



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1966A -

ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Mascolo Luigi

MATERIA: Gasdinamica - Prof. Iuso

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

Table of Contents

1	Introduzione	11
1.1	Struttura del gas per $M > 0.3$	11
1.2	Energia cinetica media traslazionale globale	12
1.3	Gradi di libertà energetici	15
1.4	Miscele di gas	17
1.5	Compressibilità dei fluidi	18
1.6	Proprietà di trasporto dei fluidi	19
1.6.1	Viscosità dinamica μ	20
1.6.2	Conducibilità λ	22
1.7	Campi isoentropici ed omoentropici	24
1.8	Condizioni di serbatoio e di arresto	25
1.9	Relazioni isentropiche	26
1.10	Sommario Capitolo 1	26
2	Leggi di conservazione	27
2.1	Leggi di conservazione in forma integrale	28
2.1.1	Equazione di conservazione della massa	28
2.1.2	Equazione di conservazione della quantità di moto	28
2.1.3	Equazione di conservazione dell'energia	29
2.2	Leggi di conservazione in forma differenziale	30
2.2.1	Equazione di conservazione della massa	30
2.2.2	Equazione di conservazione della quantità di moto	31
2.2.3	Equazione di conservazione dell'energia	32
2.2.4	Formulazioni alternative dell'energia per $H = \text{cost}$	33
2.3	Sommario Capitolo 2	34
3	Flussi monodimensionali	35
3.1	Teorema di Crocco	35
3.1.1	Flusso stazionario	36
3.1.2	Flusso non stazionario	36
3.1.3	Flusso omoentalpico ed omoentropico	36
3.2	Equazione della velocità potenziale	37
3.3	Equazioni per un flusso unidimensionale	39
3.4	Propagazione dei disturbi	41
3.4.1	Piccole perturbazioni	41
3.4.2	Grandi perturbazioni	42
3.5	Propagazione delle onde d'urto	43
3.6	Urto retto	45

6	Strato limite	119
6.1	Equazioni specializzate per lo strato limite	125
6.1.1	Strato limite stazionario, bidimensionale e adiabatico	126
6.2	Flusso di Couette	128
6.3	Problema di strato limite adiabatico	129
6.3.1	Strato limite adiabatico con $Pr = 1$	129
6.3.2	Strato limite adiabatico con $Pr < 1$	131
6.4	Metodo di Von Driest	133
6.5	Strato limite diabatico: placca piana ad $\alpha = 0^\circ$	134
6.5.1	Profilo mantenuto a $T_w = T_\infty$	136
6.5.2	Analogia di Reynolds - Scambi locali	137
6.6	Analogia degli scambi integrali	138
6.6.1	Placca piana ad $\alpha = 0^\circ$	138
6.6.2	Metodo della sezione rappresentativa	139
6.6.3	$\bar{\tau}_w$ e \bar{q}_w per placca piana ad $\alpha = 0^\circ$	140
6.6.4	$\bar{\tau}_w$ e \bar{q}_w per cono ad $\alpha = 0^\circ$	140
6.6.5	Criterio di stabilità cinematica di Rayleigh	141
6.7	Flusso nell'intorno del punto di arresto	142
6.7.1	Metodo integrale di Thwaites	143
6.7.2	Parametro k nei vari regimi	145

List of Figures

1.1	Gradi di libertà energetici rotazionali - molecola biatomica	15
1.2	Linea di corrente - curvatura attorno ad un profilo alare	18
1.3	Trasporto di quantità di moto nel piano	20
1.5	Strato limite	21
1.6	Gradiente di temperatura	22
1.7	Strato limite cinematico e termico	23
1.8	Trasformazione isoentropica	24
1.9	Punto di arresto di una corrente fluida	25
2.1	Flusso di un vettore attraverso una superficie	27
3.1	Onda d'urto per un flusso supersonico	35
3.2	Flusso in un condotto	39
3.3	Fronte d'onda con sorgente a diverse velocità V_s	41
3.4	Flusso in un volume di controllo in presenza di grandi perturbazioni	42
3.5	Onde di compressione ed espansione	43
3.6	Fenomeno di creazione dell'onda d'urto	43
3.7	Regime subsonico attorno ad un profilo alare	44
3.8	Regime supersonico attorno ad un profilo alare	44
3.9	Flusso monodimensionale in un condotto	50
3.10	Rapporti critici $\frac{f}{f^*}$ con $M_1 = 1$ per $M_2 \in [0.2, 2]$	54
3.11	Flusso di Fanno	55
3.12	Curva di Fanno	57
3.13	$4C_f L^* / D$ in funzione del Mach di ingresso	58
4.1	Compressione ed espansione in presenza di un condotto deflesso	61
4.2	Volume di controllo - Onde oblique	61
4.3	Possibili deflessioni $\beta = f(M_1)$ rispetto a un dato $\vartheta = 15^\circ$	64
4.4	Cuneo di Wedge	64
4.5	Piano odografico dell'urto	65
4.6	Polare dell'urto retto - Piano normalizzato	66
4.7	Inviluppo tridimensionale di un'onda d'urto contro un corpo tozzo	68
4.8	Riflessione regolare di un flusso supersonico in un condotto	69
4.9	Piano $p-\vartheta$	70
4.10	Interazione fra urti obliqui deboli	71
4.11	<i>Slip line</i> a valle di un'intersezione di urti di famiglie opposte	71
4.12	Intersezione di urti della stessa famiglia	72
4.13	Riflessione di Mach	73
4.14	Onde semplici di compressione	74

6.13	Grafico $T - \phi$ - caso adiabatico $T_w = T_{rec}$, isoterma $T_w = T_\infty$ et al.	136
6.14	Direttrice del cono assimilabile a placca piana	140
6.15	Criterio di stabilità cinematica di Rayleigh	141
6.16	Flusso nell'intorno del punto di arresto	142
6.17	Cilindro nella teoria Newtoniana	145
6.18	$\frac{kD}{V_\infty}$ dalle (6.86, 6.87)	146

List of Tables

1.1	Gradi di libertà energetici per basse temperature	15
1.2	Capitolo 1 - Formule	26
4.1	Confronto compressione - espansione supersonica	75
6.1	Parametri nell'Analogia di Reynolds	137

1. Introduzione

Scopo del corso è studiare il comportamento di una miscela gassosa ad alta velocità. Posto che, per $M > 0.3 \rightarrow \rho \neq \text{cost}$, l'elevata velocità causerà degli effetti sulla resistenza e sui flussi di calore rendendo il fluido in esame compressibile, e cioè a densità variabile.

1.1 Struttura del gas per $M > 0.3$

Un gas possiede un'entalpia totale

$$H = h + \frac{V^2}{2} \quad (1.1)$$

pari alla somma di entalpia statica ed energia cinetica. Qualsiasi sia la velocità del fluido gassoso in esame, posto

$$h = c_p T = e + p/\rho \quad \approx \text{cost} \quad \forall M \quad (1.2)$$

h è l'entalpia statica, che si conserva pressochè costante dato che il rapporto fra pressione e densità non varia molto, mentre e è l'energia interna.

Mentre in campo subsonico H non varia di molto, essendo il termine $V^2/2$ esiguo, nel caso supersonico l'energia cinetica assume la stessa rilevanza dell'entalpia statica, simile per ordine di grandezza. Il concetto di variazione di energia assume un ruolo rilevante nel campo supersonico, influenzando altre proprietà del gas che ricadono nella branca della termodinamica. E' pertanto opportuno definire di che gas si stia parlando.

L'elemento di riferimento che verrà utilizzato sin d'ora è chiamato *particella fluida*, un insieme di molecole di gas contenute in un volume sufficientemente grande da poter effettuare valutazioni statistiche -al fine di poter assegnare la valutazione statistica con *continuità* punto per punto ad ogni singolo elemento costituente- ma al contempo sufficientemente piccolo da poterlo considerare puntiforme.

Matematicamente, la definizione di "puntiforme" implicherebbe un ordine di grandezza del volumetto di riferimento simile alla dimensione del differenziale dx, dy, dz . Fisicamente tali differenziali assumono la misura del libero cammino medio molecolare (o collisionato, cioè distanza media percorsa da una particella fra due urti successivi). Per l'aria,

$$l_{aria} = 6.35 \cdot 10^{-5} \text{ mm} \quad (1.3)$$

INTRODUZIONE

Ponendosi in una terna cartesiana x, y, z e scomponendo le velocità nelle rispettive direzioni,

$$V = u + v + w \quad \begin{cases} u = \bar{u} + u' \\ v = \bar{v} + v' \\ w = \bar{w} + w' \end{cases}$$

Valga la seguente definizione per un valore *mediato d'insieme*: \overline{xx} .

