NUMERO: 1967A - ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Barlassina Lorenzo

MATERIA: Analisi I Prof Ceragioli

UTILITY

$$\log a = \underline{\ln a} = \log_e a$$

L'IMMAGINE DI f È IL SOTTOINSIEME DEL CODOMINIO B CONTENENTE TUTTI E SOLI I TRASFORMATI DEGLI ELEMENTI DI A TRAMITE f. LO SI DENOTA $f(A)$ È LA Y.

LA CONTROIMMAGINE DI b TRAMITE f È IL SOTTOINSIEME DEL DOMINIO A CONTENENTE TUTTI GLI ELEMENTI LA CUI IMMAGINE È b. LO SI DENOTA $f^{-1}(b)$ È LA X.

FUNZIONE PARI (cos) SIMMETRICA RISPETTO A y / $f(x) = f(-x)$ NON INIETTIVA QUINDI NON BIETTIVA $\Rightarrow$ NON INVERTIBILE

" DISPARI (sen) (tg) " " ALL'ORIGINE. $f(-x) = -f(x)$

PERIODICITÀ

$f(x) = \operatorname{sen} 2x$ $\quad T = \pi$

$f(x) = \cos \frac{x}{3}$ $\quad T = 6\pi$

$f(x) = \operatorname{sen}(mx)$ $\quad T = \frac{2\pi}{m}$ → PERIODO DELLA FUNZIONE DIVISO QUELLO "DAVANTI ALLA X"

0 SOLUZIONI $= (\#(\text{soluz})) = 0$ ← NUMEROSITÀ

$$\lim_{x\to x_0} |x|^{\log x} = \lim_{x\to x_0} e^{\log |x|^{\log x}} = \lim_{x\to x_0} e^{\log x \cdot \log |x|}$$

$$e^{\log \operatorname{sen} t} = \operatorname{sen} t$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

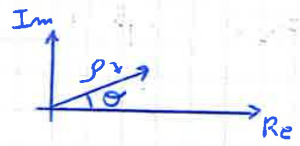
$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$$ COEFFICIENTE BINOMIALE $\quad a, b \in \mathbb{N};\ 0 \le b \le a$

$o(f + o(f)) = o(f) \quad x \to x_0 \qquad o(x^2) + o(x^3) = o(x^2)$ → DELL'f PIÙ PICCOLO

$$0! = 1! = 1$$

NUMERI COMPLESSI $\quad \mathbb{C}$

$$i^2 = -1$$



FORMA ALGEBRICA $\quad z = a + ib \qquad a, b \in \mathbb{R}$

$a = \operatorname{Re}(z)$

CONIUGATO $\quad \bar{z} = a - ib \qquad b = \operatorname{Im}(z)$

FORMA TRIGONOMETRICA $\quad z = \rho[\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta]$

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\rho}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a}$$

DATI DUE NUMERI COMPLESSI IN FORMA TRIGONOMETRICA, CALCOLARE $\operatorname{Re}(z_1 \cdot z_2)$, $\operatorname{Im}(z_1/z_2)$. DEVO TRASFORMARLI IN FORMA ALGEBRICA E POI MOLTIPLICARE TUTTO SOLO DOPO L'OPERAZIONE, IDENTIFICARE LA PARTE REALE DEL PRODOTTO E L'IMMAGINARIA DEL QUOZIENTE.
$z_1 = 3 + 3\sqrt{3}i$, $z_2 = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i \Rightarrow \operatorname{Re}((3+3\sqrt{3}i)\cdot(2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i)) = \operatorname{Re}(z_1 \cdot z_2)$

