



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 1969A -

ANNO: 2016

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Piccarreda Pasquale

MATERIA: Costruzioni di macchine - Prof. Raffa

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

# STATICA I

- Tirare (beams) Solido ma unidimensionale (Solido di S. Venant)
  - Mezzo: <sup>NECESSARIA</sup> Continuo (struttura inestricabile)  
(materiale) continuo simile a quello 1
  - Omogeneo (proprietà rimanenti nelle varie posizioni)
  - Isotropo (proprietà rimanenti rispetto al punto di vista)
- (IPOTESI CORDE HA NON FONDAMENTALI)*

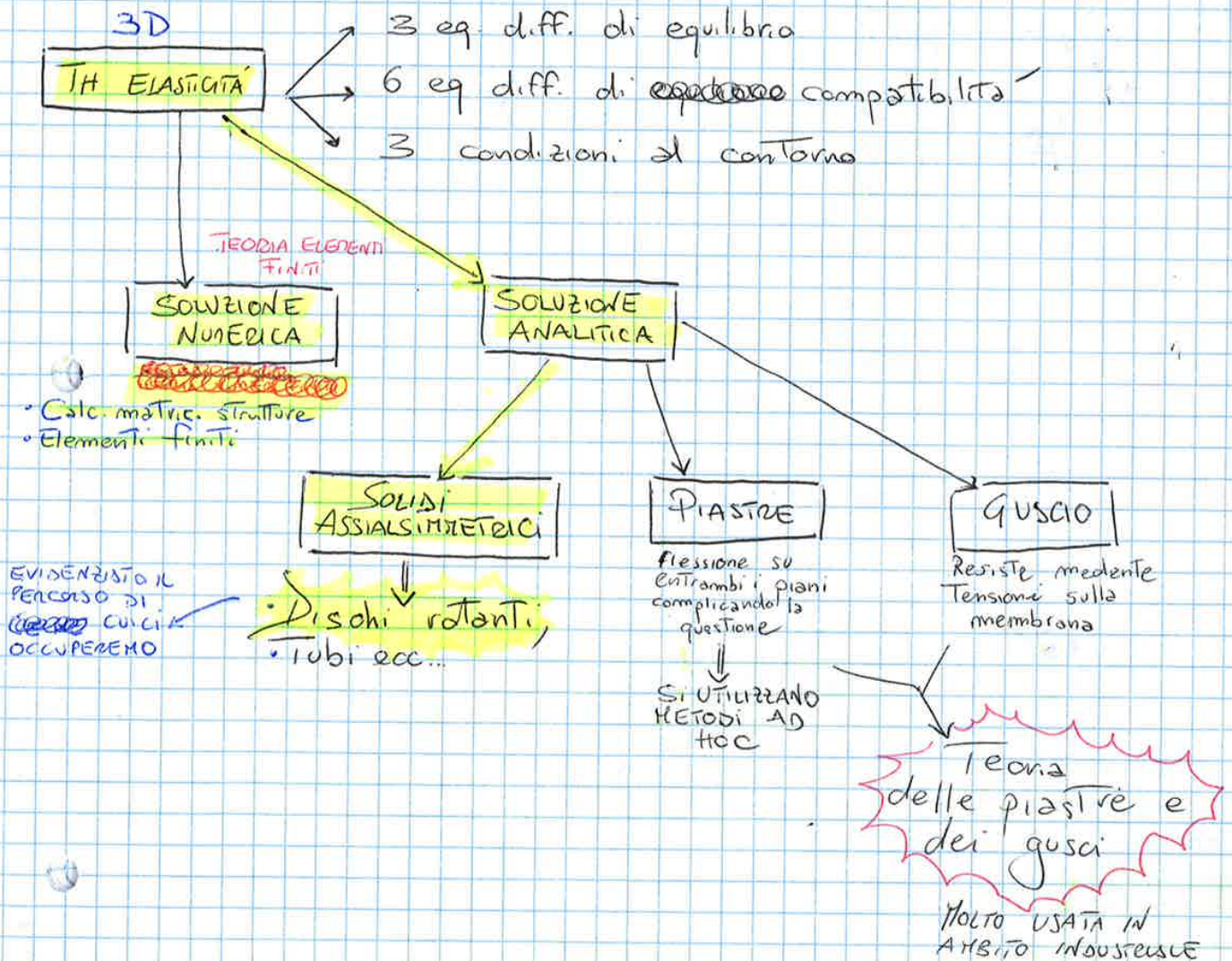
Se introduciamo anche l'ELASTICITÀ differenziamo i solidi dai liquidi

AL CESSARE SEDE T.E  
IL SOLIDO RIPRENDE LA  
FORMA INIZIALE

Lavoreremo con Mezzi continui (omogenei e isotropi) ED ELASTICI (solidi)

## TEORIA DELL'ELASTICITÀ

Vuole studiare l'andamento delle tensioni a prescindere dalla forma.

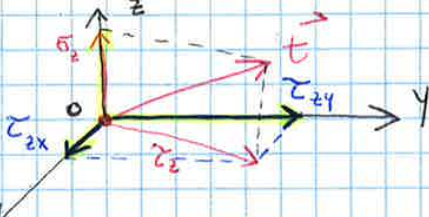


~~...~~

$$\vec{t}(P, \vec{n})$$

$\vec{t}$  è funzione del punto e del vettore normale quindi della sezione

Consideriamo  $dS = (x, y)$



$$(x, y) = \begin{matrix} \text{COMPONENTE} \\ \text{NORMALE} \\ \sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy} \\ \text{COMPONENTI} \\ \text{TANGENZIALI} \end{matrix}$$

Quindi negli altri piani

$$(x, z) = \sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz}$$

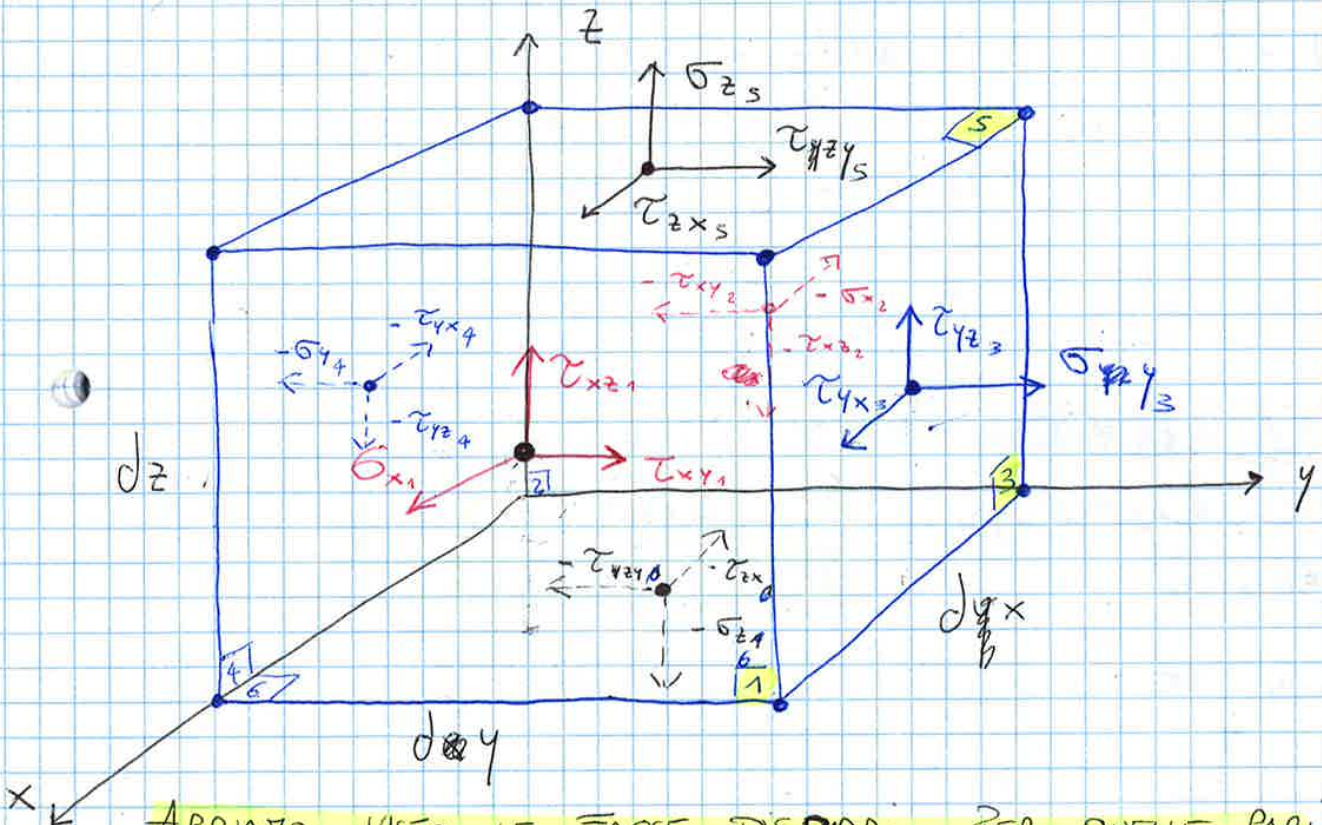
$$(y, z) = \sigma_x, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}$$

### STATO DELLE TENSIONI

$$I = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Le coppie evidenziate sono uguali per simmetria quindi:

9 componenti  $\rightarrow$  6 componenti



ABBIAMO VISTO LE FACCE DISPARI, PER QUELLE PARI ANPERO LE STESSA TENSIONI MA CON VERSO OPPOSTO

Le Tensioni sono uniformemente distribuite sulla faccia dell'elemento infinitesimo

1, 3, 5 SONO LE FACCE POSITIVE

Le nuove Forze da considerare sono:

LEZIONE 2 30/09

- SUPERFICIE (tensioni)
- VOLUME

NON C'È SPAZIO PER I CARICHI CONCENTRATI.

Traslazione rispetto  $x$

$$\sum_j (F_{S,j})_x + \sum_k (F_{V,k})_x = 0$$

Forze di superficie                      Forze di volume

$$\underbrace{(\sigma_{x1} - \sigma_{x2})}_{\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx} dy dz + \underbrace{(\tau_{yx3} - \tau_{yx4})}_{\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy} dx dz + \underbrace{(\tau_{zx5} - \tau_{zx6})}_{\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz} dx dy + X dx dy dz = 0$$

↙  $x$ :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

→  $y$ :

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0$$

↑  $z$ :

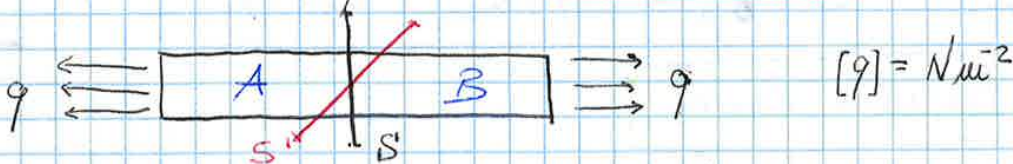
$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

Ora voglio creare la matrice diagonale

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

TENSIONI PRINCIPALI  
(sono tensioni normali)

Prendiamo in esempio la TRAVE IN TRAZIONE



Prendiamo la parte B in considerazione, dopo aver sezionato con S



$$t \cdot A = q \cdot A \rightarrow t = q \rightarrow \underline{\underline{\sigma = q}}$$

Esiste  $\vec{N}(l, m, n)$  per cui sul piano individuato  $\vec{T} \parallel \vec{N}$ ? ( $\vec{T} = \sigma \vec{N}$ )

NATURALE  
È UNA DIREZIONE  
NORMALE

incognite:

- $l, m, n$
- $\sigma$

Saranno noti ~~appena~~  $t_x, t_y, t_z$  che saranno:

$$t_x = \sigma l$$

$$t_y = \sigma m$$

$$t_z = \sigma n$$

Andando a sostituire nelle formule di CAUCHY ottengo le 3 TENS. PRINC.

$$(\sigma_x - \sigma)l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n = 0$$

$$\tau_{yx}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{yz}n = 0$$

$$\tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n = 0$$

$$[T] - \sigma [I] \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

↓ AUTOVALORE     ↓  
↓ AUTOVETTORE

$[T] - \sigma [I]$  DEVE AVERE  $\det = 0$  (CONDIZIONE CHE PRODUCE EQ. CARATT. LE CUI RADICI SONO AUTOV.)  
TENSIONI PRINCIPALI

~~Calcolo~~

Calcolo degli autovalori attraverso l'EQUAZIONE CARATTERISTICA

~~$$\sigma^3 - \tau_{11}\sigma^2 + \tau_{22}\sigma - \tau_{33} = 0$$~~

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$

$$I_1 = \text{tr}[T] = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_3 = \det[T]$$

$$I_2 = \text{tr}[\text{COF}_T]$$

COFATTORI

$\text{COF}_T = (-)^{i+j} \cdot M_{ij}$   
 siccome vogliamo la traccia  $\text{COF}_T =$

HAI DA USARE IL  
det di cui si vuole  
trovare ogni  
1 e 2 colonne

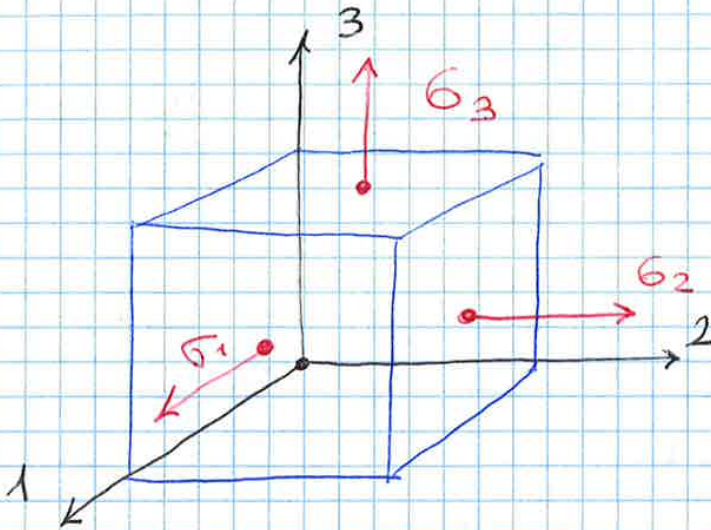
SONO MOLTO  
IMPORTANTI  
(INVARIANTI DELLO  
STATO DELLE TENSIONI.)

QUESTI SONO MOLTO  
IMPORTANTI PERCHÉ NON  
VARIANO QUALSIASI  
SIST. DI REF. PRENDANO E  
DI CONSEGUENZA ANCHE LE  
RADICI COE LE TENSIONI PRINC.

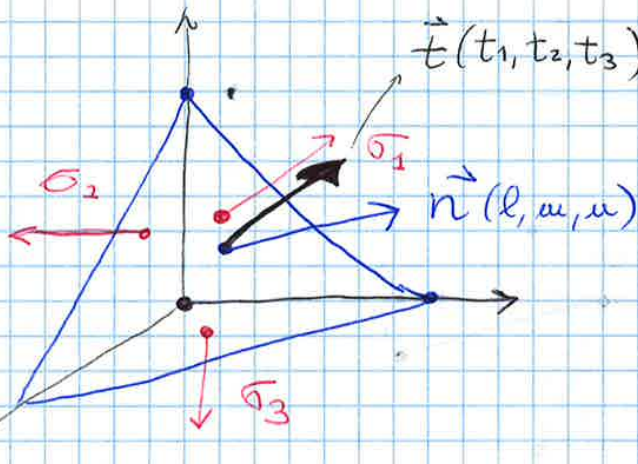
$$\text{COF}_T = \begin{bmatrix} \sigma_y \tau_{yz} & \tau_{yz} \sigma_z & \dots \\ \tau_{yx} \sigma_z & \sigma_x \tau_{zx} & \dots \\ \dots & \tau_{zx} \sigma_z & \dots \\ \dots & \dots & \sigma_x \sigma_y & \tau_{xy} \sigma_y \end{bmatrix}$$

LE DUE PROPRIETÀ IMPORTANTI DEL SDF PRINCIPALE È:

- L'INVARIANZA: Il numero è sempre lo stesso
- L'ORTOGONALITÀ



Riproviamo a tagliare l'elemento con un piano inclinato



IL PIANO COL CUI TAGLIO  
NON È PRINCIPALE QUINDI  
QUINDI  $\vec{t}$  NON PUÒ ESSERE  
// A  $\vec{n}$ . SAPPIAMO SOLO  
CHE LE COMPONENTI DI  $\vec{t}$   
SONO NEL SISTEMA PRINCIPALE

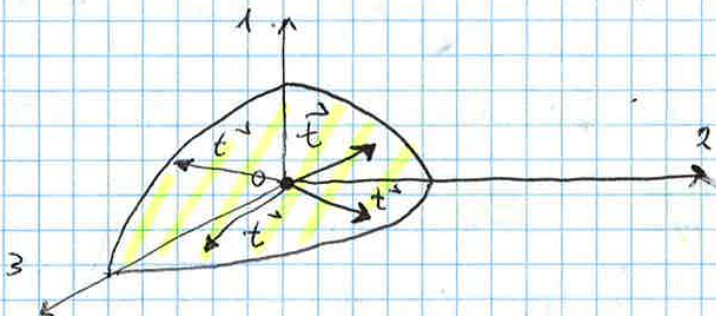
$t_1 = \sigma_1 l$

$t_2 = \sigma_2 m$

$t_3 = \sigma_3 n$

Non ci sono più le  $\tau$   
ESSENDO NEL PIANO PRINCIPALE

$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{t_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{t_2}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{t_3}{\sigma_3}\right)^2 = 1$  **ELLIPSOIDE DELLE TENSIONI**



~~$\alpha \Rightarrow \bar{A}A = \bar{A}P \tan \alpha \rightarrow v(A) - v(P) = (dx + E_x dx) \tan \alpha$~~

$\alpha \rightarrow \frac{dv}{dx} dx = dx (1 + E_x) \tan \alpha$  → consideriamo  $\alpha$  piccolo  $\alpha \approx 0$

↓  
infinitesimo rispetto a 1

$\alpha = \frac{dv}{dx}$

Analogamente  $\beta = \frac{dw}{dy}$

$\gamma_{xy} = \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dy}$

Poniamo di conseguenza anche:

$\gamma_{yz} = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}$

$\gamma_{xz} = \frac{dw}{dz} + \frac{dw}{dy}$

Poniamo anche la MATRICE DI DEFORMAZIONE

$$[E] = \begin{bmatrix} E_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & E_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & E_z \end{bmatrix}$$

$[E] \Rightarrow [E]^T = [E]$  cioè  $\gamma_{jk} = \gamma_{kj}$  dimostrabile tramite considerazioni geometriche. È una INTRINSECA ~~GEOMETRICA~~ <sup>SIMMETRICA</sup> GEOMETRICA.