L'energia cinetica media traslazionale globale può essere espressa come

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_k &= \frac{1}{2} m (\overline{uu} + \overline{vv} + \overline{ww}) \\ &= \frac{1}{2} m \left[\overline{(\bar{u} + u') \cdot (\bar{u} + u')} + \overline{(\bar{v} + v') \cdot (\bar{v} + v')} + \overline{(\bar{w} + w') \cdot (\bar{w} + w')} \right] \end{aligned}$$

Facendo i prodotti, ad esempio della prima media d'insieme, si nota che

$$\overline{\bar{u} \bar{u}} = \bar{u} \bar{u} \text{ il moto macroscopico si moltiplica}$$

$$\overline{\bar{u} u'} = \bar{u} \overline{u'} = 0 \text{ poichè } \langle u' \rangle = 0$$

$$\overline{u' u'} \neq 0 \text{ poichè } \langle (u')^2 \rangle \neq 0$$

Allora per la prima media d'insieme e analogamente per le altre,

$$\overline{(\bar{u} + u') \cdot (\bar{u} + u')} = [\overline{\bar{u}\bar{u}} + \overline{v\bar{v}} + \overline{w\bar{w}}] + [\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'}] = \mathcal{E}_{k_{CG}} + \mathcal{E}_t$$

cioè l'energia media cinetica traslazionale globale è somma dell'energia cinetica media d'insieme riferita al baricentro della particella fluida e dell'energia cinetica caotica traslazionale \mathcal{E}_t , parte dell'energia interna e .

Sia la velocità di agitazione termica \mathcal{E}_t

$$\mathcal{E}_t = \frac{1}{2} m V_{at}^2 \rightarrow V_{at} = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_t}{m}} \tag{1.8}$$

La costante di Boltzmann k_b è l'elemento cardine che collega la velocità con la temperatura all'equilibrio termodinamico. Ogni componente della velocità sarà relazionata a tale costante, dunque, per ogni singolo contributo

$$\overline{v'v'} = \frac{k_b T}{m} \quad [m] = [\text{kg molecole}^{-1}] \tag{1.9a}$$

$$k_b = \frac{R}{N_a} = \frac{8314}{6.023 \cdot 10^{26}} \frac{\text{J Mol}^{-1} \text{K}^{-1}}{\text{molecole Mol}^{-1}} = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{molecole K}} \tag{1.9b}$$

Un altro risultato importante della meccanica statistica è il *principio di equipartizione dell'energia*, secondo il quale non esiste una direzione preferenziale per il trasferimento energetico dovuto alle fluttuazioni, sicchè $\overline{u'u'} = \overline{v'v'} = \overline{w'w'}$. Allora è possibile dedurre che anche la relazione di Boltzmann sia equipartita, sicchè

$$\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'} = 3 \frac{k_b T}{m} = V_{at}^2 \tag{1.10}$$

1.3 Gradi di libertà energetici

Gli L gradi di libertà di una molecola esprimono la sua capacità di contenere l'energia. Delle varie tipologie, l'energia definita nella (1.8) è di tipo traslazionale e pertanto i gradi di libertà saranno riferiti al movimento molecolare, che può essere di quattro tipi.

GRADI DI LIBERTÀ ENERGETICI PER TEMPERATURE MODERATE

Per temperature sufficientemente basse, due dei quattro moti sono contemplati: i traslazionali e rotazionali, approssimando le molecole a corpi rigidi; per temperature elevate i moti e le trasmissioni energetiche divengono più caotiche con l'aggiunta dei moti vibrazionali e plasmici.

I gradi di libertà traslazionali sono pari al numero di direzioni principali possibili ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), quindi $L_t = 3$.

I gradi di libertà rotazionali, invece, sono differenti a seconda di quanto la molecola abbia momento d'inerzia sufficientemente basso o elevato da consentire il movimento in una certa direzione. Le molecole monoatomiche, ad esempio, hanno inerzie particolarmente basse e per questo non contribuiscono significativamente alla variazione di energia.

Con la stessa logica, per una molecola pluriatomica il grado di libertà rotazionale sarà pari al numero di direzioni che contribuiscono significativamente all'apporto energetico: queste direzioni corrispondono ai piani di rotazione ad inerzia maggiore.

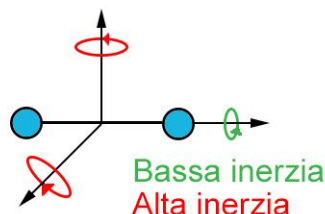


Figure 1.1: Gradi di libertà energetici rotazionali - molecola biatomica

Nel caso biatomico ($n = 2$), i gradi di libertà rotazionali sono dunque $L_r = 2$, così come per le molecole triatomiche. Per numero di atomi maggiori, $L_r = 3$.

n	L_t	L_r	L
1	3	0	3
2	3	2	5
3	3	$2 \div 3$ ^[1]	5
≥ 4	3	3	6

Table 1.1: Gradi di libertà energetici per basse temperature

^[1] $L_r = 2$ se la molecola triatomica è allineata e, dunque, si comporta come una biatomica piana. Se la molecola occupa lo spazio tridimensionalmente, come ad esempio una molecola di H_2O , allora $L_r = 3$.

INTRODUZIONE

Raccogliendo queste informazioni in formule

$$c = \frac{dq}{dT} = \begin{cases} c_v = \left(\frac{dq}{dt}\right)_v = \left(\frac{de}{dT}\right) = \frac{d}{dT} \left(\frac{L}{2} \frac{R}{M} T\right) & c_v = \frac{L}{2} \frac{R}{M} \\ c_p = \left(\frac{dq}{dt}\right)_p = \left(\frac{dh}{dT}\right) = \frac{d}{dT} \left(\frac{L+2}{2} \frac{R}{M} T\right) & c_p = \frac{L+2}{2} \frac{R}{M} \end{cases} \quad (1.19)$$

Dove i calori specifici hanno le dimensioni $[c] = [\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}]$. I calori specifici molari C , invece, sono riferiti alla grandemole e dunque fanno riferimento all'energia ed entalpia interna totale E e H nonchè al calore per mole Q . Dunque

$$C = \frac{dQ}{dT} = \begin{cases} C_v = \left(\frac{dQ}{dt}\right)_v = \left(\frac{dE}{dT}\right) = \frac{d}{dT} \left(\frac{L}{2} RT\right) & C_v = \frac{L}{2} R \\ C_p = \left(\frac{dQ}{dt}\right)_p = \left(\frac{dH}{dT}\right) = \frac{d}{dT} \left(\frac{L+2}{2} RT\right) & C_p = \frac{L+2}{2} R \end{cases} \quad (1.20)$$

Infine, sia il rapporto dei valori specifici γ , nel caso in cui il calore specifico sia a pressione e volume costante, pari a

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{C_p}{C_v} = \frac{L+2}{L} \quad (1.21)$$

1.4 Miscela di gas

Sia presente una miscela di i gas con N_i molecole e massa m_i . Si vuole comprendere come caratterizzare la miscela: una via è quella di partizionare le molecole totali $N_t = \sum N_i$ con le concentrazioni molari χ_i di ogni componente; un'altra via consiste nel considerare la percentuale in massa C_i di ogni singolo componente rispetto alla massa totale m_t .

Ricordando la legge dei gas perfetti $pV = NRT$ e considerando che tutte le componenti del gas si trovano alla stessa temperatura T , si ha che

$$\chi_i = \frac{N_i}{N_t} = \frac{V_i}{V_t} = \frac{p_i}{p_t} \qquad C_i = \frac{m_i}{m_t}$$

Inoltre, conoscendo la massa molare complessiva della miscela M_{misc} ,

$$\chi_i = \frac{C_i/M_i}{\sum (C_i/M_i)} \qquad C_i = \frac{\chi_i M_i}{\sum (\chi_i M_i)}$$

Possono essere estrapolate formulazioni inverse per ritrovare la massa molare i calori specifici a volume e pressione costante della miscela, noti quelli dei singoli componenti:

$$M_{misc} = \sum (\chi_i M_i) = \frac{1}{\sum (C_i/M_i)} \quad (1.24a)$$

$$c_{v_{misc}} = \sum \chi_i c_{v_i} \quad (1.24b)$$

$$c_{p_{misc}} = \sum \chi_i c_{p_i} = c_{v_{misc}} + R \quad (1.24c)$$

INTRODUZIONE

LEGGE DI EULERO^[3]

$$dp = -\rho V dV \tag{1.28}$$

Ad un aumento di velocità corrisponde una diminuzione di pressione e viceversa. Si suppone che la trasformazione sia isentropica: si vuole ricavare, dalla (1.28), una formula che metta in relazione le variazioni percentuali di densità $\frac{d\rho}{\rho}$ con le variazioni percentuali di velocità $\frac{dV}{V}$ o, analogamente, il rapporto delle forze d'inerzia con quelle di pressione, attraverso il numero di Mach.

$$\begin{aligned} dp &= -\rho V dV \\ \frac{1}{d\rho} dp &= -\frac{1}{d\rho} \rho V dV & \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S &= a^2 \\ a^2 &= -\frac{\rho}{d\rho} V dV \\ \frac{1}{V^2} a^2 &= -\frac{1}{V^2} \frac{\rho}{d\rho} V dV \\ \frac{1}{M^2} &= -\frac{\rho}{d\rho} \frac{dV}{V} & \implies \frac{d\rho}{\rho} &= -M^2 \frac{dV}{V} \implies \int \frac{d\rho}{\rho} = - \int M^2 \frac{dV}{V} \\ & & \frac{\Delta \rho}{\rho} &= -M^2 \frac{\Delta V}{V} \end{aligned}$$

Supponendo di avere un $\Delta V = V_2 - V_1 = 1$ (il fluido accelera) e quindi di avere una variazione percentuale $\frac{\Delta V}{V}$ pari al 100%, si nota che

$$\begin{aligned} M = 0.1 &\implies M^2 = 0.01 \implies \frac{\Delta \rho}{\rho} \approx 1\%, \text{ fluido incompressibile} \\ M = 0.3 &\implies M^2 = 0.09 \implies \frac{\Delta \rho}{\rho} \approx 3\%, \text{ variazioni sensibili di densità} \\ M = 1 &\implies M^2 = 1 \implies \frac{\Delta \rho}{\rho} \approx 100\%, \text{ flusso transonico} \end{aligned}$$

1.6 Proprietà di trasporto dei fluidi

Una particella presa come riferimento è in continua collisione con le altre particelle costituenti il fluido: essa è caratterizzata da una massa, da una quantità di moto e da un'energia, ed il trasporto di queste quantità contribuisce a caratterizzare il fluido stesso.

