{g\,sen\theta_2} - \frac{h}{sen\theta_2}$ $\quad \frac{h'}{sen\theta_2} = \frac{h}{sen\theta_2} \to h' = h$

Relazione tra forza e energia potenziale

$d\mathcal{L} = \vec{F} \cdot d\vec{s}$ $\qquad \mathcal{L}_{A \to B} = -\Delta E_p = -(E_{pB} - E_{pA})$

$$d\mathcal{L} = \underset{\substack{\downarrow \\ x,y,z}}{\vec{F}} \cdot d\vec{s} = -dE_p$$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$d\vec{s} = dx\, \vec{i} + dy\, \vec{j} + dz\, \vec{k}$$

$$d\mathcal{L} = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz$$

prodotto scalare di vettori $\perp = 0$

$$\oint d\mathcal{L} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint (F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz) = 0$$

$$\Updownarrow$$

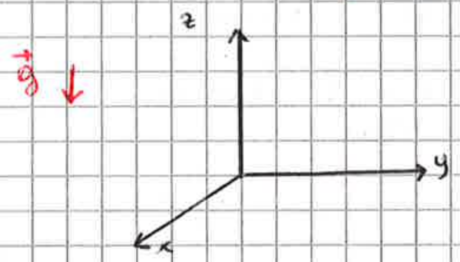
$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$ → allora esiste una funzione che è l'energia potenziale

$E_p(x,y,z)$

Ogni componente è pari alla derivata parziale della funzione

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

$E_p(x,y,z) = mgz$



$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = -\frac{\partial(mgz)}{\partial x} = 0$$

$$F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} = 0$$

$$F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} = -mg \qquad \vec{F} = -mg\vec{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} = \text{gradiente} = \vec{\nabla}$$

operatore che viene applicato a una funzione

La forza può essere espressa come

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p = -\text{grad}\, E_p$$

$$F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot E_p$$

$$F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}$$

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

L'unica forza che mi dà E_p è la forza peso

$\vec{F} = \vec{P} = -mg\vec{k} = m\vec{g}$ direzione $\vec{k}$

La forza peso è $\perp$ alle superfici che hanno lo stesso potenziale costante. Queste superfici si dicono equipotenziali.

Vettore $\perp$ a queste superfici è $\vec{k}$

visto interno, non ci sarà se lo guardo dal sistema di riferimento esterno

$$F' = ma' = m(a - a_{OO'}) = F - m a_{OO'}$$

Si vedrà quindi una forza apparente

12/04/2016

- traslazione

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\vec{OO'} = x_{O'}\vec{i} + y_{O'}\vec{j} + z_{O'}\vec{k}$

$\vec{r'} = x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'}$

i versori $\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}$ non variano nel tempo

$\vec{r} = \vec{OO'} + \vec{r'}$ funzione del tempo

$\vec{v} = \vec{v}_{OO'} + \vec{v'}$ velocità di O' rispetto al sistema fisso + velocità del punto materiale rispetto al sistema di riferimento mobile

$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{a'}$

$\vec{F} = m\vec{a}$
- sist. rif. fisso $\vec{F} = m\vec{a}$
- Sist. rif. mobile $\vec{F'} = m\vec{a'}$, $\vec{v'} = \frac{d\vec{r'}}{dt}$
  - $\vec{v}_{OO'}$ * = costante moto rettilineo uniforme dell'origine
  - $\vec{v}_{OO'} \neq$ costante **

* $\rightarrow \vec{a}_{O'} = 0$ $\quad \vec{a} = \vec{a'}$ la legge $F = ma$ è identica

L'accelerazione nulla. La velocità con cui si muove l'oggetto è nulla (sist. rif. fisso) o si muove con velocità $\vec{v'}$ (guardato dal sist. rif. mobile)

** dal sist. rif. mobile il corpo si muove con una certa accelerazione

$\vec{v}_{OO'} \neq$ cost $\quad \vec{a}_{OO'}$ $\qquad \vec{a} = \vec{a}_{OO'} + \vec{a'}$