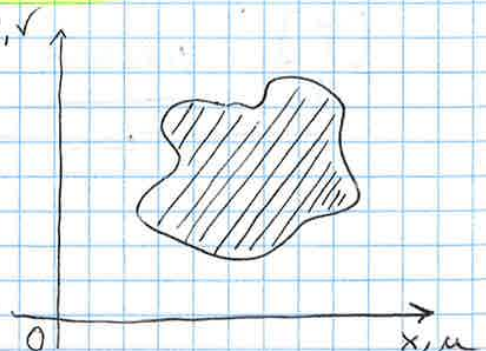
$[T] \Rightarrow$  3 EQ. DIFFERENZIALI DI EQUILIBRIO

$[E] \Rightarrow$  6 EQ. DIFFERENZIALI DI COMPATIBILITÀ

$E_x = \frac{du}{dx}, E_y = \frac{dv}{dy}, E_z = \frac{dw}{dz}$

$\gamma_{xy} = \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dy}$

considerazioni su piccoli piani



$u(x, y)$   $v(x, y)$   
(VETTORI DIREZIONALI)



Partiamo da un materiale ANISOTROPO

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & & a_{16} \\ & a_{22} & & & & \\ & & a_{33} & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ a_{61} & & & & & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

LEGGE  
CONSTITUTIVA  
DEL MATERIALE

↓  
sempre simmetrica  
quindi i coefficienti  
indipendenti sono  
 $36 - 15 = 21!$

ISOTROPO (La legge di Hooke si semplifica molto!)

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & & & \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & & & \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

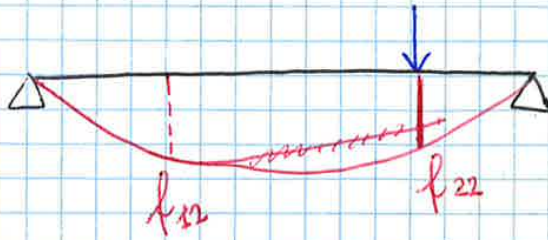
$\begin{matrix} \text{3x3} \\ \{ \epsilon_{\tau} \} = 0 \end{matrix}$   
 $\begin{matrix} \text{3x3} \\ \{ \gamma_{\sigma} \} = 0 \end{matrix}$

1 COEFFICIENTI SONO  
 $\nu, G, E$  MA  
ESISTE UNA RELAZIONE CHE  
LI LEGA PER CUI  
SONO SOLO 2 INDIPENDENTI

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

MODULO DI ELASTICITÀ TANG. [MPa]  
 MODULO DI ELASTICITÀ NORMALE (YOUNG) [MPa]  
 COEFFICIENTE DI POISSON  
 O COEFFICIENTE DI CONTRAZIONE TRASVERSALE

Se carico solo con  $F_2$

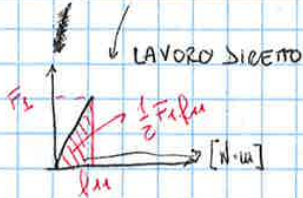


Vogliamo trovare la soluzione fide

- 2 modi
- Prima  $F_1$  e poi  $F_2$  ①
  - Prima  $F_2$  e poi  $F_1$  ②

$$\textcircled{1} L_1 = \frac{1}{2} F_1 f_{11} + \frac{1}{2} F_2 f_{22} + F_1 f_{12}$$

NON HANNO L' $\frac{1}{2}$  PERCHÉ I CARICHI SONO GIÀ LI PRESENTI



LAVORO TUTTO

lavoro da la una forza fa per spostamento del suo punto di applicazione dovuto all'altro forza

$$\textcircled{2} L_2 = \frac{1}{2} F_2 f_{22} + \frac{1}{2} F_2 f_{11} + F_2 f_{21}$$

POCHÉ

$$L_1 = L_2$$

$$F_2 f_{21} = F_1 f_{12}$$

BETTI DICE CHE I LAVORI RECIPROCI SONO UGUALI

Utilizziamo Betti con delle corrispondenze:

LEZIONE 4 7/10

$F_1 \rightarrow \{\sigma\}$   $F_1$  corrisponde al SISTEMA TENS. NORM.

$F_2 \rightarrow \{\tau\}$   $F_2$  corrisponde al SISTEMA TENS. TANG.

$f_{12} \rightarrow \{\epsilon_r\}$

$f_{21} \rightarrow \{\gamma_\sigma\}$

Possiamo scrivere che:

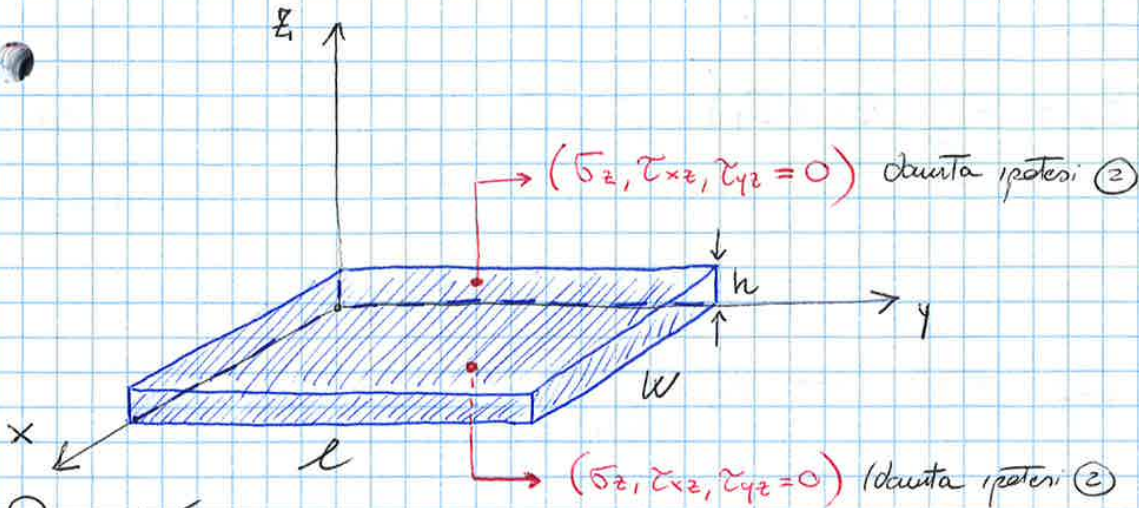
$$\{\sigma\}^T \epsilon_r = \{\tau\}^T \gamma_\sigma = 0 \Rightarrow$$

QUINDI NECESSARIAMENTE

$$\{\epsilon_r\} = 0$$

Quantifica gli 0 nella matrice (quadrante in alto)

# STATO DI TENSIONE PIANA



Proprietà:

- 1)  $\frac{h}{l}, \frac{h}{w} \ll 1$  ( $h$  molto piccolo) → Elemento piccolo  $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  sono molto piccole e quindi possiamo considerarle nulle
- 2) Non esistono carichi applicati lungo  $z$

Stato Tensioni:

① **APPROSSIMAZIONE È CHE:  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$  OVUNQUE GRAZIE AUE IPOTESI**

Possiamo dire quindi:

$$\{\sigma_x, \tau_{xy}, \sigma_y\} \neq 0 \quad \begin{matrix} \sigma_x(x, y, z) \\ \tau_{xy}(x, y, z) \\ \sigma_y(x, y, z) \end{matrix} \rightarrow \text{II APPROSSIM: VARIANO SU TUTTO IL SOLIDO MA ESSENDO SPESSE MOLTO PICCOLE NON POSSIAMO NON CONSIDERARE IL COMPLESSO LUNGO Z}$$

Possiamo quindi affermare in definitiva

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{RIDUZIONE COMPRESSITA} \\ \text{NOTEVOLE DELLO} \\ \text{STATO DELLE TENSIONI} \end{matrix}$$

$\frac{\partial \sigma}{\partial z}, \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0$  LE TENSIONI NON VARIANO MAI LUNGO  $z$ .  
 ABBIAMO PERO LA DIPENDENZA DA  $z$ .

Stato delle deformazioni:

$$[E] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \epsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy} & 0 \\ \gamma_{xy} & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \neq 0 \text{ perché} \\ \text{dipende da} \\ \sigma_x, \sigma_y \end{matrix}$$

*dipendano da  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$  quindi sono nulle*

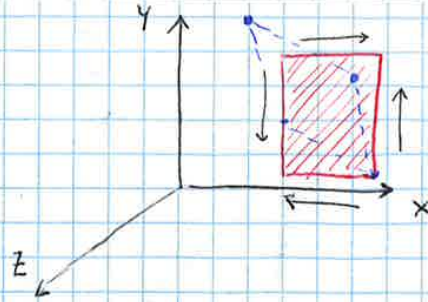
2) **TAGLIO PURO** (c'è solo  $\tau$ )

$\sigma_x = \sigma_y = 0, \tau_{xy} = K$

$\sigma_{\pm} = \pm K$

$\sigma_1 = K, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -K$

(Compressione sul lato, e Trazione sull'asse di stessa identità produce taglio puro)

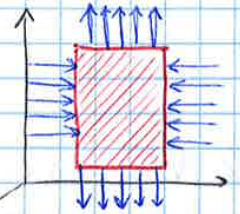


3) **TRAZIONE LUNGO Y E COMPRESSIONE LUNGO X**

$\sigma_y = K, \sigma_x = -K, \tau_{xy} = 0$

$\sigma_{\pm} = \pm K$

$\sigma_1 = K, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$



IL CASO 2 E 3 SONO LO STESSO IDENTICO CASO (IL 3 È QUELLO PRINCIPALE)

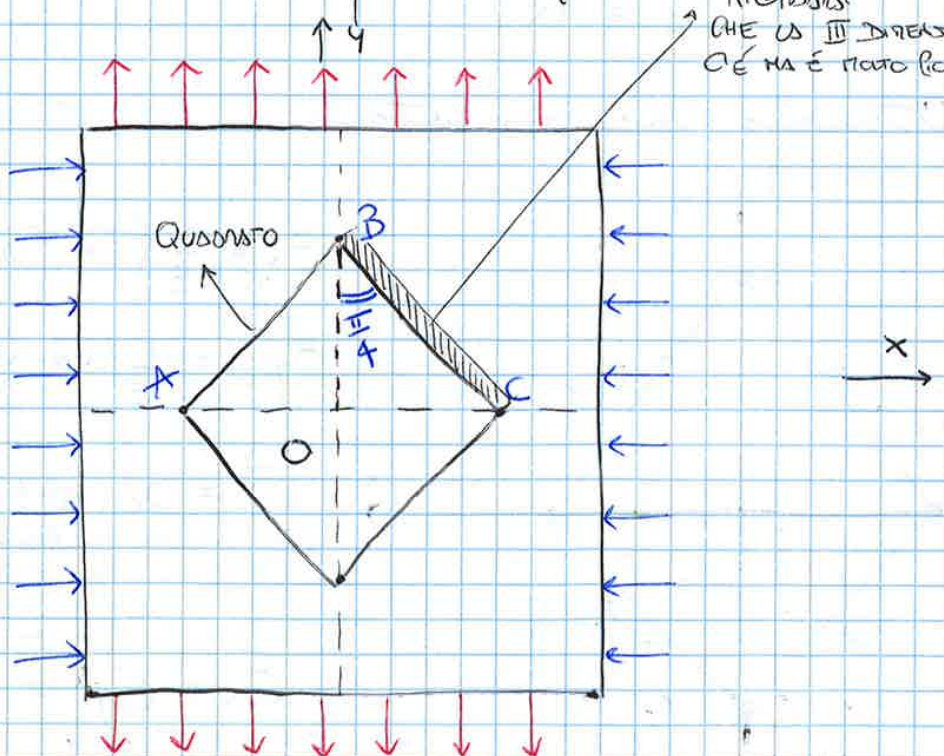
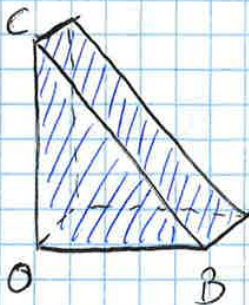
Riprendendo il discorso relativo alle quattro superficie quanto appena detto:

Riconoscere CHE LA III DIREZIONE C'È MA È PIÙ PICCOLA

$\sigma_y = +K$

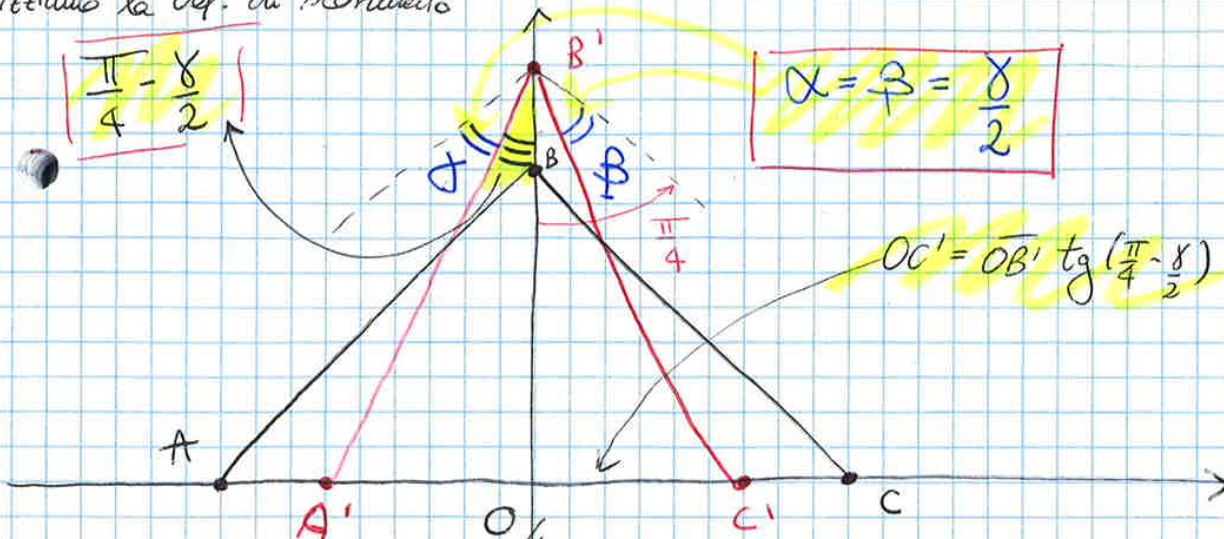
$\sigma_x = -K$

INFINITESIMO DI VOLUME:



Calcolo lo stato delle tensioni sul triangolo OCB:

Utilizziamo la def. di scorrimento



$$\frac{\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}}{4 \cdot 2}$$

$$\alpha = \beta = \frac{\gamma}{2}$$

$$OC' = OB' \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\frac{OC'}{OB'} = \frac{1 + \epsilon_x}{1 + \epsilon_y} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} \approx \frac{2 - \gamma}{2 + \gamma}$$

Poiché deformazioni piccole  $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$

Uguagliando otteniamo:

$$(2 + \gamma)(1 + \epsilon_x) = (1 + \epsilon_y)(2 - \gamma)$$

$$2 + 2\epsilon_x + \gamma - \gamma\epsilon_x = 2 - \gamma + 2\epsilon_y - \gamma\epsilon_y$$

$$2\gamma = 2(\epsilon_y - \epsilon_x) - \gamma(\epsilon_x + \epsilon_y)$$

$\approx 0$  per quanto detto prima

$$\gamma = \epsilon_y - \epsilon_x = 2 \frac{1 + \nu}{E} \tau = 2 \frac{1 + \nu}{E} \tau$$

$$\tau = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma$$

$$\tau = G \gamma$$

Il Tiro Centrifugo non è una forza di superficie, ma dipende da ogni singola pedetta quindi c'è bisogno di uniformare questi  $N$  carichi lungo tutta la superficie del disco.