Un flusso è definito come valore di una certa grandezza riferita alla superficie ed al tempo. Esistono flussi

- di massa \implies diffusione di massa $f(D)$, coefficiente di diffusione
- di QDM \implies sforzi viscosi $f(\mu)$, viscosità dinamica
- di energia \implies flussi di calore $f(\lambda)$, conducibilità termica

L'insieme di queste proprietà contribuisce a creare le proprietà di trasporto del fluido.

^[3]Si noti che, per $\rho = \text{cost}$, integrando si ottiene la (1.27a)

INTRODUZIONE

dell'agitazione termica con velocità V_{at} , e quindi ci sarà un flusso di quantità di moto (verde) che si sposta dai filetti più alti ai più bassi, e viceversa.

Innanzitutto, il flusso di trasporto concorde con y sarà positivo, mentre l'opposto sarà negativo. Prendendo in considerazione tali trasporti di quantità di moto, l'intero sforzo riferito a tutte le particelle n sarà

$$\tau_- = -m(\bar{u} + d\bar{u}) V_{at} n \tag{1.31a}$$

$$\tau_+ = m(\bar{u}) V_{at} n \tag{1.31b}$$

La differenza fra le (1.31a, 1.31b) rappresenta il flusso netto di quantità di moto spostato su un tratto dy in presenza del gradiente di velocità. Dato che $m \cdot n = \rho$, si riscrive la formulazione macroscopica dello sforzo viscoso

$$\tau = -\rho dV V_{at} \tag{1.32}$$

In primis, la (1.32) è una quantità finita anche se compare un differenziale, dato che lo sforzo scambiato è finito e vale esattamente $\rho \overline{u'v'}$ (1.30a). Inoltre, $d\bar{u} = \frac{d\bar{u}}{dy} dy$ e, essendo $dy \approx l$, unendo unire la formulazione microscopica (1.30a) con la macroscopica (1.32), si ottiene

$$\tau = \rho \overline{u'v'} = -m \left(\frac{d\bar{u}}{dy} l \right) n V_{at} = -\rho \left(\frac{d\bar{u}}{dy} l \right) V_{at} = -\rho l V_{at} \frac{d\bar{u}}{dy} \tag{1.33}$$

Il prodotto $\rho l V_{at}$ è detto viscosità dinamica μ . Empiricamente, Maxwell dimostrò, con la teoria cinetica dei gas, che $\mu = \frac{1}{2} \rho l V_{at}$.

LO STRATO LIMITE

Per effetto degli sforzi viscosi nasce lo strato limite: la condizione di aderenza a parete, per un flusso viscoso, impone che le particelle più vicine, ad esempio, ad un'ala, siano aderenti ed istantaneamente ferme, mentre più ci si allontana dal profilo più esse accelerano. I flussi che rispettano questa condizione sono detti Newtoniani e possono generare sforzi viscosi.

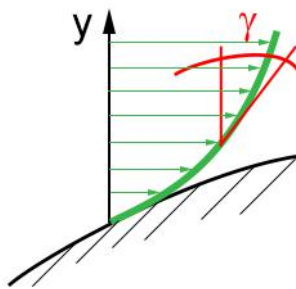


Figure 1.5: Strato limite

Poichè $\frac{du}{dy} = tg(\gamma)$, e $\tau \propto -\frac{du}{dy}$, allora lo sforzo viscoso cresce al diminuire della distanza dalla parete, cioè all'aumentare di γ .

INTRODUZIONE

La legge di Fourier, invece, è posta come $q = -\lambda \frac{dT}{dy}$ e dunque $\lambda = \rho V_{at} l c_v$.
 Richiamando la viscosità dinamica $\mu = \rho V_{at} l$,

$$\lambda = \mu c_v \tag{1.37}$$

μ e λ sono correlati perchè il meccanismo che causa il trasporto della quantità di moto e dell'energia è comunemente basato su collisioni molecolari e sulla presenza di gradienti (rispettivamente di velocità e di temperatura).

In un generico fenomeno aerodinamico coesistono gli strati limiti cinematico e termico. Nel caso bidimensionale, entrambi variano lungo y ed entrambi hanno uno spessore definito. Nel caso cinematico, si intende terminato lo strato limite alla altezza δ tale per cui la velocità è giunta al 99% della velocità indisturbata; nel caso termico, lo strato limite termina ad una altezza δ_t .

NUMERI ADIMENSIONALI ASSOCIATI AI FLUSSI VISCOSI E TERMICI

- Campo cinematico: numero di Reynolds $Re = \frac{VL\rho}{\mu}$.
 Serve a quantificare cosa prevalga fra sforzi viscosi e forze d'inerzia nel moto di un fluido. Per Re bassi gli sforzi viscosi sono molto più evidenti delle forze di inerzia a numeratore, viceversa per Re alti.
- Campo termico: numero di Prandtl $Pr = \mu \frac{c_p}{\lambda} = \frac{\mu}{\rho} \frac{1}{\lambda/c_p\rho} = \frac{\nu}{k}$
 Il Pr mette a confronto come diffonde la quantità di moto rispetto alla temperatura, tramite il rapporto fra viscosità cinematica $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ e coefficiente di diffusività termica $k = \frac{\lambda}{c_p\rho}$.
 Per $Pr \approx 1$, $\nu \approx k$ e dunque $\delta \approx \delta_t$.
 Per $Pr > 1$, $k < \nu$; per $Pr < 1$ prevalgono gli effetti della viscosità.
 Generalmente per i gas $Pr < 1$ ($Pr_{aria} = 0.71$), quindi $\delta < \delta_t$. La formula empirica di Eucken lega il Pr con i gradi di libertà L

$$Pr = \frac{2L + 4}{2L + 9} = \frac{4\gamma}{9\gamma - 5} \tag{1.38}$$

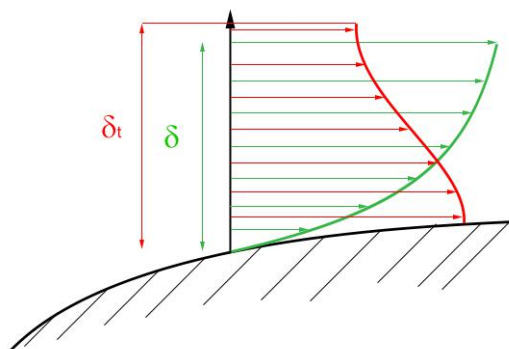


Figure 1.7: Strato limite cinematico e termico

1.8 Condizioni di serbatoio e di arresto

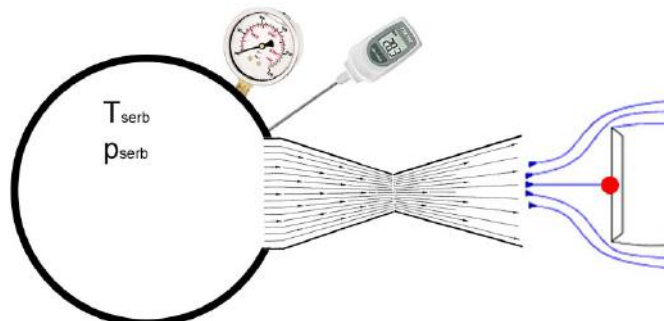


Figure 1.9: Punto di arresto di una corrente fluida

Sia presente un condotto che metta in comunicazione un serbatoio con l'ambiente esterno. Sia inoltre posto al di fuori dell'ugello un corpo esterno. All'interno del serbatoio $V = 0$ ed esistono T_{serb} e p_{serb} ; passando per l'ugello, $V \neq 0$ ed esiste uno ed un solo punto sul corpo esterno dove la corrente (sulla mezzeria) si arresta nuovamente, chiamato *punto di arresto*^[5]. Valga la seguente condizione

Una grandezza totale si mantiene costante lungo una linea di corrente.

Se ne deduce che, se $H = h + \frac{V^2}{2} = c_p T_o$ si mantiene costante lungo la linea di corrente, nel punto di arresto, così come nel serbatoio, essendo $V = 0$, l'entalpia statica h è l'unica a contribuire a H e, pertanto, è maggiore che nel condotto. Inoltre, chiamando T_A e p_A la temperatura e la pressione nel punto di arresto,

$$\begin{cases} T_o = T_{serb} = T_A \\ p_o = p_{serb} = p_A \end{cases} \quad (1.42)$$

In un qualsiasi altro punto (ad esempio dello stato limite) del corpo investito dalla corrente, per la condizione di aderenza la corrente è certamente ferma ma sono presenti fenomeni dissipativi per la presenza di gradienti, e quindi il fenomeno non è conservativo.