OPPOSTO $\quad z = a + ib =$

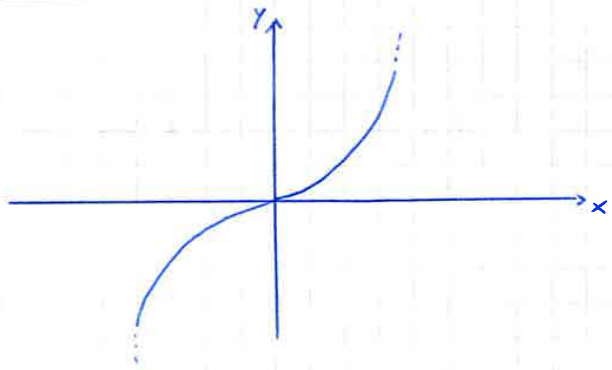
$z_1 = -a - ib = -z$

RECIPROCO $\quad z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

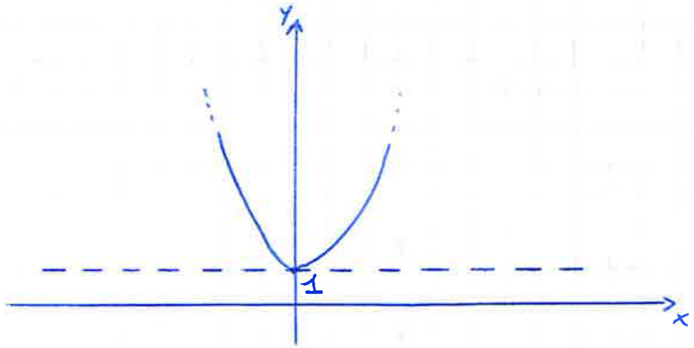
DUE NUMERI COMPLESSI SONO UGUALI SE HANNO UGUALI PARTI IMMAGINARIA E REALE OPPURE HANNO UGUALI ρ E θ

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 32

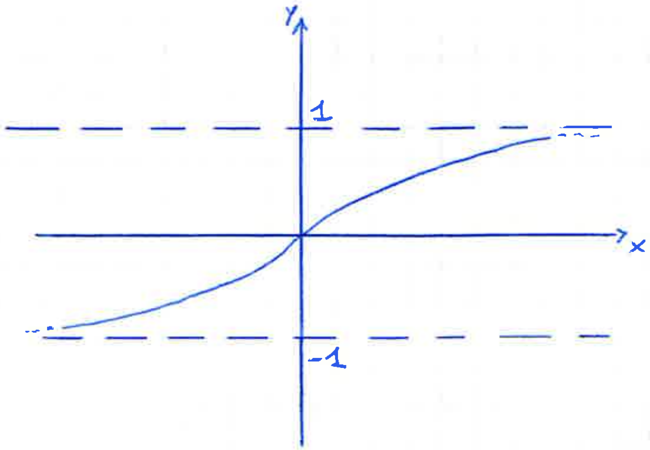
senh x



cosh x



tgh x



FUNZIONE MANTISSA

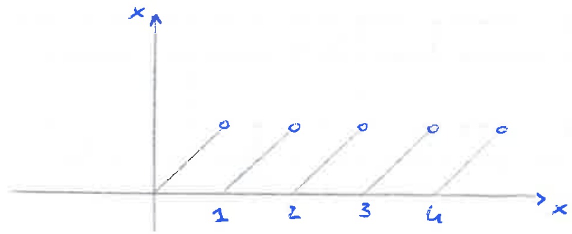
SEMPRE SOPRA (GRAFICO) CIOÈ $y > 0$

ES. $M(\pi) = 0{,}14$
$M(0) = 0$
$M(1) = 0$
$M(-1{,}5) = 0{,}5 \rightarrow M(-1{,}5) = -1{,}5 - \lfloor -2 \rfloor = 0{,}5$

$$f(x) = M(x) = x - \lfloor x \rfloor$$

$\lfloor x \rfloor$ → PARTE INTERA DI X

TOLGO ALLA X LA SUA PARTE INTERA QUINDI MI RIMANE LA PARTE DECIMALE.



- LIMITATA INFERIORMENTE DA 0
- " SUPERIORMENTE DA 1 CIOÈ TENDE A 1
- NON MONOTONA, MA MONOTONA NEI SINGOLI INTERVALLI
- PERIODICA CON PERIODO = 1
- SEMPRE POSITIVA

$$M(-1{,}8) = -1{,}8 - \lfloor -2 \rfloor$$

L'INTERO PIÙ "GRANDE" QUINDI NON -1

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 32

LIMITI LATERALI

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \qquad x_0 < x < x_0 + \delta$