$\vec{a'} = \vec{a} - \vec{a}_{OO'}$

$O'x'y'$ $\vec{F'} = m\vec{a'} = m(\vec{a} - \vec{a}_{OO'})$

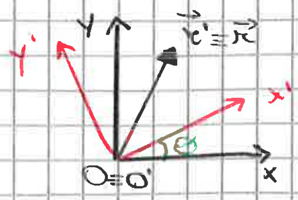
sistema di rif. mobile vede delle forze ma che non sono vere, sono apparenti dovute al fatto che il sistema non si muove di moto rett. uniforme

es. frenata violenta l'oggetto si muove

14/04/2016

Moti relativi:

$\vec v = \vec v_{O'} + \vec v' + \vec\omega \times \vec r'$ teorema delle velocità relative



$$\vec r = \cancelto{=0}{\vec r_{O'}} + \vec r'$$

$$\vec r = x\vec i + y\vec j + z\vec k$$

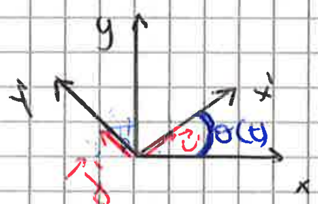
$$\vec r = x'\vec i' + y'\vec j' + z'\vec k'$$

$\vec i', \vec j' \longrightarrow t$

$$\vec v = \frac{d\vec r}{dt} = \frac{d}{dt}(\underbrace{\vec r_{O'}}_{=0} + \vec r') = \frac{d}{dt}(x'\vec i' + y'\vec j' + z'\vec k') =$$

$$= \frac{dx'}{dt}\vec i' + \underbrace{x'\frac{d\vec i'}{dt}}_{A} + \frac{dy'}{dt}\vec j' + \underbrace{y'\frac{d\vec j'}{dt}}_{B} + \frac{dz'}{dt}\vec k' + \underbrace{z'\frac{d\vec k'}{dt}}_{C} =$$

$$= v_x'\vec i' + v_y'\vec j' + v_z'\vec k' + A + B + C = \vec v' + ?$$



$$\vec i' = \cos\theta\,\vec i + \operatorname{sen}\theta\,\vec j$$

$$\vec j' = -\operatorname{sen}\theta\,\vec i + \cos\theta\,\vec j$$

$$\vec\omega = \omega\vec k$$

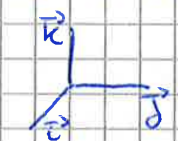
$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

$$\frac{d\vec i'}{dt} = -\overbrace{\frac{d\theta}{dt}}^{\omega}\operatorname{sen}\theta\,\vec i + \overbrace{\frac{d\theta}{dt}}^{\omega}\cos\theta\,\vec j$$

$$\frac{d\vec j'}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\cos\theta\,\vec i - \frac{d\theta}{dt}\operatorname{sen}\theta\,\vec j$$

$$\vec\omega\wedge\vec i' = \omega\vec k\wedge(\cos\theta\,\vec i + \operatorname{sen}\theta\,\vec j) = \omega\cos\theta\,\vec k\wedge\vec i + \omega\operatorname{sen}\theta\,\vec k\wedge\vec j$$

$$= \omega\cos\theta\,\vec j + \omega\operatorname{sen}\theta(-\vec i) = \frac{d\vec i'}{dt}$$



$$\vec\omega\wedge\vec j' = \frac{d\vec j'}{dt}$$

$$\vec\omega\wedge\vec k' = \frac{d\vec k'}{dt}$$

RELAZIONI DI POISSON

$$\vec\omega\wedge\vec i' = \frac{d\vec i'}{dt} \qquad \vec\omega\wedge\vec j' = \frac{d\vec j'}{dt}$$