In ultimo, se H è costante per qualsiasi linea di corrente, il campo di moto è detto omoentalpico. La condizione di omoentalpia è più generica dell'insoentalpia, che potrebbe riguardare una singola linea di corrente in un generico campo.

^[5]Su un profilo incidente, ad esempio, è importante ricordare che al variare dell'incidenza α varia la posizione del punto d'arresto. Tale punto è unico ed è collocato ove la corrente deviata incide perpendicolarmente sulla superficie; esso, inoltre, delimita la porzione di spazio ove il flusso lambisce il dorso o il ventre.

2. Leggi di conservazione

Sia G una quantità in cui si sono introdotti i flussi di una certa grandezza. Sia, inoltre, $f = \frac{G}{\text{Volume}}$ [grandezza $\cdot \text{m}^{-3}$] la grandezza da cui ricavare i flussi.

Allora il flusso di G attraverso una superficie nell'unità di tempo [$G \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$] è $f \cdot (\vec{V} \cdot \vec{n})$, dove \vec{n} è il versore uscente dalla superficie, \vec{V} è il vettore del flusso e ϑ è l'angolo sotteso fra \vec{n} e \vec{V} tale per cui $|\vec{V} \cdot \vec{n}| = V \cos \vartheta = V_N$; il flusso è considerato positivo se è uscente dalla superficie.

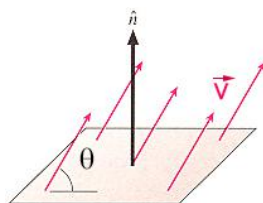


Figure 2.1: Flusso di un vettore attraverso una superficie

Nello studio dei flussi si può far riferimento a due formulazioni.

FORMULAZIONE INTEGRALE

Si prende un volume finito di controllo di forma qualsiasi e si studia l'andamento delle particelle che lo attraversano. La formulazione è detta integrale in quanto tiene conto dell'insieme di particelle, e dunque dell'andamento globale delle loro proprietà.

FORMULAZIONE DIFFERENZIALE

Si prende un volume infinitesimo di controllo e si osserva la sua singola evoluzione. La formulazione è detta differenziale perchè vengono usati i differenziali, cioè quantità infinitesime, per risolvere le equazioni punto per punto.

A loro volta, le due formulazioni possono essere scritte da un punto di vista euleriano o lagrangiano a seconda che si osservi, rispettivamente, l'andamento del fenomeno in un volume fisso nello spazio e permeabile oppure seguendo l'andamento di una singola particella. Entrambe le analisi possono essere fatte rispetto ad un volume finito o infinitesimo.

In ultimo, nel punto di vista lagrangiano, si osservano le variazioni sostanziali della particella $\frac{D}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}}_{x, y, z = \text{cost}} + \underbrace{u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}}_{t = \text{cost}} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla$ lungo il suo percorso nel tempo e nello spazio.

CAPITOLO 2 - LEGGI DI CONSERVAZIONE

2.1.3 Equazione di conservazione dell'energia

$$\left\{ \begin{aligned} f &= \frac{G}{\text{Volume}} = \frac{m \left(e + \frac{V^2}{2} \right)}{\mathcal{V}} = \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \quad [\text{J m}^{-3}], \text{ energia di } m [\text{J kg}^{-1}] \\ \text{Flusso di energia} &\implies \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) (\vec{V} \cdot \vec{n}) \end{aligned} \right. \quad (2.7)$$

In questo caso entrano in gioco tutte le forme energetiche come il calore, il lavoro, l'energia potenziale, ecc... L'energia totale è somma dell'energia interna più il flusso netto fra energia acquisita e spesa $[\text{J s}^{-1}]$

$$\begin{aligned} \sum \text{apporti energetici} &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) d\mathcal{V} \\ \text{flusso} &= \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) (\vec{V} \cdot \vec{n}) \\ \sum \text{flussi} &= -\int_S \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS \end{aligned} \quad (2.8)$$

Gli apporti energetici derivano dai seguenti contributi

$$\text{Calore } \dot{q} [\text{J kg}^{-1} \text{ s}^{-1}] \left\{ \begin{aligned} \dot{q} &\implies \begin{cases} \text{immissione radiativa} \\ \text{emissione radiativa} \\ \text{combustione chimica} \\ \text{effetto Joule} \end{cases} \implies \int_{\mathcal{V}} \dot{q} \rho d\mathcal{V} \\ \mathcal{Q}_{vis} &\implies \text{legato agli effetti viscosi, ora trascurato} \end{aligned} \right. \quad (2.9)$$

$$\text{Lavoro } \mathcal{L} \left\{ \begin{aligned} \text{FORZE} &\begin{cases} \text{di pressione} \\ \text{di tensione} \end{cases} \quad \vec{F}_p \cdot \vec{V} \implies (\vec{p} \cdot \vec{n}) dS \wedge \vec{V} \implies -p (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS \\ \text{FORZE DI MASSA} &\vec{f} [\text{N kg}^{-1}] \end{aligned} \right. \quad (2.10)$$

Unendo tutti i contributi si ottiene

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) d\mathcal{V} = \\ &= \underbrace{-\int_S \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \vec{V} \cdot \vec{n} dS}_{\text{flusso di energia}} + \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \rho \dot{q} d\mathcal{V}}_{\text{calore}} - \underbrace{\int_S p (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS}_{\text{forze di pressione}} + \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \rho (\vec{f} \cdot \vec{V}) d\mathcal{V}}_{\text{forze di massa}} + \mathcal{Q}_{vis} \end{aligned}$$

CAPITOLO 2 - LEGGI DI CONSERVAZIONE

2.2.2 Equazione di conservazione della quantità di moto

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{V} dV &= - \int_S \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS - \int_S (\vec{p} \cdot \vec{n}) dS + \int_V \rho \vec{f} dV \\ \int_S \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS &\implies \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{V} \cdot \vec{V}) dV \\ \int_S (p \cdot \vec{n}) dS &\implies \int_V \nabla p dV \end{aligned} \tag{2.17}$$

Esplicitando la prima equazione, ad esempio, nella direzione x

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} dV + \int_S \rho u (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS &= - \int_V \frac{\partial p}{\partial x} dV + \int_V \rho \cdot \vec{f}_x dV \\ \int_V \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \vec{V}) + \frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho f_x \right] dV &= 0 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Ricordando che $\nabla \cdot (\rho u \vec{V}) = \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u w)}{\partial z}$, per le tre direzioni

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u w)}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} - \rho f_x &= 0 \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v w)}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} - \rho f_y &= 0 \\ \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w w)}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} - \rho f_z &= 0 \end{aligned} \right. \tag{2.19}$$

PUNTO DI VISTA EULERIANO

Prendendo in esempio la direzione x

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x \tag{2.20}$$

Se il fluido è in quiete il primo membro è nullo. In particolare, nella direzione y, si ritrova l'equazione di Stevino $-\frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y = 0 \implies \Delta p = \rho g \Delta y$.

PUNTO DI VISTA LAGRANGIANO

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z \end{aligned} \right\} \boxed{\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{f}} \tag{2.21}$$

In sostanza la forma Lagrangiana segue il secondo principio della dinamica, difatti ha le dimensioni di [N m³]. In altro modo, la forma lagrangiana esplicita l'accelerazione locale, mentre la formulazione euleriana quella convettiva.

CAPITOLO 2 - LEGGI DI CONSERVAZIONE

2.2.4 Formulazioni alternative dell'energia per $H = \text{cost}$

$H = \text{cost} \implies c_p T + \frac{V^2}{2} = c_p T_o$ e (2.25). Prendendo quest'ultima

$$c_p T \frac{\gamma R/M}{\gamma R/M} + \frac{V^2}{2} = c_p T_o \frac{\gamma R/M}{\gamma R/M}$$

$$\underbrace{\frac{c_p}{\gamma R/M}}_{\frac{1}{\gamma-1}} \underbrace{T \frac{\gamma R}{M}}_{a^2} + \frac{V^2}{2} = \underbrace{\frac{c_p}{\gamma R/M}}_{\frac{1}{\gamma-1}} \underbrace{T_o \frac{\gamma R}{M}}_{a_o^2} \quad (2.26)$$

$$\boxed{\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{V^2}{2} = \frac{a_o^2}{\gamma-1}} \quad (2.27)$$

VELOCITÀ LIMITE ($T \rightarrow 0 \implies a \rightarrow 0$)

$$\cancel{\frac{a^2}{\gamma-1}} + \underbrace{\frac{V^2}{2}}_{V_{lim}} = \frac{a_o^2}{\gamma-1} \implies \boxed{V_{lim} = \sqrt{\frac{2a_o^2}{\gamma-1}}} \implies \boxed{M_{lim} = \frac{V_{lim}}{a} = \infty} \quad (2.28)$$

CONDIZIONI CRITICHE - VELOCITÀ LOCALE DEL SUONO - LOCALMENTE $M = 1$

$$V = a^* = \sqrt{\gamma \frac{R}{M} T^*}$$

$$\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{V^2}{2} = \frac{a_o^2}{\gamma-1} = \frac{a^{*2}}{\gamma-1} + \frac{a^{*2}}{2} = \frac{a^{*2}}{2} \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \quad (2.29)$$