$(x_0 - \delta < x < x_0$ SE AVESSI $x \to x_0^-)$

$$| f(x) - \ell | < \varepsilon$$

PUNTI DI DISCONTINUITÀ

① DISCONT. DI **1ª SPECIE** (O **SALTO**) IN x_0

SE ESISTONO FINITI E DIVERSI I LIMITI $\lim_{x \to x_0^\pm} f(x)$

$$L_1 = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_2 \qquad \underline{\text{SALTO}} = |L_1 - L_2|$$

② DISCONT. DI **2ª SPECIE** IN x_0

SE ALMENO UNO DEI DUE LIMITI LATERALI $\lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = +\infty,\ -\infty,\ \nexists$ (ASINTOTO)

③ DISCONT. **ELIMINABILE** IN x_0

SE $\left[\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \text{ con } \ell \neq f(x_0)\right]$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$$

SECONDO TEOREMA DEL CONFRONTO O DEI 2 CARABINIERI

$A \subseteq \mathbb{R},\ A \neq \emptyset \qquad f, g, h : A \to \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER A

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$
- $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$$

$\log_a x$

① $\lim_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0 \qquad x_0 \in dom$

② $0 < a < 1 \quad \begin{cases} \lim_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty \end{cases}$

③ $a > 1 \quad \begin{cases} \lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty \\ \lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty \end{cases}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 32

PRIMO TEOREMA DEL CONFRONTO

$f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , A \neq \emptyset$

x_0 PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI A

[$\exists I(x_0)$ T.C. $\forall x \in I(x_0) \cap A \setminus \{x_0\}$

$f(x) \leq g(x)$

SE $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

SE $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$]

SIANO $l, m \in \mathbb{R}$

SE $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad , \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = m$

E SE $\exists I(x_0) : \forall x \in I(x_0) \cap A \setminus \{x_0\} \quad f(x) \leq g(x)$

$\Rightarrow \underline{l \leq m}$

TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE

$f : \mathrm{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI $\mathrm{dom} f$

SIANO $l_1, l_2 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

SE $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ E $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$

$\Rightarrow \underline{l_1 = l_2}$ IL LIMITE, SE ESISTE, È UNICO

TEOREMA DI LIMITATEZZA LOCALE

$f : \mathrm{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI $\mathrm{dom} f$

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ ALLORA $\exists I(x_0)$ T.C. $f(x)$ È LIMITATA SU $I(x_0)$ CIOÈ $f|_{I(x_0)}$ È LIMITATA,

CIOÈ $\exists M > 0$ T.C. $|f(x)| < M$

[$\exists m, M$ T.C. $m < f(x) < M$]

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 32

LIMITI NOTEVOLI CON "o-PICCOLO"

$\operatorname{arctg} x = x + o(x) \quad x \to 0$

$\operatorname{tg} x = x + o(x) \quad x \to 0$

① $\operatorname{sen} x = x + o(x) \quad x \to 0$

$\operatorname{arcsen} x = x + o(x) \quad x \to 0$

② $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \quad x \to 0$

③ $\log(1+x) = x + o(x) \quad x \to 0$

④ $e^x = 1 + x + o(x) \quad x \to 0$

⑤ $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x) \quad x \to 0$

FORMULE DI MAC LAURIN

/MEC LORIN/

① GRADO 2

$\operatorname{sen} x = x + o(x^2) \quad x \to 0$

⚠ CON n DISPARI PERCHÉ IL SEN È UNA FUNZIONE DISPARI

G.3 $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad x \to 0$

G.4 $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \quad x \to 0$

G.5 $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \quad x \to 0$

② G.4 $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4) \quad x \to 0$

G.6 $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6) \quad x \to 0$

⚠ CON n PARI PERCHÉ IL COS È UNA FUNZIONE PARI

③ G.2 $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \quad x \to 0$

G.3 $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad x \to 0$

④ G.2 $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + o(x^2) \quad x \to 0$

G.3 $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad x \to 0$

EQUIVALENTE "$\sim$"

$f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad A \neq \emptyset \quad x_0$ PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER A

f È EQUIVALENTE A g PER $x \to x_0$

SE $\underline{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1}$ $\quad \underline{f \sim g \quad x \to x_0}$

ES $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \to 1$

$\operatorname{sen} x \sim x$

$f \sim g \quad x \to x_0$ SE E SOLO SE $f = g + o(g) \quad x \to x_0$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} - 1 = 0 \to \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0$

