NUMERO: 1975A - ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Venezia Angela

MATERIA: Analisi complessa ed elementi di statistica
Prof. Codegone Nicola Gasparini - Bibbona

21/04/2016

Analisi complessa

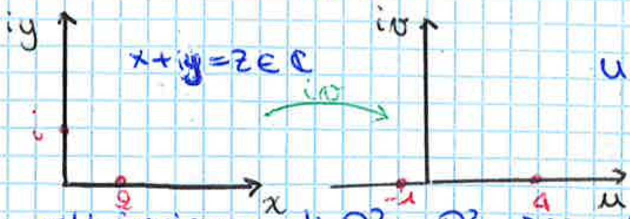
$w = f(z) \quad z \in \mathbb{C},\ w \in \mathbb{C}$

$w = z^2$

$f(z) = z^2$

$f(2) = 4$

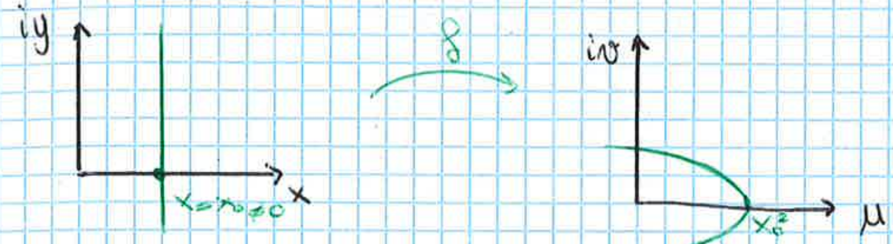
$f(i) = -1$



$u + iv = w \in \mathbb{C}$

Il grafico sarebbe un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to$ grafici

Ho un numero nel primo piano a cui corrisponde un risultato in uscita che metto nel secondo



fisso una retta

generale:

$f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i(2xy)$

$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$

fisso $x = x_0 \neq 0$

$w = z^2$

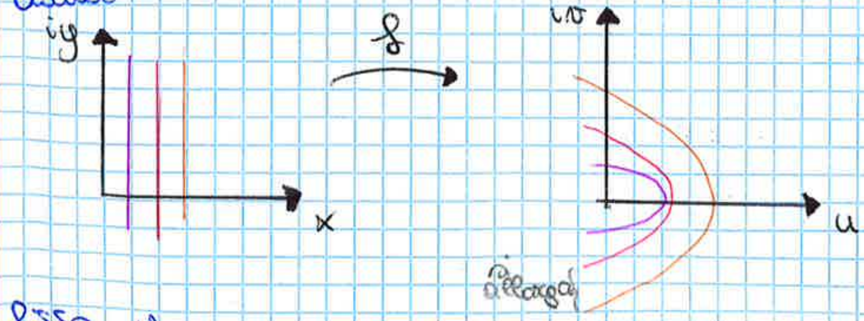
$u + iv = (x+iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u(x,y)} + \underbrace{2xy}_{v(x,y)}i$

$\begin{cases} u = x_0^2 - y^2 \\ v = 2x_0 y \end{cases}$

fisso $x_0 \to$ ricavo y

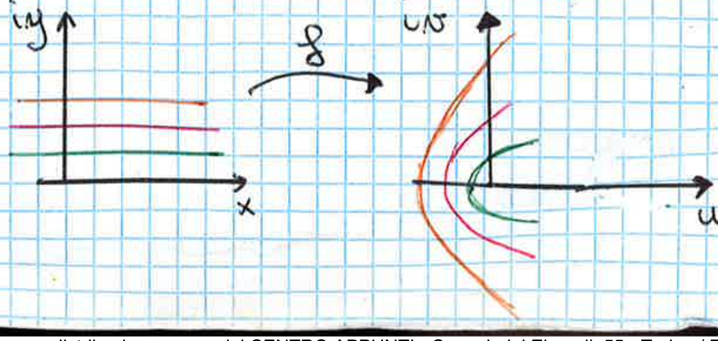
$\begin{cases} y = \dfrac{v}{2x_0} \\ u = x_0^2 - \dfrac{v^2}{4x_0^2} \end{cases}$ parabola con concavità verso sx

u → ascissa; v^2 → ordinata

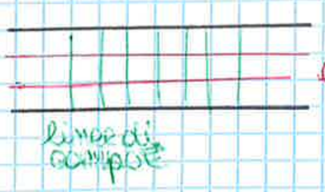


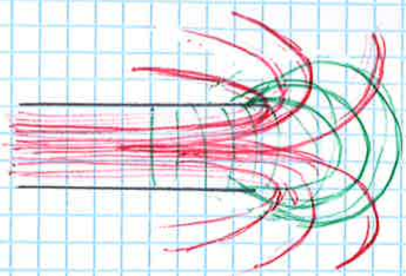
fisso y_0

$\begin{cases} x = \dfrac{v}{2y_0} \\ u = \dfrac{v^2}{4y_0^2} - y_0^2 \end{cases}$



CONDENSATORE INFINITO





Trasformazione che trasforma un dominio semplice in uno articolato → cambio di variabile

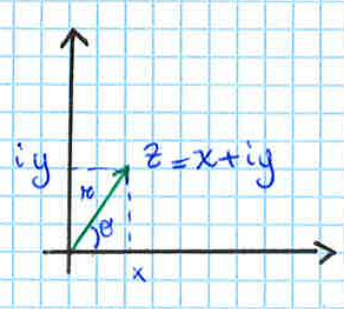
Richiami sui numeri complessi

FORMA CARTESIANA

$z = x + iy$ $x, y \in \mathbb{R}$

parte reale (x), parte immaginaria (y)

$i^2 = -1$



$(2+3i)+(1-i) = 3+2i$

$(2-i)(3+2i) = 8+i$

FORMA POLARE

$z = r(\cos\theta + i \,\text{sen}\,\theta)$ $r > 0$ $\theta \in \mathbb{R}$ $\theta = \arg z$ (argomento) $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$

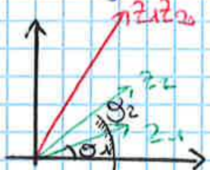
$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$

$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1+\theta_2))$

geometricamente

z_1 fissato

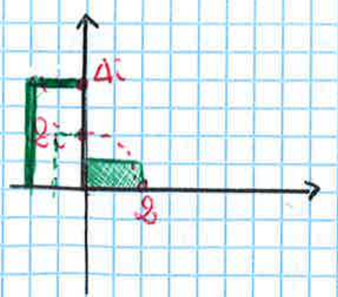
z_2 variabile



$z_1 \cdot z_2$ si ottiene da z_2 con una rotazione di θ_1 radianti e una dilatazione (OMOTETIA) di un fattore r_1

es. $f(z) = (2i)z \rightarrow 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{2})$ ($r = 2$, $\theta = \frac{\pi}{2}$)

$f(2) = 4i$ ruotato di $\frac{\pi}{2}$ e dilatato di 2



formule

$z = re^{i\theta}$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$

$z^n = r^n e^{in\theta}$

$\frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

• INTORNO DI ∞

il punto ∞ corrisponde al polo Nord; un intorno del polo nord è una calotta che se viene proiettata sul piano complesso è il complementare di una circonferenza di raggio r

$\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$ Più rimpicciolisco r più l'insieme è grande

Funzioni di variabile complessa a valori complessi

$$\underset{\text{valori complessi}}{w} = f(z) \qquad \overbrace{z \in \underset{\text{dominio}}{\Omega} \subset \mathbb{C}}^{\text{variabile complessa}}$$

es. $f(z) = z^2$ $\qquad \Omega = \mathbb{C}$

es. $f(z) = \frac{1}{z}$ $\qquad \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

separare parte reale e parte immaginaria

$z = x + iy$

$w = u + iv$

$w = f(z)$

$u + iv = \boxed{f(x+iy)}$

$f(z) = \frac{1}{z}$ $\qquad z = x + iy$

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \underbrace{\boxed{\frac{x}{x^2+y^2}}}_{u(x,y)} + \underbrace{\boxed{\frac{-y}{x^2+y^2}}}_{v(x,y)} i$$

riscrittura equivalente del numero in uscita

$$\begin{cases} u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \\ v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

es. $f(z) = e^z$ $\qquad (z = x + iy)$

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = \boxed{e^x \cos y} + \boxed{e^x \operatorname{sen} y}\, i$$

$$\begin{cases} u(x,y) = e^x \cos y \\ v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y \end{cases}$$

OSS 1) se $y = 0$ $\quad (z = x + i0)$ $\quad e^z = e^x$

2) e^z è periodica di periodo $2\pi i$: $e^{z+2\pi i} = e^z$

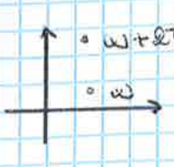
$$e^{z+2\pi i} = e^{x+iy+2\pi i} = e^x e^{i(y+2\pi)} = e^x[\underbrace{\cos(y+2\pi)}_{\cos y} + i \underbrace{\operatorname{sen}(y+2\pi)}_{\operatorname{sen} y}] = e^z$$

Logaritmo di un numero complesso

Se $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$

$w = \log z \xleftrightarrow{def} e^{w} = z$

se ne esiste 1 ne esistono ∞ perché periodica di $2\pi i$.



z deve essere ≠ da zero perché non riesco a ottenere (0,0) da

$$\begin{cases} u(x,y) = e^{x}\cos y \\ v(x,y) = e^{x}\sin y \end{cases}$$

non si annullano

Sia $z = re^{i\theta}$ $(r>0)$

cerchiamo $w = x+iy$

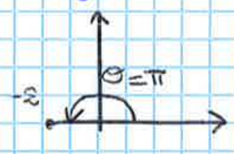
$$e^{x+iy} = re^{i\theta}$$

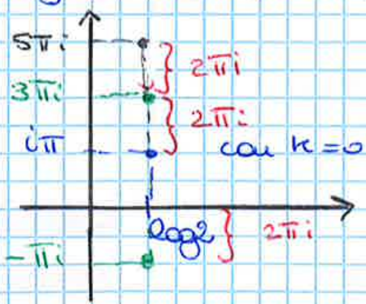
$$\boxed{e^{x}}e^{iy} = \boxed{r}e^{i\theta}$$

$$\begin{cases} e^{x} = r \\ y = \theta + 2k\pi \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \log r \\ y = \theta + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

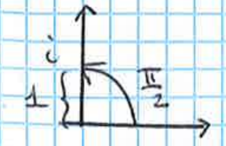
$$w = \log z = \log r + (\theta + 2k\pi)i$$
$$w = \log z = \log|z| + i(\arg z + 2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$$

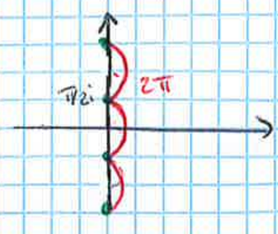
es. $\log(-2) = \log|-2| + i(\arg(-2) + 2k\pi) = \log 2 + i(2k+1)\pi \quad k \in \mathbb{Z}$





es. $\log i = \log|i| + i(\arg i + 2k\pi) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \quad k \in \mathbb{Z}$





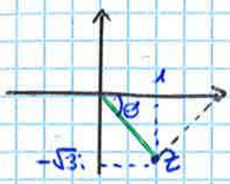
Esercitazione

1) $\dfrac{6}{(1+i)(2-i)} = \dfrac{6}{2-i+2i+1} = \dfrac{6}{3+i}\,\dfrac{(3-i)}{(3-i)} = \dfrac{6(3-i)}{9-(-1)} = \dfrac{18-6i}{10} =$

$= \dfrac{9}{5} - \dfrac{3}{5}i \qquad \begin{cases} Re\, z = 9/5 \\ Im\, z = -3/5 \end{cases}$

2) Forma trigonometrica ed esponenziale

a) $z = 1-\sqrt{3}i$



$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

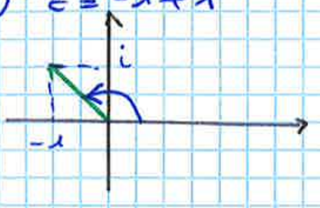
$\theta = \arg z = -\dfrac{\pi}{3}$ ad occhio

$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} y/x\,, & x>0 \\ \operatorname{arctg} y/x + \pi & x<0 \end{cases}$

$z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta) = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$z = r e^{i\theta} = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$

b) $z = -1+i$



$r = |z| = \sqrt{2}$

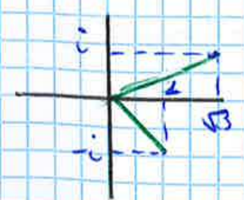
$\theta = \arg z = \frac{3}{4}\pi$

$z = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right]$

$z = \sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}$

c) $z = (1-i)(\sqrt{3}+i) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot 2e^{i\pi/6} = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$ $\quad \left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$

$z = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$



d) $z = i^{463} = a^z$

$z = \left[1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}\right]^{463} = e^{i\frac{463}{2}\pi} = e^{i\frac{3}{2}\pi}$

sia esp.
sia in forma esp

$463 = 460+3$
$= 4\cdot 115+3$
$i^{463} = i^{4\cdot 115+3} = 1\cdot i^3$
$e^{\frac{463}{2}\pi i} = e^{\frac{3}{2}\pi i}$

Complesso coniugato

$z = x+iy$

$\bar{z} = x-iy$

$z+\bar{z} = 2Re\,z$

$z-\bar{z} = 2i\,Im\,z$

$z\cdot\bar{z} = |z|^2 \qquad (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2$

$\neq$

$z^2 = x^2-y^2+2xyi$

5) Risolvere

a) $e^z = i$

b) $e^{iz} = 1$

$\log z = \log|z| + i(\arg z + 2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$

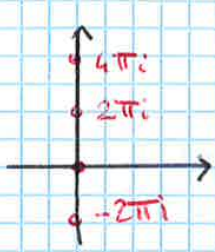
a) $e^z = i$

$z = \log i = \cancel{\log|i|} + i(\underbrace{\arg i}_{\frac{\pi}{2}} + 2k\pi) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$

b) $e^{iz} = 1 \qquad e^x = 1$

$iz = \log 1$

$\log 1 = \underbrace{\cancel{\log|1|}}_{=0} + i(\underbrace{\arg 1}_{=0} + 2k\pi) = 2k\pi i$



$iz = 2k\pi i$

$z = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Richiamo

$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$

$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$

6)

a) $\sin i = \frac{e^{ii} - e^{-ii}}{2i} = \frac{e^{-1} - e^{1}}{2i} = \frac{\sinh(-1)}{i} \overset{\text{funz. dispari}}{=} \frac{-\operatorname{senh} 1}{i} = i \operatorname{senh} 1$

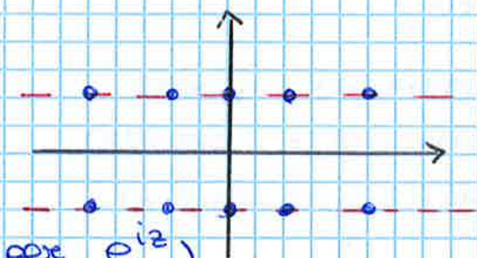
$\operatorname{senh}(iz) = i \operatorname{sen} z$

$\operatorname{senh}(-1) = i \operatorname{sen} 1$

b)

$\cos z = 2$

$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2$



$e^{iz} - 4 + e^{-iz} = 0$ (moltiplico per e^{iz})

$e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0 \qquad e^{iz} = t$

$t^2 - 4t + 1 = 0 \qquad t \in \mathbb{C}$

$t = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3}$

$* \; e^{iz} = 2 + \sqrt{3} \longrightarrow iz = \underbrace{\log(2+\sqrt{3})}_{\in \mathbb{C}} = \log|\underbrace{2+\sqrt{3}}_{2+\sqrt{3}}| + i(\underbrace{\arg(2+\sqrt{3})}_{0} + 2k\pi)$