RAPPORTI NOTI RIFERITI ALL'ARIA

$$\frac{V_{lim}}{a_o} = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} \approx 2.23607 \quad \frac{V_{lim}}{a^*} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \approx 2.44949$$

$$\frac{a^*}{a_o} = \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}} \approx 0.91287 \quad \frac{T^*}{T_o} = \frac{2}{\gamma+1} \approx 0.8333 \quad (2.30)$$

Per il legame fra M e M^* , per $M \rightarrow \infty$, si preferisce fare riferimento alle condizioni critiche. Dall'eq. (2.29)

$$\frac{1}{V^2} \frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{V^2}{2} = \frac{1}{V^2} \frac{a^{*2}}{2} \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \implies \frac{1}{M^2(\gamma-1)} + \frac{1}{2} = \frac{\gamma+1}{2M^{*2}(\gamma-1)}$$

$$\boxed{M^2 = \frac{2}{\frac{\gamma+1}{M^{*2}} - (\gamma-1)}} \quad \boxed{M^{*2} = \frac{M^2(\gamma+1)}{2 + M^2(\gamma-1)}} \quad (2.31)$$

3. Flussi monodimensionali

3.1 Teorema di Crocco

Si consideri una corrente fluida a $M_\infty \geq 1$ che impatta su un ostacolo: se la deflessione del profilo è sufficientemente grande, viene a generarsi un'onda d'urto curva e staccata dal corpo

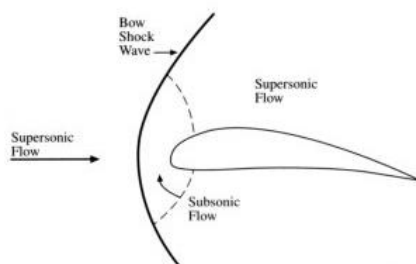


Figure 3.1: Onda d'urto per un flusso supersonico

Il teorema di Crocco mette insieme la cinematica e la termodinamica dell'evento. Unendo il primo ed il secondo principio, e sostituendo i gradienti agli infinitesimi per esprimere la variazione della specifica grandezza nelle tre direzioni,

$$Tds = dh - \frac{dp}{\rho} \implies T\nabla s = \nabla h - \frac{\nabla p}{\rho} \quad (3.1)$$

Dalla (2.21), nel caso di un flusso inviscido e con $\rho \vec{f} = 0$, si ha

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} \implies T\nabla s = \nabla h + \frac{D\vec{V}}{Dt} = \nabla h + \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) \quad (3.2)$$

Dalla (1.1) trovo che $\nabla h = \nabla H - \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right)$. Il teorema di Crocco assume dunque la forma

$$\underbrace{\left[\nabla H - \underbrace{\nabla \left(\frac{V^2}{2} \right)}_A \right] + \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \underbrace{\vec{V} \cdot \nabla \vec{V}}_B \right]}_{A \cup B \rightarrow \text{Identità vettoriale}} = \boxed{T\nabla s = \nabla H - \vec{V} \wedge \nabla \wedge \vec{V} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}} \quad (3.3)$$

CAPITOLO 3 - FLUSSI MONODIMENSIONALI

3.2 Equazione della velocità potenziale

Questa equazione consente di sintetizzare l'equazione della continuità, della quantità di moto e dell'energia in un'unica formulazione, valida sia in campo compressibile che incompressibile.

Servono delle ipotesi preliminari

- Il flusso considerato è preso al di fuori dello strato limite $\implies \mu = 0, \tau = 0$
- Flusso irrotazionale $\nabla \wedge \vec{V} = 0$
- Flusso stazionario $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$
- Flusso isentropico, cioè sia adiabatico che reversibile
- In questa analisi preliminare, si suppongono le forze di massa $\vec{f} = 0$

L'equazione di Eulero esprime il moto della particella seguita da un osservatore che è posto su di essa, dal punto di vista Lagrangiano. Dalla (2.21)

$$\boxed{\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) = -\nabla p + \vec{f}}$$

$$\rho (\vec{V} \cdot \nabla \vec{V}) = -\nabla p$$

$$\rho \left[\nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) - \underbrace{\vec{V} \wedge \nabla \wedge \vec{V}}_{\nabla \wedge \vec{V} = 0} \right] = -\nabla p \tag{3.7}$$

$$\rho \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) = -\nabla p$$

Forma differenziale $\rho d \left(\frac{V^2}{2} \right) = -dp \implies \boxed{dp = -\rho V dV}$

In generale, preso un generico vettore, se il suo rotore è nullo allora il vettore è pari al gradiente di un generico scalare. Avendo supposto il flusso irrotazionale e chiamando lo scalare ϕ velocità potenziale,

$$\nabla \wedge \vec{V} = 0 \implies \vec{V} = \nabla \phi$$

$$\begin{cases} \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k} \\ \vec{V} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k} \end{cases} \tag{3.8}$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \phi_x \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \phi_y \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \phi_z$$

CAPITOLO 3 - FLUSSI MONODIMENSIONALI

3.3 Equazioni per un flusso unidimensionale

Sono definibili flussi unidimensionali i campi di moto in cui le variabili dipendono da un'unica coordinata. Supponendo questa coordinata quella lungo l'asse x

- Grandezze $f(x) \implies u = u(x), \rho = \rho(x), p = p(x), \dots$
- Velocità $\vec{V} = u \vec{i}$ con $v = w = 0$

Esista un condotto in cui passa una corrente. Il campo 1 a monte e 2 a valle sono entrambi uniformi e i valori ad essi associati sono costanti.

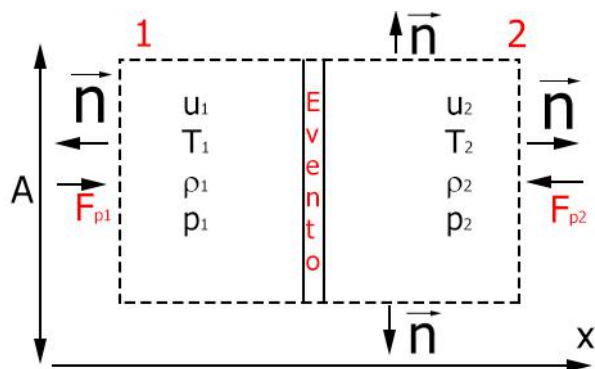


Figure 3.2: Flusso in un condotto: urto, fornitura di calore, etc... al centro

Inoltre, supponendo che le forze viscoso siano nulle, $\tau = 0$, il flusso sia stazionario $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$ e le forze di massa trascurabili, $\vec{f} = 0$, si riscrivono le equazioni di conservazione della massa (continuità), QDM ed energia in forma integrale con volume di controllo fisso come

EQUAZIONE DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_S \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = 0$$

$$\int_S \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \rho_1 (-u_1) A_1 + \rho_2 (u_2) A_2 = 0 \tag{3.10}$$

$$\rho_2 u_2 = \rho_1 u_1 \implies \boxed{\rho u = \text{cost}}$$

EQUAZIONE DI CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{V} dV = - \int_S \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS - \int_S (p \cdot \vec{n}) dS + \int_V \rho \vec{f} dV$$

$$\int_S \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = - \int_S (p \cdot \vec{n}) dS \tag{3.11}$$

$$\int_S \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = - \int_{A_1} p \vec{n} dS - \int_{A_2} p \vec{n} dS$$

$$\rho_1 u_1 (-u_1) A_1 + \rho_2 u_2 (-u_2) A_2 = - (-p_1 A_1) - p_2 A_2 \implies \boxed{p + \rho u^2 = \text{cost}}$$

3.4 Propagazione dei disturbi

3.4.1 Piccole perturbazioni

Si consideri la propagazione di un'onda sonora prodotta da una sorgente puntiforme. Il meccanismo di propagazione del suono è la propagazione di un urto tramite la collisione molecolare, cioè la perturbazione del campo di pressioni nell'intorno dei piccoli urti.

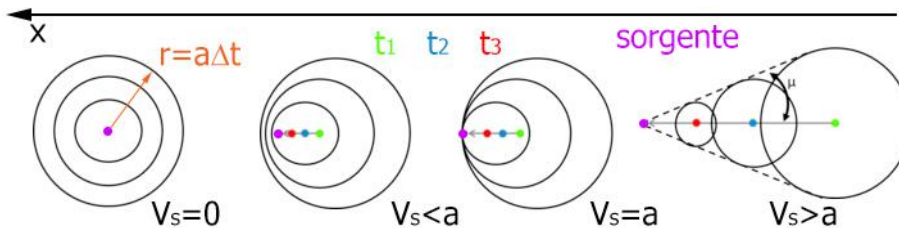


Figure 3.3: Fronte d'onda con sorgente a diverse velocità V_s

Per ora si suppone che il fronte d'onda, investendo un generico punto P, provochi degli effetti trascurabili a quest'ultimo: il processo è adiabatico e reversibile, per cui la propagazione è isentropica.

$V_s < a$

La sorgente si sposta lungo x della quantità $\Delta x = V_s \Delta t$ mentre il fronte d'onda avanza alla velocità del suono e apre la perturbazione sferica di un raggio pari a $r = a \Delta t > \Delta x$. Dunque la sorgente è sempre all'interno della propagazione.