Abbiamo  $N$  sistemi attacco + pedetta e ciascuno di loro ha un suo TIRO CENTRIFUGO  $t_c$ .

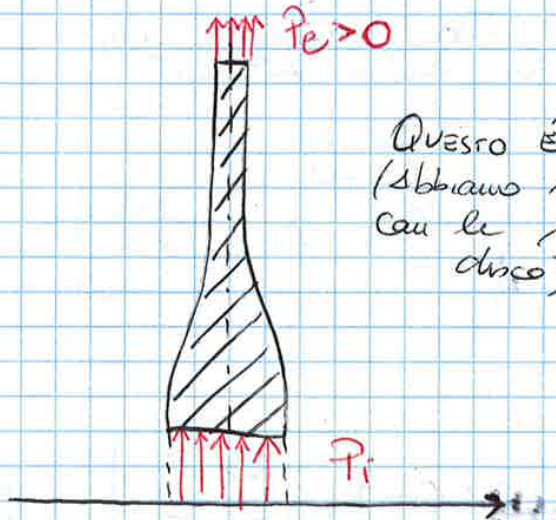
$$t_c = \cancel{m_p} \cdot m_a R_a \omega^2 + m_p R_p \omega^2 \quad [N]$$

RAGGIO BRACCIALE ATTACCO (pointing to  $R_a$ )  
RAGGIO BRACCIALE PEDETTA (pointing to  $R_p$ )

RIMUOVO QUESTA DISTRIBUZIONE DISCRETA TRASFONDALO IN UNA DISTRIBUZIONE LUNGO LA SUPERFICIE DEL DISCO

$$N t_c \rightarrow P_e = \frac{N \cdot t_c}{2\pi r_e h} \rightarrow \text{SPESORE DISCO}$$

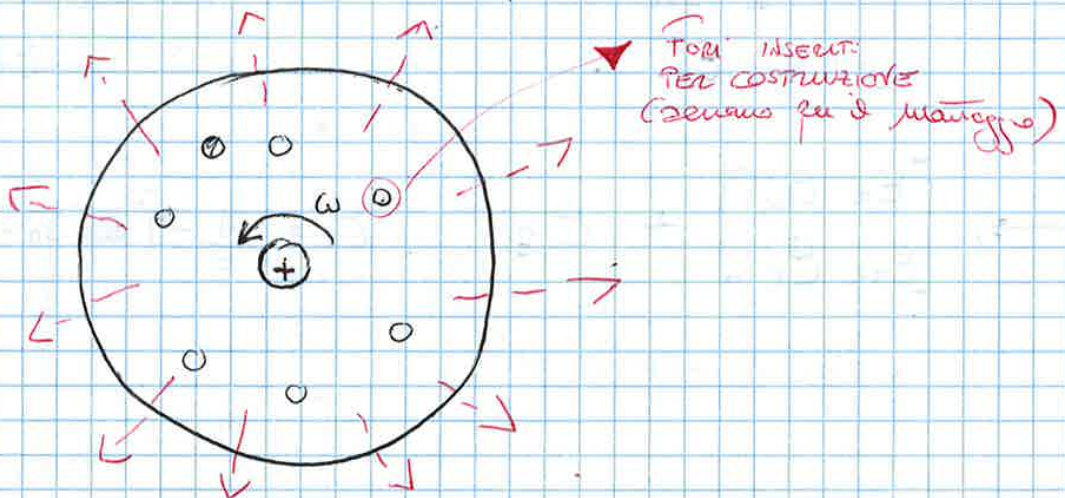
$P_e$  di TRAZIONE (+)  
[ $\frac{N}{m^2}$ ]



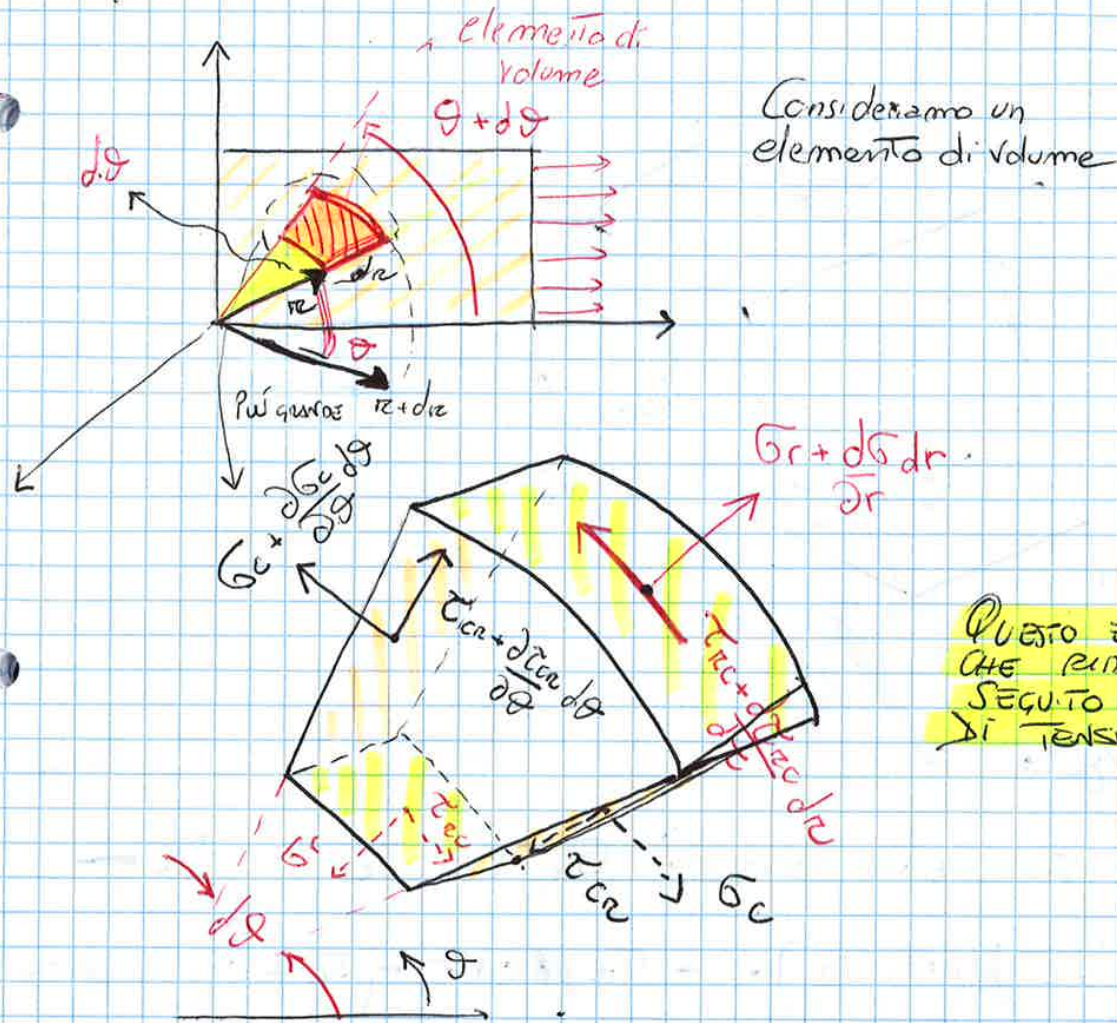
QUESTO È IL RISULTATO FINALE (abbiamo rimosso alcune parti costituendo la cui le azioni che ora esercitavano sul disco)

### 3) GRADIENTI RADIALI DI TEMPERATURA

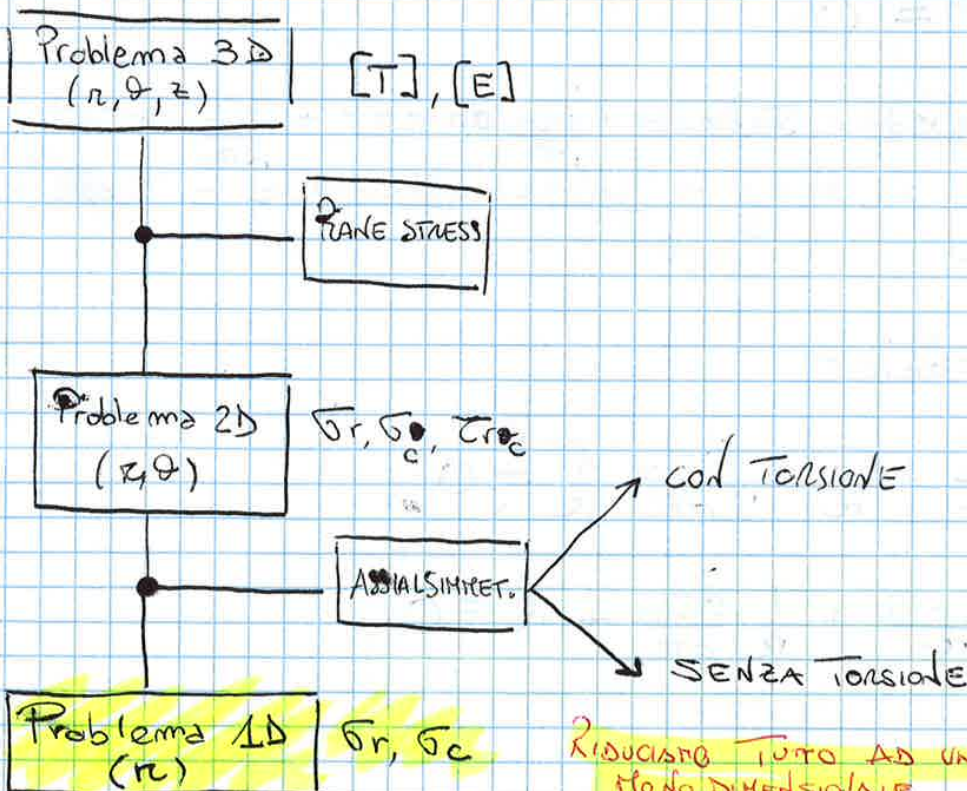
Tratteremo solo il caso di  $h$  (spessore) = COSTANTE



Definiamo quindi le coordinate cilindriche



STIAMO TRATTANDO QUALUNQUE CORPO IN TENSIONE PIANA CHE PERÒ TRATTIAMO IN COORDINATE CILINDRICHE. E ANCHE LA PIÙ GENERALE DEL DISCO



EQUILIBRIO NEW DIREZIONE CIRCONF. :  $\sigma_c, \tau_{cr}, \tau_{rc}$

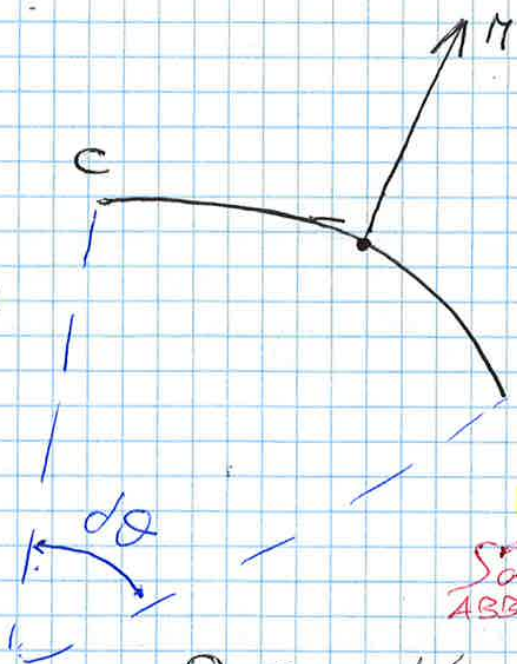
$$\begin{aligned} & (\tau_{rc} + \frac{\partial \tau_{rc}}{\partial r} dr) \cancel{h} (\pi + dr) d\theta - \tau_{rc} r d\theta + (\sigma_c + \frac{\partial \sigma_c}{\partial \theta} d\theta) \cancel{h} dr \cos \frac{d\theta}{2} \\ & - \sigma_c h dr \cos \frac{d\theta}{2} + (\tau_{cr} + \frac{\partial \tau_{cr}}{\partial \theta} d\theta) \cancel{h} dr \sin \frac{d\theta}{2} + \tau_{cr} h dr \sin \frac{d\theta}{2} \\ & + I r d\theta dr = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \tau_{rc} r d\theta + \tau_{rc} dr d\theta + \frac{\partial \tau_{rc}}{\partial r} r^2 d\theta + \frac{\partial \tau_{rc}}{\partial r} r dr d\theta - \tau_{rc} r d\theta \\ & + \sigma_c dr + \frac{\partial \sigma_c}{\partial \theta} d\theta dr - \sigma_c dr + \tau_{cr} dr d\theta + \frac{\partial \tau_{cr}}{\partial \theta} dr^2 \\ & + \tau_{cr} dr d\theta + I r d\theta dr = 0 \end{aligned}$$

Divido per  $r dr d\theta$

$$\frac{1}{r} \tau_{rc} + \frac{\partial \tau_{rc}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_c}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \tau_{cr} + T = 0 \quad (\tau_{rc} = \tau_{cr})$$

$$\frac{\partial \tau_{rc}}{\partial r} + \frac{2}{r} \tau_{rc} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_c}{\partial \theta} + T = 0$$



Se facciamo  $\lim_{r \rightarrow \infty}$  notiamo otteniamo

$$\text{ARCO} = r d\theta = dr$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \textcircled{1} \frac{\partial \sigma_c}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{cr}}{\partial t} + T = 0$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \textcircled{2} \frac{\partial \sigma_c}{\partial t} + \frac{\partial \tau_{rc}}{\partial r} + T = 0$$

SONO IDENTICHE ALLE EQUAZIONI CHE ABBIAMO TROVATO IN COORDINATE RETTILINEE

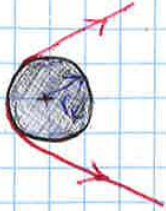
Questo perché se  $r \rightarrow \infty$  l'arco si rettifica e quindi ci ricordavamo a quel caso.



$$\frac{\partial \tau_{rc}}{\partial \tau_{rc}} = -\frac{2}{r} dr$$

Se  $\tau_{rc} = l u r^2 + l u c \rightarrow \tau_{rc} = \frac{C}{r^2} \neq 0 !!!$

Introduco un ulteriore ipotesi: considerando una puleggia



$$M = M_{te}, \quad \dot{\omega}_t = \dot{\omega}_{te}; \quad \tau_{rc} (2\pi r_e \cdot h) = M_{te}$$

quindi  $\exists \tau_{rc} = \frac{M_{te}}{(2\pi r_e^2 \cdot h)}$

Quindi  $C = \frac{M_{te}}{2\pi h} \neq 0$

Alla rinuncia di  $\dot{\omega}$  dobbiamo aggiungere che:

2)  $M_{te} = 0$  (Dobbiamo rinunciare ad ogni sorgente di torsione)

$$\begin{array}{l} \dot{\omega} = \dot{\tau} = 0 \\ M_{te} = 0 \end{array} \Bigg| \rightarrow \tau_{rc} = 0$$

Quindi le equazioni finali diventano

EQUILIBRIO:  $\pi \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + (\sigma_r - \sigma_c) + \rho \omega^2 r^2 = 0$

Ora dobbiamo entrare nel merito dello stato delle deformazioni:

$$\tau_{rc} = 0 \rightarrow \gamma_{rc} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{rc} = 0$$

LE UNICHE DEFORMAZIONI SONO QUELLE NORMALI  $\epsilon_r, \epsilon_c, \epsilon_z$

DEFORMAZIONE:  $\epsilon_z, \epsilon_c \oplus \epsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_r + \sigma_c)$

SPOSTAMENTI:  $u \oplus w, \quad \epsilon_z = \frac{dw}{dz}$

QUINDI AUREMO UNA EQ. DI EQUILIBRIO ED UNA EQ. DI COMPATIBILITÀ

EQUILIBRIO:  $\pi \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + (\sigma_r - \sigma_c) + \rho \omega^2 r^2 = 0$

COMPATIBILITÀ:  $(1 + \nu) (\sigma_c - \sigma_r) + \pi \frac{\partial \sigma_c}{\partial r} - \nu r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \alpha E r \frac{dT}{dr} = 0$

Ricaviamo le  $\sigma_c$  dell'equazione di equilibrio

$\sigma_c = \frac{\pi \partial \sigma_r}{\partial r} + \sigma_r + \rho \omega^2 r^2 \Rightarrow (\sigma_c - \sigma_r) = \frac{\pi \partial \sigma_r}{\partial r} + \rho \omega^2 r^2$

$\frac{\partial \sigma_c}{\partial r} = \pi \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial r^2} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \rho \omega^2 r = \pi \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \rho \omega^2 r$

Sostituisco nell'equazione di compatibilità

$\frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial r^2} + \frac{3}{\pi} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + (3 + \nu) \rho \omega^2 + \frac{\alpha E}{\pi} \frac{dT}{dr} = 0$  + Condizioni al contorno  $(r_i; r_e)$

EQUAZIONE DI GOVERNO DEL DISCO

↓  
Sono le uniche sezioni in cui si può avere guaina  
 $r_i$ : Pressione forata  
 $r_e$ : forze di superficie, tiro centr. fuso

Vogliamo un RAGGIO ADIMENSIONALE

$r \rightarrow \chi = \frac{r}{r_e}$

DISCO PIENO:  $0 \leq \chi \leq 1$

DISCO FORATO:  $\beta = \frac{r_i}{r_e} \leq \chi \leq 1$

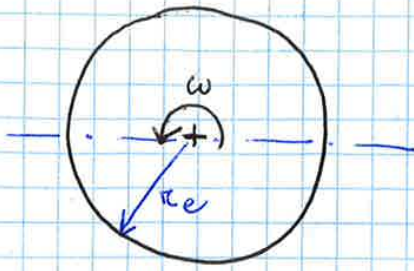
Nell'equazione di governo si ottiene:

$dr \rightarrow r_e d\chi$ ,  $\frac{d}{dr} \rightarrow \frac{1}{r_e} \frac{d}{d\chi}$ ,  $\frac{d^2}{dr^2} = \frac{1}{r_e^2} \frac{d^2}{d\chi^2}$

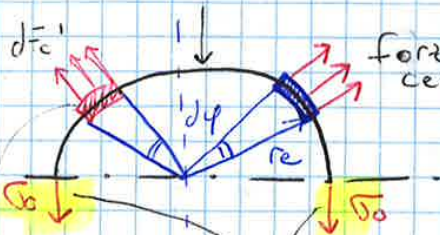
EQUAZIONE DI GOVERNO CHE ADOPEREREMO

$\frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial \chi^2} + \frac{3}{\chi} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \chi} + (3 + \nu) \rho \omega^2 r_e^2 + \frac{\alpha E}{\chi} \frac{dT}{d\chi} = 0$  + Cond. Cont.