$= \log(2+\sqrt{3}) + 2k\pi i \quad k \in \mathbb{Z}$

$z = 2\pi k - i \log(2+\sqrt{3}) \quad k \in \mathbb{Z}$

$* \; e^{iz} = 2 - \sqrt{3} \longrightarrow z = 2k\pi - i\log(2-\sqrt{3}) \quad k \in \mathbb{Z}$

Esercizi

2/05/2016

Rappresentare

a) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z-1-i| < 1\}$

b) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 1\}$

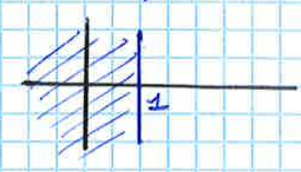
c) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z-\bar{z}|^2 > 2\}$

d) $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, z \neq 0 : |z| < 2, \frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{4}\}$

a) $|z-1-i| = |z-(1+i)|$ $\quad |z_1 - z|$ distanza tra z_1 e z_2

Ω (aperto, sempl. connesso)

b)



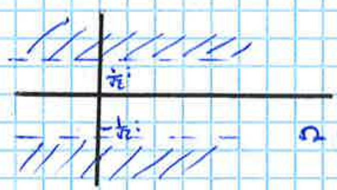
Ω (chiuso, sempl. connesso)

c) $|z-\bar{z}|^2 > 2$

$\left.\begin{array}{l} z = x+iy \\ \bar{z} = x-iy \end{array}\right\}$ $|z-\bar{z}| = |2iy| = 2|y|$ $\quad (|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|)$

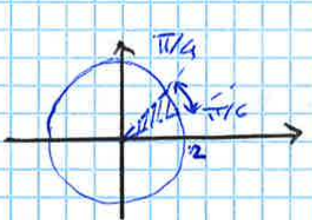
$(2|y|)^2 > 2$

$y^2 > \frac{1}{2} \longrightarrow y < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $y > \frac{1}{\sqrt{2}}$



Ω (aperto, non connesso)

d)



Ω (aperto, sempl. connesso)

2) Determinare dominio e zeri di

a) $f_1(z) = (z^4 - i)/(z^2+3)$

b) $f_2(z) = (e^{iz}-2)/(e^{iz}-1)$

c) $f_3(z) = (\operatorname{sen}(iz))/(z^2-1)$

d) $f_4(z) = (\cosh z - e^{z})/(z^2+1)$

e) $f_5 = e^{2z} + 2e^{z} - 8$

f) $f_6(z) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)$

Limite

$w = f(z)$

$\lim_{z\to z_0} f(z) = \ell$: $\forall$ intorno V di ℓ $\exists$ intorno U di z_0 tale che se $z \in U \setminus \{z_0\}$ allora $f(z) \in V$

$0 < |z - z_0| < \delta$ $\quad$ $|f(z) - \ell| < \varepsilon$

$(z_0, \ell \in \mathbb{C})$ lo stesso se $z_0 = \infty$ o $\ell = \infty$

f continua in z_0 se $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

Derivabilità (nel senso complesso)

f derivabile in $z_0 \in \mathbb{C}$ se esiste finito $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$

es. $f(z) = z^2$

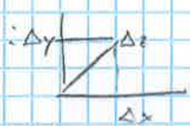
$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{(z_0+\Delta z)^2 - z_0^2}{\Delta z}$ $\quad$ $\lim_{\Delta z \to 0} (2z_0 + \Delta z) = 2z_0$

f è derivabile in ogni punto $z_0 \in \mathbb{C}$ $\quad$ $f'(z) = 2z$

es $f(z) = \operatorname{Re} z$ $\quad$ $f(2-3i) = 2$, $f(i) = 0$, $f(-1+i) = -1$ $\quad$ $z = x + iy \to f(z) = x$

$\frac{f(\underbrace{z_0}_{x_0+iy_0} + \underbrace{\Delta z}_{\Delta x + i\Delta y}) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\cancel{x_0} + \Delta x - \cancel{x_0}}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y}$

parte reale $\quad$ parte reale



$\Delta z = \underbrace{\Delta x}_{\to 0} + i\underbrace{\Delta y}_{\to 0} \to 0$

- se $\Delta y = 0$, $\Delta x = \Delta z \to 0$ $\quad$ $\lim_{\Delta z\to 0} \ldots 1$
- se $\Delta x = 0$, $\Delta y \xrightarrow{=\Delta z} 0$ $\quad$ $\lim_{\Delta z\to 0} \ldots 0$

$f(z) = \operatorname{Re} z$ non è derivabile (in senso complesso)

es $f(z) = \bar{z}$ $\quad$ $\frac{f(x_0+iy_0+\Delta x + i\Delta y) - f(x_0+iy_0)}{\Delta x + i\Delta y} =$

$f(x+iy) = x - iy$ $\quad$ $= \frac{x_0 + \Delta x - iy_0 - i\Delta y - x_0 + iy_0}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$ $\quad$ $\Delta y = 0$: 1 $\quad$ $\Delta x = 0$: -1 $\quad$ No!

es $f(z) = z$

$\frac{f(x_0+iy_0+\Delta x + i\Delta y) - f(x_0+iy_0)}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\cancel{x_0} - \cancel{x_0} + \cancel{iy_0} - \cancel{iy_0} + \Delta x + i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = 1$

$f'(z) = 1$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$

es $f(z) = 1/z$ analitica su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ $\quad = \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{u(x,y)} + i \underbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}_{v(x,y)}$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1(x^2+y^2) - x(2x)}{(x^2+y^2)^2} \stackrel{?}{=} \frac{-1(x^2+y^2)+y(2y)}{(x^2+y^2)^2} \\ -x^2+y^2 = -x^2+y^2 \text{ ok} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-x(2y)}{x^2+y^2} = -\frac{y(2x)}{x^2+y^2} = -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \text{Ok} \end{cases}$$

Richiamo

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$\vec{E}(x,y) = (E_1(x,y), E_2(x,y))$

$\text{rot}\, \vec{E} = \left(\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y}\right)\vec{k}$

$\text{div}\,\vec{E} = \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y}$

$\vec{E}$ è irrotaz. se $\text{rot}\,\vec{E} = 0 \longleftrightarrow \frac{\partial E_2}{\partial x} = \frac{\partial E_1}{\partial y}$

$\vec{E}$ è solenoidale se $\text{div}\,\vec{E} = 0 \longleftrightarrow \frac{\partial E_1}{\partial x} = -\frac{\partial E_2}{\partial y}$

$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) \longleftrightarrow (u(x,y), v(x,y))$

$f(x-iy) = u(x,y) - iv(x,y) \longleftrightarrow (u(x,y), -v(x,y))$

f è analitica $\longleftrightarrow (u,-v)$ $\begin{cases} \text{è irrotazionale } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \text{è solenoidale } \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$

eq. Maxwell elettrostatica $\begin{cases} \text{rot}\,\vec{E} = 0 \\ \text{div}\,\vec{E} = 4\pi\rho \end{cases}$ ← densità di carica

In una regione senza cariche $\vec{E}$ è irrotaz. e solenoidale

Integrali di linea

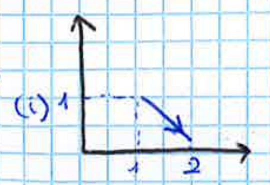
Una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ $\qquad \mathbb{C} \longleftrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $\underset{(x+iy)}{z} \longleftrightarrow (x,y)$

$\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a,b]$

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

$\gamma([a,b]) \subset \mathbb{C}$

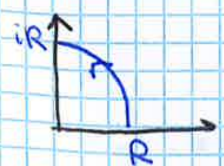
es



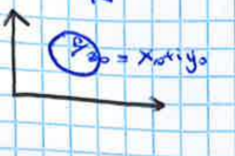
$\begin{cases} x = t \\ y = 2-t \end{cases}$ $\quad t \in [1,2]$

$\gamma(t) = x(t) + iy(t)$
$z(t) = t + i(2-t)$

es.



$\begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\sin t \end{cases}$ $\quad z(t) = R\cos t + iR\sin t$
$z(t) = Re^{it}$ $\quad t \in [0, \pi/2]$



$\begin{cases} x(t) = x_0 + R\cos t \\ y(t) = y_0 + R\sin t \end{cases}$ $\quad z(t) = x(t) + iy(t)$
$z(t) = z_0 + Re^{it}$

es $\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz$ $\quad\gamma$ come prima

$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}} Rie^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} dt = i2\pi \neq 0$

$\int_\gamma f(z(t))\cdot z'(t)\,dt$

es $\int_\gamma z^k\,dz$ $\quad\gamma$ come sopra $\quad k \in \mathbb{Z}$

$= \int_0^{2\pi} (Re^{it})^k \cdot Rie^{it}\,dt = \int_0^{2\pi} R^{k+1}\, i e^{it(k+1)}\,dt = R^{k+1}\, i \int_0^{2\pi} e^{it(k+1)}\,dt =$

se $k \neq -1$ $\qquad \cos(2\pi(k+1)) + i\,\mathrm{sen}(2\pi(k+1))$

$= R^{k+1}\, i \left[\frac{e^{it(k+1)}}{i(k+1)}\right]_0^{2\pi} = R^{k+1}\, i\, \frac{e^{2\pi i(k+1)} - e^0}{i(k+1)} = 0 \quad \forall k \neq -1$

$\int_\gamma z^k\,dz = \begin{cases} 0 & k \neq -1 \\ 2\pi i & k = -1 \end{cases}$ perché periodico $\rightarrow$ esempio prima

esempio $k = -2$

Funzioni elementari

polinomi
esponenziali
$\sin z, \cos z, \sinh z, \cosh z$

} funzioni analitiche su $\mathbb{C}$

Proprietà
- Somma di funz. analitiche $\rightarrow$ analitiche
- Prodotto
- Quoziente

es $f(z) = \frac{\overset{\text{an.}}{e^z}\ \overset{\text{an.}}{\mathrm{sen}\,z}}{\underset{\text{an}}{z^2 - 5}}$ $\quad$ analitica su $\mathbb{C} \setminus \{\pm\sqrt{5}\}$

NON ANALITICHE : $\bar{z}$, $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $|z|^2 = x^2 + y^2 + i\phi$

irrotazionale $\rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y}$

sono equivalenti $\qquad (u,-v) \rightarrow -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$

$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \longleftrightarrow (u(x,y), -v(x,y))$ rot $= 0$ div $= 0$ $\longleftrightarrow (u,-v), (v,u)$ sono irrotazionali

es $f(z) = \cos(e^{z^2})$ analitica su $\mathbb{C}$

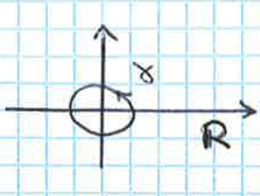
$f'(z) = -\mathrm{sen}(e^{z^2}) \cdot e^{z^2} \cdot 2$

es $f(z) = \frac{1}{\mathrm{sen}\,z}$ analitica su $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{k\pi\}$ $k \in \mathbb{Z}$

es

1) $\int_\gamma z\,dz = 0$

$f(z)$ analitica su $\Omega = \mathbb{C}$ (sempl. connesso)



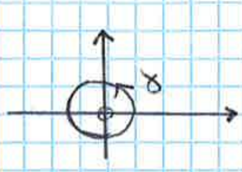
$(f'(z) = 1)$

2) $\int_\gamma z^k\,dz = 0$ $(k \in \mathbb{N})$ (come sopra)

$z^k = f(z)$

3) $\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$

$f(z)$ analitica in $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (non sempl. connesso)

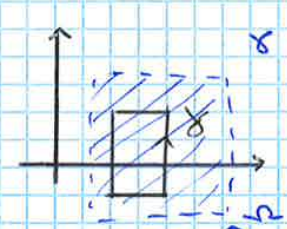


4) $\int_\gamma \frac{1}{z^2} = 0$ (per calcolo diretto, non per il T. di Cauchy)

$f(z)$ analitica su $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (non sempl. connesso)

5) $\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz$

$f(z)$ analitica in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$



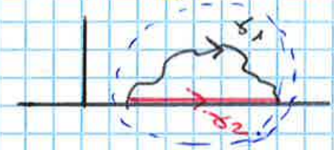
$f(z) = 1/z$ è analitica in Ω che è sempl. connesso e contiene γ

Ω non contiene l'origine

$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 0$ per il T. di Cauchy applicato con Ω

conseguenze del teorema di Cauchy

1) $\begin{cases} \Omega \text{ sempl. connesso} \\ f(z) \text{ analitica in } \Omega \end{cases} \to \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \quad \forall \gamma_1, \gamma_2$ in Ω con gli stessi estremi

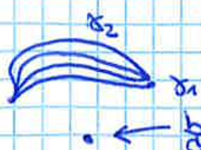


2) se $f(z)$ analitica in Ω (anche non sempl. connesso → può avere buchi)

$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$ se γ_1, γ_2 si possono deformare l'uno nell'altro con continuità rimanendo in Ω

es.

$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$



Dimostrazione

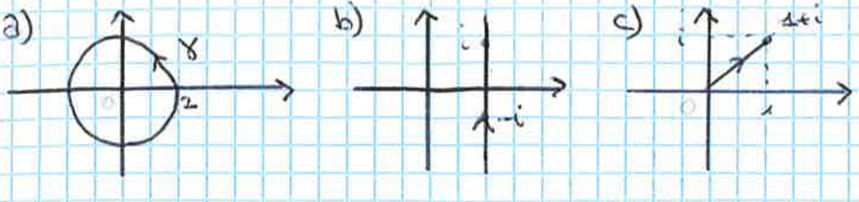
$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $f(z)$ analitica in Ω

$\begin{cases} \int_a + \cancel{\int_f} - \int_c + \cancel{\int_g} = 0 \\ \cancel{\int_g} - \int_d + \cancel{\int_f} + \int_b = 0 \end{cases} \to \int_a + \int_b = \int_c + \int_d$

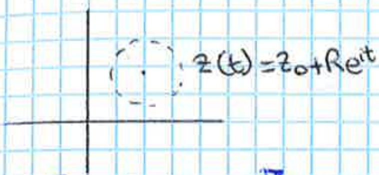
percorsi in verso opposto

Esercizi

3)
$\int_\gamma (3\bar{z}+2)\,dz$ a) b) c)



a)



$z(t)=2e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$

$dz=z'(t)dt=2ie^{it}dt$

$\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$

$\overline{e^{it}}=e^{-it}$

$$\int_\gamma (3\bar{z}+2)\,dz=\int_0^{2\pi}(3\cdot\overline{2e^{it}}+2)\,2ie^{it}dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}(6e^{-it}+2)\,2ie^{it}dt=\int_0^{2\pi}(12i+4ie^{it})dt=\underbrace{12i\int_0^{2\pi}1\,dt}_{=24\pi i}+4i\int_0^{2\pi}e^{it}dt$$

$$\left[\frac{e^{it}}{i}\right]_0^{2\pi}=\frac{e^{2\pi i}-e^{0}}{i}=0$$

$=24\pi i$

Oppure

$\int_\gamma 3\bar{z}+\int_\gamma 2$ ← $=0$ per Cauchy (analitico)