$f(x) - g(x) = o(g(x)) \quad f(x) = g(x) + o(g(x)) \quad x \to x_0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 32

TEOREMA DI ROLLE

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

1) f CONTINUA NELL'INTERVALLO CHIUSO E LIMITATO $[a,b]$

2) f DERIVABILE NEI PUNTI INTERNI ALL'INTERVALLO (a,b)

3) $f(a) = f(b)$

$\Rightarrow \exists c \in (a,b)$ T.C. $f'(c) = 0$

"ALMENO UN" — LA DERIVATA SI ANNULLA

TEOREMA DI LAGRANGE

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

1) f CONTINUA NELL'INTERVALLO CHIUSO E LIMITATO $[a,b]$

2) f DERIVABILE NEI PUNTI INTERNI ALL'INTERVALLO (a,b)

$\Rightarrow \exists c \in (a,b)$ T.C. $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

TEOREMA DI FERMAT

SIA $f(x)$ DERIVABILE NEL PUNTO x_0, INTERNO AL SUO DOMINIO.

SE x_0 E' UN PUNTO ESTREMANTE (MAX o MIN) DELLA $f(x)$, LA DERIVATA f' SI ANNULLA IN x_0, CIOE' $f'(x_0) = 0$

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in (a,b)$ PUNTO DI MAX o MIN PER f

SE f E' DERIVABILE IN x_0 $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

TEOREMA DI DE L'HÔPITAL $\left[\frac{0}{0}\right]$ $\left[\frac{?}{\infty}\right]$ (*)

$f, g: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI A

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ $\quad$ [OPPURE (*) $\lim_{x \to x_0} g(x) = \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$]

2) $\exists\, I(x_0)$ T.C. $\exists f'(x), g'(x)$ $\forall x \in I(x_0) \cap A \setminus \{x_0\}$

$g'(x) \neq 0$

SE $\exists \lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(VEDI p. 283) CLASSIFICAZIONE DERIVATE
p. 281-282 "LANCELOTTI"

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 32

POLINOMIO DI TAYLOR DI ORDINE (GRADO) m DI f CENTRATO IN X_0

$$P_m(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 +$$

$$+ \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x-x_0)^3 + \dots + \frac{1}{m!} f^{(m)}(x_0)(x-x_0)^m =$$

FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI PEANO

$$f(x) = P_m(x) + \underbrace{o((x-x_0)^m)}_{} \qquad x \to x_0$$

↳ RESTO DI PEANO

FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI LAGRANGE

$$f(x) = P_m(x) + \underbrace{\frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(t)(x-x_0)^{m+1}}_{}$$

↳ RESTO DI LAGRANGE

SVILUPPI NOTEVOLI DI MAC LAURIN /MEC LORIN/

SONO GLI SVILUPPI DI TAYLOR CON $X_0 = 0$.

$$a^x = 1 + x\log a + \frac{(x\log a)^2}{2!} + \frac{(x\log a)^3}{3!}$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + \frac{t^k}{k!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + o(t^n), \quad \text{per } t \to 0$$

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + o(t^n), \quad \text{per } t \to 0$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(t^{2n+2}), \quad \text{per } t \to 0$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} + o(t^{2n+1}), \quad \text{per } t \to 0$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} t^n + o(t^n), \quad \text{per } t \to 0$$

$$\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} t^3$$

$$\alpha = -1, \qquad \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^n t^n + o(t^n), \quad \text{per } t \to 0$$

$$\alpha = \frac{1}{2}, \qquad \sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 + \cdots + \binom{1/2}{n} t^n + o(t^n), \quad \text{per } t \to 0$$

$$\sinh t = t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \frac{t^7}{7!} + \cdots + \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(t^{2n+1}), \quad \text{per } t \to 0$$

$$\cosh t = 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^6}{6!} + \frac{t^8}{8!} + \cdots + \frac{t^{2n}}{(2n)!} + o(t^{2n}), \quad \text{per } t \to 0$$

$$\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)} + o(t^{2n+2}), \quad \text{per } t \to 0$$

$$\log x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 32

INTEGRALE

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ LIMITATA

$\exists\ m, M \in \mathbb{R}$ T.C. $\forall x \in [a,b]$

$m \leq f(x) \leq M$

SE $\underline{\int_{[a,b]}} f = \overline{\int_{[a,b]}} f$ f SI DICE INTEGRABILE SU $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_{[a,b]}} f = \overline{\int_{[a,b]}} f$$