# ANELLO ROTANTE (con $\omega = \text{cost}$ , $A = \text{Area sez. trasv.}$ )



↓ poiché  $A$  piccola possiamo trascurare le variazioni lungo direzione trasv.



forza centrifuga

$$dF_c = dm \omega^2 r_e = \rho A r_e dy \omega^2 r_e = \rho A \omega^2 r_e^2 dy$$

per simmetria  $dF_c' = dF_c$

IL PROBLEMA SI RIDUCE AL PROBLEMA DELLE  $\sigma_0$

$\sigma_0 = \text{È LA TENSIONE CIRCONFERENZIALE CHE SI INSTAURA IN UN DISCO IN ROTAZIONE}$

Scomponendo lungo delle direzioni le due forze si ottiene che le componenti orizzontali si annullano e resta quella verticale. Si sommano avendo le stesse direzioni. Quindi a noi interessa solo il contributo verticale

$$dF_c \rightarrow dF_c \sin \varphi$$

$$F_c = \int dF_c \sin \varphi = \rho A \omega^2 r_e^2 \int_0^\pi \sin \varphi =$$

$$F_c = 2 \rho A \omega^2 \pi r_e^2$$

LA FORZA CHE EQUILIBRA  $F_c$  È  $2 \sigma_0 A$

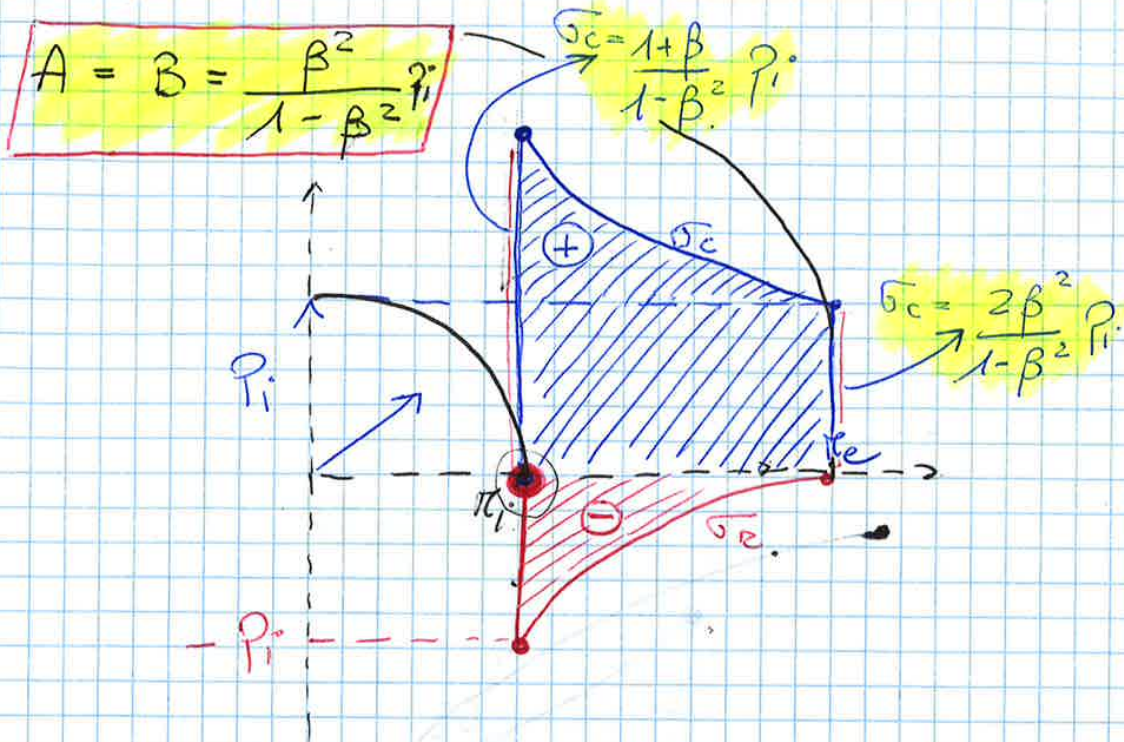
$$F_c = 2 \sigma_0 A$$

$$2 \rho A \omega^2 \pi r_e^2 = 2 \sigma_0 A$$

$$\sigma_0 = \rho \omega^2 \pi r_e^2$$

$\sigma_0$  è la massima tensione nel punto più sollecitato per un disco di spessore costante posto in rotazione alla velocità  $\omega$ .

Ricaviamo A e B .



Oss. SULLA  $\sigma_c$

- 1) Massima  $\chi = \beta$  (Bordo INTERNO)
- 2) Sempre Trazione

Nel punto  $\pi^i$  forme la prova di resistenza:

$$\{ \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \} \rightarrow \{ \sigma_c(\beta), \sigma_2 = 0, \sigma_e(\beta) \}$$

Secondo Tresca  $\sigma_{id} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_c(\beta) - \sigma_e(\beta)$

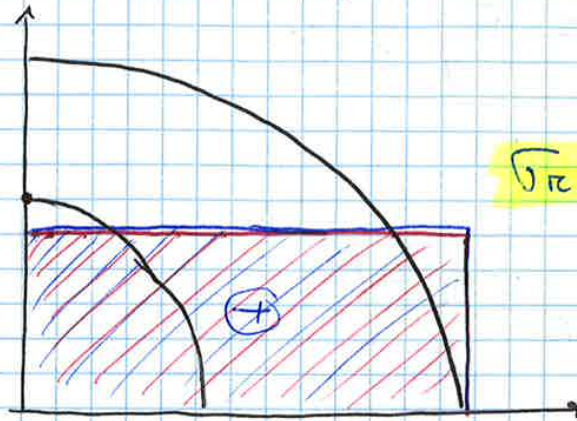
$$\sigma_{id} = \frac{2p_i}{1-\beta^2}$$

Disco pieno,  $\beta = 0$ , sdo te (piede il bordo interno con te qui)

Condizioni al contorno

$\sigma_r(0) = A - \frac{B}{x^2} \rightarrow \beta = 0$  poiché  $x=0$  non renderebbe possibile la soluzione matematica del probl.  
 $\epsilon = 0$

$\sigma_r(1) = t_e \Rightarrow A = t_e$



$\sigma_r(x) = \sigma_c(x) = t_e$

$\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \rightarrow \{t_e, t_e, 0\}$

$\sigma_{id} = t_e$

FORZE DI VOLUME

$\sigma_r = (\sigma_r)_{\text{OMOGENEA}} + (\sigma_r)_{\text{PARTICOLARE}}$   
 $A - \frac{B}{x^2}$

$\sigma_{r \text{ PART}} = Cx^m \rightarrow$

1° TERMINE	$m = 2$	// $\rightarrow m = 2$
2° TERMINE	$m = 2$	
3° TERMINE	costante	

$\sigma_r = A - \frac{B}{x^2} + Cx^2$

$A, B \rightarrow$  Condizioni Contorno

$C \rightarrow ?$

Facciamo <sup>grazie da</sup> resistenza in  $\pi_i$

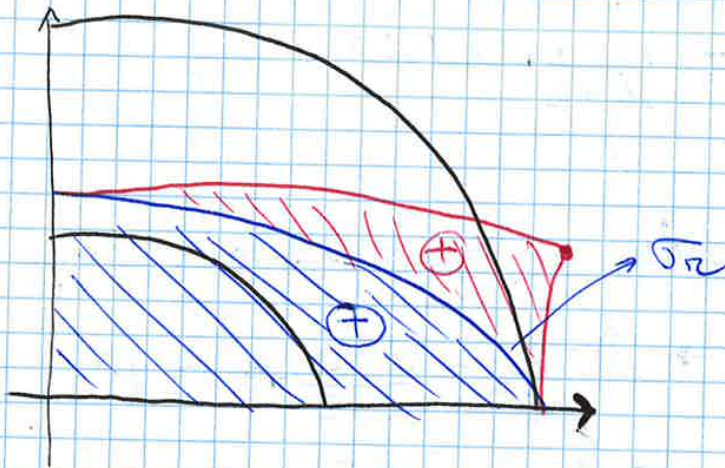
$$\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \rightarrow \{\sigma_c(\beta), \sigma_r = \sigma_z = 0\}$$

$$\sigma_{id} = \sigma_c(\beta) \leftarrow$$

Disco pieno, rotante

$$\sigma_r(0) \rightarrow B = 0$$

$$\sigma_r(1) \rightarrow A - \beta_{\ell=0} = \sigma_0 \frac{3+2\nu}{8}$$



N.B che in  $x=0$   $\sigma_r = \sigma_c = A$

GRADIENTE DI TEMPERATURA

$$\frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial x^2} + \frac{3}{x} \frac{\partial \sigma_r}{\partial x} + \frac{\alpha E}{x} \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

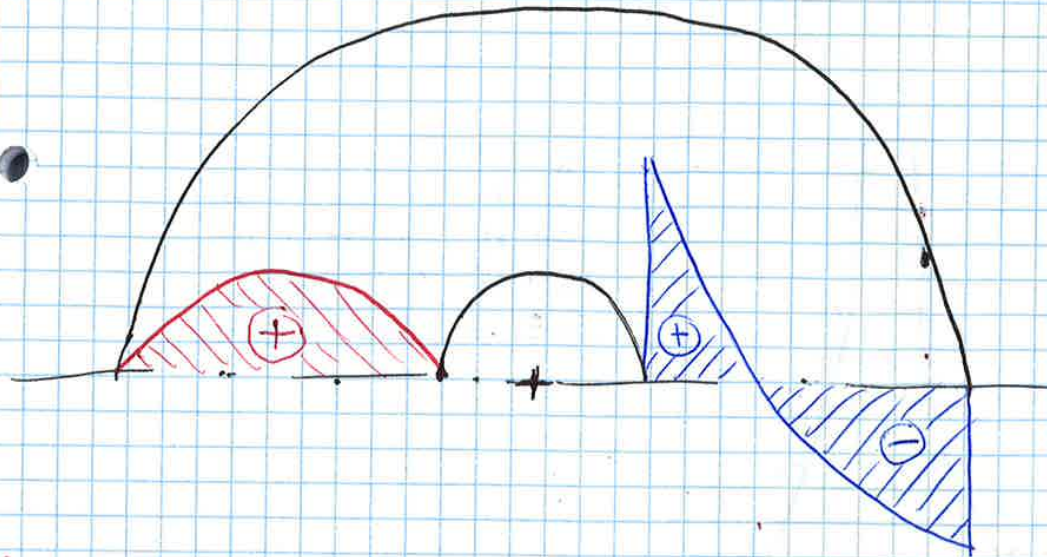
Sviluppando:

$$T(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n = \sum_{i=0}^n b_i x^i$$

$$\frac{1}{x} \frac{\partial T}{\partial x} = \sum_{i=0}^n i b_i x^{i-2} \rightarrow \boxed{\alpha E i b_i x^{i-2}}$$

TERMINI GENERALI

Come fanno la soluzione dell'equazione ora un'INTEGRALE PARTICOLARE ed un INTEGRALE OMOGENEO ASSOCIATO

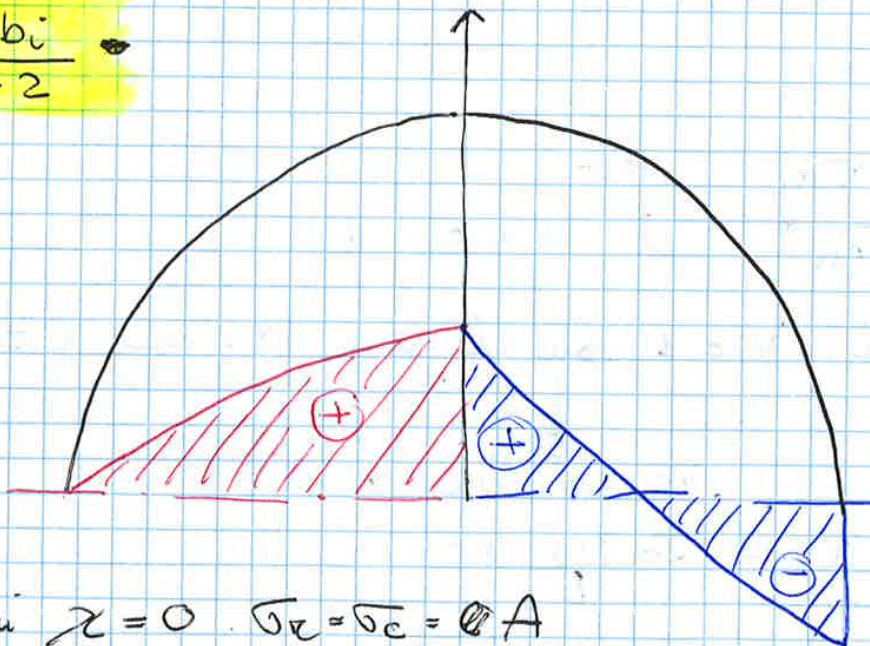


Disco pieno

$$\chi = 1 \rightarrow \sigma_r = 0 \rightarrow A - B - \frac{\alpha E b_0}{\lambda + 2} = 0$$

$$\chi = 0 \rightarrow \sigma_r = 0 \rightarrow B = 0$$

$$A = \frac{\alpha E b_0}{\lambda + 2}$$



N.B che in  $\chi = 0$   $\sigma_r = \sigma_c = A$

## Pompa a disco 2

• EQUILIBRIO FORTE RADIALI:  $\sigma_{r1e} \cdot 2\pi r_{1e} h_1 = \sigma_{r2i} \cdot 2\pi r_{2i} h_2$

$\underline{\sigma_{r2i}} = \underline{\sigma_{r1e}} \frac{h_1}{h_2} \rightarrow \underline{\Delta\sigma_r} = \sigma_{r1e} - \sigma_{r2i} = \underline{\sigma_{r1e}} \frac{h_1 - h_2}{h_2}$

• CONSEQUENZA SPOSTAMENTI RADIALI  $u_{1e} = u_{2i} \Rightarrow \epsilon_{c1e} = \epsilon_{c2i}$

$\epsilon_{c1e} = \frac{1}{E} (\sigma_{c1e} - \nu \sigma_{r1e}); \quad \epsilon_{c2i} = \frac{1}{E} (\sigma_{c2i} - \nu \sigma_{r2i})$

$\sigma_{c1e} = \sigma_{c2i} = \nu (\sigma_{r1e} - \sigma_{r2i})$

$\Delta\sigma_c = \nu \Delta\sigma_r$

• AL DISCO n AVREMO

$\sigma_{cme}^*, \sigma_{rme}^* (\neq \sigma_{re})$

## 2° FASE

• NESSUNA SOLLECITAZIONE ESTERNA

• Solo  $\sigma_{c1i} = \sigma_{c1i}^{**}$

Partiamo dal disco 1 con le condizioni al contorno ( $\sigma_{r1} = 0, \sigma_{c1i}^{**}$ ) e si procede come nella fase 1.