$V_s = a$

$$\left. \begin{matrix} r = a \Delta t \\ \Delta x = V_s \Delta t \end{matrix} \right\} \xrightarrow{V_s = a} r = \Delta x \tag{3.14}$$

$V_s > a$

La sorgente si muove a velocità maggiore della propagazione, per cui precede sempre il fronte d'onda. Si crea un cono generato dall'involuppo delle infinite sfere di propagazione, chiamato cono di Mach, avente semiapertura μ .

$$\left. \begin{matrix} r = a \Delta t \\ \Delta x = V_s \Delta t \end{matrix} \right\} \implies \frac{r}{\Delta x} = \frac{a}{V_s} = \frac{1}{M} = \sin \mu \implies \mu = \sin^{-1} \left(\frac{1}{M} \right) \tag{3.15}$$

Confrontando l'energia cinetica macroscopica $\frac{V^2}{2}$ con l'energia interna e si trova un legame con il numero di Mach

$$\frac{V^2}{2} = \frac{V^2}{2} = \frac{V^2}{2} \frac{\gamma}{\left(\frac{1}{\gamma-1} \frac{R}{M} T \right)} = \frac{\gamma \frac{V^2}{2}}{\left(\frac{1}{\gamma-1} \frac{\gamma R T}{M} \right)} = \frac{V^2}{a^2} \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} = \frac{M^2 \gamma(\gamma-1)}{2} \tag{3.16}$$

Per l'aria $\gamma = 1.4 \implies \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} = 0.28$. Per $M = 0.2$, $\frac{V^2}{e} = 0.0112$, l'energia cinetica è l'1% dell'energia interna. Aumentando la velocità si passa, ad esempio, per $M = 1$, al 28% dell'energia interna; per $M = 2$, 112%; per $M = 4$, 448%.

CAPITOLO 3 - FLUSSI MONODIMENSIONALI

3.5 Propagazione delle onde d'urto

Sia presente un condotto con un pistone ermetico all'interno. Le condizioni del fluido a monte ed a valle del pistone sono identiche e si suppone che le trasformazioni che avvengono siano isentropiche. Ad un certo istante, venga dato un impulso da parte del pistone tale da smuovere il fluido: il gas a valle riceve l'impulso sotto forma di quantità di moto e genera un'onda elementare compressa che si propaga con la velocità del suono.

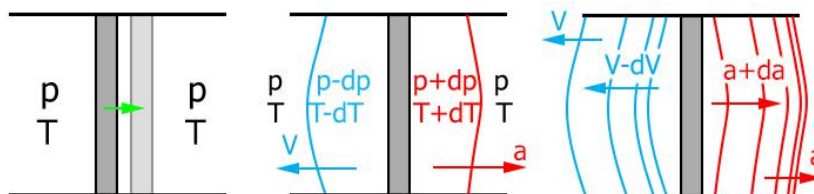


Figure 3.5: Onde di compressione ed espansione

Questo “segnale” di propagazione divide l'area in due zone: tutto ciò che è stato già investito da quest'onda di compressione ha un aumento infinitesimo di pressione e temperatura, mentre ciò che è oltre l'onda è in quiete.

A monte del pistone, invece, vi è all'improvviso un “vuoto”: il gas trasmette un segnale a ritroso dove è stata sottratta parte dell'energia e si è perso un infinitesimo di pressione e temperatura per l'espansione, per cui la velocità di propagazione di questa onda di espansione sarà inferiore alla velocità di propagazione dell'onda di compressione, sempre secondo la relazione $a = \sqrt{\gamma \frac{R}{M} T}$.

Ogni impulso del pistone successivo vedrà l'onda di compressione avanzare più velocemente della precedente, in quanto il gas che incontra sarà già più caldo, così come l'onda di espansione sarà sempre più lenta: ne consegue che le onde di compressione si addensano^[2] creando un urto, frutto proprio di queste successive compattazioni, perpendicolare alla direzione di avanzamento e avente velocità di propagazione sonica, mentre le onde di espansioni si allontanano sempre maggiormente l'una dall'altra.

Prendendo in considerazione un profilo alare investito da una corrente sonica, l'onda d'urto si crea per una riflessione delle particelle che impattano sulla superficie, non riescono ad aderire per l'eccessiva velocità e vanno ad incontrare altre particelle tornando indietro.

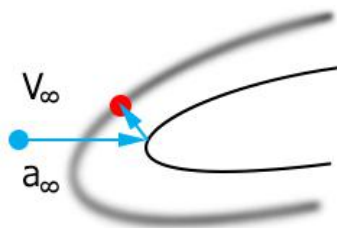


Figure 3.6: Fenomeno di creazione dell'onda d'urto

^[2]La precedente non può superare la successiva in quanto incontrerebbe un fluido più freddo

CAPITOLO 3 - FLUSSI MONODIMENSIONALI

3.6 Urto retto

Rifacendosi alla Fig. (3.4), l'urto retto è quell'urto che ha il piano del fronte d'onda perpendicolare rispetto alla direzione d'avanzamento del gas. Le condizioni a monte sono note e si vogliono trovare le condizioni del gas dopo l'urto.

Si suppone che sia il profilo alare a muoversi nell'aria e che l'onda sia stazionaria (in realtà l'onda viene trascinata dall'ala). Inoltre, si suppone che l'urto sia adiabatico (ipotesi realistica), sicchè nel fenomeno $H = \text{cost.}$

EQUAZIONE DELL'ENERGIA

$$\begin{aligned}
 H_1 + \overset{0}{\cancel{p}} &= H_2 \implies c_p T_{o1} = c_p T_{o2} \implies T_{o1} = T_{o2} \\
 h_1 + \frac{u_1^2}{2} &= h_2 + \frac{u_2^2}{2}
 \end{aligned}
 \tag{3.20}$$

La temperatura totale T_o è l'unica grandezza che si mantiene costante fra monte e valle dell'urto. Quindi le perdite nascono negli altri parametri, come nella pressione o con la creazione della resistenza d'onda.

CONSERVAZIONE DELLA QDM RISPETTO ALLA CONTINUITÀ - CONDIZIONI CRITICHE

$$\begin{aligned}
 \frac{p_1 + \rho_1 u_1^2}{\rho_1 u_1} &= \frac{p_2 + \rho_2 u_2^2}{\rho_2 u_2} \\
 \frac{p_1}{\rho_1 u_1} + u_1 &= \frac{p_2}{\rho_2 u_2} + u_2 \\
 u_1 - u_2 &= \frac{p_2}{\rho_2 u_2} - \frac{p_1}{\rho_1 u_1} & a^2 &= \gamma \frac{p}{\rho} \\
 u_1 - u_2 &= \frac{a_2^2}{\gamma u_2} - \frac{a_1^2}{\gamma u_1} & \text{eq. (2.29)} & \frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} = \frac{a^{*2}}{2} \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right) \\
 & & & \implies a^2 = \frac{\gamma + 1}{2} a^{*2} - \frac{\gamma - 1}{2} u^2 \\
 u_1 - u_2 &= \frac{1}{\gamma u_2} \left(\frac{\gamma + 1}{2} a^{*2} - \frac{\gamma - 1}{2} u_2^2 \right) - \frac{1}{\gamma u_1} \left(\frac{\gamma + 1}{2} a^{*2} - \frac{\gamma - 1}{2} u_1^2 \right) \\
 &= a^{*2} \left(\frac{\gamma + 1}{2\gamma u_2} - \frac{\gamma + 1}{2\gamma u_1} \right) + u_1 \frac{\gamma - 1}{2\gamma} - u_2 \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \\
 &= a^{*2} \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \left(\frac{u_1 - u_2}{u_1 u_2} \right) + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} (u_1 - u_2) \\
 1 &= a^{*2} \frac{\gamma + 1}{2\gamma u_1 u_2} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \implies (\gamma + 1) 2\gamma u_1 u_2 = a^{*2} (\gamma + 1) 2\gamma \\
 & \boxed{a^{*2} = u_1 u_2} & \text{Relazione di Prandtl (3.21)}
 \end{aligned}$$

Dalla (3.21) si ricava un importante risultato. Nel regime subsonico, $u_1 < a^*$: per essere valida la (3.21), u_2 dovrebbe essere, a seguito dell'urto, maggiore di a^* ; ciò implicherebbe un'espansione (mentre l'urto è una compressione) con, tra l'altro, una riduzione di entropia $s_2 < s_1$. Ovviamente tale risultato ha significato puramente matematico dato che tale situazione non regge fisicamente.

Nel regime supersonico, invece, $u_1 > a^*$ e, a valle dell'urto, si è persa velocità con $u_2 < a^*$. Questa soluzione è fisicamente accettabile ed avviene realmente, con $s_2 > s_1$: l'urto si genera solo con campo di moto supersonico.