PROPOSIZIONE

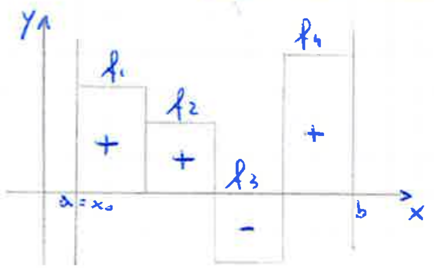
$H^+f = \{ h : [a,b] \to \mathbb{R}$ A SCALA T.C. $h(x) \geq f(x)\ \forall x \in [a,b] \}$

$H^-f = \{ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ A SCALA T.C. $g(x) \leq f(x)\ \forall x \in [a,b] \}$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ LIMITATA

f E' INTEGRABILE SU $[a,b]$ SE E SOLO SE $\forall \varepsilon > 0$

$\exists\ h_\varepsilon \in H^+f$, $g_\varepsilon \in H^-f$ T.C. $\int_{[a,b]} h - g < \varepsilon$



$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$\int_{[a,b]} f = \sum_k f_k (x_k - x_{k-1})$

$f_k > 0$ $\int f =$ AREA $f_1 + f_2 - f_3 + f_4 =$

INTEGRALE DI RIEMANN

$f : [a,b] \to$ LIMITATA $\exists\ m, M \in \mathbb{R}$ TALI CHE $m \leq f \leq M$

- $\underline{H^+f} = \{ h : [a,b] \to \mathbb{R}$ A SCALA T.C. $h(x) \geq f(x)$, $\forall x \in [a,b] \}$

$\mathcal{H} = \{ \int_{[a,b]} h,\ h \in H^+f \}$

$\inf \mathcal{H} \in \mathbb{R} = \overline{\int_{[a,b]}} f$ INTEGRALE SUPERIORE

$\forall h \in H^+f$ $h(x) \geq f(x) \geq m$ $h(x) \geq m$

$\int_{[a,b]} h \geq m(b-a) \Rightarrow \mathcal{H}$ E' INFERIORMENTE LIMITATO

- $\underline{H^-f} = \{ h : [a,b] \to \mathbb{R}$ A SCALA T.C. $g(x) \leq f(x) \}$

$\mathcal{G} = \{ \int_{[a,b]} g,\ g \in H^-f \}$

$\sup \mathcal{G} \in \mathbb{R} = \underline{\int_{[a,b]}} f$ INTEGRALE INFERIORE

$\forall g \in H^-f$ $g(x) \leq f(x) \leq M$ $g(x) \leq M$

$\int_{[a,b]} g \leq M(b-a) \Rightarrow \mathcal{G}$ E' SUPERIORMENTE LIMITATA

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ LIMITATA

$\underline{\int_{[a,b]}} f \leq \overline{\int_{[a,b]}} f$

ASSIOMA DI CONTINUITA'

$\forall \gamma \in \mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}$ $\forall \delta \in \mathcal{H} \subseteq \mathbb{R}$

$\gamma \leq \delta$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 32

INTEGRAZIONE FUNZIONI RAZIONALI $\frac{P(x)}{Q(x)}$

P, Q POLINOMI

① $\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$

P GRADO MAGGIORE DI Q POSSO DIVIDERE

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int S(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$$

SOLUZIONE — RESTO — QUOZIENTE

DECOMPOSIZIONE IN FRATTI SEMPLICI DI HERMITE (VEDI p. 363)

② $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{(x-x_0)^2} + \dots + \frac{K}{(x-x_0)^p} + \dots + \frac{Cx+D}{(x-a)^2+b^2} + \frac{Ex+F}{[(x-a)^2+b^2]^2} + \dots$$

- SOLO QUANDO GRADO N < GRADO D
- DECOMPOSTO IN FATTORI IRRIDUCIBILI DI PRIMO E SECONDO GRADO.