DISCO n AVREMO

$\sigma_{cme}^{**}, \sigma_{rme}^{**}$

## STATO DI TENSIONE "VERO"

$\sigma_{re} = \sigma_{rme}^* + K \sigma_{rme}^{**} \quad (K \text{ NOTA})$

In generale

$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_r^* + K \sigma_r^{**} \\ \sigma_c &= \sigma_c^* + K \sigma_c^{**} \\ u &= u^* + K u^{**} \end{aligned} \right\} \text{Sovrapposizione degli EFFETTI}$

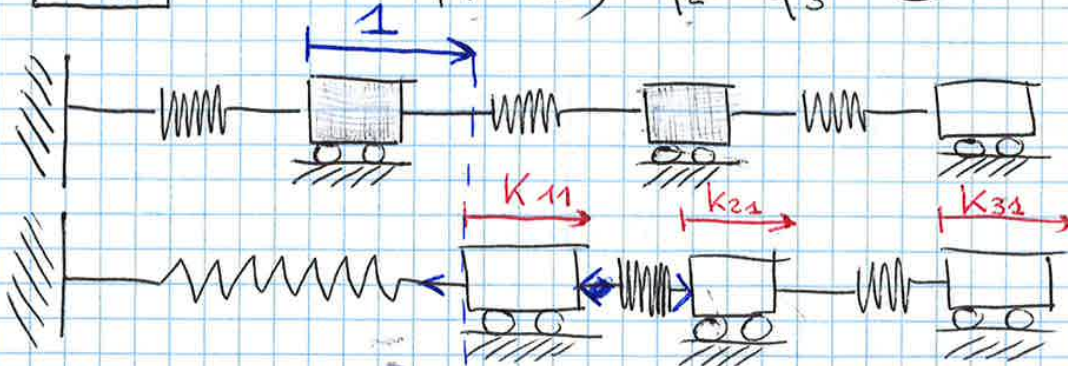


$$A = \frac{t_c}{1-\beta^2} + \sigma_0 \frac{3+\nu}{8} (1+\beta^2) > 0$$

$$B = \frac{\beta^2}{1-\beta^2} + \sigma_0 \frac{3+\nu}{8} \beta^2 > 0$$

Dove la forza generalizzata in  $(i) = K_{ij}$  quando  $q_j = 1$  e  $q_e = 0$  ( $\forall e \neq j$ )

$K_{i1} \rightarrow q_1 = 1, q_2 = q_3 = 0$

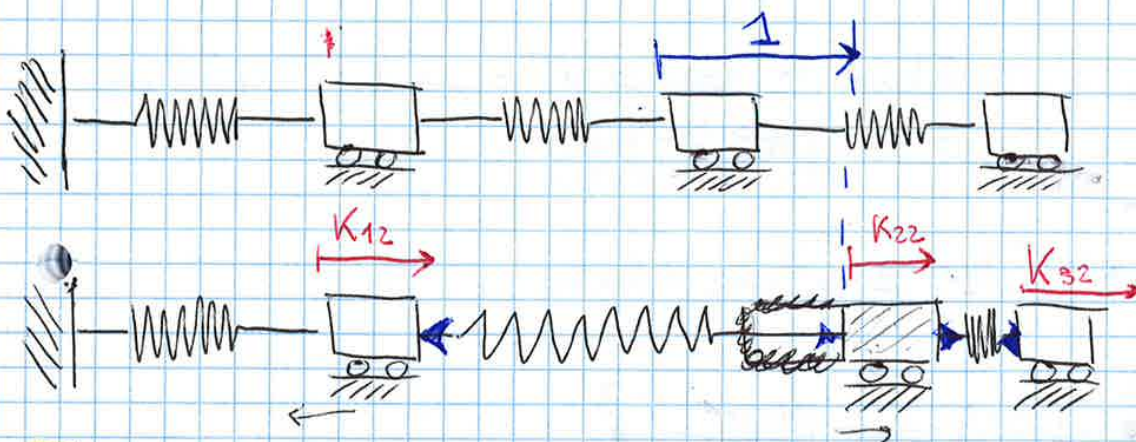


$K_{11} = K_1 \cdot 1 + K_2 \cdot 1 + K_3 \cdot 0 = K_1 + K_2$

$K_{21} = -K_2 \cdot 1 + K_3 \cdot 0 = -K_2$

$K_{31} = -K_3 \cdot 0 = 0$

$K_{i2} \rightarrow q_2 = 1, q_1 = q_3 = 0$



$K_{12} = -K_2 \cdot 1 = -K_2$

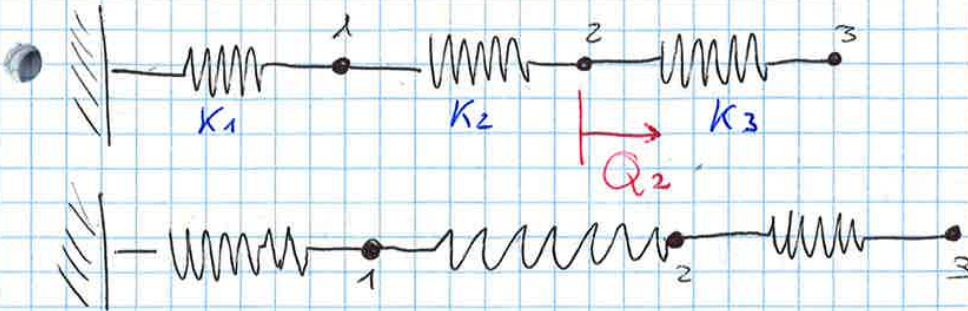
$K_{22} = K_2 \cdot 1 + K_3 \cdot 1 = K_2 + K_3$

$K_{32} = -K_3 \cdot 1 = -K_3$

$K_{i3} \rightarrow q_3 = 1, q_1 = q_2 = 0$

$K_{13} = 0 ; K_{23} = -K_3 ; K_{33} = K_3$

$a_{i2} \rightarrow Q_2 = 1, Q_1 = Q_3 = 0$



$a_{12} = \frac{1}{K_1} ; a_{22} = a_{23} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$

$a_{i3} \rightarrow Q_3 = 1, Q_2 = Q_1 = 0$

$a_{13} = \frac{1}{K_1} ; a_{23} = \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_3} ; a_{33} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_3}$

Quindi l'EQUILIBRIO DEL SISTEMA A 3 GRADI DI LIBERTÀ è

$\{q\} = [A] \{Q\}$

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{K_1} & \frac{1}{K_1} & \frac{1}{K_1} \\ \frac{1}{K_1} & \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} & \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \\ \frac{1}{K_1} & \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} & \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix}$$

In conclusione si può affermare:

$\{Q\} = [K] \{q\} \quad \{q\} = [A] \{Q\}$

$[A] = [K]^{-1}$

Non studiamo elementi multidimensionali. Per questi elementi è possibile ricavare  $[K]$  in maniera diretta.

**ELEMENTO ASTA** (Trazione-Compressione)



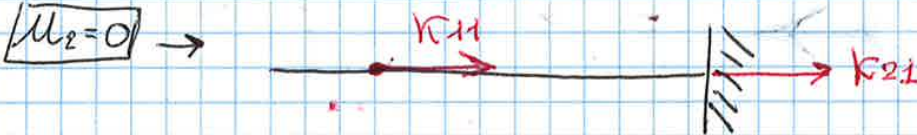
Modulo di Young  
 $l, E, A = \text{costanti}$   
 Area  
elemento sicuramente labile

Equilibrio statico

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad F = \frac{Pl}{EA} \cdot 1 \rightarrow K_{11} = \frac{EA}{l} = -K_{21}$$



$$K_{22} = \frac{EA}{l} \quad K_{12} = -\frac{EA}{l}$$



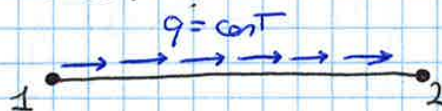
$$K_{11} = \frac{EA}{l} \quad K_{21} = -\frac{EA}{l}$$

CONVENZIONE ALGEBRICA: Si scelgono una volta per tutte i versi positivi delle forze e non possono cambiarsi assieme.

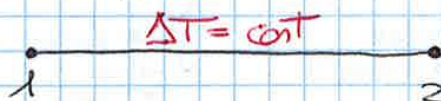
$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Considereremo sempre carichi di volume.

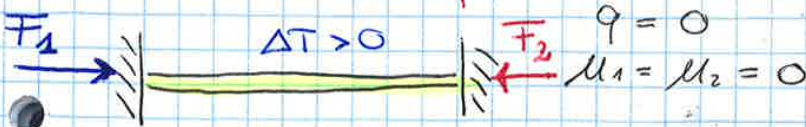
CARICHI DI VOLUME



CARICHI TERMICI



Deformazioni Termiche impedita



$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} + EA\alpha\Delta T \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} F_1 &= EA\alpha\Delta T \\ F_2 &= -EA\alpha\Delta T \end{aligned}$$

REAZIONI VINCOLANTI IN ① E ②

DIREZIONE SEMPRE DELLA STRUTTURA

$$\sigma_1 = E\alpha\Delta T$$

$$\sigma_2 = -E\alpha\Delta T$$

QUESTE TENSIONI POTREBBERO CREARE PROBLEMI



$P_{cr}$  (carica critica)

• STRUTTURE SNELLE: Problemi allora meccanico non lineare o accoppiato

• STRUTTURE NON SNELLE: Problemi di  $\sigma$  molto elevate

( $F_1, F_2$ )

ELEMENTO ASTA (Torsione)



$$u(x) = \frac{N x}{EA}$$

$$\theta(x) = \frac{M_t x}{G J_p}$$

MOMENTO INERZIA POLARE

sez. piena:  $\frac{\pi d^4}{32}$

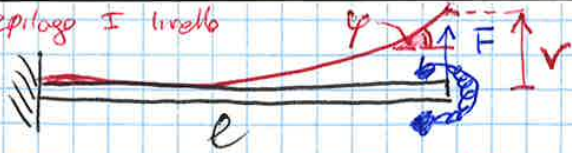
sez. cava:  $\frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$

Basta rotazione

$$\begin{Bmatrix} M_{t1} \\ M_{t2} \end{Bmatrix} = \frac{G J_p}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Equilibrio Torsione  
Torsione

Riepilogo I livello



$$v = \frac{Fl^3}{6EJ} \quad \phi = \frac{Fl^2}{2EJ}$$



$$v = \frac{Ml^2}{2EJ} \quad \phi = \frac{Ml}{EJ}$$

## EQUILIBRIO E COMPATIBILITÀ

Equilibrio: Avremo due equilibri (1 ASSI INDESSAZIONE VERTICALE ED UNA ASSI ROTAZIONE 2)

$$\uparrow = : F_1 + F_2 = 0$$

$$\circlearrowleft : M_1 + M_2 - F_1 l = 0$$

Congruenza

Sovrapposizione degli effetti

$$v_1 = \frac{F_1 l^3}{6EJ} - \frac{M_1 l^2}{2EJ} = 1$$

↓  
Congruenza di E

$$\phi_1 = -\frac{F_1 l^2}{2EJ} + \frac{M_1 l}{EJ} = 0$$

Congruenza con le nostre condizioni iniziali

Risolvendo

$$M_1 = \frac{1}{2} F_1 l \quad \rightarrow \text{Condizioni}$$

$$F_2 = -F_1$$

$$K_{11} = 12 \frac{EJ}{l^3}$$

$$K_{21} = \frac{6EJ}{l^2}$$

$$K_{31} = -12 \frac{EJ}{l^3}$$

$$K_{41} = \frac{6EJ}{l^2}$$

Per la seconda colonna viene solo la congruenza!

Determiniamo  $K_{12}$  (solo  $q_2 = \phi_1$ )





$$K_{44} = \frac{M_2}{\varphi_2} = -\frac{M_1}{\varphi_1} \Rightarrow K_{22} \rightarrow K_{44} = -\frac{4EJ}{l}$$

$$[K] = \frac{EJ}{l^2}$$

$$\begin{bmatrix}
 12 & 6l & 4l^2 & 6l \\
 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\
 -12 & -6l & 12 & -6l \\
 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2
 \end{bmatrix}$$

→ SIMMETRIA

↓  
CALCOLE  
ESPlicitAMENTE

↓  
PER OTTENERE PER  
NOTAZIONE DI IT

### Bernoulli-Euler

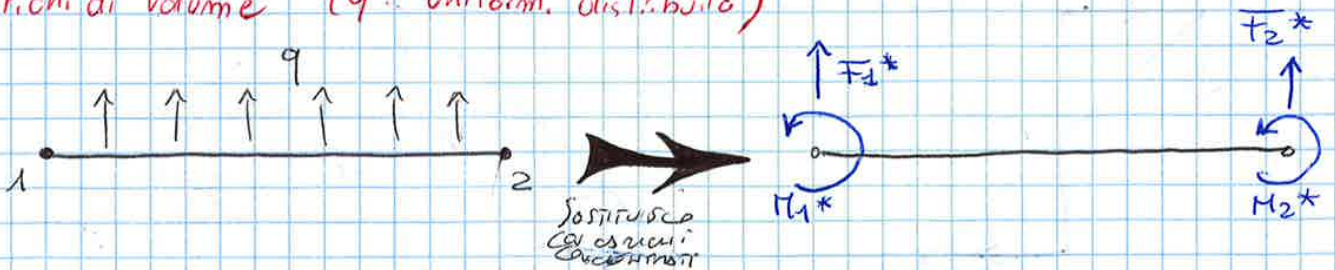
$$v(x) \rightarrow \varphi(x) = \frac{dv}{dx} ; \quad T(x) = \frac{dM}{dx}$$

GRADI DI LIBERTÀ IN DERIVAZIONE

### Timoshenko

$v(x), \varphi(x)$  INDIPENDENTI  
GRADI DI LIBERTÀ INDIPENDENTI

Carichi di volume ( $q$ : uniform. distribuito)



SOSTITUISCO  
CON CARICHI  
CONCENTRATI

$$M_1^* = -M_2^* = \frac{ql^2}{12} ; \quad F_1^* = F_2^* = \frac{1}{2}ql$$

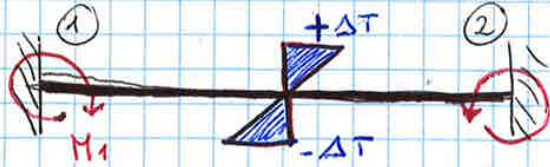
### Carico Termico

IL CARICO TERMICO COSTANTE NON È VISTO DALLA TRAVE PERCHÉ NON È PREVISTA LA TRAZIONE E LA COMPRESSIONE !! SE VOGLIAMO UTILIZZARE IL CARICO TERMICO CI SERVE UNA CONDIZIONE PIÙ ELABORATA

## EQUILIBRIO ELEMENTO TRAVE

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} ql/2 \\ ql^2/12 \\ ql/2 \\ -ql^2/12 \end{Bmatrix} + \frac{2\alpha\Delta T EJ}{h} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \psi_1 \\ v_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix}$$

## Deformazioni termiche impedite



$$\begin{aligned} v_1 = \psi_1 = 0 \\ v_2 = \psi_2 = 0 \end{aligned}$$

Non si può muovere!