$\int_0^{2\pi}(3\cdot 2e^{-it})\,2ie^{it}\,dt$

b)
$z(t)=x(t)+iy(t)=it$
$dz=z'(t)dt=i\,dt$

$\begin{cases}x(t)=0\\ y(t)=t\end{cases}$ $t\in[-1,1]$

$$\int_\gamma(3\bar{z}+2)\,dz=\int_{-1}^{1}[3(-it)+2]\,i\,dt=\int_{-1}^{1}(3t+2i)\,dt=\left[\frac{3}{2}t^2+2it\right]_{-1}^{1}=4i$$

c) $\begin{cases}x(t)=t\\ y(t)=t\end{cases}$ $t\in[0,1]$

$z(t)=x(t)+iy(t)=(1+i)t$
$dz=z'(t)dt=(1+i)\,dt$

$$\int_\gamma(3\bar{z}+2)\,dz=\int_0^1(3(1-i)t+2)(1+i)\,dt=\int_0^1[6t+2(1+i)]\,dt=$$

$$=[3t^2+2(1+i)t]_0^1=3+2(1+i)=5+2i$$

alternativa

parametrizzo il modulo

$z(t)=te^{i\frac{\pi}{4}}$ $t\in[0,\sqrt{2}]$

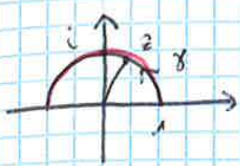
$dz=z'(t)dt=e^{i\pi/4}dt$

$$\int_\gamma(3\bar{z}+2)=\int_0^{\sqrt{2}}(3te^{-i\pi/4}+2)e^{i\pi/4}dt=\int_0^{\sqrt{2}}(3t+2e^{i\pi/4})\,dt=$$

$$\left[\frac{3t^2}{2}+2e^{i\pi/4}t\right]_0^{\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}e^{i\pi/4}=3+2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=5+2i$$

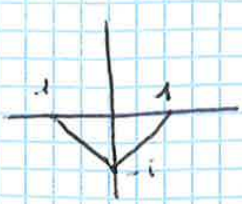
5) $\int_\gamma z \cos z \, dz$

a)

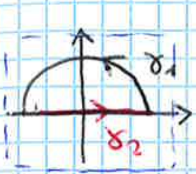


b)

c)



a) $\int_\gamma f(z)\,dz \to$ analitica su $\mathbb{C}$



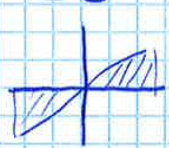
$\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} = 0$

$\int_{\gamma_1} = -\int_{\gamma_2}$ $\qquad z(t) = t \quad dz = dt \quad z \in [-1, 1]$

se parametrizzo

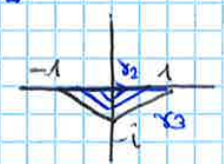
γ_1) $z(t) = e^{it}$ $\quad e^{it}\cos(e^{it}) \to$ difficile

$-\int_{-1}^{1} \underbrace{t \cos t}_{\text{dispari}} \, dt = 0$ $\qquad$ oppure $\int t\cos t = t \operatorname{sen} t - \int \operatorname{sen} t \, dt$



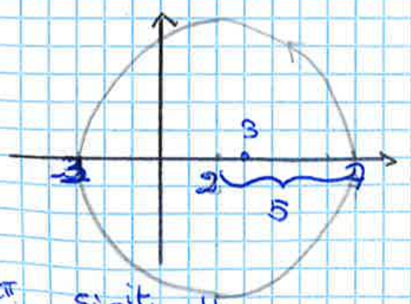
b) $\int_{\gamma_2} = 0$ $\qquad \int_{\gamma_1} = \int_{\gamma_2}$

c)



deformo $\to \int_{\gamma_3} = \int_{\gamma_2} = 0$

6) $\int_\gamma \frac{1}{z-3}\,dz$ $\qquad f(z)$ analitica su $\mathbb{C} \setminus \{3\}$



$\boxed{\text{Calcolo diretto}}$ $\qquad z(t) = z_c + Re^{it}$

- $z(t) = 2 + 5e^{it} \quad t \in [0, 2\pi]$

$dz = z'(t)\,dt = 5ie^{it}\,dt$

$\int_\gamma \frac{1}{z-3}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+5e^{it}-3} \cdot 5ie^{it}\,dt =$

$\int_0^{2\pi} \frac{5ie^{it}}{5e^{it}-1}\,dt$

- Posso deformarla con centro in 3

$\tilde{\gamma}$ circonf. centrata in 3 $\qquad z(t) = 3 + 5e^{it}$

$\int_\gamma = \int_{\tilde{\gamma}} \to \int_\gamma \frac{1}{z-3}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{3}+\cancel{5e^{it}}-\cancel{3}} \cdot \cancel{5}i\cancel{e^{it}}\,dt = 2\pi i$

9/05/2016

Formula di Cauchy per le derivate

• Formula di Cauchy : $\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = 2\pi i\, f(z_0)$

non dipende da z se derivo risp. a z

$f(\zeta)\ \frac{1}{\zeta - z}$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta \qquad \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z)^2}$$

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3}\, d\zeta \qquad \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{(\zeta - z)^2} = \frac{2}{(\zeta - z)^3}$$

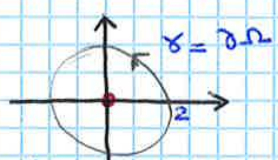
$$f^{n}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta$$

f analitica

$\boxed{\text{Conseguenza}}$: se f è analitica (in Ω) allora f è derivabile infinite volte

es.

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z^3}\, dz \qquad \text{dove}$$



se non ci fosse il denomin. sarebbe 0
Ma si annulla in zero il denominatore: in 0 abbiamo una singolarità

$$f^{n}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta$$

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z^3} \qquad f(z)$$

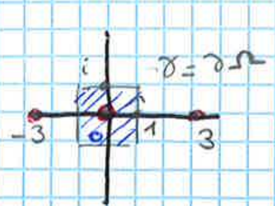
$z_0 = 0$
$n+1 = 3$
$n = 2$

$$= \frac{2\pi i}{2!}\, f''(0) = \frac{2\pi i}{2}(-1) = -\pi i$$

$f'(z) = -\operatorname{sen} z \qquad f''(z) = -\cos z$

es.

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^2(z^2-9)}\, dz$$



$z = 0 \qquad z = \pm 3$

se non ci fosse $z^2 \longrightarrow \int = 0$

Si può risolvere mettendo in evidenza z^2
(un solo fattore a denominatore)

$$\int \frac{\frac{e^z}{(z^2-9)}}{z^2}\, dz = \qquad f(z)$$

$$= \frac{2\pi i}{1!}\, f'(0) = -\frac{2\pi i}{9}$$

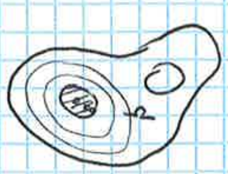
$\begin{cases} z_0 = 0 \qquad n+1 = 2 \longrightarrow n = 1 \\ f'(z) = \dfrac{e^z(z^2-9) - 2z e^z}{(z^2-9)^2} = \dfrac{e^z(z^2-2z-9)}{(z^2-9)^2} \end{cases}$

$f'(0) = -\frac{1}{9}$

Legame funzioni analitiche - serie potenze

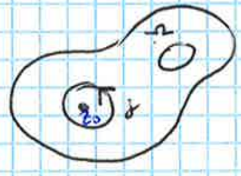
1) La somma di $\sum a_n (z-z_0)^n$ è una funzione analitica in $\{ z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < R \}$ ← raggio convergenza

2) Se $f(z)$ è una funzione analitica in un aperto Ω e $z_0 \in \Omega$ allora $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$ in un qualsiasi cerchio aperto contenuto in Ω e centrato in z_0



Uso Cauchy

$$f^n(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$



γ: qualsiasi curva chiusa contenente z_0

es.

- $f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum (-1)^n x^{2n}$

$\frac{1}{-x^2+1}$ per $x^2 < 1$ $\quad -1 < x < 1$

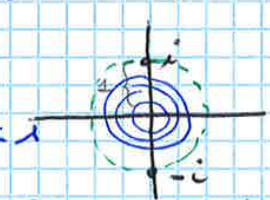
$\hookrightarrow \sum (x^2)^n$

$R = 1$

- $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ analitica tranne in i e $-i$

$\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$

$f(z) = \sum (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$ conv per $|z| < 1$

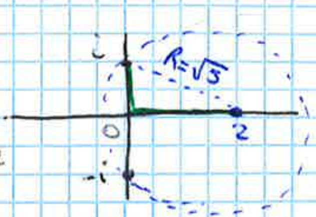


$(R = 1) \longrightarrow$ posso aumentare il cerchio centrato in 0 fino quasi a toccare i e $-i$ $\to R = 1$

es. $\frac{1}{1+z^2} = \sum a_n (z-2)^n$

Sviluppo di Taylor centrato in $z_0 = 2$

$R = \sqrt{5}$ $\qquad \sqrt{2^2 + 1^2}$



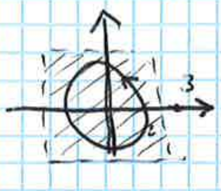
Sviluppi notevoli

- $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \ldots \sum_{n=0}^{\infty} \overset{= a_n}{\frac{1}{n!}} z^n$ $\quad (R = +\infty) \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{5!} + \ldots$ $\quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$ $\quad$ "
- $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \ldots$ $\quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$
- $\operatorname{senh} z = z + \frac{z^3}{6} + \ldots$
- $\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!}$
- $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ per $|z| < 1$ $\qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Esercizi

9)

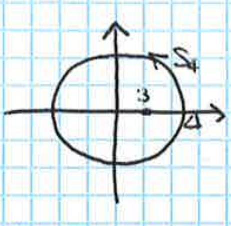
a) $\int_{S_2} \frac{\cos z}{(z-3)^3}\, dz$ analitica in $\mathbb{C} \setminus \{3\}$



$S_r : |z| = r$

$\int_{S_2} \frac{\cos z}{(z-3)^3}\, dz = 0$ Per T. Cauchy

b) $\int_{S_4} \frac{\cos z}{(z-3)^3}$

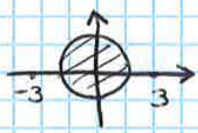


→ Formula di Cauchy generalizzata per le derivate

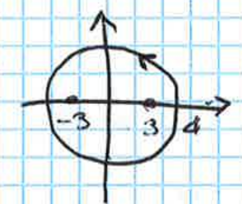
$z_0 = 3$ $\quad n+1 = 3 \rightarrow n = 2$

$= \frac{2\pi i}{2!} \underbrace{f''(3)}_{f''(\cos z)} = \frac{\cancel{2}\pi i}{\cancel{2}} (-\cos(3)) = -\pi i \cos 3$

c) $\int_{S_2} \frac{\cos z}{z^2-9}\, dz = 0$ per Cauchy



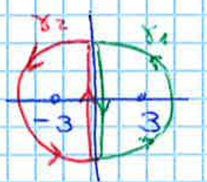
d) $\int_{S_4} \frac{\cos z}{z^2-9}\, dz$



$\frac{1}{z^2-9} = \frac{1/6}{z-3} - \frac{1/6}{z+3}$

$= \frac{1}{6}\int_{S_4} \frac{\cos z}{z-3}\, dz - \frac{1}{6}\int_{S_4} \frac{\cos z}{z+3}\, dz = \frac{1}{6} \cdot 2\pi i \cos 3 - \frac{1}{6} 2\pi i \overbrace{\cos(-3)}^{\cos 3} = 0$

Alternativa



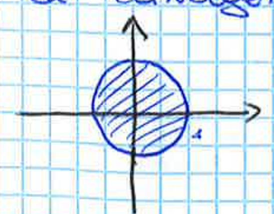
$\int = \int_{\gamma_1} \frac{\cos z}{z^2-9} + \int_{\gamma_2} \frac{\cos z}{z^2-9}$

$= \int_{\gamma_1} \frac{\frac{\cos(z)}{(z+3)}}{z-3} + \int_{\gamma_2} \frac{\frac{\cos(z)}{(z-3)}}{z+3}$

$= 2\pi i \frac{\cos 3}{6} + 2\pi i \frac{\cos(-3)}{-6} = 0$

es Determinare il cerchio di convergenza di

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} z^2$



$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 = \frac{1}{R} \quad R = 1$

cerchio: $|z| < 1$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2^{n+1}}+1\right)z^n$$

② $$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-z^{-1}} =$$

raccolgo z perché voglio $|z|>1$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(z^{-1})^n =$$

$|z|<2$ (ok!)

$|z^{-1}|<1$
$|z|>1$

$|z^{-1}|<1$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2^{n+1}}z^n - z^{-n-1}\right)$$

$\left|\frac{z}{2}\right|<1$
$\left|\frac{1}{z}\right|<1$
$|z|>2$
$|z|>1$

③ $$f(z) = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

$\left|\frac{2}{z}\right|<1$ $\quad |z|>2$

$\left|\frac{1}{z}\right|<1$ $\quad |z|>1$

$$= \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^k - \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^k$$

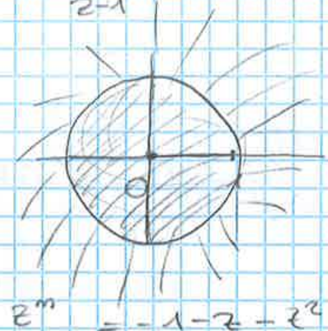
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(2^k-1)\frac{1}{z^{k+1}} \qquad |z|>2$$

Si raccoglie il + grande tra i due termini
anello corona interessato

es.

$f(z) = \frac{1}{z-1}$ in $z_0 = +1 \longrightarrow \frac{1}{z-1}$ $\quad (z-z_0)$

$f(z) = \frac{1}{z-1}$ in $z_0 = 0$



a) conv $|z|<1$

b) conv $|z|>1$

a) $$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n = -1-z-z^2$$
$|z|<1$

b) $$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum\left(\frac{1}{z}\right)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = \frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\dots$$

2016

Per avere $|z|>2$ raccolgo una z

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}^{*} - \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}^{**}$$

ok ok

$* \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n$ vale per $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$ cioè $\boxed{|z|>2}$

$** \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n$ vale per $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$ cioè $|z|>1$ cioè vale anche per $\boxed{|z|>2}$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1)\frac{1}{z^{n+1}}$$

$z^{-(n+1)}$

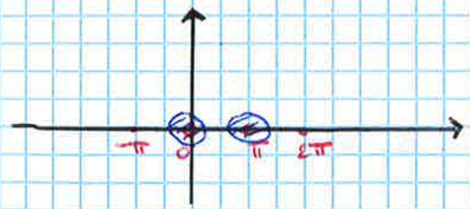
Singolarità

Una singolarità di una funzione $f(z)$ è un punto z_0 dove f non è analitica

$f(z) = \frac{1}{z-2}$ ha unica singolarità $z_0 = 2$

Una singolarità z si dice isolata se esiste un suo intorno dove non ci sono altre singolarità

es. $f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen} z}$ singolarità $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$



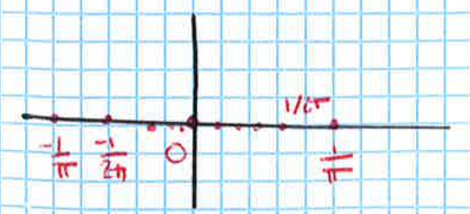
Sono tutte singolarità isolate

es. $f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{1}{z}}$

singolarità $\boxed{z = 0}$

$\frac{1}{z} = k\pi \quad z = \frac{1}{k\pi} \quad k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0$

$\boxed{z = \frac{1}{k\pi},\ k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0}$



$\longrightarrow$ $z = 0$ non isolata

$z = \frac{1}{k\pi}$ tutte isolate

Classificazione delle singolarità

Sia $f(z)$ analitica in un intorno di z_0 eccetto che in z_0 stesso

Posso scrivere per Laurent

$f(z) = \dots \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)} + c_0 + c_1(z-z_0)\dots$ convergente nel cerchio bucato $(z \neq z_0)$