CAPITOLO 3 - FLUSSI MONODIMENSIONALI

3.7 Relazioni di Rankine-Hugoniot

Moltiplicando ambo i membri di $u_1 - u_2 = \frac{p_1}{\rho_1 u_1} - \frac{p_2}{\rho_2 u_2}$ per $u_2 + u_1$.

$$\begin{aligned}
 (u_1 + u_2)(u_1 - u_2) &= (u_1 + u_2) \left(\frac{p_2}{\rho_2 u_2} - \frac{p_1}{\rho_1 u_1} \right) \\
 u_1^2 - u_2^2 &= \frac{p_2 u_1}{\rho_2 u_2} - \frac{p_1 u_1}{\rho_1 u_1} + \frac{p_2 u_2}{\rho_2 u_2} - \frac{p_1 u_2}{\rho_1 u_1} \\
 &= \frac{p_2 u_1}{\rho_2 u_2} \frac{\rho_1}{\rho_1} - \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1 u_2}{\rho_1 u_1} \frac{\rho_2}{\rho_2} \quad \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (3.23) \\
 &= \frac{p_2 - p_1}{\rho_1} + \frac{p_2 - p_1}{\rho_2} \\
 &= (p_2 - p_1) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)
 \end{aligned}$$

Dalla (3.20) $H = c_p T + \frac{u^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{R}{M} T + \frac{u^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}$. Ricavando $u_1^2 - u_2^2$

$$u_1^2 - u_2^2 \stackrel{\Delta H}{=} 2H_1 - 2\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} - 2H_2 + 2\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} \quad (3.24)$$

Uguagliando le eq. (3.23, 3.24) si vuole esplicitare il rapporto $\frac{p_2}{p_1}$

$$\begin{aligned}
 (p_2 - p_1) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) &= \frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) \\
 \frac{p_2 \rho_2 - p_2 \rho_1 - p_1 \rho_2 + p_1 \rho_1}{\rho_1 \rho_2} &= \frac{2\gamma p_2 \rho_1 - 2\gamma p_1 \rho_2}{(\gamma-1) \rho_1 \rho_2} \\
 p_2 \left(\rho_2 - \rho_1 + \frac{2\gamma \rho_1}{\gamma-1} \right) &= p_1 \left(\rho_2 - \rho_1 - \frac{2\gamma \rho_2}{\gamma-1} \right) \quad (3.25) \\
 \frac{p_2}{p_1} &= \frac{\rho_2 - \rho_1 - \frac{2\gamma}{\gamma-1} \rho_2}{\rho_2 - \rho_1 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} \rho_1}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{p_2}{p_1} = \frac{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right) \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}}} \quad \text{1ª relazione di Rankine-Hugoniot}$$

Se il processo di propagazione dell'urto fosse stato isentropico, dalla (3.25) si sarebbe ricavato $\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^\gamma$. Ma così non è, essendo un fenomeno dissipativo.

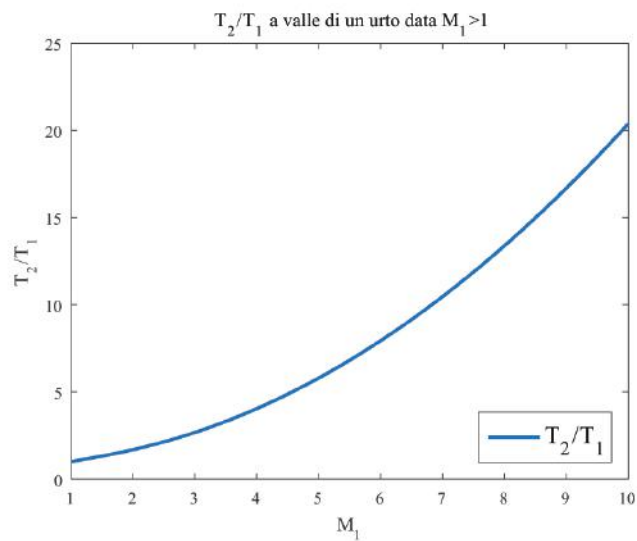
Dall'equazione della continuità $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2}$. Moltiplicando e dividendo per u_1 , si ottiene $\frac{p_2}{p_1} = \frac{u_1^2}{u_1 u_2} = \frac{u_1^2}{a^{*2}} = M_1^{*2}$. Allora, dalla (3.22) riquadrata in alto,

$$\boxed{\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)M^2}{2 + (\gamma-1)M^2}} \quad \text{2ª relazione di Rankine-Hugoniot} \quad (3.26)$$

Sostituendo la (3.26) nella (3.25) si ottiene un'ulteriore formulazione della prima relazione di Rankine-Hugoniot

$$\boxed{\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1)} \quad (3.27)$$

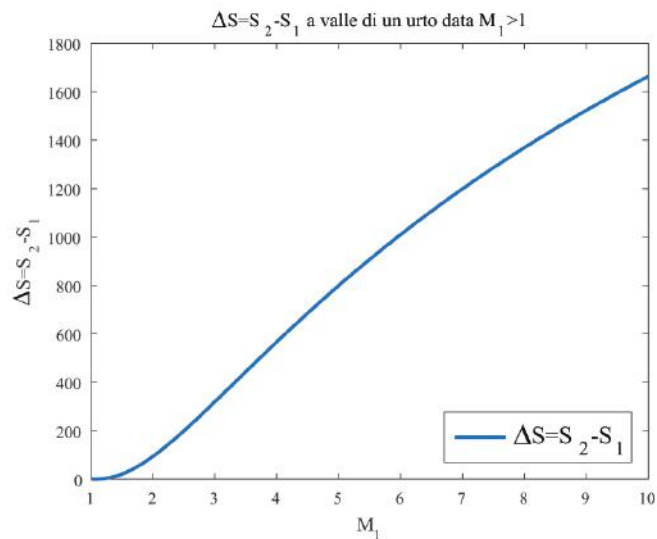
CAPITOLO 3 - FLUSSI MONODIMENSIONALI



Il salto di entropia $\Delta S = S_2 - S_1$, dalle (1.41a, 1.41b), sostituendo le (3.27, 3.28) o le (3.26, 3.27) a seconda che ci si riferisca a pressioni o densità, è pari a

$$\Delta S = c_p \ln \left\{ \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right] \left[\frac{(\gamma+1)M^2}{2 + (\gamma-1)M^2} \right] \right\} - \frac{R}{M} \ln \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right]$$

$$\Delta S = c_v \ln \left\{ \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right] \left[\frac{(\gamma+1)M^2}{2 + (\gamma-1)M^2} \right] \right\} - \frac{R}{M} \ln \left[\frac{(\gamma+1)M^2}{2 + (\gamma-1)M^2} \right]$$

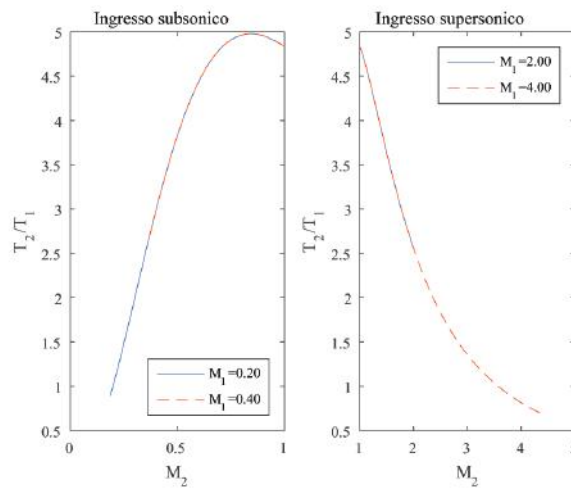


Tutto ciò che è stato asserito finora è valido finché il gas è considerato perfetto (nessuna dissociazione chimica) e non c'è apporto di calore esterno.

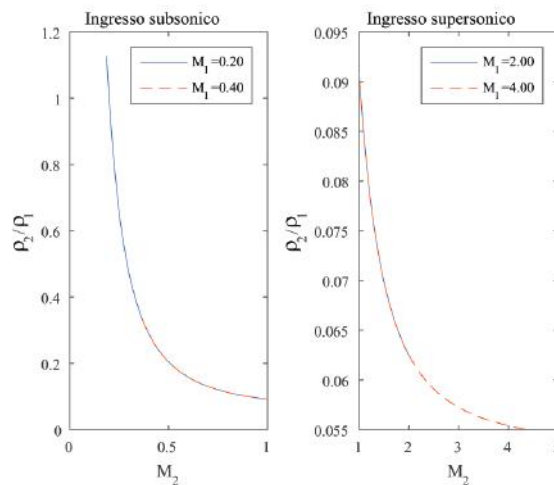
CAPITOLO 3 - FLUSSI MONODIMENSIONALI

Dall'equazione di stato e dalla conservazione della massa

$$\begin{aligned}
 \frac{T_2}{T_1} &= \frac{p_2 \rho_1}{p_1 \rho_2} & \rho_1 u_1 &= \rho_2 u_2 \\
 &= \frac{p_2 u_2}{p_1 u_1} = \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right) \frac{a_2 M_2}{a_1 M_1} & a &= \sqrt{\gamma \mathcal{R} T} \\
 &= \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right) \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \frac{M_2}{M_1} \implies \boxed{\frac{T_2}{T_1} = \left[\left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right) \frac{M_2}{M_1} \right]^2}
 \end{aligned} \tag{3.31}$$



$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2 T_1}{p_1 T_2} = \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right) \left[\left(\frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2} \right) \frac{M_1}{M_2} \right]^2 \implies \boxed{\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2} \right) \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^2} \tag{3.32}$$