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} + \frac{2\alpha\Delta T EJ}{h} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

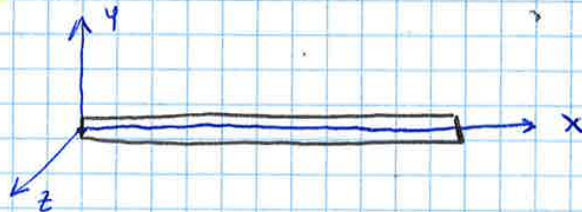
↓  
REAZIONI VINCOLATE

Si possono INVERTIRE i ΔT  
BASTA SOLO INVERTIRE i  
SEGN. DEI MOMENTI

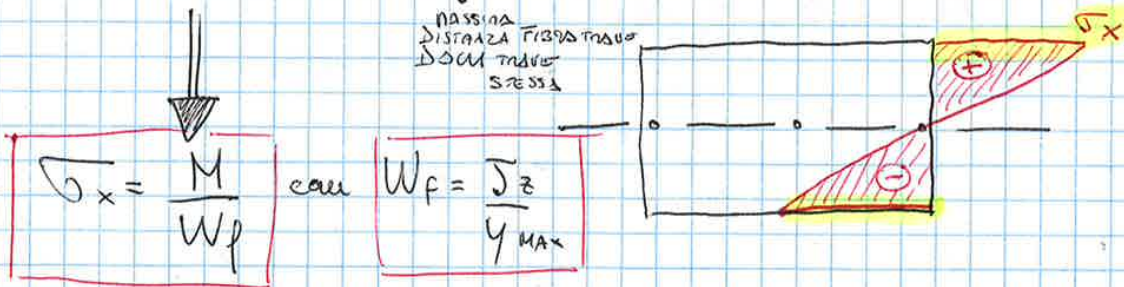
$$M_1 = -\frac{2\alpha\Delta T EJ}{h} = -M_2$$

TENSIONE FLESSIONE MASSIMA

$$\sigma_x(y) = \frac{M}{Jz} y_{MAX}$$



MASSIMA  
DISTANZA FIBRA TRAVE  
DALL'ASSE  
STESSA



$$\sigma_x = \frac{M}{W_f}$$

$$\text{con } W_f = \frac{Jz}{y_{MAX}}$$

$$\sigma_{1_{MAX}} = \frac{M_1}{W_f}$$

$$\uparrow \frac{M_1}{bh^2/6}$$

se è rettangolo



$$\overline{F}_{2I} + \overline{F}_{2II} = \overline{F}_2 = K_{21} u_1 + (K_{22I} + K_{22II}) u_2 + K_{23} u_3$$

questa somma implica  
L'ASSEMBLAGE

Scriviamo l'equilibrio del sistema completo:  $\Delta$

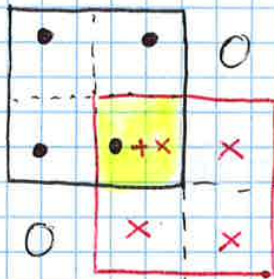
$$\begin{Bmatrix} \overline{F}_1 \\ \overline{F}_2 \\ \overline{F}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{21} & (K_{22I} + K_{22II}) & K_{23} \\ K_{31} & 0 & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

MATRICE EQUILIBRIO  
di un sistema completo  
da 2 elementi sono



ASSEMBLAGE SIGNIFICA SOMMARE I COEFFICIENTI RELATIVI AL GRADO DI LIBERTÀ CONGUE (nel nostro caso il nodo 2)

ELEMENTO  
BARRA



REGOLA APPLICATIVA

Si fanno scorrere le matrici lungo la diagonale sommando le parti sovrapposte.

I due elementi pieni, insieme hanno come esponente:

$$\begin{Bmatrix} \overline{F}_1 \\ \overline{F}_2 \\ \overline{F}_3 \end{Bmatrix} = \frac{2EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

↓  
det = 0      Effetto dell'assemblaggio

SISTEMA LABILE

Nel caso del sistema con il carico su  $\vec{3}$ .

Ripetiamo il risultato sui due elementi separati:



iii

$$\textcircled{I} : \begin{cases} \sigma_1 = \frac{F_1}{A} = -\frac{P}{A} \\ \sigma_{2I} = \frac{P}{A} \end{cases} \rightarrow \text{INASTO } \textcircled{1} \text{ È } \text{TRAZIONE}$$

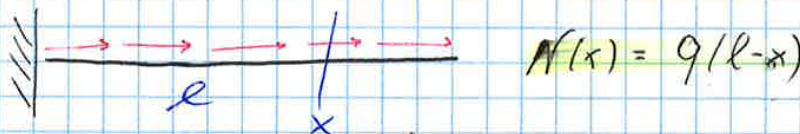
$$\begin{cases} \sigma_{2II} = -\frac{P}{A} \\ \sigma_3 = \frac{P}{A} \end{cases} \rightarrow \text{INASTO } \textcircled{2} \text{ È } \text{TRAZIONE FORA}$$

COSA CAPITA SE SULLA BARRA AGISCE UN CARICO DI VOLUME?

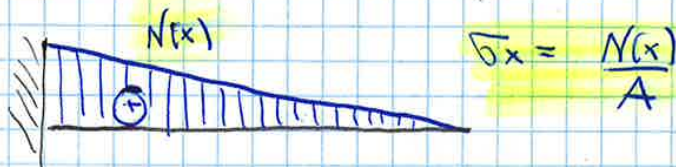


$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{ql}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Sulla 1<sup>a</sup> travi:



$$u(l) = \int_0^l \epsilon_x dx = \int_0^l \frac{N(x)}{EA} dx = \frac{1}{2} \frac{ql^2}{EA}$$



Applichiamo le ipotesi:

$u_1 = 0 \rightarrow$  Come prima

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} + \frac{ql}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

CONDIZIONI NOTE:  $M_1=0, \overline{F}_2=0, \overline{F}_3=0$

INCOGNITE:  $M_2, M_3, \overline{F}_1$

$M_1=0 \rightarrow$  Elimino le righe e gli elementi corrispondenti a  $M_1$   
 Quindi con  $\overline{F}_2 = \overline{F}_3 = 0$

$$\frac{ql}{4} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{2EA}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{ql^2}{EA} \begin{Bmatrix} 3/8 \\ 1/2 \end{Bmatrix}$$

Coerente con la Teoria delle Travi

Travo  $\overline{F}_1$

$$\overline{F}_1 + \frac{ql}{4} = \frac{2EA}{l} (-M_2) \rightarrow \overline{F}_1 = -9l \rightarrow \text{OK!}$$

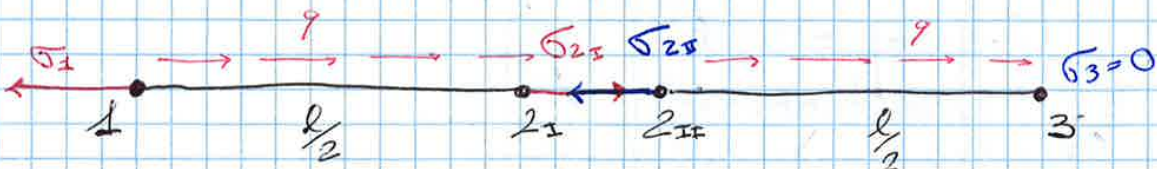
Utilizziamo le equazioni locali per trovare le sollecitazioni:

$$\overline{F}_{2I} + \frac{ql}{4} = \frac{2EA}{l} M_2 \Rightarrow \overline{F}_{2I} = \frac{1}{2} ql$$

$$\overline{F}_{2II} + \frac{ql}{4} = \frac{2EA}{l} (M_2 - M_3) \Rightarrow \overline{F}_{2II} = -\frac{1}{2} ql$$

DEVE ESSERE COSI' POICHE'  $\overline{F}_2=0$  SE NO' LO FOSSE AVREMO SBAGLIATO.

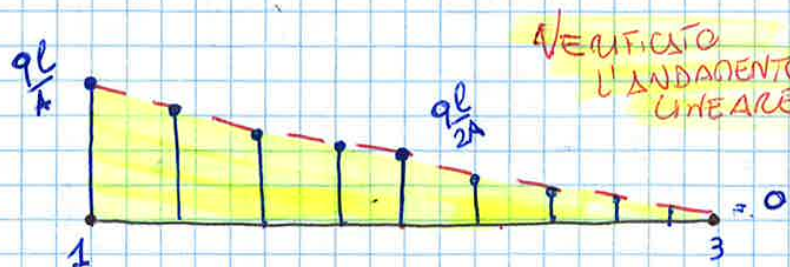
Travo le tensioni e faccio gli andamenti sui due elementi:



$$\sigma_1 = -\frac{ql}{A}$$

$$\sigma_{2I} = \frac{1}{2} \frac{ql}{A}$$

$$\sigma_{2II} = -\frac{1}{2} \frac{ql}{A}$$

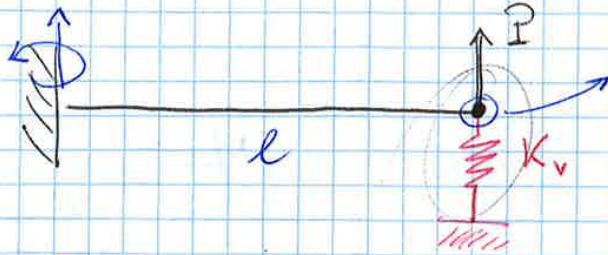


h- CONVERGENZA

AL DIMINUIRE DELLE DIMENSIONI GARANTISCE LA CONVERGENZA

Voglio ridurre la MOBILITÀ del sistema, mettendo una molla

INIEZIONE RIGIDITÀ NEL SISTEMA



LA MOLLA DA UNA REAZIONE SEMPRE CONTRARIA RIVOLGENDO LA  $F_2$  RESULTANTE

$K_v = 0 \rightarrow \bar{T}_2 = P$

$K_v \neq 0 \rightarrow \bar{T}_2 = P - K_v v_2$  → REAZIONE MOLLA

$$\begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -K_v & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l \\ -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}$$

HA SENSO FISICO POCHÉ STANO AUMENTANDO LA RIGIDITÀ

$$\begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 + \frac{K_v l^3}{EJ} & -6l \\ -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}$$

QUESTO È IL TERMINE ACCIUNTIVO CHE TIENE CONTO DELLA INIEZIONE DI RIGIDITÀ

NEL CASO CI FOSSE SI ACCIUNGE LA RIGIDITÀ RISPETTO AL MOMENTO

$$\begin{bmatrix} 12 + \frac{K_v l^3}{EJ} & -6l \\ -6l & 4l^2 + \frac{K_v l^3}{EJ} \end{bmatrix}$$

MATRICE DI RIGIDITÀ GENERALE CON L'AGGIUNTA DI MOLLE

È 0 POCHÉ NON DEBBIAMO UN  $K_v$  AUMENTI AUMENTA

$$\begin{bmatrix} -K_v & 0 \\ 0 & -K_v \end{bmatrix}$$

con  $K_v \neq 0$  AVREMO  $v_2, \varphi_2$  PIÙ BASSI



$$v_2' = \frac{Pl^3}{EJ \left( 3 + \frac{K_v l^3}{EJ} \right)}$$

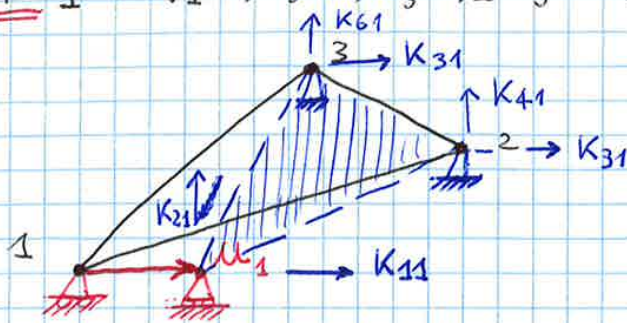
$< v_2$  senza molla

$$\varphi_2' = \frac{3}{2l} v_2'$$

$< \varphi_2$ , senza molla

PROVANO:

$$u_1 = 1 \quad v_1 = u_2 = u_3 = v_3 = v_2 = 0$$



NON SAPPIAMO RISOLVERE QUESTO SISTEMA 2 VOLTE IPERSTATICO

Per procedere dobbiamo applicare il PLV (Principio dei Lavori Virtuali)

PLV: CNS per l'equilibrio statico di un sistema meccanico qualunque è che:

$$\delta L_{EXT} + \delta L_{INT} = 0$$

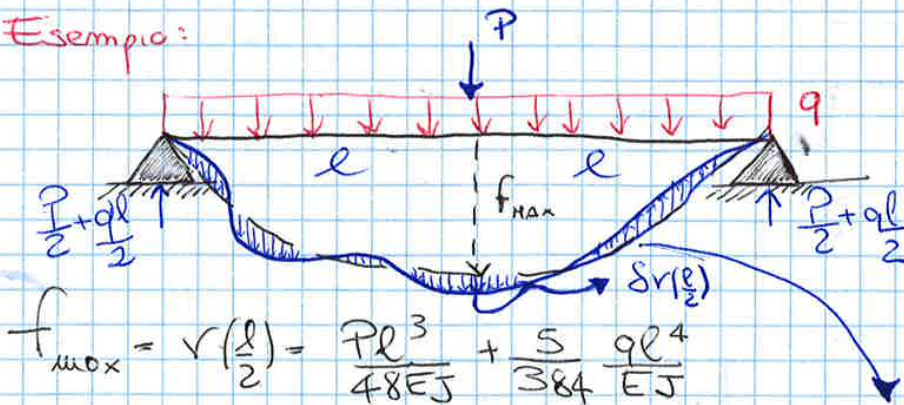
$F_{EXT}$ :  $T, q, \dots$  (AGENTI SUL SISTEMA)

$F_{INT}$ : interattive  $\rightarrow$  TENSIONI =  $F_{INT}$  / unità di superficie

$\delta L$  SIGNIFICA: il lavoro delle forze interne ed esterne svolgano per effetto degli spostamenti virtuali rispetto al sistema.

- SPOSTAMENTI VIRTUALI:
- Devono essere molto "piccoli" rispetto alla configurazione del sistema
  - Devono RISPETTARE i vincoli
  - Devono RISPETTARE la continuità del mezzo

Esempio:



$$f_{max} = v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Pl^3}{48EJ} + \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}$$

Perturbiamo lo stato d'equilibrio con degli spostamenti virtuali.

$$\delta L_{EXT} = P \delta v\left(\frac{l}{2}\right) + \int_0^l q \delta v(x) dx$$

$$\delta y = l \cos \vartheta \delta \vartheta$$

$$\delta x = -l(-\sin \vartheta) \delta \vartheta = l \sin \vartheta \delta \vartheta$$

$$\delta \mathcal{L}_{EXT} + \delta \mathcal{L}_{INT} = 0$$

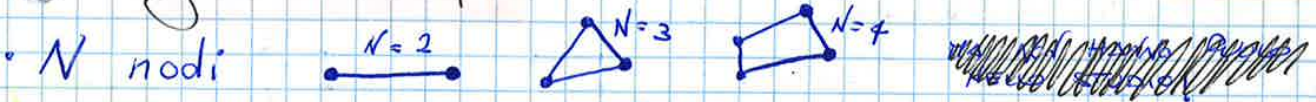
$$\delta \mathcal{L}_{EXT} = -kx \delta x + Mg \delta y = [-kl(1-\cos \vartheta)l \sin \vartheta + Mgl \cos \vartheta] \delta \vartheta \stackrel{!}{=} 0$$

$$-kl(1-\cos \vartheta) \sin \vartheta + Mg \cos \vartheta = 0$$

$$(1-\cos \vartheta) \tan \vartheta = \frac{mg}{kl}$$

LA SOLUZIONE DI QUESTA EQUAZIONE È LA  $\vartheta_0$  EQUILIBRIO

Ogni elemento finito ha:



- $g = 1$  ASTA
  - $g = 2$  TRAVE
  - $g = 2$  ELEMENTI PIANI
- DEFINIZIONI:

$g$  è legato al problema fisico

- $g$  = NUMERO DI COMPONENTI DEL CAMPO DEGLI SPOSTAMENTI
- $N$  = NUMERO DI NODI ELEMENTO
- $\{f(x, y, z)\}$  = VETTORE DEGLI SPOSTAMENTI (CAMPO) MATRICE  $g \times 1$
- $\{f_n(x, y, z)\}$  = VETTORE SPOSTAMENTI NODALI MATRICE  $Ng \times 1$
- $\{\epsilon(x, y, z)\}$  = VETTORE DELLE DEFORMAZIONI (CASO) MATRICE  $h \times 1$

Esempio:

PIANO:  $\epsilon_x = \frac{du}{dx}, \epsilon_y = \frac{dv}{dy}, \gamma_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}$

CINEMATICA DELLE DEFORMAZIONI

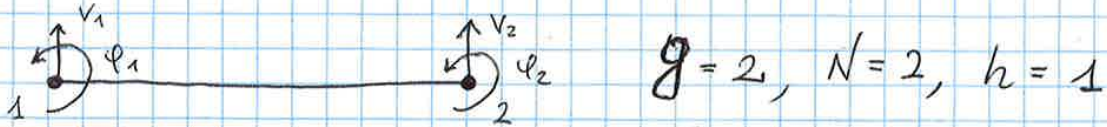
$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \rightarrow \epsilon(x, y, z) = \begin{bmatrix} h \times g \\ 0 \end{bmatrix} f(x, y, z)$$

ESPRESSIONE CHE LEGA IL CAMPO DEGLI SPOSTAMENTI A QUELLO DELLE DEFORMAZIONI

**ELEMENTO TRAVE**  $\rightarrow v(x), \varphi(x)$

Non utilizziamo: 1) Bernoulli  $\rightarrow \varphi = \frac{\partial v(x)}{\partial x}$  per la plemente  
 2) Hooke,  $\sigma_x = E \epsilon_x$  ma non è adeguata quindi porremo a una relazione tra  $(M, \text{curvatura})$

1) i gradi di libertà non sono indipendenti



$g = 2, N = 2, h = 1$

$N_g = 4$  (quindi la matrice di rigidezza sarà  $4 \times 4$ )

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  per descrivere il campo degli spostamenti

DEPENDONO TUTTI DA  $v(x)$  visto che

$\varphi(x) = \frac{\partial v(x)}{\partial x}$

$v(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$

$\varphi(x) = \alpha_2 + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2$

Quindi la formulazione matriciale è

$$\begin{Bmatrix} v(x) \\ \varphi(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}$$