$c_{-1} \rightarrow$ Residuo di f in z_0

se ho + singolarità ho sviluppi ∀ singolarità

z_0 si dice

1) singolarità apparente o artificiale o eliminabile se $c_k = 0$ per $k<0$ cioè $f(z)$ si scrive come $f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + \dots$

2) se z_0 è polo semplice (di ordine $m=1$)

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots$$

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z) = c_{-1} \longleftarrow \operatorname{Res}(f)$$

Caso particolare

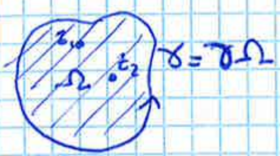
$f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ e $h'(z_0) \neq 0$

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

3) se z_0 è polo di ordine m

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z)\right]$$

Teorema dei residui



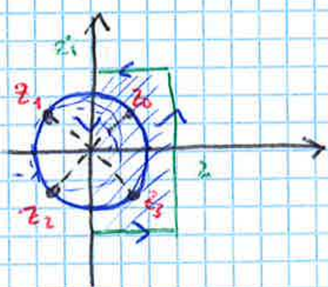
Supponiamo f analitica in un aperto contenente Ω e $\partial\Omega$ eccetto che $z_1, z_2 \dots z_n \in \Omega$

Allora $\displaystyle\int_\gamma f(z) = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z_k} f$

solo residui in Ω!

es

$$\int_\gamma \frac{1}{z^4+1}\, dz$$



$$\int_\gamma \frac{1}{z^4+1} = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z_0} f + \operatorname{Res}_{z_3} f\right)$$

Ci interessano z_0, z_3

Questi sono zeri semplici, la derivata non si annulla

$$z^4+1 = (z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)$$

z_0, z_1, z_2, z_3 zeri semplici ; polo semplice

se $(z-z_0)^2$ polo doppio

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 212

* $\frac{(\operatorname{sen} z)^2}{z^2} = \frac{z^2+\dots}{z^2} = 1+\dots$ polo di ordine 0 singolarità eliminabile

* $\frac{(1-\cos z)^3}{z^8} = \frac{-\frac{1}{z^3} z^6}{z^8} = \frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{z^2}$ $z_0 \to$ polo di ordine 2

- $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z (e^{z-i}-1)}{z^3(z^2+1)}$

singolarità
$z=0$
$z=i$
$z=-i$

$\operatorname{sen} z = z+\dots$
$e^z-1 = z\dots$

* $z=0$ $f(z) \underset{z\to 0}{\sim} \frac{(e^{-i}-1)z}{z^3} = \frac{e^{-i}-i}{z^2}$ $z=0$ polo doppio

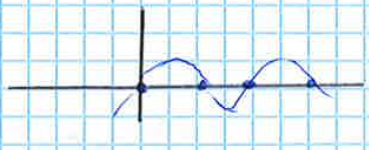
* $z=i$ $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z (e^{z-i}-1)}{z^3(z+i)(z-i)}$ $z=i$ Per $z\to i$

$f(z) \underset{z\to i}{\sim} \frac{\operatorname{sen} i \cancel{(z-i)}}{i^3(2i)\cancel{(z-i)}}$ abbiamo tutte costanti polo di ordine 0 eliminabile $z=i$

* $z=-i$
$f(z) \sim \frac{c}{z-i}$ ← cost $z=-i$ polo semplice

esercizio

$f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen} z}$



sing $z = k\pi$ $D \operatorname{sen} z = \cos z \neq 0$ in $k\pi$

sviluppo Taylor: $g(z) = \cancel{g(z_0)} + \underbrace{g'(z_0)}_{\neq 0}(z-z_0)+\dots$

$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0)+\dots$

Quindi se la derivata non si annulla abbiamo poli semplici

$f(z) = \frac{z}{(\operatorname{sen} z)^2}$ non si compensa +

Calcolare i residui di

$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-2)^2}$ singolarità $z=-1$ polo semplice $z=2$ polo doppio

$\operatorname{Res}_{z=-1} f = \lim_{z\to -1} [(z-z_0)f(z)]$

$\lim_{z\to -1}(z+1)f(z) = \lim_{z\to -1}\frac{z}{(z-2)^2} = -\frac{1}{9}$

Sviluppo Laurent $f(z) = -\frac{1}{9}\frac{1}{z+1} + c_0 + c_1(z+1)+\dots$ convergente nel + grande cerchio con centro -1 che non contiene singolarità $0<|z+1|<3$

analitica: è $\neq$ da 0 in z_0

$$\frac{g(z)}{(z-z_0)h(z)} = \frac{\boxed{g(z)/h(z)}}{z-z_0} = \frac{c_0 + c_1(z-z_0)+\dots}{z-z_0} = \frac{c_0}{z-z_0} + c_1 + c_2(z-z_0)\dots$$

$\longrightarrow z_0$ polo semplice

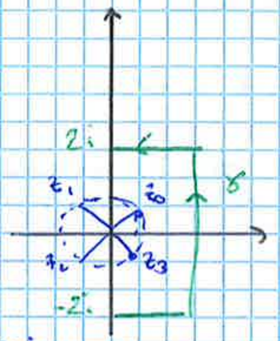
$g(z_0)\neq 0$
$h(z_0)\neq 0$

Quando a denominatore ci sono vari fattori di grado uno abbiamo che z_0 è polo semplice (se non ci sono semplificazioni con il numeratore)

es. $\dfrac{z+1}{(z-1)\boxed{(z+i)(z+1)(z-i)}}$ $\quad z_0 = 1$ polo semplice

es

$$\int_\gamma \underbrace{\frac{1}{z^4+1}}_{f(z)} dz$$



singolarità $z^4+1=0$

$z^4 = -1$

$z_0 = e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$z_3 = e^{-i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ poli semplici

$z^4+1 = (z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)$

$$\mathrm{Res}_{z_0} f = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=z_0} = \frac{1}{4e^{i\frac{3}{4}\pi}} = \frac{1}{4}e^{-i\frac{3}{4}\pi} = \frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\mathrm{Res}_{z_3} f = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=z_3} = \frac{1}{4e^{-\frac{3}{4}\pi i}} = \frac{1}{4}e^{\frac{3}{4}\pi i} = \frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\int_\gamma \frac{1}{z^4+1}dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}_{z_0} f + \mathrm{Res}_{z_3} f\right) = 2\pi i\left(-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi i\sqrt{2}}{2}$$

② $\boxed{\omega<0}$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} = -2\pi i \ \mathrm{Res}_{-i} = -\cancel{2}\pi \cancel{i} \frac{e^{\omega}}{-\cancel{2}\cancel{i}} = \pi e^{\omega}$

$\mathrm{Res}_{-i} = \left.\dfrac{e^{i\omega z}}{2z}\right|_{z=-i} = \dfrac{e^{\omega}}{-2i}$

③ $\boxed{\omega=0}$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} = \pi$

$2\pi \cancel{i} \dfrac{e^0}{2\cancel{i}} = \pi$

$-2\pi i \dfrac{e^0}{-2i} = \pi$

Riassumendo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{1+x^2}\,dx = \pi e^{-|\omega|}$$

esempio

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$

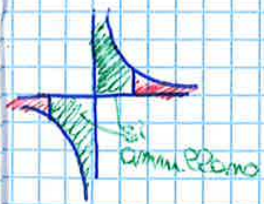
ma $\operatorname{sen} x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

$$\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx - \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ix}}{x}\,dx$$

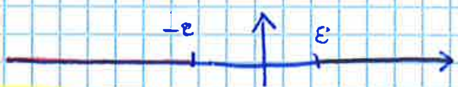
$\to 1$, $\to \infty$; $\to 1$, $\to \infty$

↳ non integrabile in zero
non ha senso in analisi 1

Questo corrisponde a e^{iz}
($z=0$ polo semplice sull'asse reale)
nei complessi devo estendere
il significato di integrale
(integrale nel senso del
valor principale)



Escludo nel calcolo di $\int$ le parti simmetriche che si annullano



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{x_0-\varepsilon} + \int_{x_0+\varepsilon}^{b}\right] \leftarrow$$

integrale nel senso del valor principale (Cauchy)

Posso integrare se ho poli semplici sull'asse reale

Se ci sono poli sull'asse reale SEMPLICI vale la stessa formula

$\pi i \sum$ residui sull'asse reale se $\omega>0$

$-\pi i \sum$ residui sull'asse reale se $\omega<0$

se $\omega=0$ è una o l'altra formula

$$\mathrm{Res}_{z_0} = \frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{4z^3}\Big|_{z=z_0} = \frac{1}{4z_0^3} = \frac{1}{4e^{i\frac{9}{4}\pi}} = \frac{1}{4}e^{-i\frac{3}{4}\pi} = \frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt2}{2} - i\frac{\sqrt2}{2}\right)$$

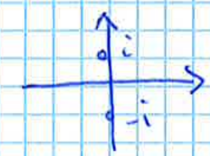
$$\mathrm{Res}_{z_1} = \frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{4z^3}\Big|_{z=z_1} = \frac{1}{4e^{i\frac{9}{4}\pi}} = \frac{1}{4}e^{-\frac{9}{4}\pi i} = \frac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt2}{2} - i\frac{\sqrt2}{2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx = 2\pi i\,(\mathrm{Res}\, z_0 + \mathrm{Res}\, z_1) = 2\pi i\left(\frac{1}{4}(-i\sqrt2)\right) = \frac{\pi}{\sqrt2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt2}$$

funz pari

es $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$ $\quad e^{i\omega z}, \ \omega = 0$



POLO DOPPIO

$$\frac{1}{(z^2+1)^2} \qquad z^2 = -1 \qquad z = \pm i$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = 2\pi i\ \mathrm{Res}_i\, f(z) \qquad \boxed{\omega = 0}$$

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2}$$

z_0 polo ordine m

$$\mathrm{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$$

$m = 2 \quad m-1 = 1$

$$\mathrm{Res}_i\, f \ \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left[\cancel{(z-i)^2}\frac{1}{(z+i)^2\cancel{(z-i)^2}}\right]$$

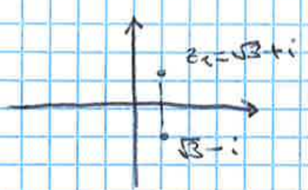
$$\lim_{z\to i} \frac{-2}{(z+i)^3} = \frac{-2}{8(-i)} = \frac{1}{4i}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \cancel{2}\pi \cancel{i}\,\frac{1}{\cancel{4}_2\cancel{i}} = \frac{\pi}{2}$$

es (B) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2-2\sqrt3 x+4}\,dx \qquad$ (A) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2-2\sqrt3 x+4}\,dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} = \cos x + i\operatorname{sen} x}{x^2-2\sqrt3 x+4}\,dx = A + iB$$

$$\frac{e^{iz}}{z^2-2\sqrt3 z+4} \qquad z^2-2\sqrt3 z+4 = 0$$
$$z = \sqrt3 \pm \sqrt{3-4} = \sqrt3 \pm i$$



$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{e^{iz}}{(z-(\sqrt3+i))(z-(\sqrt3-i))}$$

$$\mathrm{Res}_{z_0}\, f \quad \lim_{z\to z_0} (z-z_0)\,f(z)$$

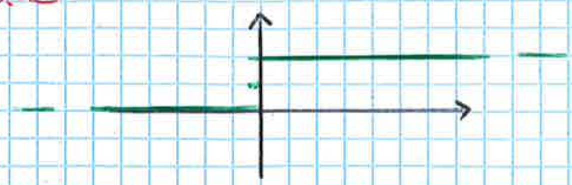
$$\lim_{z\to\sqrt3+i} \cancel{(z-(\sqrt3+i))}\frac{e^{iz}}{\cancel{(z-(\sqrt3+i))}(z-(\sqrt3-i))} = \frac{e^{i(\sqrt3+i)}}{2i} = \frac{e^{-1}e^{\sqrt3 i}}{2i}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2-2\sqrt3 x+4}\,dx = \cancel{2}\pi\cancel{i}\,\frac{e^{-1}e^{\sqrt3 i}}{\cancel{2i}} = \pi e^{-1}e^{\sqrt3 i} = \pi e^{-1}(\cos\sqrt3 + i\operatorname{sen}\sqrt3)$$

$$\underbrace{\pi e^{-1}\cos\sqrt3}_{A} + \underbrace{\pi e^{-1}\operatorname{sen}\sqrt3}_{B}\, i$$

Funzione a gradino

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 1/2 & \text{se } t = 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

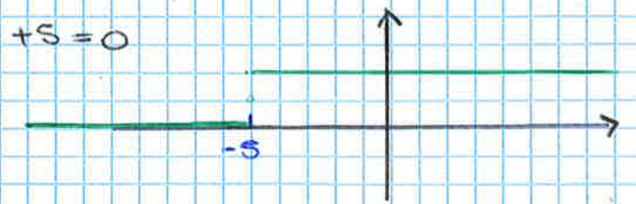


Traslazione

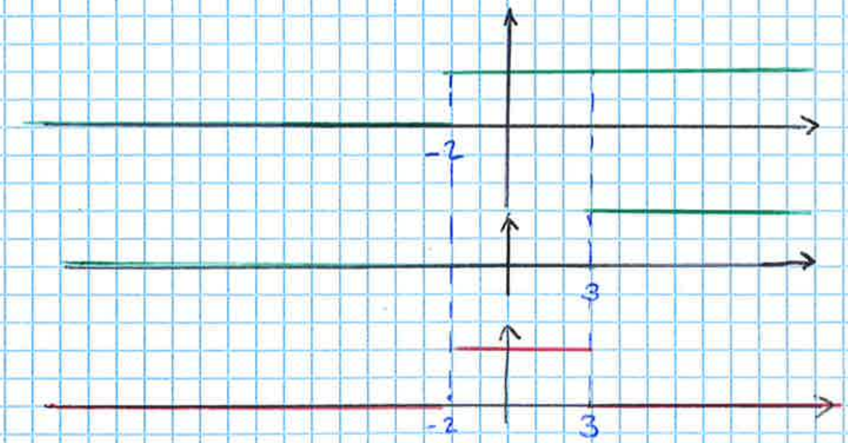
$u(t - t_0)$

$u(t+s) = u(t-(-s))$

Salto quando $t + s = 0$



$u(t+2) - u(t-3)$



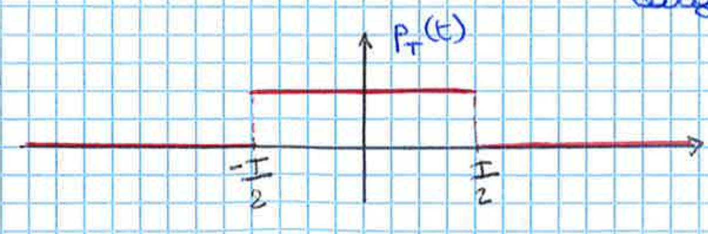
PORTA

Porta

$$p_T \begin{cases} 1 & \text{se } \quad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{se } \quad t < -T \text{ oppure } t > T \end{cases}$$