$$\vec\omega\wedge\vec k' = \frac{d\vec k'}{dt}$$

A $\quad x'\frac{d\vec i'}{dt} = x'\vec\omega\wedge\vec i'$

B $\quad y'\frac{d\vec j'}{dt} = y'\vec\omega\wedge\vec j'$

C $\quad z'\frac{d\vec k'}{dt} = z'\vec\omega\wedge\vec k'$

15/04/2016

Teorema delle accelerazioni relative

Se considero solo un punto del sistema di riferimento mobile

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$$

$$\vec{a} = \underline{\vec{a}_{o'}} + \vec{a}' + \underline{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'} + \underline{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}'} + \underline{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')}$$

a_t accelerazione di tutti i punti solidali al sistema di rif. mobile, acc. di trascinamento

a_c accelerazione complementare o di Coriolis

$$\boxed{a = a' + a_t + a_c}$$

acc. del punto calcolata rispetto al sist. rif. mobile, accelerazione di trascinamento e l'accelerazione dei punti che si stanno muovendo intorno a te (sist. rif. mobile)

Formule riassuntive

$$\vec{r} = \vec{r}_{o'} + \vec{r}'$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{o'} + \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{o'} + \vec{a}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}' + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$$

Per le forze:

$F = ma$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_t + \vec{a}_c \qquad \vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_t - \vec{a}_c$$

moltiplico per m

$$\underbrace{m\vec{a}}_{\vec{F}} = m(\vec{a}' + \vec{a}_t + a_c) \qquad \underbrace{m\vec{a}'}_{\vec{F}'} = m(\vec{a} - \vec{a}_t - \vec{a}_c)$$

$$\vec{F}' = \vec{F} - \underbrace{\vec{F}_t - \vec{F}_c}_{\text{forze di inerzia}}$$

forza centrifuga

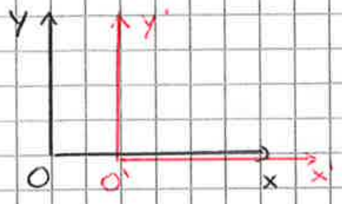
$F_{cent} = -m\omega \wedge (\omega \wedge r)$

esercizio

B?

$|\vec{v}_{H_2O}| = 2\ m/s$ $\quad L = 150\ m$

$|\vec{v}_B'| = 3\ m/s$ $\quad t = 2' = 120\ s$



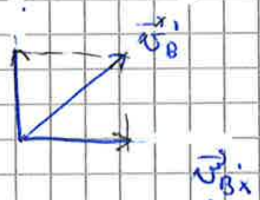
$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{r}\,' \\ \vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}\,' \end{cases}$$

$\vec{v}$ $\begin{cases} v_{Bx} = v_{O'x} + v'_{Bx} \\ v_{By} = \underbrace{\cancel{v_{O'y}}}_{=0} + v'_{By} \end{cases}$ $\qquad$ $\vec{r}$ $\begin{cases} x_B(t) = x_{O'}(t) + x'_B(t) \\ y_B(t) = \underbrace{\cancel{y_{O'}(t)}}_{=0} + y'_B(t) \end{cases}$

$\overset{150}{y_B(t)} = v_B\overset{120}{t} = y'_B(t) = v'_{By}\,t \longrightarrow v_{By} = 1,25\ m/s$

$x_B(t) = v_{O'x}t + v'_{Bx}t$

$\vec{v}'_{By}$



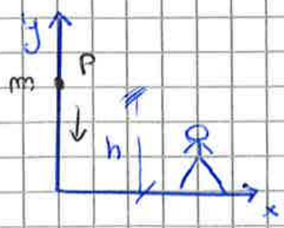
$v'_{Bx} = \sqrt{3^2 - 1,25^2}$
$\vec{v}'_{Bx} = 2,7\ m/s$

$x_B(t) = (\overset{2}{v_{O'x}} + \overset{2,73}{v'_{Bx}})\,\overset{120}{t}$

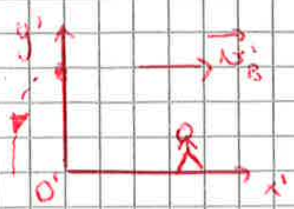
$\overline{AB} = x_B|_{2\,minuti} \simeq 567\ m$

esercizio

Cosa vede O' se si muove con velocità $v_{O'}$? (rett. unif.)