Calcoliamo le matrici nodali

$1 \rightarrow x=0 \quad 2 \rightarrow x=l$

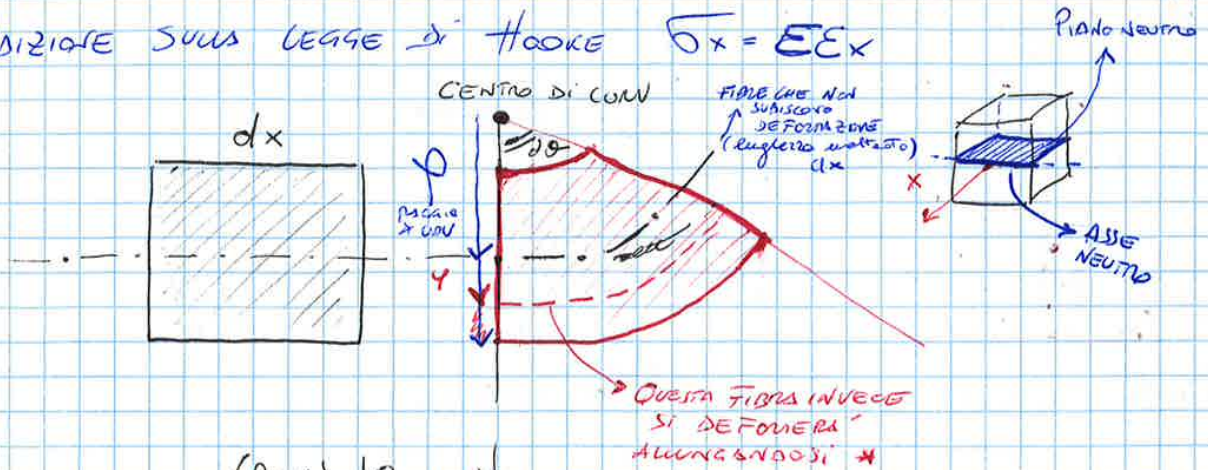
$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}$$

Quindi possiamo calcolare la  $N(x)$

$$N(x) = \begin{bmatrix} \Phi(x) \\ \Phi_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{Bmatrix} N_1(x) & N_2(x) & N_3(x) & N_4(x) \\ N_1'(x) & N_2'(x) & N_3'(x) & N_4'(x) \end{Bmatrix}$$

Matrice delle funzioni di forma

2) CONDIZIONE SULLA LEGGE DI HOOKE  $\sigma_x = E \epsilon_x$



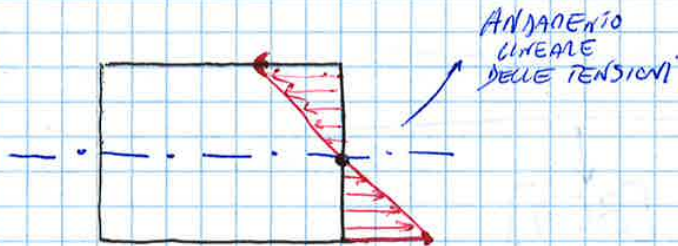
$$* \epsilon_x = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{(p+y) d\theta - p d\theta}{p d\theta} = \frac{y}{p}$$

$$\epsilon_x = \frac{y}{p}$$

LA DEFORMAZIONE VARIA LINEARMENTE LUNGO IL RAGGIO

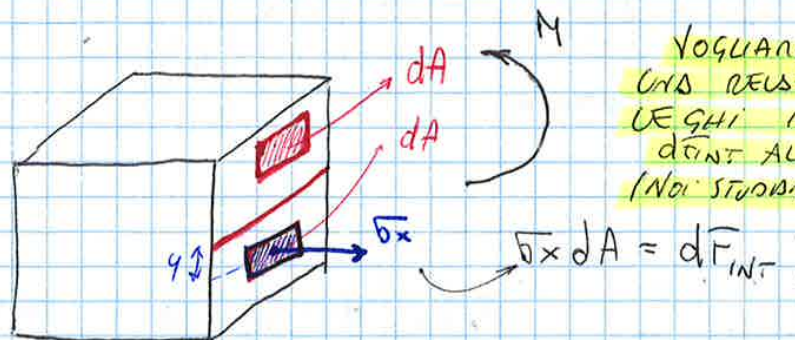
Possiamo quindi dedurre che

$$\sigma_x = E \frac{y}{p}$$



Però QUESTA ESPRESSIONE È INUTILE PER NOI!  $\Delta = ?$

• Abbiamo fatto una manipolazione che permette di arrivare alla formulazione giusta per noi



VOGLIAMO SOLVERE UNA RELAZIONE CHE LEGHI IN EQUILIBRIO dFINT AL MOM. FLETTENTE. (NOI STUDIAMO CORPI IN EQUIL.)

$$\int_A dF_{INT} y = M$$

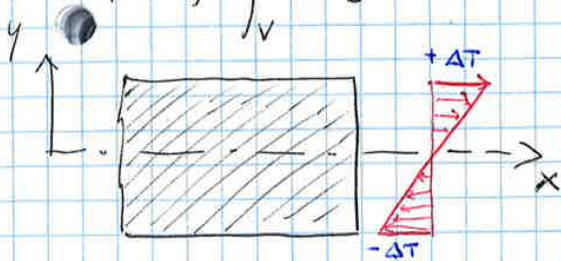
Facciamo della maniera

$$\sigma_x y = E \frac{y^2}{p} \rightarrow \sigma_x y dA = \frac{E}{p} y^2 dA$$



• CARICO TERMICO

$$\{F_T\} = \int_V [B^T] [D] \{\epsilon_T\} dV$$



$\Delta T > 0, T(y) \uparrow$

$$T(y) = \frac{\Delta T}{h/2} y$$

Si PREOCUPA ELEMENTO ASTA

Andamento (Temperatura ~~costante~~)  $\Delta T$  in ASTA

•  $\epsilon_T = \alpha \Delta T = \frac{2\alpha \Delta T y}{h}$  (DEFORMAZIONE TERMICA)

•  $\epsilon_x = \frac{1}{\rho}$

⇒ C'È UN'EQUIVALENTE CURVATURA, LA DEF. TERM. SI CONPARA CONE QUELLA ELASTICA

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2\alpha \Delta T}{h}$$

(CURVATURA TERMICA)

Elastico:  $EJ \frac{d^2 v}{dx^2} = \text{CURVATURA ELASTICA}$

Termico:  $EJ \frac{2\alpha \Delta T}{h} = \text{CURVATURA TERMICA}$

LA CURVATURA È NEGATIVA POICHÉ ABBIAMO UN ANDAMENTO CHE OPPOSTO AL NOSTRO SISTEMA DI RIFERIMENTO

$$\{F_T\} = \int_0^l dx \begin{Bmatrix} N_1'' \\ N_2'' \\ N_3'' \\ N_4'' \end{Bmatrix} EJ \left( -\frac{2\alpha \Delta T}{h} \right) = \frac{2\alpha \Delta T EJ}{h} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

↓  
SCORSO GIÀ FATTO  
QUI ABBIAMO LA DIMOSTRAZIONE

$$[\Phi_N] = [\Phi(x_i, y_i)] \quad \text{dove } (x_i, y_i) = \begin{matrix} (x_1, y_1) \\ \text{Nodo 1} \end{matrix}; \begin{matrix} (x_2, y_2) \\ \text{Nodo 2} \end{matrix}; \begin{matrix} (x_3, y_3) \\ \text{Nodo 3} \end{matrix}$$

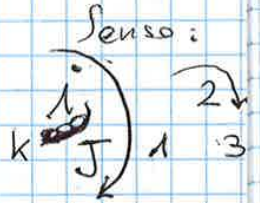
$$\Phi_N = 6 \times 6$$

Quindi:

$$N(x, y) = [\Phi(x, y)] [\Phi_N]^{-1}$$

$$u(x) = N_1(x, y) u_1 + N_2(x, y) u_2 + N_3(x, y) u_3$$

$$v(x) = N_1(x, y) v_1 + N_2(x, y) v_2 + N_3(x, y) v_3$$



ESPRESSIONE GENERALE

$$N_i(x, y) = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2A}$$

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j \\ b_i &= y_j - y_k \\ c_i &= x_k - x_j \end{aligned}$$

AREA DEL TRIANGOLO

$$A = \frac{1}{2} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - y_3 x_1) + (x_1 y_2 - x_2 y_1)]$$

ESEMPIO di  $N(x, y)$  calcolo:

$$N_2(x, y) = \frac{a_2 + b_2 x + c_2 y}{2A} = \frac{(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y}{2A}$$

CONDIZIONI!!!

$$N_2(x_2, y_2) = 1, \quad N_2(x_1, y_1) = 0, \quad N_2(x_3, y_3) = 0$$

$$N_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad \text{GENERALI}$$

Perché non è un elemento potente?

Se abbiamo gli andamenti:

$$u(x, y); \quad v(x, y)$$

Possiamo cercare l'andamento per le 3 deformazioni e le 3 tensioni

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

Per l'elemento triangolare otteniamo

$$\epsilon_x = \alpha_2 \quad \epsilon_y = \alpha_6 \quad \gamma_{xy} = \alpha_3 + \alpha_5$$

TUTTE LE COMPONENTI SONO COSTANTI. Non possibile perché l'elemento ha delle dimensioni finite quindi molto difficile questa rappresentazione

LE TENSIONI SARANNO LINEARI IN X E Y QUINDI SOLO SICURAMENTE IN CONGRUENTE RISPETTO ALL'ELEMENTO TRIANGOLARE

4 Prongia Rettangolare... Plane stress



$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$$

$$v(x,y) = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy$$



$$\epsilon_x = \alpha_2 + \alpha_4 y$$

$$\epsilon_y = \alpha_7 + \alpha_8 x$$

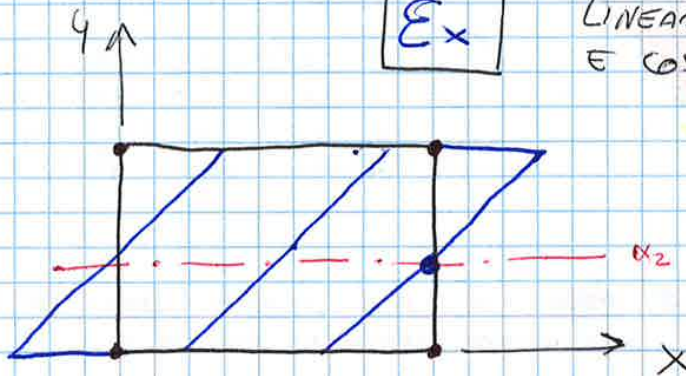
$$\gamma_{xy} = (\alpha_3 + \alpha_6) + (\alpha_4 x + \alpha_8 y)$$

CONTRIBUTO LINEARE

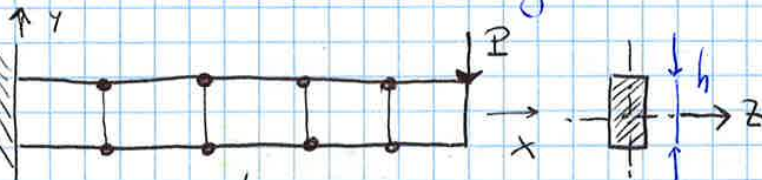
COMPONENTI DELL'ELEMENTO TRIANGOLARE



LINEARE RISPETTO A Y E COSTANTE RISPETTO A X

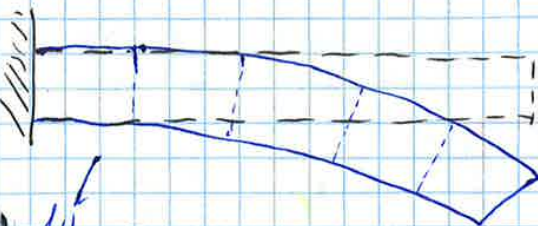


Consideriamo una trave a sezione rettangolare



4 nodi

12 nodi x 2 = 24 gdl  $\rightarrow$   $[K] = 20 \times 20$   
 (10)  $\leftarrow$  (2 nodi sono vincolati)



Abbiamo la geometria deformativa

$x^1 \quad y \quad | \rightarrow$  elemento a 3 nodi

$x^2 \quad (x, y) \quad x^2 \quad | \rightarrow$  elemento a 4 nodi

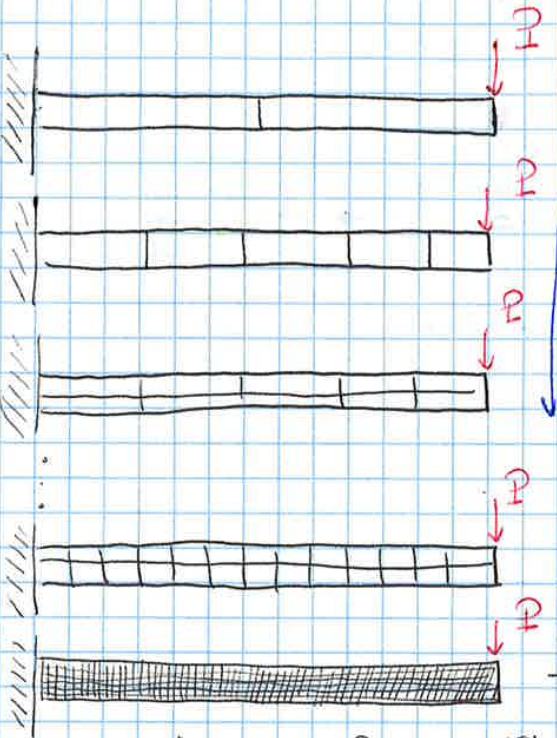
Esempio:  $\rightarrow$  isotropia geometrica



Questi due elementi sono scarsi, ma si muovono quindi c'è moto rigido

ECCO PERCHÉ LO STUDIAMO

ii) Stato di deformaz. costante



n-convergenza

$\rightarrow$  Immaginare di avere un numero di elementi finiti  $\rightarrow \infty$

IN QUESTO STATO  $\downarrow$  Poche MEA ELEM  $\rightarrow 0$  GLI ELEMENTI HANNO TENSIONI COSTANTI

QUINDI ANCHE LO STATO DI DEFORMAZIONE È COSTANTE

ECCO PERCHÉ DEVE ESSERE la condizione ii

$E_x = \text{cost}, E_y = \text{cost}, \gamma_{xy} = \text{cost}$

Verifichiamo:



$E_x = \frac{du}{dx} = \alpha_2 + \alpha_4 y$

$E_y = \frac{dv}{dy} = \alpha_7 + \alpha_8 x$

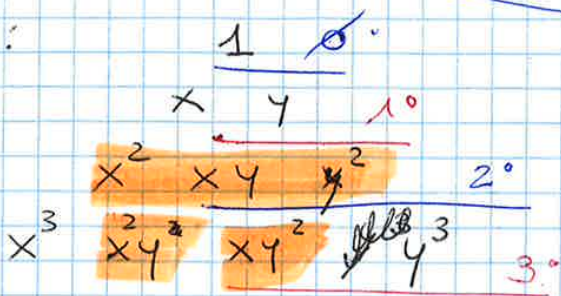
$\gamma_{xy} = (\alpha_3 + \alpha_6) + (\alpha_{1x} + \alpha_{8y})$



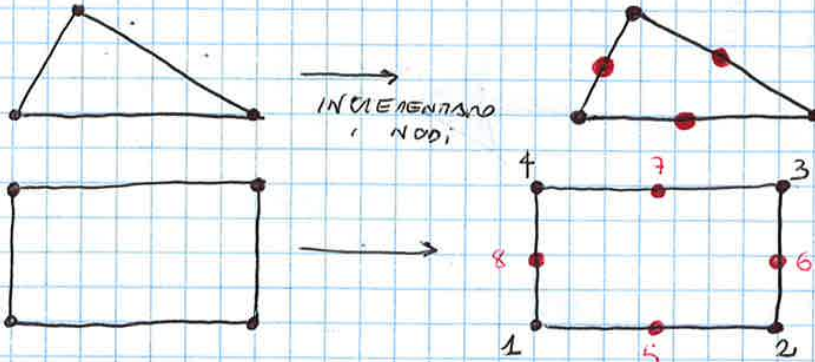
PIÙ CHE AUMENTANDO I NODI GLI ELEMENTI SONO PIÙ POTENTI  
PERÒ CONTINUARE AD AUMENTARE N SEGUENDO IL TRING. DI TART.

a) 2D

Elementi di ordine superiore  
Formulazione quadratica



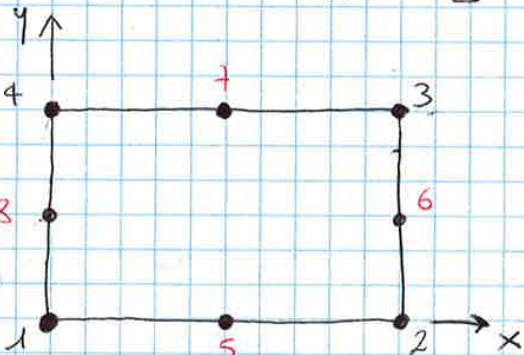
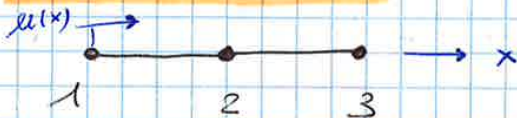
ELEMENTI A FORMULAZIONE LINEARE



SI CREA UN NODO IN PIÙ ~~CADENDO~~ A META' DI OGNI LATO

1D: **BARRA QUADRATICA**

(Elementi di ordine superiore più semplice perché unidimensionale)



$g=2 \quad h=3 \quad N=8$   
 $N_g = 16!!!$

Fin qui è il elemento triangolare a 3 nodi

16 coefficienti  $\alpha_k$  per descrivere il elemento

$U(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^2 y + \alpha_8 y^2 x$

$V(x) = \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} xy + \alpha_{13} x^2 + \alpha_{14} y^2 + \alpha_{15} x^2 y + \alpha_{16} y^2 x$

Completezza → Moti rigidi (3) / Moti di deformazione costante

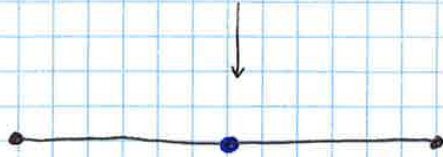
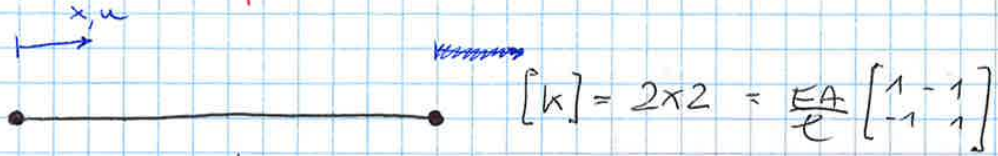
CONTIENE LA FORMULAZIONE DELL'ELEMENTO A 4 NODI PER CUI È UN ELEMENTO COMPLETO

Compatibilità → Continuità nell'elemento / Continuità fra gli elementi

Non sono univocamente fissati i valori di  $A', B', C', D'$  dalle condizioni di assemblaggio

Isotropia geometrica è una condizione ~~essenziale~~ <sup>necessaria</sup> ma non sufficiente per scegliere i coefficienti dal triangolo.