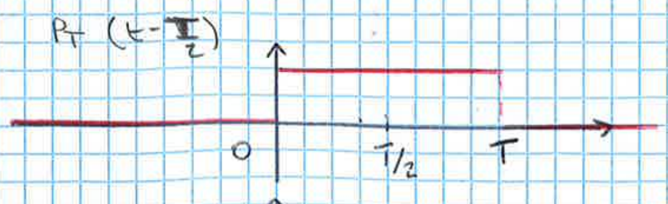
larghezza porta

larghezza $T > 0$

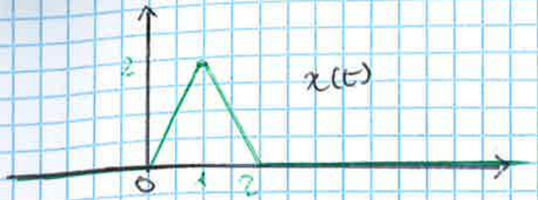


Traslazione

il centro della porta è in $\frac{T}{2}$

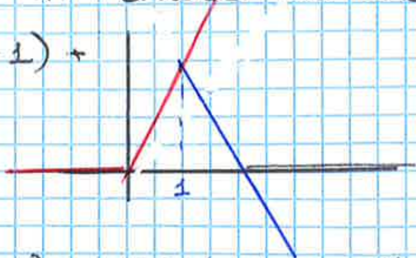


$u(-t)$



0: 1° interruttore lo chiudo

1: chiudo un altro interruttore



2: chiudo un altro interruttore

$$x(t) = 2t\ u(t) + (-4(t-1))\ u(t-1) + 2(t-2)\ u(t-2)$$

Fourier

$$x(t) = 2t\ p_1\left(t-\tfrac{1}{2}\right) - 2(t-2)\ p_1\left(t-\tfrac{3}{2}\right)$$

$$x(t) = 2t\ u(t) - 4(t-1)u(t-1) + 2(t-2)u(t-2)$$

funzione semplice + traslata

Laplace

$$x(t) = 2t\ [u(t) - u(t-1)] - 2(t-2)[u(t-1) - u(t-2)]$$

$$= 2t\,u(t) - 2t\,u(t-1) - 2t\,u(t-1) + 4u(t-1) + 2(t-2)u(t-2)$$

$$= 2t\,u(t) - 4(t-1)u(t-1) + 2(t-2)u(t-2)$$

Distribuzioni (funzioni generalizzate)

Tre presentazioni

1. funzionali
2. limiti
3. derivata

1. $\varphi(t)$ sia una funzione C^∞ infinite volte derivabile

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ \underbrace{\varphi(t)}_{\forall \varphi \in C^\infty}\ dt = \varphi(0)$$

Comunque cambio φ; conta solo il valore 0

Se succede questo $f(t)$ non è + una funzione ma un oggetto nuovo che noi chiamiamo $\delta(t)$ delta di Dirac

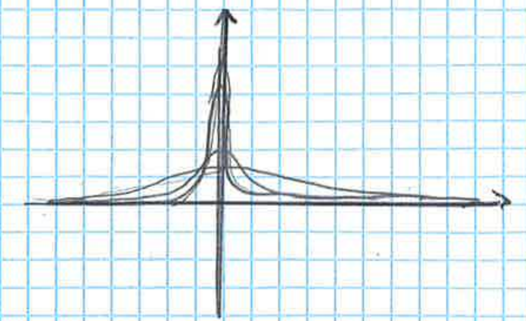
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)\,dt = \varphi(0)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 212

$$\int_{-\infty}^{\infty} m\, p_{\frac{1}{m}}(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\frac{1}{2m}}^{1/2m} m\,\varphi(t)\,dt \approx \varphi(0)\cdot m\,\frac{1}{m} = \varphi(0)$$

pur di prendere intervallo molto piccolo $\varphi(t)$ è $\varphi(0)$

$$m\, p_{\frac{1}{m}}(t) \xrightarrow[\mathcal{D}']{m\to\infty} \delta(t)$$



* $x_m(t) = \sqrt{\frac{m}{\pi}}\, e^{-mt^2}$

3 considerazioni

① $\int_{-\infty}^{\infty} m\, p_{\frac{1}{m}}(t)\,dt = 1 \quad \forall m$

② $\max m\, p_{\frac{1}{m}}(t) = m \xrightarrow{m\to\infty} \infty$ e lo raggiungo nello 0

③ $t_0 \neq 0 \quad m\, p_{\frac{1}{m}}(t_0) \xrightarrow{m\to\infty} 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = \iint_{R^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \overset{\substack{x=r\cos\vartheta \\ y=r\operatorname{sen}\vartheta}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\,dr\,d\vartheta =$$

$$= 2\pi\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right) = \pi \longrightarrow \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-mt^2}dt \underset{\tau=\sqrt{m}t}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{m}}\,d\tau = \frac{1}{\sqrt{m}}\cdot\sqrt{\pi}$$

Quindi

① $\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{m}{\pi}}\, e^{-mt^2}\,dt = 1$

② $\sqrt{\frac{m}{\pi}}\, e^{-m0^2} \xrightarrow{m\to\infty} +\infty$

③ $\sqrt{\frac{m}{\pi}}\, e^{-mt_0^2} \xrightarrow[t_0\neq 0]{m\to\infty} 0$

$$\left.\begin{array}{l} ① \\ ② \\ ③ \end{array}\right\} \quad \sqrt{\frac{m}{\pi}}\, e^{-mt^2} \xrightarrow{m\to+\infty} \delta(t)$$

Queste approssimazioni mi servono per derivare $\delta(t)$; infatti l'ultimo esempio è ∞ volte derivabile

In senso distribuzionale si può derivare tutto! → analisi 1

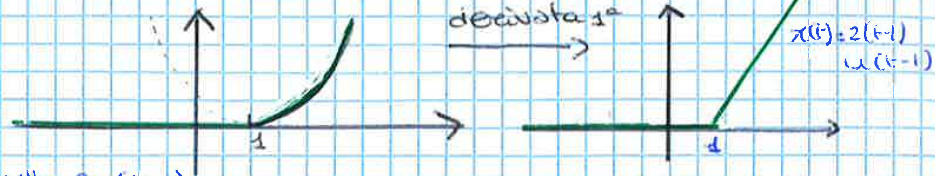
Se una funzione è derivabile in senso classico la sua derivata distribuzionale coincide.

Derivata di uno spigolo mi dà un salto, gradino.

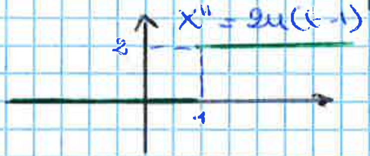
Se $x(t)$ ha in t_0 un punto angoloso la derivata distribuzionale ha in t_0 un salto di ampiezza $x'(t_0^-) - x'(t_0^+)$

Se $x(t)$ ha in t_0 un salto di altezza $h = x(t_0^+) - x(t_0^-)$ allora $x'(t)$ distribuzionale ha in t_0 una δ: $h\delta(t-t_0)$

$x(t) = (t-1)^2\, u(t-1)$

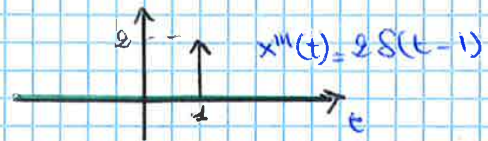


derivata 2° →



→ in 1 non c'è la derivata adesso dico che resta il gradino e che questa è la sua deriv. distribuzionale

derivata 3° →



$x(t) = (t-1)^2 u(t-1)$

$x'(t) = 2(t-1)\, u(t-1) + \cancel{(t-1)^2\delta(t-1)}$ $\quad t=1$

ATTENZIONE

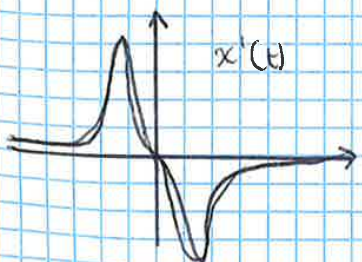
$\delta(t)\varphi(t) = \delta(t)\varphi(0)$

$\delta(t-t_0)\varphi(t) = \delta(t-t_0)\,\varphi(t_0)$

$x''(t) = 2u(t-1) + \cancel{2(t-1)\delta(t-1)}$ $\quad t=1$

$x'''(t) = 2\delta(t-1)$

$$\sqrt{\frac{n}{\pi}}\,(-2nt)\,e^{-nt^2} \xrightarrow{n\to\infty} \delta'(t)$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\varphi(t)\,dt = -\varphi'(0)$$

$$\underline{\delta'(t)x(0)} = (\delta(t)x(0))' = \underbrace{(\delta(t)x(t))' = \delta'(t)x(t) + \delta(t)x'(t)}_{} = \underline{\delta'(t)x(t) + \delta(t)x'(0)}$$

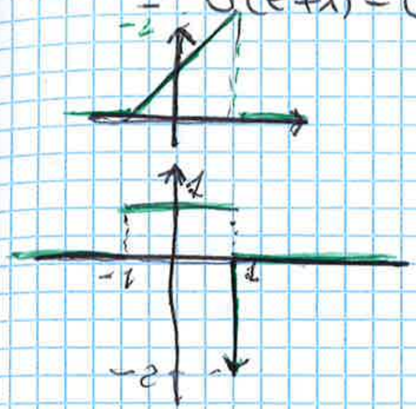
$$\delta'(t)x(t) = \delta'(t)x(0) - \delta(t)x'(0)$$

6.3)

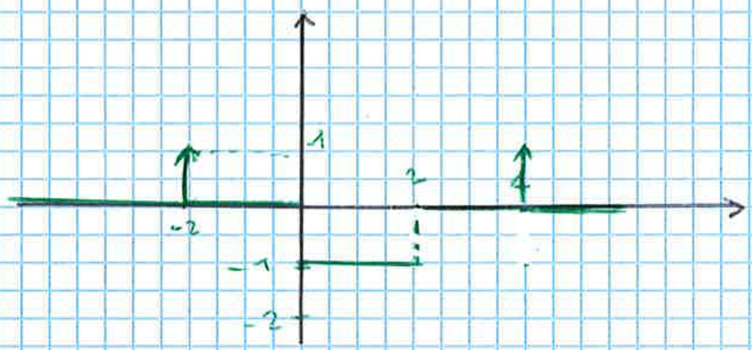
$$x(t) = (t+1)\left[u(t+1) - u(t-1)\right]$$

$$x'(t) = u(t+1) - u(t-1) + (t+1)\left[\delta(t+1) - \delta(t-1)\right]$$

$$= u(t+1) - u(t-1) - 2\delta(t-1)$$



E)



- Trasformata di Fourier di $u(t)$

$$\mathcal{F}[u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_0^{\infty} 1\, e^{-j\omega t}\, dt = \left[\frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t}\right]_0^{\infty}$$

$e^{-j\omega t} = \cos\omega t - j\,\mathrm{sen}\,\omega t$ non converge, continua ad oscillare a più infinito

Nel senso delle distribuzioni:

$$\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{j\omega} + \pi\,\delta(\omega)$$

Trasformata di Laplace

$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{-st}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-st}\, dt = \left[\frac{1}{-s} e^{-st}\right]_0^{\infty} \underset{a>0}{=} \frac{1}{s}$$ con dominio $a > 0$

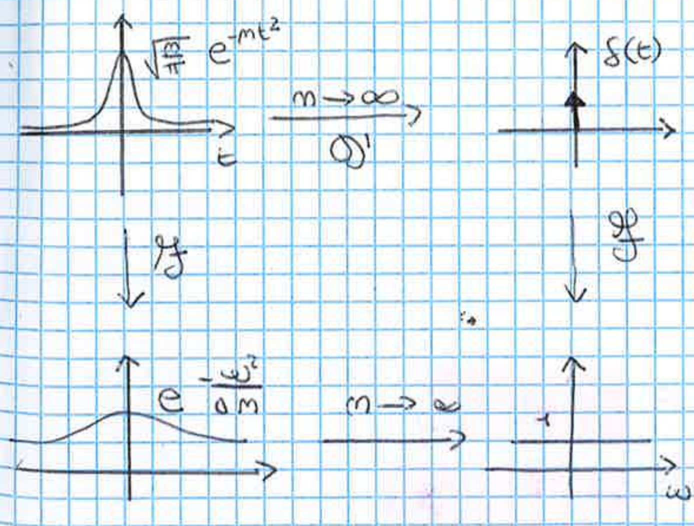
$$e^{-st} = e^{-at}(\cos\omega t - j\,\mathrm{sen}\,\omega t) \xrightarrow[\text{se } a>0]{t\to+\infty} 0$$

- Trasformata di Fourier della $\delta(t)$

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = 1$$

Trasformata di Laplace della $\delta(t)$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-st}\, dt = 1$$ funzione costante $= 1$



la trasformata della Gaussiana è una gaussiana

$x(t)$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{L}_b$	
$p_T(t)$	$\frac{2\,\mathrm{sen}(\omega T)/2}{\omega}$	$\frac{2\,\mathrm{sh}\frac{sT}{2}}{s}$	$\forall s \in \mathbb{C}$
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$	$1/s$	$\mathrm{Re}\, s > 0$
$\delta(t)$	1	1	$\forall s \in \mathbb{C}$

(c) Derivata in ω o in s

$$\mathcal{F}[-jt\,x(t)] = \frac{d}{d\omega} X(\omega)$$
$$\mathcal{L}[-t\,x(t)] = \frac{d}{ds} X(s)$$

esempio $\mathcal{F}\left[\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\pi}} e^{-mt^2}\right] = e^{-\frac{\omega^2}{4m}}$

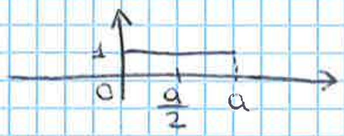
$$\mathcal{F}[e^{-t^2}] = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}(e^{-t^2})\right] = \mathcal{F}[-2t\,e^{-t^2}] = j\omega\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

$$2(-j)\,\mathcal{F}[-jt\,e^{-t^2}] = 2(-j)\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}[e^{-t^2}] = -2j\frac{d}{d\omega}\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\omega^2}{4}} =$$
$$= -2j\sqrt{\pi}\left(-\frac{2\omega}{4}\right)e^{-\frac{\omega^2}{4}} = j\omega\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

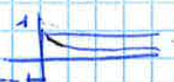
Esercizi

1) $x(t) = u(t) - u(t-a) = p_a\left(t - \frac{a}{2}\right)$



$$\mathcal{F}(x(t)) = \mathcal{F}\left[p_a\left(t-\frac{a}{2}\right)\right]$$
$$= \int_0^a 1\, e^{-j\omega t}dt = \left[\frac{1}{-j\omega}e^{-j\omega t}\right]_0^a = \frac{e^{-j\omega a}-1}{-j\omega} = \frac{1-e^{-j\omega a}}{j\omega} = e^{-j\omega\frac{a}{2}}\frac{\left(e^{j\omega\frac{a}{2}} - e^{-j\omega\frac{a}{2}}\right)}{j\omega} =$$
$$= e^{-j\omega\frac{a}{2}}\frac{2j\,\mathrm{sen}\frac{\omega a}{2}}{j\omega} = e^{-j\omega\frac{a}{2}}\frac{2\,\mathrm{sen}\frac{\omega a}{2}}{\omega}$$

2) $x(t) = u(t)e^{-t}$



$$\mathcal{F}[u(t)e^{-t}] = \int_0^\infty e^{-t}e^{-j\omega t}dt = \int_0^\infty e^{-j\omega t - t}dt = \int_0^\infty e^{-(j\omega+1)t}dt$$
$$= \left[\frac{e^{-(j\omega+1)t}}{-(j\omega+1)}\right]_0^\infty = \frac{-1}{-j\omega-1} = \frac{1}{j\omega+1}$$

NON PUOI APPLICARE LE PROPRIETA' PERCHE' MANCA δ

3) $x(t) = u(-t)e^{t}$

$$\mathcal{F}[u(-t)e^{t}] = \int_{-\infty}^0 e^{t}e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^0 e^{t(1-j\omega)}dt = \left[\frac{e^{(1-j\omega)t}}{1-j\omega}\right]_{-\infty}^0 =$$
$$= \frac{1}{1-j\omega}$$