$$\begin{cases} x = 0 \\ v_x = 0 \\ a_x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_y = -gt \\ a_y = -g \end{cases}$$



$$\begin{cases} x'(t) = -v_{O'}t \\ v'_x(t) = -v_{O'} \\ a'_x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \\ v'_y(t) = -gt \\ a'_y = -g \end{cases}$$

19/04/2016

Moti relativi

$$\vec{a} = \vec{a}' + \underbrace{\vec{a}_{o'} + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{r}') + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{r}'}_{\vec{a}_t} + \underbrace{2\vec{\omega}\wedge\vec{v}'}_{\vec{a}_c}$$

$\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{r}')$ legato alla forza centrifuga chiamata così perché l'osservatore non inerziale vede

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_t - \vec{a}_c$$

Moti relativi - terra

Sistema inerziale: un buon esempio è un sistema con origine nel centro di massa del sistema solare ancorato a stelle fisse.
Noi siamo sistemi di riferimento solidali alla Terra ma non è inerziale (rotazionale)

Supponiamo $|\vec{\omega}|$ = costante, $T = 24$ ore

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 7{,}27\cdot10^{-5}$ rad/s $\qquad R = 6{,}37\cdot10^{6}$ m

sistema di riferimento: centro nella Terra, assi x e y ancorati alla Terra (ma stelle fisse)
Quindi a diventa $\left(\vec{a}_{o'} = 0,\ \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{r}' = 0\right)$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{r}') + 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}'$$

un punto vicino alla Terra è soggetto alla forza di gravità

$$g_0 = g + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{R}') + 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}'$$

acc. vista dall'esterno, dal sistema di rif. fisso

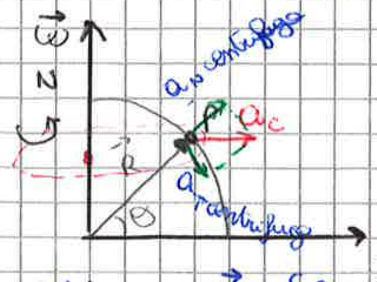
acc. gravità dal sistema di rif. terrestre

velocità di un oggetto rispetto al sistema terrestre

$$g = g_0 - \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{R}') - 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}'$$

FORZA CENTRIPETA

TERMINE FORZA DI CORIOLIS



↓ acc forza centrifuga

$$\vec{a}_c = -\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{R})$$

$\vec{\omega}\wedge\vec{R}$ ⊗

acc. centrifuga verso esterno

$\omega\wedge r = \omega\vec{k}\times\{R(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{k})\} = \omega R\cos\theta\,(\vec{k}\times\vec{i})$ $\qquad \vec{k}\times\vec{k} = 0$

$\omega\wedge(\omega\wedge r) = \omega\vec{k}\wedge(\omega R\cos\theta\,\vec{j}) = \omega^2R\cos\theta(-\vec{i}) = -\omega^2R\cos\theta\,\vec{i}$

$|\vec{a}_c| = |\omega^2R|\cos\theta = 3{,}3\cdot10^{-2}\cos\theta$ m/s^2

→ somma di tutte le forze esterne ed interne che agiscono su m_i

(i) → $\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i$

→ somma di tutte le forze esterne ed interne che agiscono su tutti i punti materiali

$$= \frac{\sum \vec{F}_i}{\sum m_i} = \underbrace{\sum_i \vec{F}_i^{(e)}}_{\vec{R}^{(e)}} + \underbrace{\cancel{\sum_{ij} \vec{F}_{ij}^{(i)}}}_{0}$$

si cancellano vettore nullo

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\vec{R}^{(e)}}{\sum m_i} \qquad \vec{a}_{CM} = \frac{\vec{R}^{(e)}}{M_{TOT}}$$

$$\boxed{\vec{R}^{(e)}_{CM} = M_{TOT}\, \vec{a}_{CM}}$$

Prima equazione cardinale dei sistemi → descrive una parte della dinamica legata ai punti materiali