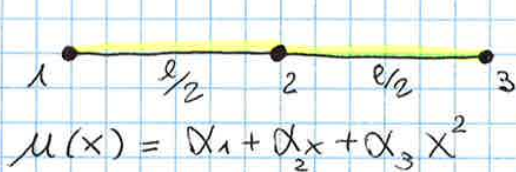
### Barra/Asta Quadratica a 3 nodi



Questo elemento è più potente e ci permette di arrivare a convergenza più velocemente

NON VA CONFUSO CON L'ASSEMBLAGGIO DI DUE ELEMENTI ASTA

### Studio dell'elemento



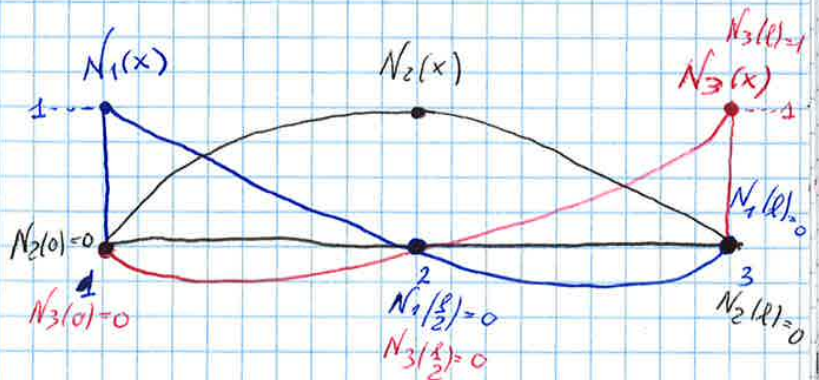
$g = 1, h = 1, N = 3$   
 $N_g = 3$

$u(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$   
 $\Phi(x)$

$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & l/2 & l^2/4 \\ 1 & l & l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$

$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$

$u(x) = \begin{bmatrix} \Phi(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$   
 $N(x)$



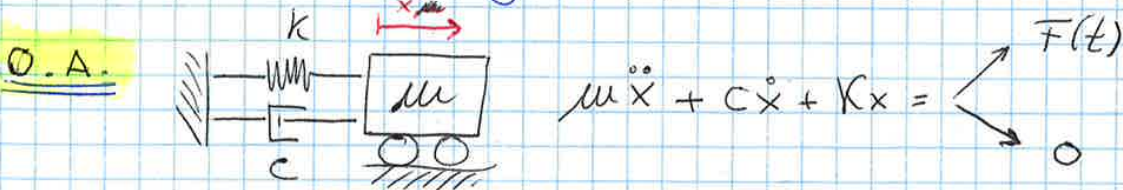
$N_1(x) = \frac{1}{l^2} (x-l)(2x-l)$   
 $N_2(x) = \frac{4}{l^2} x(l-x)$   
 $N_3(x) = \frac{1}{l^2} x(2x-l)$

$N_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

# VIBRAZIONI

1) Oscillazione libere e forzate → alberi

2) Velocità critiche degli alberi rotanti



$$m\ddot{x} = \sum F_i = F(t) - Kx - c\dot{x}$$

$\int = 0$  Consideriamo nullo lo smorzamento per semplificare

**Oscil. LIBERE** :  $m\ddot{x} + Kx = 0$       $x(t) = X e^{st}$

$$(ms^2 + k)X = 0 \rightarrow ms^2 + K = 0 \rightarrow \boxed{S = \pm j\sqrt{\frac{K}{m}} = \lambda_{im}}$$

$$x(t) = X_1 e^{i\lambda_{im}t} + X_2 e^{-i\lambda_{im}t} = A \cos(\lambda_{im}t) + B \sin(\lambda_{im}t) = \underbrace{(\text{frequenza di oscillazione})}_{\lambda_{im}} = (\text{rad/s})$$

$$= C \cos(\lambda_{im}t + \alpha)$$

→ Tutte formulazioni equivalenti. L'importante è da ottenere tutte 2 coefficienti da determinare

①  $X_0(0) = X_0$

②  $\dot{X}(0) = V_0$

→ **2 CONDIZIONI INIZIALI**

Sulla condizione ①

$$A = X_0$$

Sulla condizione ②

$$\Rightarrow x(t) = X_0 \cos(\lambda_{im}t) + \frac{V_0}{\lambda_{im}} \sin(\lambda_{im}t)$$

$$B = \frac{V_0}{\lambda_{im}}$$

RISPOSTA FORZATA

$m \ddot{x} + kx = F(t)$ ,  $F(t) = F_0 \cos(\lambda t)$  PARAMETRO LIBERO

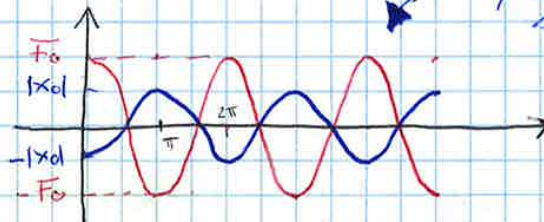
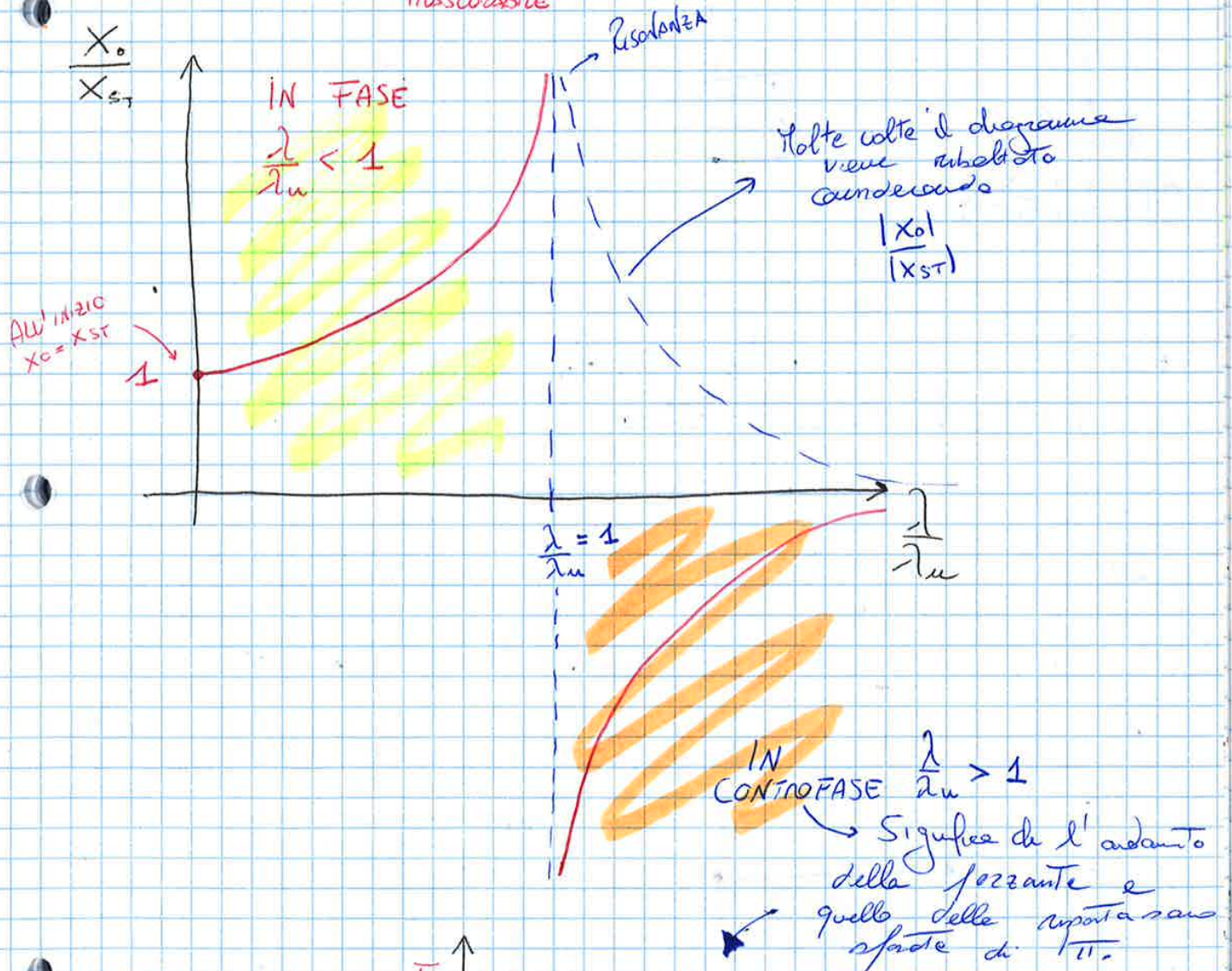
$x(t) = \text{sol. omogenea} + \text{int. particolare} =$   
 $= A \cos(\lambda_n t) + B \sin(\lambda_n t) + x_p$

$x_p = X_0 \cos(\lambda t) \rightarrow (-\lambda^2 X_0 + k X_0) = F_0$

AMPIEZZA  $\leftarrow X_0(\lambda) = \frac{F_0/k}{1 - (\frac{\lambda}{\lambda_n})^2}$   $X_{ST}$  (risposta statica)

$x(t) = A \cos(\lambda_n t) + B \sin(\lambda_n t) + X_0 \cos(\lambda t)$

LA RISPOSTA LIBERA È TRASCURABILE





IL SISTEMA FLESSIONALE HA PER OGNI COMPONENTE di INERZIA 2 gdl CHE VENGONO ATTIVATE IN FUNZIONE DELLA UTILITÀ E DELLA NOSTRA SCELTA

## SISTEMA A 4 gdl DINAMICA

Quindi GENERALIZZANDO a n gdl

$$[M] \ddot{x} + [K] x = \begin{cases} F(t) \\ 0 \end{cases}$$

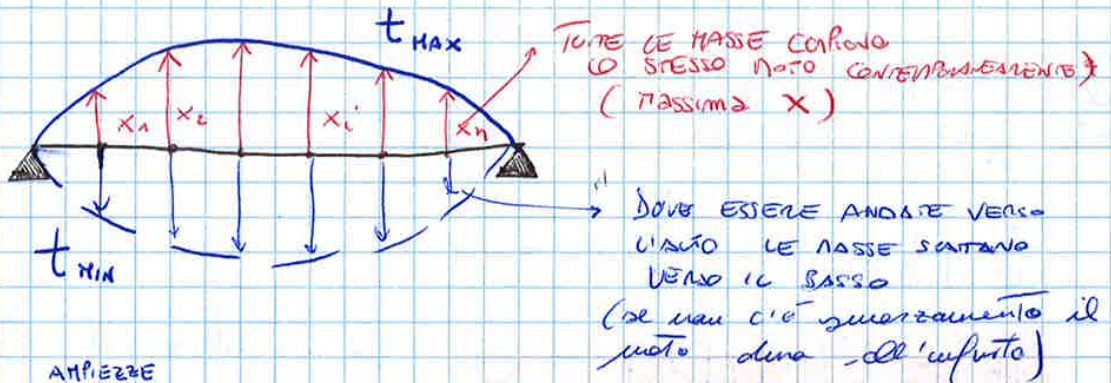
OSCILLAZIONI FORZATE  
OSCILLAZIONI LIBERE



### LIBERE:

H<sub>p</sub>: Moto Sincrono n MASSE (n gdl) DEL SISTEMA

### Esempio:



$$\{x(t)\} = \{X\} f(t) \quad \text{Moto Sincrono} \quad x_i(t) = X_i f(t)$$

$$\{\ddot{x}(t)\} = \{X\} \ddot{f}(t) \quad (\text{Accelerazioni})$$

Sostituendo nell'equazione di governo:

$$[M] \{X\} \ddot{f}(t) + [K] \{X\} f(t) = 0 \quad \text{Perché libere}$$

RIGA i-esima (gdl)

$$\sum (m_{ij} x_j) \ddot{f}(t) + \sum (k_{ij} x_j) f(t) = 0$$

$$-\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = \frac{\sum_{j=1}^n (k_{ij} x_j)}{\sum_{j=1}^n (m_{ij} x_j)} = \lambda^2 \quad (\text{costante} \in \mathbb{R})$$

Proviamo a salvare delle ~~qualità~~ proprietà su  $\lambda$

$\lambda_k^2 =$  QUADRATO DELLA FREQUENZA PROPRIA  $\omega_k$  ma

$\lambda_k = \sqrt{\lambda_k^2}$  (NB SENZA PIÙ O MENO PERCHÉ ABBIAMO DIMOSTRATO CHE  $\lambda$  DEVE ESSERE MAGGIORE DI ZERO)

Note a  $\lambda_k^2$

$([K] - \lambda_k^2 [M]) \{X\}^{(k)} = 0$

AUTOVETTORE CHE CONTIENE LE AMPIEZZE RELATIVE ALLA FREQUENZA  $\lambda_k^2$ .

$\{X_k\} = \begin{Bmatrix} X_1^{(k)} \\ X_2^{(k)} \\ \vdots \\ X_n^{(k)} \end{Bmatrix} =$  K-ESIMO MODO PROPRIO DI VIBRAZIONE O MODO NATURALE DI VIBRAZIONE O FORMA MODALE

↓  
PARAMETRO INVARIANTE

$\{X^{(k)}\} = X_1^{(k)} \begin{Bmatrix} 1 \\ X_2^{(k)}/X_1^{(k)} \\ \vdots \\ X_n^{(k)}/X_1^{(k)} \end{Bmatrix} = X_1^{(k)} \begin{Bmatrix} 1 \\ \tau_1^{(k)} \\ \vdots \\ \tau_n^{(k)} \end{Bmatrix}$

TAREMO RIFERIMENTO A QUESTO VETTORE POCHÉ LE AMPIEZZE SONO FISSATE A TENORE DI UNA COSTANTE ARBITRARIA INDETERMINATA DA DEFINIRE, QUANTO I COEFF. SONO SEMPRE UNIVOCAMENTE DEFINITI.

IL MOTO LIBERO AVRÀ, IN CONCLUSIONE :

n valori di  $\lambda_k^2$

n corrispondenti  $\{X_k\}$

→ SPECTRO

Proprietà:

1)  $K, M$  - ORTOGONALI,  $\lambda_i \neq \lambda_j$

$\{X^{(j)}\}^T [K] \{X^{(i)}\} = \lambda_i^2 \{X^{(i)}\}^T [M] \{X^{(i)}\}$

$\{X^{(i)}\}^T [K] \{X^{(j)}\} = \lambda_j^2 \{X^{(j)}\}^T [M] \{X^{(j)}\} *$

\* Traspongo

$\{X^{(j)}\}^T [K] \{X^{(i)}\} = \lambda_j^2 \{X^{(i)}\}^T [M] \{X^{(i)}\}$

SOTTRAIGO

$(\lambda_i^2 - \lambda_j^2) \{X^{(i)}\}^T [M] \{X^{(i)}\} = 0$  M AUTOCOSCI