1.b) $\mathcal{L}\left[p_a\left(t-\frac{a}{2}\right)\right] = \int_0^a e^{-st}dt = \left[\frac{1}{-s}e^{-st}\right]_0^a = \frac{e^{-sa}-1}{-s} =$
$$\frac{1-e^{-sa}}{s} = e^{-s\frac{a}{2}}\frac{e^{s\frac{a}{2}} - e^{-s\frac{a}{2}}}{s} = e^{-s\frac{a}{2}}\frac{2\,\mathrm{sh}\left(\frac{sa}{2}\right)}{s}$$

2.b) $\mathcal{L}[u(t)e^{-t}] = \int_0^\infty e^{-t}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(1+s)t} = \left[\frac{e^{-(1+s)t}}{-(1+s)}\right]_0^\infty = \frac{1}{1+s}$ $\quad s > -1$

3.b) $\mathcal{L}[u(-t)e^{t}] = \int_{-\infty}^0 e^{t}e^{-st}dt = \int_{-\infty}^0 e^{(-s+1)t} = \left[\frac{e^{(-s+1)t}}{-s+1}\right]_{-\infty}^0 = \frac{1}{1-s}$ $\quad s < 1$

a) $\mathcal{L}$ $-3 \cdot \frac{2\,senh(2s)}{s} e^{s} + 3 \frac{2\,senh(2s)}{s} e^{-s}$

b) $\mathcal{L}$ $\frac{e^{-i\pi}}{2} \frac{1}{s-2} + \frac{e^{i\pi}}{2} \frac{1}{s+2} - \frac{e^{\pi i}}{2} \frac{1}{s-2} \cdot e^{-2s} - \frac{e^{-\pi i}}{2} \frac{1}{s+2} e^{2s}$

(8) $p_1(t+3/2) + 2p_2(t) + p1\left(t-\frac{3}{2}\right)$

(F) $\frac{2\,sen\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega} e^{-j\omega 3/2} + 2 \frac{2\,sen\,\omega}{\omega} + \frac{2\,sen\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega} e^{j\omega(3/2)}$

(9)

$p_4(-t-2)$

$\mathcal{F} = \frac{2\,sen\left(\frac{2\omega}{-1}\right)}{\frac{\omega}{-1}} e^{j\omega} = -\frac{2\,sen(-2\omega)}{\omega} e^{-j\omega 2}$

$\mathcal{L} = \frac{2\,sh\left(\frac{2s}{-1}\right)}{\frac{s}{-1}} e^{2s} = -\frac{2\,sh(-2s)}{-s} e^{-2s}$

(10) $\left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right) e^{-j\omega t_0}$

$\left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right) e^{-5\omega j}$

(F) $\frac{d}{dt} u(t-5) = j\omega\left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right) e^{-5\omega j}$

($\mathcal{L}$) $\frac{d}{dt} u(t-5) = s \frac{1}{s} e^{-5s}$

(11)

- $t\,u(t)$

$-j\,[-jt\,u(t)] = -j \frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right)$

$-[-t\,u(t)] = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right)$

- $(t-1)\,u(t)$ $\quad t\,u(t) - u(t)$

$[*]\ -j\,[-jt\,u(t)] - u(t) = -j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right) - \left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right)$

$**\ -[-t\,u(t)] - u(t) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{1}{s}$

- $(t-1)\,u(t-1)$

$(t-1)\,u(t)\,e^{-j\omega t}$ $\quad e^{-j\omega t}\,[*]$

$(t-1)\,u(t)\,e^{-st}$ $\quad e^{-s}\,[**]$

12/04

Fourier

$x(t)$

reale $\longleftrightarrow x(t) = x^*(t)$ $\Big\} \xrightarrow{\mathcal{F}}$ $X(\omega) = X^*(-\omega)$

pari $\longleftrightarrow x(t) = x(-t)$ $\quad X(\omega) = X(-\omega)$

$x(t)$ reale e pari implica $X(\omega)$ reale e pari

reale $\longleftrightarrow x(t) = x^*(t)$ $\Big\} \xrightarrow{\mathcal{F}}$ $X(\omega) = X^*(-\omega)$

dispari $\longleftrightarrow x(t) = -x(-t)$ $\quad X(\omega) = -X(-\omega)$

$x(t)$ reale e dispari implica $X(\omega)$ immaginario puro e dispari

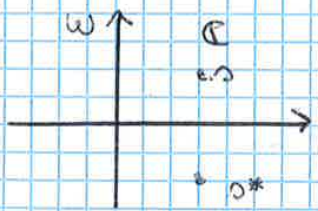
es. $[p_2(t)] = \frac{2\,\mathrm{sen}\,t}{t}$

$$\mathcal{F}[t\,p_2(t)] = j\,\mathcal{F}[-j^t p_2(t)] = j\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}[p_2(t)] = j\frac{d}{d\omega}\frac{2\,\mathrm{sen}\,t}{t} =$$

$$= j\,\frac{2t\cos t - 2\,\mathrm{sen}\,t}{t^2} = j\left(\frac{2\cos t}{t} - \frac{2\,\mathrm{sen}\,t}{t^2}\right)$$

Laplace

$x(t)$ reale $\longleftrightarrow X(s)$ hermitiana $\longleftrightarrow X(s^*) = X^*(s) \longleftrightarrow X(s)$ assume valori reali sull'asse reale



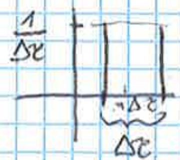
$$\frac{5s^2+7s-3}{s^3-5s+8} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \text{è reale}$$

$x(t) = x^*(t) \longleftrightarrow X(s)$ ha valori reali sull'asse reale

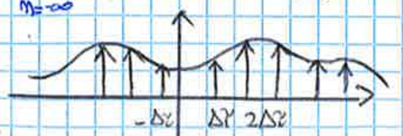
Prodotto convoluzione

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,y(t-\tau)\,d\tau$$

$$e(t) \cong \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m\Delta\tau)\,p_{\Delta\tau}(t-m\Delta\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m\Delta\tau)\underbrace{\frac{p_{\Delta\tau}(t-m\Delta\tau)}{\Delta\tau}}_{\sim\,\delta(t-m\Delta\tau)}\Delta\tau$$



$$\approx \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m\Delta\tau)\,\delta(t-m\Delta\tau)\,\Delta\tau$$



$$T[e(t)] = T\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m\Delta\tau)\,\delta(t-m\Delta\tau)\Delta\tau\right] =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m\Delta\tau)\,T[\delta(t-m\Delta\tau)]\,\Delta\tau =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m\Delta\tau)\,h(t-m\Delta\tau)\,\Delta\tau \xrightarrow{\Delta\tau\to 0} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau =$$

$x(t) * h(t)$ $\qquad$ $T[\delta(t)] = h(t)$

Esercizi

1) $p_2(t) \longrightarrow \frac{2\,\mathrm{sen}\,\omega}{\omega}$ $\quad$ $\frac{1}{2}p_2(t) \longrightarrow \frac{\mathrm{sen}\,\omega}{\omega}$

$\frac{2\,\mathrm{sen}\,t}{t} \longrightarrow 2\pi\, p_2(\omega)$ $\quad$ $\frac{\mathrm{sen}\,\omega}{\omega} \longrightarrow 2\pi \frac{1}{2} p_2(\omega)$

2) $\delta(t) \longrightarrow 1$

$1 \longrightarrow 2\pi\,\delta(\omega)$

3) $1 \longrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

$1\cdot e^{jt} \longrightarrow 2\pi\,\delta(\omega-1)$

4) $2\,\frac{e^{j3t}-e^{-j3t}}{2j} = \frac{1}{j}\mathcal{F}[e^{j3t}] - \frac{1}{j}[e^{-j3t}] \longrightarrow \frac{1}{j}2\pi\,\delta(\omega-3) - \frac{1}{j}2\pi\,\delta(\omega+3)$

5) $5\,\frac{e^{j4t}+e^{-j4t}}{2} = \frac{5}{2}\cdot 2\pi\,\delta(\omega-4) + \frac{5}{2}\cdot 2\pi\,\delta(\omega+4)$

3.2) $x(t) = \left(\frac{3}{2}p_2(t) - \frac{1}{2}j\,u(t-1)\right)^*$

$\mathcal{F}[x(t)] = \frac{3}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}\,\mathrm{sen}\,\omega}{\omega} - \frac{1}{2}j\left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right)e^{-j\omega}$

$X^*(-\omega) = \frac{3\,\mathrm{sen}(-\omega)}{-\omega} - \left[-\frac{1}{2}j\left(\frac{1}{j(-\omega)} + \pi\delta(-\omega)\right)e^{j\omega}\right]$

$X^*(-\omega) = +\frac{3\,\mathrm{sen}(+\omega)}{\omega} + \frac{1}{2}j\left(-\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(+\omega)\right)e^{j\omega}$

$\mathcal{L}[x(t)] = \frac{3}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}\,\mathrm{sh}\,s}{s} - j\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{-s} = X(s)$

$x^* = \frac{3}{2}p_2(t) + j\frac{1}{2}u(t-1)$

$\mathcal{L}[x^*(t)] = \left(\frac{3}{2}\frac{2\,\mathrm{sh}\,s^*}{s^*} - j\frac{1}{2}\frac{1}{s^*}e^{-s^*}\right)^* = \frac{3}{2}\frac{2\,\mathrm{sh}\,s}{s} + j\frac{1}{2}\frac{1}{s}e^{-s}$

3.3) $x(t) = -2p_1\left(t+\frac{5}{2}\right) + p_4(t) - 2p_1\left(t-\frac{5}{2}\right)$

$\mathcal{F}[x(t)] = -2\,\frac{2\,\mathrm{sen}(\frac{\omega}{2})}{\omega}e^{j\omega\frac{5}{2}} + \frac{2\,\mathrm{sen}(2\omega)}{\omega} - 2\,\frac{2\,\mathrm{sen}(\frac{\omega}{2})}{\omega}e^{-j\omega\frac{5}{2}}$

$= -2\,\frac{2\,\mathrm{sen}(\frac{\omega}{2})}{\omega}\left(e^{j\omega\frac{5}{2}} + e^{-j\omega\frac{5}{2}}\right) + \frac{2\,\mathrm{sen}(2\omega)}{\omega}$

3.4) $x(t) = -2(t+2)[u(t+2)-u(t+1)] + 2t[u(t+1)-u(t-1)] - 2(t-2)[u(t-1)-u(t-2)]$

$-2(t+2)\,p(t+3/2) + 2t\,p_T - 2(t-2)\,p(t-3/2)$

$\mathcal{F}(x(t)) = -2(t+2)\frac{2\,\mathrm{sen}(\frac{\omega}{2})}{\omega}e^{\frac{3}{2}j\omega} + 2t\,\frac{2\,\mathrm{sen}(\frac{\omega}{2})}{\omega} - 2(t-2)\frac{2\,\mathrm{sen}(\frac{\omega}{2})}{\omega}e^{-\frac{3}{2}j\omega}$

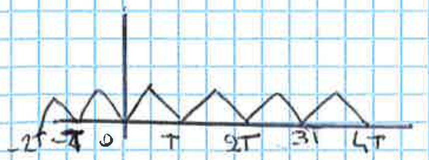
$= -2\,\frac{2\,\mathrm{sen}(\frac{\omega}{2})}{\omega}\left((t+2)e^{\frac{3}{2}j\omega} - t + (t-2)e^{-\frac{3}{2}j\omega}\right)$

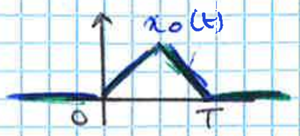
30/03/2016

Trasformate di Fourier e trasformate unilatere di Laplace di funzioni periodiche

Introduzione

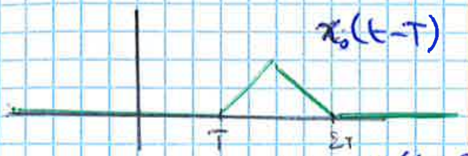
$x(t)$ è periodica di periodo T se $x(t) = x(t-nT)$ $n \in \mathbb{Z}$

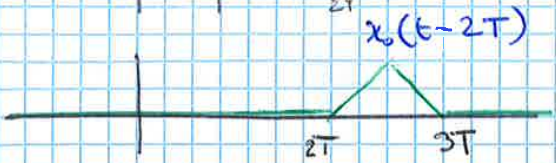




$$x_0(t) = \begin{cases} x(t) & 0 \le t < T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

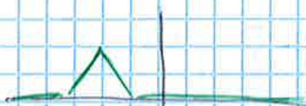
la traslo





Posso sommarle tutte

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t-nT)$$



oppure posso dire che è periodica in questo modo

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(t-nT) = *$$

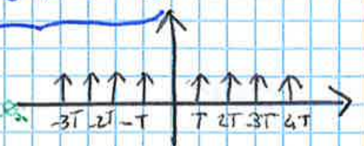
Proprietà della delta

$$x(t) * \delta(t) = x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau-t_0)\,d\tau$$

$$* = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t) * \delta(t-nT) = x_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

pettine di Dirac o treno di impulsi



Funzione periodica: $x_0(t)$ convoluta con treno di impulsi

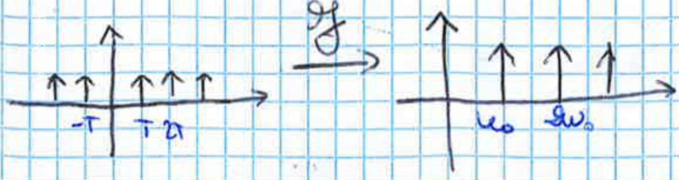
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) = \delta_T(t) \quad \text{treno di impulsi}$$

$$\mathcal{F}[\delta_T(t)] = \omega_0\,\delta_{\omega_0}(\omega)$$

trasformata di Fourier di un treno di impulsi è un treno di impulsi

$$\mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)\right] = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$



$$\mathcal{L}\left[\sum_{m=0}^{\infty} x(t-mT)\right] = \mathcal{L}\left[\sum_{m=0}^{\infty} x_0(t) * \delta(t-mT)\right] =$$

$$= \mathcal{L}\left[x_0(t) * \sum_{m=0}^{\infty} \delta(t-mT)\right] = X_0(s) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{L}[\delta(t-mT)] =$$

$$= X_0(s) \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} e^{-mTs} = X_0(s) \sum_{m=0}^{\infty} (e^{-Ts})^m \; *$$

serie geometrica di ragione complessa e^{-Ts}

$$\sum_{m=0}^{\infty} r^m = \frac{1}{1-r} \quad \text{se } |r|<1$$

$$|e^{-Ts}| < 1$$

$$|e^{-T(\sigma+j\omega)}| = |e^{-T\sigma}| \cdot \overbrace{|e^{-Tj\omega}|}^{1} = e^{-T\sigma}$$

$$* \quad X_0(s) \cdot \frac{1}{1-e^{-Ts}} \quad \text{se } \sigma > 0$$

x

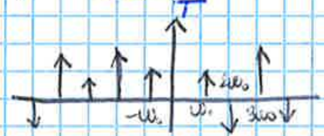
$\frac{1}{1-e^{-Ts}}$ cerchiamo dove (i poli)

$$1-e^{-Ts} = 0$$
$$e^{-Ts} = 1 = e^{-2\pi mj}$$
$$-Ts = -2\pi mj$$
$$s = \frac{2\pi}{T} mj = m\omega_0 j$$

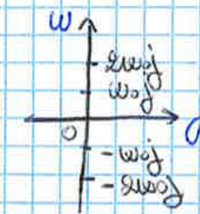
infiniti poli semplici

$x(t)$ periodica di periodo T, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, $x_0(t)$

$$\mathcal{F}[x(t)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_m \delta(\omega - \omega_0)$$