PER RISOLVERE POI SI USA IL PRINCIPIO DI IDENTITA' DEI POLINOMI

ES. $$\int \frac{2}{x^3-x^2+x-1}\,dx = \int \frac{2}{(x-1)(x^2+1)}\,dx = \int \frac{A}{(x-1)} + \int \frac{Bx+C}{x^2+1}\,dx$$

SE VI E' DI SECONDO GRADO A DENOMINATORE DEVO PREVEDERE $Bx+C$

ES. $$\int \frac{x+5}{(x-3)^2}\,dx = \int \frac{A}{x-3}\,dx + \int \frac{B}{(x-3)^2}\,dx$$

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

ES. $$2\int \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx = 2\,\text{sen}\sqrt{x} + c$$

$\sqrt{x} = t \qquad x = t^2 \qquad dx = 2t\,dt$

$$\cancel{2}\int \frac{\cos t}{\cancel{2t}} \cdot \cancel{2t}\,dt = 2\,\text{sen}\,t + c \qquad t = \sqrt{x}$$

$x = g(t)$

$$\int f(x)\,dx = \int f[g(t)]\,g'(t)\,dt$$

INTEGRAZIONE PER PARTI

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

ES. $$\int x\cdot\text{sen}\,x\,dx$$

DERIVI D	INTEGRI I
x	$\text{sen}\,x$
1	$-\cos x$

$$= x\cdot(-\cos x) - \int (1)\cdot(-\cos x)\,dx =$$

$$= -x\cos x - (-\text{sen}\,x) + c = -x\cos x + \text{sen}\,x + c$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 32

FUNZIONI PARAMETRICHE

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

DOPO AVER SVOLTO L'ES. CON L'INCOGNITA t RICORDARSI DI SOSTITUIRE $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

INTEGRALI DEFINITI

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$ TEOREMA TORRICELLI - BARROW

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad c \in (a,b)$$

f DISPARI $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

f PARI $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

- SE ABBIAMO UNA FUNZIONE DISPARI DIVISO UNA PARI IL TUTTO E' DISPARI:

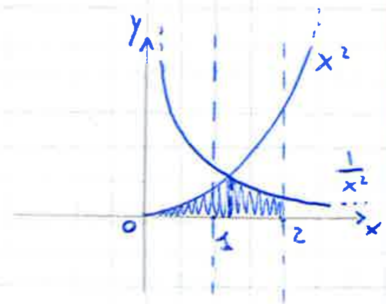
$$\frac{\operatorname{senh}(x^3)}{2x^2-8}$$

$\operatorname{senh}(x^3) \mapsto x^3$ DISPARI $\to \operatorname{senh}$ DISPARI $\Rightarrow \operatorname{senh}(x^3)$ DISPARI

$2x^2 - 8 \mapsto$ PARI

$\Rightarrow$ DISPARI

ES. $\int_0^2 \min\left(\frac{1}{x^2}, x^2\right) dx$



LA FUNZIONE PIU' BASSA NELL'INTERVALLO $[0,2]$

$$= \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + (-x^{-1})\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{6} > 0 \quad \text{"GIUSTO"}$$

- CIOE' L'AREA PIU' BASSA INTERCETTATA DALLE DUE CURVE E DALL'INTERVALLO $[a,b]$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 32

EQ. DI 2° ORDINE OMOGENEE

$$y'' + ay' + by = p(x)$$

$p(x) = 0$ EQ. OMOGENEE

$y'' = k^2 \quad y' = k \quad y = 1$

$k^2 + ak + b = 0$ SI RISOLVE E:

① $\Delta > 0$

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

k_1 e k_2 SOLUZIONI REALI E DISTINTE DI $k^2 + ak + b = 0$

② $\Delta = 0$

$$y = e^{k \cdot x} (C_1 + C_2 x)$$

k_1 e k_2 SOLUZIONI REALI E COINCIDENTI DI $k^2 + ak + b = 0$

③ $\Delta < 0$

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x)$$

$$k_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{-a \pm i\sqrt{-\Delta}}{2} = \underbrace{-\frac{a}{2}}_{= \alpha} \pm i \underbrace{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}}_{= \beta}$$