Il centro di massa si sposta come un punto materiale in cui è concentrata tutta la massa del sistema su cui agisce la risultante delle forze esterne

$$\boxed{\vec{R}^{(e)}} = M_{TOT} \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}\big(\overbrace{M_{TOT}\vec{v}_{CM}}^{\vec{P}}\big) = \boxed{\frac{d\vec{P}}{dt}}$$

$\vec{R}^{(e)} = 0$

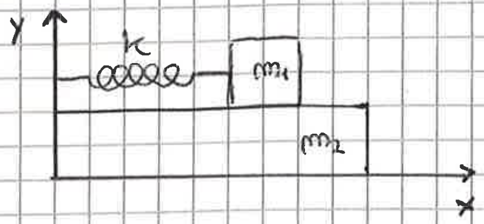
$\vec{a}_{CM} = 0$

$\vec{v}_{CM} = 0$

$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$ → $\vec{P}$ costante (quella totale)

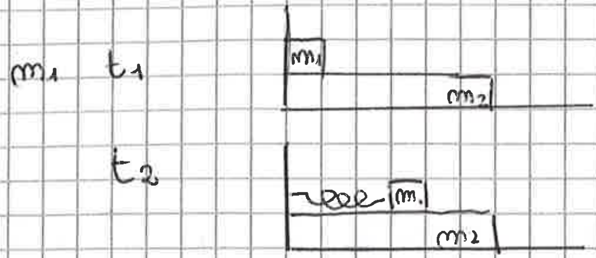
$$\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i = m_1\vec{v}_1 + \dots + m_n \vec{v}_n$$

③



$m_1 = 1\ kg$
$m_2 = 3\ kg$
$K = 50\ N/m$

$d = 0,1\ m$ situazione a riposo



la molla si espande e supponiamo che l'azione della molla si esaurisca quando essa ha raggiunto la lunghezza di riposo d

Calcolare dopo tale istante le velocità dei due corpi e descrivere il moto del CM del sistema
Non sono presenti attriti

Non ci sono forze esterne in direzione x
Quindi ho la conservazione della quantità di moto

$\vec{P} = cost \qquad \vec{P} = \sum m_i v_i$

$x \rightarrow m_1 v_{10} + m_2 V_{20} = 0$ situazione iniziale

$m_1 v_1 + m_2 V_2$ dopo che la molla si è espansa

① $\rightarrow \quad 0 = m_1 v_1 + m_2 V_2 = (m_1 + m_2) V_{CM}$
$\rightarrow 0\ m/s$

Forza elastica: interazione tra m_1 e m_2;
è una forza interna

Visto che non sono presenti attriti posso applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica

$E_m = cost$ no forze dissipative

$E_{CT} = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 \qquad E_p = \frac{1}{2} k x^2$

② $\frac{1}{2} k d^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_1 v_2^2$
inizio — fine

$v_1 = 0,6\ m/s$
$v_2 = -0,2\ m/s$

Quindi abbiamo dimostrato che

$$\boxed{\vec{M}_o^{(e)} = \frac{d\vec{L}_o}{dt}}$$

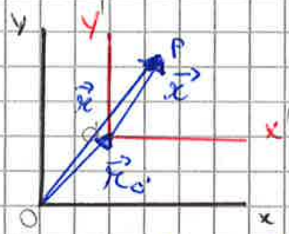
se polo rispetto al quale calcolo tutti i momenti è fisso!

$$\vec{R}^{(e)} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

- Se il polo si muove, ha una certa velocità, cambiano le derivate temporali

Il punto i-esimo può essere definito con due raggi vettori, uno in riferimento all'origine fissa e uno rispetto a quella mobile