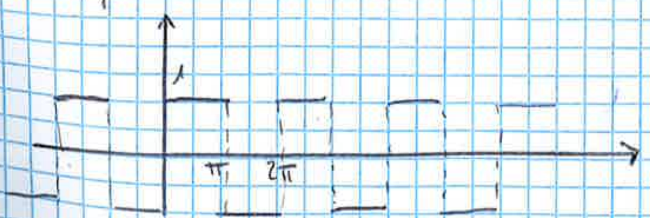


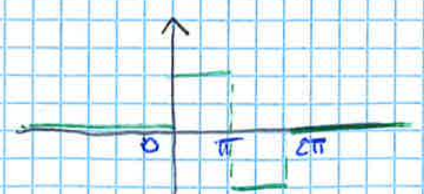
$$\mathcal{L}_s[x(t)] = \frac{X_0(s)}{1-e^{-Ts}}$$



i poli sono multipli della frequenza del segnale periodico

esempio



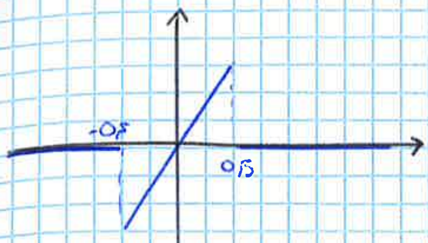


$$x_0(t) = p_\pi\left(t-\frac{\pi}{2}\right) - p_\pi\left(t-\frac{3}{2}\pi\right)$$

$$\mathcal{F}[x_0(t)] = e^{-j\frac{\pi}{2}\omega}\mathcal{F}[p_\pi(t)]$$ linearità e traslazione in t

$$- e^{-j\frac{3}{2}\pi\omega}\mathcal{F}[p_\pi(t)] = \mathcal{F}[p_\pi(t)] \cdot \left(e^{-j\frac{\pi}{2}\omega} - e^{-j\frac{3}{2}\pi\omega}\right) =$$

Esercizi



$T = 1 \qquad \nu = 1$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$

$x_0(t) = 2t\,p(t) \qquad -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$

$$\mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} 2t\,p(t)\, e^{-j\omega t} = \mathcal{F}[2t\,p_1(t)] = 2\frac{1}{-j}\mathcal{F}[-jt\,p_1(t)] =$$

$$= 2\frac{1}{-j}\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}[p_1(t)] = \frac{2}{-j}\frac{d}{d\omega}\frac{2\sin\frac{\omega}{2}}{\omega}$$

$$= \frac{2}{j}\frac{\cos\frac{\omega}{2}\,\omega - 2\sin\frac{\omega}{2}}{\omega^2}$$

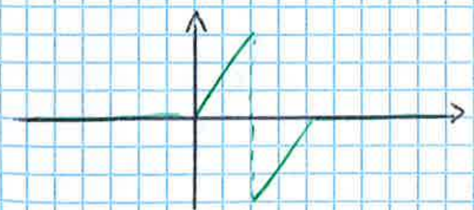
$$X_0(n\omega_0) = X_0(2\pi n) = \frac{2}{j}\frac{2\pi n\cos\frac{2\pi n}{2} - 2\sin\frac{2\pi n}{2}}{(2\pi n)^2} = \frac{2}{j}\frac{2\pi n(-1)^n}{(2\pi n)^2}$$

$$= \frac{(-1)^n}{2\pi n}\frac{2}{j} = \frac{(-1)^n}{\pi n} j$$

$$\mathcal{F}[x(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi\frac{2}{j}\frac{(-1)^n}{2\pi n}\,\delta(\omega - 2\pi n) = \frac{2}{n}(-1)^n j\,\delta(\omega - 2\pi n)$$

$$\beta_n = \frac{2}{j}2\pi\frac{(-1)^n}{2\pi n} = \frac{2}{j}\frac{(-1)^n}{n} = 2j\frac{(-1)^n}{n}$$

LAPLACE



$T = 1$

$\omega_0 = 2\pi$

$f = 1$

$$x_0(t) = \begin{cases} 2t & 0 \le t \le 1/2 \\ 2(t-1) & \frac{1}{2} < t \le 1 \end{cases}$$

$$x_0(t) = 2t\,p_{\frac{1}{2}}\left(t - \frac{1}{4}\right) + 2(t-1)\,p_{\frac{1}{2}}\left(t - \frac{3}{4}\right)$$

$$-2\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left[p_{\frac{1}{2}}\left(t-\frac{1}{4}\right)\right] \quad \mathcal{L}\,2t\,p_{\frac{1}{2}}\left(t-\frac{3}{4}\right) - \mathcal{L}\,2\,p_{\frac{1}{2}}\left(t-\frac{3}{4}\right)$$

$$\mathcal{L}[x_0(t)] = -2\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left[p_{1/2}\left(t-\frac{1}{4}\right)\right] - 2\frac{d}{ds}\mathcal{L}\,p_{\frac{1}{2}}\left(t-\frac{3}{4}\right) - 2e^{-\frac{3}{4}s}\mathcal{L}\,p_{\frac{1}{2}}(t)$$

$$= -2\frac{d}{ds}e^{-\frac{1}{4}s}\mathcal{L}[p_{1/2}(t)] - 2\frac{d}{ds}e^{-\frac{3}{4}s}\left[p_{\frac{1}{2}}(t)\right] - 2e^{-\frac{3}{4}s}\mathcal{L}\,p_{\frac{1}{2}}(t)$$

$$= -2\frac{d}{ds}e^{-\frac{1}{4}s}\frac{\mathrm{sh}\frac{s}{4}}{s} - 2\frac{d}{ds}e^{-\frac{3}{4}s}\frac{\mathrm{sh}\frac{s}{4}}{s} - 2e^{-\frac{3}{4}s}\frac{\mathrm{sh}\frac{s}{4}}{s}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 212

2

$X(s) = \frac{s^5}{(s-1)^5}$ $\quad s_0 = 1$ è polo di ordine 5

$= 1 + \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{(s-1)^3} + \frac{D}{(s-1)^4} + \frac{E}{(s-1)^5}$

$A = R_{X(s)}(1)$ $\qquad D = R_{(s-1)^3 X(s)}(1)$

$B = R_{(s-1)X(s)}(1)$ $\qquad E = R_{(s-1)^4 X(s)}(1)$

$C = R_{(s-1)^2 X(s)}(1)$

E: $(s-1)^4 X(s) = \frac{s^5}{s-1} \longrightarrow R_{(s-1)^4 X(s)}(1) = [s^5]_{s=1} = 1$ $\qquad E = 1$

D: $(s-1)^3 X(s) = \frac{s^5}{(s-1)^2} \longrightarrow R_{(s-1)^3 X(s)}(1) = \left[\frac{d}{ds} s^5\right]_{s=1} = [5s^4]_{s=1} = 5$ $\qquad D = 5$

C: $(s-1)^2 X(s) = \frac{s^5}{(s-1)^3} \longrightarrow R_{(s-1)^2 X(s)}(1) = \left[\frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2} s^5\right]_{s=1} = \left[\frac{1}{2} 20 s^3\right]_{s=1} = 10$

$C = 10$

B: $(s-1) X(s) = \frac{s^5}{(s-1)^4} \longrightarrow R_{(s-1)X(s)}(1) = \left[\frac{1}{3!}\frac{d^3}{ds^3} s^5\right]_{s=1} = \left[\frac{1}{6} 60 s^2\right] = 10$

$B = 10$

A: $X(s) \longrightarrow R_{X(s)}(1) = \left[\frac{1}{4!}\frac{d^4}{ds^4} s^5\right]_{s=1} = \left[\frac{1}{24} 120\, s\right]_{s=1} = 5$ $\qquad A = 5$

$X(s) = 1 + \frac{5}{s-1} + \frac{10}{(s-1)^2} + \frac{10}{(s-1)^3} + \frac{5}{(s-1)^4} + \frac{1}{(s-1)^5}$

$\delta(t) + 5e^t u(t) + 10te^t u(t) + 10 \cdot \frac{1}{2} t^2 e^t u(t) + 5\frac{1}{3!} t^3 e^t u(t) + \frac{1}{4!} t^4 e^t u(t)$

$x(t)$	$X(s)$
$u(t)$	$1/s$
$t\,u(t)$	$1/s^2$
$\frac{1}{2} t^2 u(t)$	$1/s^3$
$\frac{1}{3!} t^3 u(t)$	$1/s^4$
$\frac{1}{4!} t^4 u(t)$	$1/s^5$

$\frac{d}{ds}\frac{1}{s} = -\frac{1}{s^2}$

$\frac{d^2}{ds^2}\frac{1}{s} = -\frac{-2\cancel{s}}{s^{\cancel{4}3}} = \frac{2}{s^3}$

$\frac{d^3}{ds^3}\frac{1}{s} = 2\frac{-3\cancel{s^2}}{s^{\cancel{6}4}} = -\frac{6}{s^4}$

Dim dell' α e del β

$$X(s) = \frac{as+b}{(s-a_0)^2+\omega_0^2} = \qquad s_{1,2} = a_0 \pm j\omega_0 \quad \text{2 poli semplici}$$

$$= \frac{A}{s-(a_0+j\omega_0)} + \frac{B}{s-(a_0-j\omega_0)} \qquad \alpha + j\beta = A = R_{x(s)}(a_0+j\omega_0)$$

$$\alpha - j\beta = B = R_{x(s)}(a_0-j\omega_0)$$

$$= \frac{\alpha+j\beta}{(s-a_0)+j\omega_0} + \frac{\alpha-j\beta}{s-a_0-j\omega_0} = \frac{2\alpha(s-a_0)}{(s-a_0)^2+\omega_0^2} + \frac{-2\beta\omega_0}{(s-a_0)^2+\omega_0^2}$$

4) $\mathcal{L}^{-1}[X_4(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s^2+11s+74}{s^2+4s+29}\right]$

$s^2+4s+29=0 \qquad (s+2)^2+25$

$-2\pm\sqrt{4-29} \left\langle \begin{array}{l} -2+5i \\ -2-5i \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} (x-(-2+5i)) \\ (x-(-2-5i)) \end{array}$

$2\delta(t) \quad 2\alpha\frac{s+2}{(s+2)^2+25} - 2\beta\frac{25}{(s+2)^2+25}$

$2\delta(t) + 2\alpha\, u(t)e^{-2t}\cos 5t - 2\beta\, u(t)e^{-2t}\,\text{sen}\,5t$

$\alpha + j\beta = R_{X(s)}(-2+5j) = \left[\frac{2s^2+11s+74}{2s+4}\right]_{s=-2+5j} = \frac{3}{2} - i$

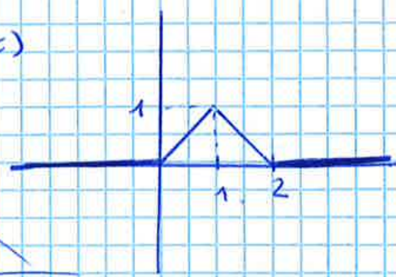
$2\delta(t) + 3u(t)e^{2t}\cos 5t + 2u(t)e^{-2t}\,\text{sen}\,5t$

5) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s^2(1-e^{-2s})}\right]$

$\frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^2}e^{-s} + \frac{1}{s^2}e^{-2s} =$

$\mathcal{L}[x(t)] = \frac{\mathcal{L}[x_0(t)]}{1-e^{-Ts}} \qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = t\,u(t)$

$= t\,u(t) - 2(t-1)\,u(t-1) + (t-2)\,u(t-2)$



$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s^2(1-e^{-2s})}\right] \longrightarrow$

$= \frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s^2} = \frac{(1-e^{-s})^2}{s^2} = \frac{[e^{-\frac{s}{2}}(e^{\frac{s}{2}}-e^{-\frac{s}{2}})]^2}{s^2} = (e^{-\frac{s}{2}})^2\frac{(2\sinh\frac{s}{2})^2}{s^2}$

$\mathcal{L}_b$ [] $= \left(\frac{2\sinh\frac{s}{2}}{s}\right)^2$

$\mathcal{F}[(t+4)p_8(t)] = \mathcal{F}[t\,p_8(t)] + 4\mathcal{F}[p_8(t)] =$

$\frac{1}{-j}\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}[p_8(t)] + 4\,\mathcal{F}[p_8(t)] =$

$j\,\frac{d}{d\omega}\,\frac{2\,\mathrm{sen}\,4\omega}{\omega} + 4\cdot\frac{2\,\mathrm{sen}\,4\omega}{\omega} =$

$j\,\frac{(8\cos 4\omega)\omega - 2\,\mathrm{sen}\,4\omega}{\omega^2} + 8\,\frac{\mathrm{sen}\,4\omega}{\omega}$

$j\,8\,\frac{\cos 4\omega}{\omega} - j\,2\,\frac{\mathrm{sen}\,4\omega}{\omega^2} + 8\,\frac{\mathrm{sen}\,4\omega}{\omega}$

$\frac{8j}{\omega}\underbrace{(\cos 4\omega - j\,\mathrm{sen}\,4\omega)}_{e^{-j4\omega}} - j2\,\frac{\mathrm{sen}\,4\omega}{\omega^2} = \frac{8j\omega e^{-j4\omega} - 2j\,\mathrm{sen}\,4\omega}{\omega^2}$

$\lim_{\omega\to 0}\frac{8j\omega\, e^{-j4\omega} - 2j\,\mathrm{sen}\,4\omega}{\omega^2} \longrightarrow \frac{8j\omega(1+(-j4\omega)) - 2j\left((4\omega) - \frac{4^3\omega^3}{3!}\right)}{\omega^2}$

$\lim_{\omega\to 0}\frac{8j\omega(-j4\omega) + \cancel{2j\frac{4^3\omega^3}{3!}}\ldots}{\omega^2} = 32$

$\beta_0 = \frac{\pi}{4}\cdot 32 = 8\pi$

esercizio

$X(\omega) = \pi\,\delta(\omega-1) - \delta(\omega+\pi)$ $\qquad \mathcal{F}^{-1}[X(\omega)]$

a) ha periodo $T = 2\pi$

b) $T = 2$

c) è limitata per ogni t

d) tende a 0 per $t\to\infty$

$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$

$\mathcal{F}[1] = 2\pi\,\delta(t)$

$\mathcal{F}[1\cdot e^{jt}] = 2\pi\,\delta(\omega-1)$

$\mathcal{F}[\underbrace{\tfrac{1}{2}e^{jt}}_{\text{periodo } 2\pi}] = \pi\,\delta(\omega-1)$

$\mathcal{F}[1\cdot e^{-j\pi t}] = 2\pi\,\delta(\omega+\pi)$

$\mathcal{F}[-\frac{1}{2\pi}e^{-j\pi t}]$

$e^{-j\pi t}$ periodo $\frac{2\pi}{\pi} = 2$

$\mathcal{F}^{-1}[X(\omega)] = \underbrace{\frac{1}{2}e^{jt}}_{2\pi} - \underbrace{\frac{1}{2\pi}e^{j\pi t}}_{2}$ $\longrightarrow$ somma funz. limitata

$\mathcal{L}[p_2(t-1) - p_2(t-3)]$

$$\frac{2\,sh\,s}{s}e^{-s} - \frac{2\,sh\,s}{s}e^{-3s}$$

$$\frac{2\,sh\,s}{s}(e^{-s} - e^{-3s})$$

$$\frac{2\,sh\,s}{s}e^{-2s}\underbrace{(e^{s}-e^{-s})}_{2sh\,s} \to e^{-2s}\frac{(2senh\,s)^2}{s}$$

se sotto non c'è il quadrato è una differenza di porte, non un triangolo

$$\mathcal{F}[p_2(t-1) - p_2(t-3)] = \left[e^{-2s}\frac{(2senh\,s)^2}{s}\right]_{s=j\omega} =$$

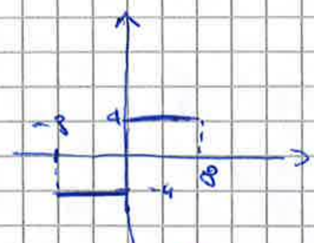
$$= e^{-2j\omega}\frac{(2sh\,j\omega)^2}{j\omega} = e^{-2j\omega}\frac{(2j\,sen\,\omega)^2}{j\omega} =$$

$$= e^{-2j\omega}\frac{-(2sen\,\omega)^2}{j\omega} = j\,e^{-2j\omega}\frac{(2\,sen\,\omega)^2}{\omega}$$

esercizio

$y(t) = -4u(t+8) + 8u(t) - 4u(t-8)$

$\mathcal{F}[y(t)] =$



c) $-4\frac{2sen\,4\omega}{\omega}e^{4j\omega} + 4\frac{2sen\,4\omega}{\omega}e^{-4j\omega} =$

$$= -4\frac{2sen\,4\omega}{\omega}\underbrace{(e^{4j\omega} - e^{-4j\omega})}_{2j\,sen\,4\omega} = -4j\frac{(2\,sen\,4\omega)^2}{\omega}$$

$$y(t) = -p_8(t+4) + p_8(t-4) \xrightarrow{\mathcal{F}} -e^{+4j\omega}\frac{2sen\,4\omega}{\omega} + e^{-4j\omega}\frac{2\,sen\,4\omega}{\omega}$$

2. Scrivere una parametrizzazione della curva $\tilde{\gamma} : I \to \mathbb{C}$ il cui supporto è disegnato in Figura 3.1 sapendo che $I = [0, 1]$.
3. Determinare il valore di

$$\int_\gamma (3\bar{z} + 2)\, dz$$

dove γ è una curva con sostegno

(a) la circonferenza di centro 0 e raggio 2 (percorsa in senso antiorario);
(b) il segmento che unisce il punto $-i$ al punto i;
(c) il segmento che unisce il punto 0 al punto $1 + i$.