EQ. DI 2° ORDINE NON OMOGENEE

$$y'' + ay' + by = p(x)$$

$p(x)$ → FORZANTE

$p(x) \neq 0$ EQ. NON OMOGENEE

$q(x)$ GRADO 1 $= ax + b$
$q(x)$ GRADO 2 $= ax^2 + bx + c$
$q(x)$ GRADO 3 $= ax^3 + bx^2 + cx + d$

equazione differenziale $y'' + ay' + by = p(x)$		
termine noto dell'equazione differenziale	**condizioni**	**forma dell'integrale particolare** $q(x)$
$p(x)$ polinomio di grado n	① $b \neq 0 \wedge a \neq 0$ o $a = 0$	polinomio di grado n
	② $b = 0 \wedge a \neq 0$	polinomio di grado $n + 1$
	③ $b = 0 \wedge a = 0$	polinomio di grado $n + 2$
$p(x) = Ae^{\alpha x}$	④ α non è radice dell'equazione caratteristica $k^2 + ak + b = 0$	$q(x) = Be^{\alpha x}$
	⑤ α è radice semplice = NON DOPPIA dell'equazione caratteristica	$q(x) = Bxe^{\alpha x}$
	⑥ α è radice doppia dell'equazione caratteristica	$q(x) = Bx^2 e^{\alpha x}$
$C \operatorname{sen} \beta x + D \cos \beta x$	$i\beta$ non è radice dell'equazione caratteristica	$A \operatorname{sen} \beta x + B \cos \beta x$
	$i\beta$ è radice dell'equazione caratteristica	$x(A \operatorname{sen} \beta x + B \cos \beta x)$

① $b \neq 0$

$p(x)$ E $q(x)$ HANNO LO STESSO GRADO

② $b = 0$, $a \neq 0$ $q(x)$ HA GRADO $n+1$ RISPETTO A $p(x)$

ES.

$y'' + 2y' = x$

- $y'' + 2y' = 0$ → OMOGENEA ASSOCIATA

$k^2 + 2k = 0$ → $k(k+2) = 0$

$k = 0, -2 \Rightarrow \underbrace{y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-2x}}_{\text{SOLUZIONE}} = \underbrace{C_1 + C_2^{-2x}}_{\text{EQ. OMOGENEA}}$

(5) α E' SOLUZIONE DI $k^2+ak+b=0$, $q(x) = Bxe^{\alpha x}$

$y = q(x) = B \cdot x \cdot e^{\alpha x}$

$y' = B(e^{\alpha x} + x \cdot e^{\alpha x})$

$y'' = B(e^{\alpha x} + e^{\alpha x} + xe^{\alpha x}) = Be^{\alpha x}(x+2)$

(6) α E' SOLUZIONE DOPPIA DI $k^2+ak+b=0$, $q(x) = Bx^2e^{\alpha x}$

$y = q(x) = B \cdot x^2 e^{\alpha x}$

$y' = B(2x \cdot e^{\alpha x} + x^2 e^{\alpha x})$

$y'' = B(xe^{\alpha x} + 2xe^{\alpha x} + 2xe^{\alpha x} + x^2e^{\alpha x})$

$= Bxe^{\alpha x}(5+x)$

LOGARITMI

⚠ $\log_a b^c = \log_a (b^c)$

$\log_a^c b = (\log_a b)^c$

$a^x = b \rightarrow x = \log_a b$ con $a>0, a \neq 1$, $b>0$

- $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
- $\log_a b^c = c \log_a b$
- $\log_a \sqrt[m]{b} = \log_a b^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m} \log_a b$
- $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$
- $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$
- $\log_{a^c} b^c = \log_a b$
- $\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$

$\begin{cases} \log_a \frac{1}{a} = -1 \\ \log_a a = 1 \end{cases}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 32

TEOREMA (LEGAME TRA MONOTONIA E SEGNO DERIVATA)

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad$ f CONTINUA SU $[a,b]$
$\quad$ f DERIVABILE SU (a,b)

① SE f CRESCENTE SU $[a,b] \Rightarrow f'(x_0) \geq 0 \quad \forall x_0 \in (a,b)$

② SE $f'(x_0) \geq 0 \quad \forall x_0 \in (a,b) \Rightarrow f$ CRESCENTE SU $[a,b]$