Facendo un parallelismo con i moti relativi:



$$\vec{r} = \vec{r}_{o'} + \vec{r}'$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{o'}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

Ottengo che (in riferimento al punto i-esimo)

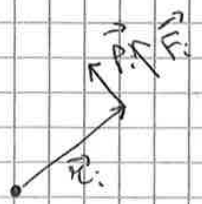
$$\vec{r}_{OF_i} = \vec{r}_o + \vec{r}_i$$

velocità del polo

$$\frac{d\vec{r}_{OF_i}}{dt} = \frac{d\vec{r}_o}{dt} + \frac{d\vec{r}_i}{dt} \qquad \vec{v}_i = \vec{v}_o + \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_o + \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i - \vec{v}_o$$



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\sum_i \vec{L}_i\right] = \frac{d}{dt}\left[\sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i\right] = \sum_i \left[\frac{d}{dt}(\vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i)\right] =$$

$$\sum_i \left[\underbrace{\frac{d\vec{r}_i}{dt}}_{\vec{v}_i - \vec{v}_o} \wedge m_i \vec{v}_i + \vec{r}_i \wedge \frac{d\vec{p}_i}{dt}\right] =$$

* $$\frac{d\vec{r}_i}{dt} \wedge m_i \vec{v}_i = [\vec{v}_i - \vec{v}_o] \wedge m_i \vec{v}_i = \underbrace{\vec{v}_i \wedge m_i \vec{v}_i}_{=0} - \vec{v}_o \wedge (\underbrace{m_i \vec{v}_i}_{\vec{p}})$$

$$\sum \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \wedge m_i \vec{v}_i\right) = \sum(-\vec{v}_o \wedge m_i \vec{v}_i) = -\vec{v}_o \wedge (\overbrace{\sum m_i \vec{v}_i}^{\vec{P}}) = -\vec{v}_o \wedge M_T \vec{v}_{CM}$$

Teorema di König per l'energia cinetica

$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$ $\qquad v_i^2 = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i$

ma per ogni particella v_i si può esprimere come

$\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_i'$

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i')(\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i')$$

$p' \to$ nulla se misurata nel sistema di rif. del CM

$\sum m_i v_i' \cdot v_{CM}$

$$= \sum \frac{1}{2} m_i \vec{V}_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \underbrace{\sum m_i \cancel{V_{CM}} v_i'}_{=0}$$

$$= \frac{1}{2} M_{TOT} \vec{V}_{CM}^2 + \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2}_{\to E'_{CM}}$$

Quanto vale $\vec{V}_{CM}$?

L'energia cinetica può essere scritta come somma di due en. cinetica (del CM e degli n punti risp al CM)

28/04/2016

Teorema dell'energia cinetica

Per un singolo punto materiale $d\mathcal{L} = \vec{F} \cdot d\vec{s}$

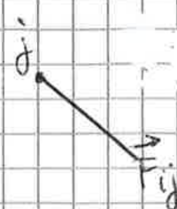
$$\mathcal{L}_{A \to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Per un insieme di punti materiali valgono considerazioni analoghe

$$\boxed{d\mathcal{L}_i = \vec{F}_i d\vec{r}_i = \vec{F}_i^{(e)} d\vec{r}_i + \vec{F}_i^{(int)} d\vec{r}_i = d\mathcal{L}_i^{(e)} + d\mathcal{L}_i^{(int)}}$$

$d\mathcal{L}_i^{(int)}$ è formato da lavori del tipo

$$\vec{F}_{ij} d\vec{r}_j + \vec{F}_{ji} d\vec{r}_i = \vec{F}_{ij} (d\vec{r}_j - d\vec{r}_i)$$
$$= \vec{F}_{ij} d\vec{r}_{i,j}$$



che sono associati a cambiamenti delle distanze relative dei punti

Quindi se ci sono cambiamenti delle distanze relative compaiono questi termini.

Devo sommare tutti i contributi delle particelle i,j

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 186