4. Determinare il valore di

$$\int_\gamma |z|\, dz$$

dove γ è una curva con sostegno

(a) la circonferenza di centro 0 e raggio 1 (percorsa in senso antiorario);
(b) il segmento che unisce il punto -1 al punto 1;
(c) la semicirconferenza di centro 0 e raggio 1 passante per il punto i (percorsa in senso antiorario) unita al segmento che unisce il punto -1 al punto 1.

5. Determinare il valore di

$$\int_\gamma z \cos z\, dz$$

dove γ è una curva con sostegno

(a) la semicirconferenza di centro l'origine e che passa per i punti 1, i e -1;
(b) il segmento che unisce il punto -1 al punto 1;
(c) il segmento che unisce il punto -1 al punto $-i$ unito al segmento che unisce il punto $-i$ al punto 1.

6. Determinare il valore di

$$\int_\gamma \frac{1}{z-3}\, dz$$

dove γ è una curva con sostegno la circonferenza di centro 2 e raggio 5 (percorsa in senso antiorario).
7. Determinare il valore di

$$\int_\gamma \frac{1}{\cos z (z - i)}\, dz$$

dove γ è una curva con sostegno la circonferenza di centro 0 e raggio 3/2.
8. Determinare il valore di

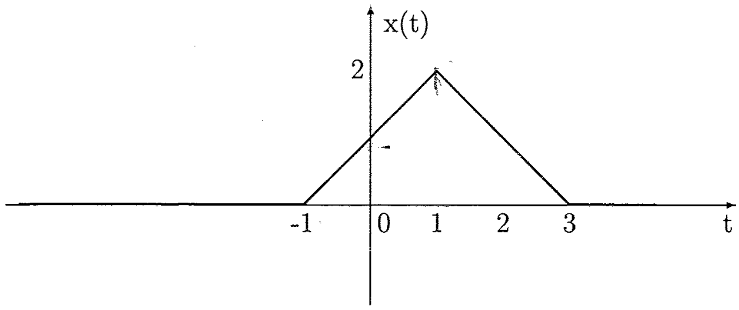
$$\int_\gamma \frac{1}{z^2(z^2 + 6 + iz)}$$

dove γ è una curva con sostegno la circonferenza di centro 1 e raggio 2 (percorsa in senso antiorario).
9. Determinare il valore dei seguenti integrali di linea

(a) $\int_{S_2} \frac{\cos(z)}{(z-3)^3}$
(b) $\int_{S_4} \frac{\cos(z)}{(z-3)^3}$
(c) $\int_{S_2} \frac{\cos(z)}{(z^2-9)}$
(d) $\int_{S_4} \frac{\cos(z)}{(z^2-9)}$

dove S_r è una curva con sostegno la circonferenza di centro 0 e raggio r (percorsa in senso antiorario).

5) Utilizzando le funzioni a gradino e le porte o loro traslate, descrivere, in modo analogo alle (1) e (2), il seguente segnale:



6.2] Limiti distribuzionali

Si tenga presente che se una successione di funzioni $x_n(t)$ ha le seguenti caratteristiche:

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} x_n(t)\, dt = 1$ per ogni n;

b) $x_n(0) \longrightarrow +\infty$ per n che tende a $+\infty$;

c) l'insieme delle $t \in \mathbf{R}$ per cui $x_n(t) \neq 0$ è contenuto in un intervallo $[a_n, b_n]$ la cui ampiezza $b_n - a_n$ tende a zero;

allora

$$x_n(t) \longrightarrow \delta(t)$$

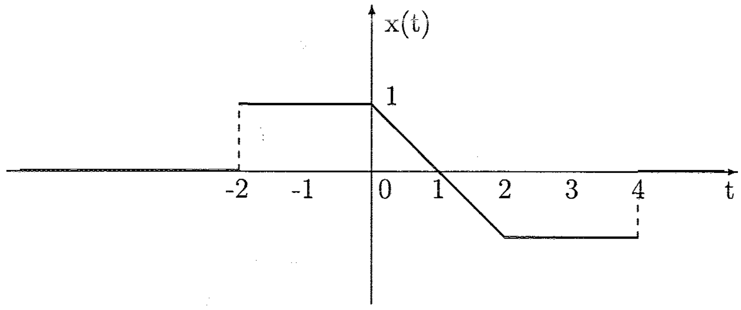
per $n \to +\infty$ nel senso delle distribuzioni.

B] Si provi che:

$$x_n(t) = n^2(t + \frac{1}{n})p_{\frac{1}{n}}(t + \frac{1}{2n}) - n^2(t - \frac{1}{n})p_{\frac{1}{n}}(t - \frac{1}{2n})$$

tende alla delta di Dirac $\delta(t)$ e si disegni $x_n(t)$ per $n = 1, 2, 3, \cdots$.

E] Tenendo presenti le considerazioni del punto D] precedente, si derivi graficamente il segnale seguente:



Si ritrovi il risultato ottenuto graficamento con i calcoli.

6.5] Prodotto di convoluzione

Si ricordi che il prodotto di convoluzione è definito nel modo seguente:

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)\, d\tau$$

F] Calcolare:

1) $x_1(t) = u(t) * u(t)$

2) $x_2(t) = u(t) * \mathrm{e}^{-t}u(t)$

3) $x_3(t) = p_1(t) * p_1(t)$

Si facciano poi i grafici di $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$.

Si calcoli la trasformata bilatera di Laplace di:

$$x(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|t|}.$$

precisandone il dominio.

2.3] Trasformata del gradino

C.1] Si discuta la possibilità di calcolare con l'integrale la trasformata di Fourier di $u(t)$. Si cominci cioè a fare il calcolo dell'integrale di Fourier segnalando la ragione per cui l'integrale non converge. Si tenga presente che:

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} = \lim_{t\to+\infty} (\cos\omega t - \mathrm{j}\sin\omega t)$$

Si osservi poi che, facendo il calcolo in ambito distribuzionale, si ha:

$$\mathfrak{F}[u(t)] = \frac{1}{\mathrm{j}\omega} + \pi\delta(\omega)$$

C.2] Si calcoli la trasformata di Laplace del gradino $u(t)$, osservando che il problema di convergenza dell'integrale fornisce il dominio della trasformata di Laplace e che la trasformata di Laplace è sempre una funzione analitica nel suo dominio.

2.4] Calcolo utilizzando la proprietà di traslazione nel tempo e trasformate note

D.1] Ricordando la proprietà di **traslazione nel tempo**:

$$\boxed{\mathfrak{F}[x(t-t_0)] = X(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}}$$

e ricordando che $\mathfrak{F}[p_a(t)] = \mathfrak{F}[u(t+\frac{a}{2}) - u(t-\frac{a}{2})] = \frac{2\sin(a\omega/2)}{\omega}$ si calcoli la trasformata di Fourier di:

$$p_a(t-\frac{a}{2})$$

si confronti il risultato ottenuto con quello del primo esercizio del punto A.1].

D.2] Ricordando la proprietà di **traslazione nel tempo**:

$$\boxed{\mathfrak{L}[x(t-t_0)] = X(s)\mathrm{e}^{-st_0}}$$

e ricordando che $\mathfrak{L}[p_a(t)] = \mathfrak{L}[u(t+\frac{a}{2}) - u(t-\frac{a}{2})] = \frac{2\sinh(as/2)}{s}$ si calcoli la trasformata di Laplace di:

$$p_a(t-\frac{a}{2})$$

si confronti il risultato ottenuto con quello del primo esercizio del punto A.2].

2.5] Calcolo utilizzando la proprietà di traslazione in frequenza e trasformate note

E.1] Ricordando la proprietà di **traslazione in frequenza**:

2.7] Calcolo con la proprietà di risclamento

H] Proprietà di **riscalamento**:

$$\mathfrak{F}[x(at)] = \frac{1}{|a|} X(\frac{\omega}{a}) \qquad \mathfrak{L}[x(at)] = \frac{1}{|a|} X(\frac{s}{a})$$

Ricordando (o ricalcolandosi di nuovo con i metodi illustrati nei punti precedenti) la trasformata di Fourier di $p_4(t-2)$ si calcoli la trasformata di Fourier e successivamente la trasformata bilatera di Laplace del segnale:

$$p_4(-t-2)$$

pensandolo come un riscalamento di $p_4(t-2)$ con $a = -1$.

2.8] Calcolo con la proprietà di derivata nel tempo

I] Proprietà di **derivata nel tempo**:

$$\mathfrak{F}\left[\frac{d}{dt}x(t)\right] = \mathrm{j}\omega X(\omega),\ \mathfrak{L}_b\left[\frac{d}{dt}x(t)\right] = sX(s),\ \mathfrak{L}_u\left[\frac{d}{dt}x(t)\right] = sX(s) - x(0_-)$$

Ricordando la trasformata di Fourier di $u(t-5)$ si calcoli la trasformata di Fourier e successivamente la trasformata di Laplace del segnale:

$$\frac{d}{dt}u(t-5)$$

Si confronti il risultato ottenuto con la trasformata di $\delta(t-5)$ ricavata come traslazione nel tempo della trasformata della delta di Dirac:

$$\mathfrak{F}[\delta(t)] = 1 \qquad \mathfrak{L}[\delta(t)] = 1$$

2.9] Calcolo con la proprietà di derivata ω o in s.

L] Proprietà di **derivata in frequenza e in s**:

$$\mathfrak{F}[-\mathrm{j}tx(t)] = \frac{d}{d\omega}X(\omega) \qquad \mathfrak{L}[-tx(t)] = \frac{d}{ds}X(s)$$

Si calcolino le trasformate di Fourier e successivamente di Laplace dei segnali seguenti:

1) $tu(t)$

2) $(t-1)u(t)$

3) $(t-1)u(t-1)$

4) $3t\,(u(t) - u(t-4))$

3.2] Proprietá di coniugazione (con $x^*(t)$ si intende il complesso coniugato di $x(t)$):

$$\boxed{\mathfrak{F}[x(t)] = X(\omega) \Longrightarrow \mathfrak{F}[x^*(t)] = X^*(-\omega)}$$

$$\boxed{\mathfrak{L}[x(t)] = X(s) \Longrightarrow \mathfrak{L}[x^*(t)] = X^*(s^*)}$$

Utilizzando la proprietà di coniugazone, calcolare la trasformata di Fourier e, successivamente, la trasformata bilatera di Laplace di

$$\left(\frac{3}{2}p_2(t) - \frac{1}{2}\mathrm{j}u(t-1)\right)^*$$

3.3] Proprietà di realtà e parità della trasformata di Fourier:

$$\boxed{\left.\begin{array}{lll} x(t) & = & x^*(t) \\ x(t) & = & x(-t) \\ x(t)\ \text{reale} & \text{e} & \text{pari} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lll} X(\omega) & = & X^*(\omega) \\ X(\omega) & = & X(-\omega) \\ X(\omega)\ \text{reale} & \text{e} & \text{pari} \end{array}\right.}$$

Calcolare le trasformate di di Fourier: $-2p_1(t+\frac{5}{2}) + p_4(t) - 2p_1(t-\frac{5}{2})$ e osservare che il risultato è reale e pari.

3.4] Proprietà di realtà e disparità della trasformata di Fourier:

$$\boxed{\left.\begin{array}{lll} x(t) & = & x^*(t) \\ x(t) & = & -x(-t) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lll} X(\omega) & = & -X^*(\omega) \\ X(\omega) & = & -X(-\omega) \end{array}\right.}$$

Calcolare le trasformate di di Fourier:

1) $-2(t+2)[u(t+2) - u(t+1)] + 2t[u(t+1) - u(t-1)] - 2(t-2)[u(t-1) - u(t-2)]$
   e osservare che il risultato è immaginario puro e dispari;

2) $(t+1)p_2(t) + 2u(t-1)$ e osservare che il risultato non è nè pari nè dispari.

$$\frac{3}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}\,\mathrm{sen}\,\omega}{\omega} - \frac{1}{2}j\left(\frac{1}{-j\omega} \cancel{+}\pi\delta(\cancel{+}\omega)\right)e^{-j\omega}$$

$$\frac{3\,\mathrm{sen}\,\omega}{\omega} + \frac{1}{2}j\left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right)e^{-j\omega}$$

$$3\frac{\mathrm{sen}(-\omega)}{-\omega} + \frac{1}{2}j\left(\frac{1}{-j\omega} + \pi\delta(-\omega)\right)e^{j\omega}$$

$x(t) = \frac{3}{2}p_2(t) - j\frac{1}{2}u(t-1)$

$\mathcal{L}[x(t)] = \frac{3}{2}\cdot\frac{2\,sh\,s}{s} - j\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}e^{-s} = X(s)$

$x^*(t) = \frac{3}{2}p_2(t) + j\frac{1}{2}u(t-1)$

Richiami

$s = \sigma - j\omega$

$\left(\frac{F(s)}{G(s)}\right)^*$ $\quad (r e^{j\varphi})^* = r e^{-j\varphi}$

$(F(s) + G(s))^* = F^*(s) + G^*(s)$

$\left(\frac{t}{u}\right)^* = \frac{t^*}{s^*} \quad (s^*)^* = s$

$(sh\,s)^* = \left(\frac{e^{s} - e^{-s}}{2}\right)^* = \frac{1}{2}(e^{s})^* - \frac{1}{2}(e^{-s})^*$
$= \frac{1}{2}e^{s^*} - \frac{1}{2}e^{-s^*}$

$\mathcal{L}[x^*(t)] = \left(\frac{3}{2}\frac{2\,sh\,s^*}{s^*} - j\frac{1}{2}\frac{1}{s^*}e^{-s^*}\right)^*$

$\frac{3}{2}\frac{2\,sh\,s}{s} + j\frac{1}{2}\frac{1}{s}e^{-s}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 212