③ SE $f'(x_0) > 0 \quad \forall x_0 \in (a,b) \Rightarrow f$ STRETTAMENTE CRESCENTE SU $[a,b]$

① $x_0 \in (a,b)$

$x < x_0$ $\quad$ f CRESCENTE $\quad$ $f(x) \leq f(x_0)$

$x - x_0 < 0$ $\quad$ $f(x) - f(x_0) \leq 0$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$$

$\Rightarrow$ PER IL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO TUTTO IL LIMITE È:

$$\left[\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{\underbrace{x-x_0}_{\geq 0}}\right] \geq 0$$

②

$x_1, x_2 \in [a,b]$

$x_1 < x_2$

PER SECONDA FORMULA DELL'INCREMENTO FINITO

$$f(x_2) = f(x_1) + \underbrace{f'(t)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{\geq 0}$$

$t \in (x_1, x_2)$ $\quad$ $x_2 > x_1$

$\Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

CIOÈ f CRESCENTE

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 32

INFINITESIMI EQUIVALENTI

$x \to 0$

$y = \operatorname{sen} x \sim x$

$y = \operatorname{arcsen} x \sim x$

$y = \operatorname{tg} x \sim x$

$y = \operatorname{arctg} x \sim x$

$y = 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$

$y = \log(1+x) \sim x$

$y = e^x - 1 \sim x$

FUNZIONE COMPOSTA

$(f \circ g)^{-1} = [(g)^{-1} \circ (f)^{-1}]$ COMPOSTA DELL'INVERSA

DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA

ES. $f(x) = \log(x+1) - 2e^{3x}$ $\quad \underset{x_0}{f(0)} = \underset{y_0}{-2}$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$(f^{-1})'(-2) = \frac{1}{\frac{1}{x_0+1} - 2e^{3x_0} \cdot 3} = \frac{1}{1-6} = -\frac{1}{5}$$

DERIVATA DELL'INTEGRALE "COMPOSTO"

$$F(x) = \int_a^{f(x)} g(t)\,dt \qquad F'(x) = g(f(x)) \cdot f'(x)$$

ES. $f(x) = x \cdot e^{x^3}$

$$F(x) = \int_1^{x^2} f(x)\,dt = \int_1^{x^2} x \cdot e^{x^3}\,dt = x^2 \cdot e^{x^6} \cdot 2x$$
$$= 2x^3 \cdot e^{x^6}$$

INSIEMISTICA

$\mathbb{N}$: NUMERI NATURALI $= \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ INTERI

$\mathbb{Z}$: NUMERI RELATIVI $= \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ INTERI RELATIVI

$\mathbb{Q}$: NUMERI RAZIONALI $= \left\{ \frac{m}{n},\ m, n \in \mathbb{Z}\ n \neq 0 \right\}$

$\mathbb{R}$: NUMERI REALI

$\mathbb{C}$: NUMERI COMPLESSI $a + ib$

ASSIOMA DI CONTINUITÀ (DEDEKIND)

SIANO A e B DUE SOTTOINSIEMI DI $\mathbb{R} \to (A, B \subset \mathbb{R})$.
A, B DIVERSI DALL'INSIEME VUOTO $(A, B \neq \emptyset)$

SE $[\forall a \in A \quad \forall b \in B \Rightarrow a \leq b]$

$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ TALE CHE $a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 32

STUDIO DI FUNZIONE

1) C.E.

1 bis) SIMMETRIE : PARI, DISPARI O PERIODICA

2) INTERSEZIONE ASSI → $x=0$, $y=0$

3) INSIEME DI POSITIVITÀ → $y>0$

4) $\lim_{x\to\infty} f(x) = x_0$ ASINTOTO ORIZZONTALE

[LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO]

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ ASINTOTO VERTICALE

5) SE LIMITE $x\to\infty$ VIENE ∞

CERCARE ASINTOTO OBLIQUO

E TANGENTE $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ $\lim_{x\to+\infty} [f(x)-mx] = q$

6) $y' = \dots \geq 0$ DERIVATA → MAX e MIN (RELATIVI o ASSOLUTI) CRESCENTE o DECRES.

7) $y'' = \dots \geq 0$ " 2^a → CONCAVITÀ CONVESSITÀ FLESSI

8) TRACCIA IL GRAFICO

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 32