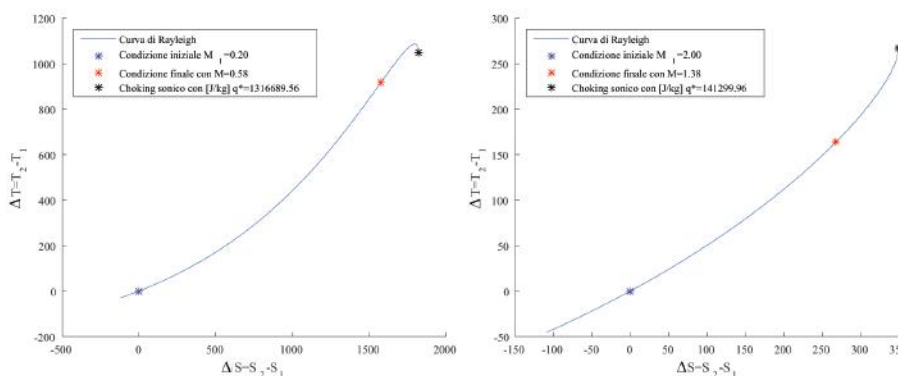


CAPITOLO 3 - FLUSSI MONODIMENSIONALI

CURVA DI RAYLEIGH

Il legame matematico che descrive l'evoluzione del flusso nel piano T-S è $\frac{dT}{dS}$, tangente punto per punto sfruttata per ricavare la variazione di velocità $\frac{du}{dS}$ tramite l'equazione della continuità, della quantità di moto, di stato e la variazione di entropia scritta nella forma con $\frac{T_2}{T_1}$ e $\frac{p_2}{p_1}$

$$\begin{cases} \frac{dT}{dS} = \frac{T}{c_p} \frac{(\gamma M^2 - 1)}{(M^2 - 1)} \\ \frac{du}{dS} = -\frac{u}{c_v} \frac{1}{[\gamma (M^2 - 1)]} \end{cases} \quad (3.35)$$



INGRESSO SUBSONICO^[3] $M_1 < 1 \implies \frac{du}{dS} > 0 \forall M \in (0, 1)$

$$\mathcal{D}\left(\frac{dT}{dS}\right) = M^2 - 1 < 0 \implies \begin{cases} \frac{dT}{dS} > 0 \text{ se } \gamma M^2 - 1 < 0 \implies M < \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \\ \frac{dT}{dS} < 0 \text{ se } M > \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \\ \frac{dT}{dS} = 0 \text{ se } \gamma M^2 - 1 = 0 \implies M = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \implies T = T_{max} \end{cases} \quad (3.36)$$

Per $M < \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, q si spartisce fra energia cinetica ed interna; per $M > \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, il fluido accelera così tanto che parte dell'energia interna passa alla cinetica, e pur fornendo calore la temperatura diminuisce fino alla condizione di *choking*. In entrambi i casi, p e p_o decrescono mentre T_o e u aumentano.

INGRESSO SUPERSONICO^[4] $M_1 > 1 \implies \frac{du}{dS} < 0 \forall M \in (1, +\infty]$

$$\mathcal{D}\left(\frac{dT}{dS}\right) = M^2 - 1 > 0 \implies \begin{cases} \frac{dT}{dS} > 0 \text{ se } \gamma M^2 - 1 > 0 \implies M > \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \\ \frac{dT}{dS} < 0 \text{ se } M < \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \text{ Impossibile per hp} \end{cases} \quad (3.37)$$

Per ingresso supersonico la tangente $\frac{dT}{dS}$ può essere solamente positiva. Come prima, l'uscita sonica corrisponde ad un asintoto verticale $\frac{dT}{dS} = \infty$. Si incrementano p e T_o mentre decrescono p_o e u .

^[3] $M_1 = 0.2, q = 1 \cdot 10^6 \text{ J kg}^{-1}, M_{out} < M_{ck} = 1$. Choking per $q = q^* = f(M_1) = c_p (T_{o2}^* - T_{o1})$

^[4] $M_1 = 2, q = 3 \cdot 10^5 \text{ J kg}^{-1}, M_{out} > M_{ck} = 1$.

CAPITOLO 3 - FLUSSI MONODIMENSIONALI

3.9 Flusso di Fanno

Ci sia un condotto di lunghezza L in cui passi un flusso uniforme che subisca degli sforzi viscosi τ . Sia adiabatico il fenomeno d'attrito fra flusso e parete.

Il condotto impone la condizione di aderenza a parete: la τ_w scambia una quantità di moto con i filetti fluidi in maniera sempre meno intensa all'aumentare della distanza r , è diretta lungo l'asse d'avanzamento unidimensionale del flusso ma ha verso opposto. Il flusso viscoso, inoltre, crea delle perdite di carico, o perdite di pressione dovute agli effetti viscosi. In aggiunta, $\rho = \rho(x)$ e $u = u(x)$. Nel caso laminare, il profilo di velocità è

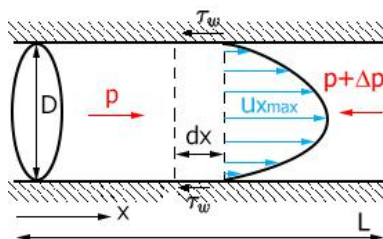


Figure 3.11: Flusso di Fanno

Le equazioni dell'energia e della continuità, per un flusso adiabatico $q = 0$ e stazionario $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, assumono la forma

$$\begin{cases} h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} & \implies T_{o1} = T_{o2} \\ \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 & \implies \frac{u_2}{u_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \end{cases} \quad (3.39)$$

Invece, per la QDM, tenendo presente che in caso compressibile $\tau_w = \mu \left(\frac{du}{dr}\right)_r$,

$$\begin{aligned} \int_S \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) \, dS &= - \int_S p \cdot \vec{n} \, dS - \underbrace{\int_S \tau_w \, dS}_{\text{Condotto su flusso}} & dS &= \pi D dx \\ \rho_2 u_2^2 A - \rho_1 u_1^2 A &= p_1 A - p_2 A - \pi D \int_0^L \tau_w \, dx & A &= \frac{\pi D^2}{4} \\ (p_2 - p_1) + (\rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2) &= -\frac{4}{D} \int_0^L \tau_w \, dx \quad [5] & & \\ dp + d(\rho u^2) &= -\frac{4}{D} \tau_w dx & \tau_w &= C_f \frac{1}{2} \rho u^2 \\ dp + \rho u du &= -\frac{4}{D} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 C_f\right) dx & & \end{aligned} \quad (3.40)$$

Dove C_f è il coefficiente di attrito locale.

[5] Nel caso incompressibile $p_2 - p_1 = -\frac{4}{D} \tau_w L \implies \frac{p_2 - p_1}{L} = -\frac{4}{D} \tau_w \implies \frac{dp}{dx} = -\frac{4}{D} \tau_w$
 $\lambda = \frac{dp/dx}{\frac{1}{2} \rho u_{max}^2 / D} = -4 C_f = f(Re = \frac{u d}{\nu})$, cioè rapporto fra le forze di inerzia e gli effetti viscosi.

CAPITOLO 3 - FLUSSI MONODIMENSIONALI

CURVA DI FANNO

Nel piano T-S è possibile delinearne, anche nel caso di sforzi viscosi non nulli, una variazione di temperatura e di velocità al variare dell'entropia. Siano

$$\begin{cases} \frac{dT}{dS} = \frac{T}{c_p} \gamma \frac{M^2}{M^2 - 1} \\ \frac{du}{dS} = -\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{T}{u} \frac{M^2}{M^2 - 1} \end{cases} \quad (3.49)$$

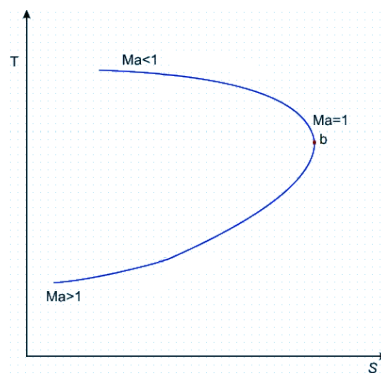


Figure 3.12: Curva di Fanno

Non essendoci fornitura di calore, non deve sorprendere un aumento di entropia, dato che $q = \int T dS$. La quantità di calore fornita al flusso, in questo caso, è data dalla dissipazione di energia cinetica dovuta all'attrito viscoso.

INGRESSO SUBSONICO $M_1 < 1 \implies \frac{du}{dS} > 0 \forall M \in (0, 1)$

$$\mathcal{D} \left(\frac{dT}{dS} \right) = M^2 - 1 > 0 \implies \frac{dT}{dS} < 0 \implies M_2 \in (M_1, 1] \quad (3.50)$$

Lo sforzo viscoso crea uno strato limite interno che, localmente, è visto dal flusso come una diminuzione del diametro del condotto: un flusso subsonico risponde a questa condizione con un aumento di velocità, con conseguente diminuzione di pressione e temperatura.

In sintesi, $M_1 < 1 \implies M_2 \in (M_1, 1), p_2 < p_1, p_{o2} < p_{o1}, T_2 < T_1, u_2 > u_1$.

INGRESSO SUPERSONICO $M_1 > 1 \implies \frac{du}{dS} < 0 \forall M \in (1, +\infty]$

$$\mathcal{D} \left(\frac{dT}{dS} \right) = M^2 - 1 < 0 \implies \frac{dT}{dS} > 0 \implies M_2 \in [1, M_1) \quad (3.51)$$

Per un flusso supersonico, una progressiva restrizione del condotto implica una riduzione di velocità, con conseguente aumento di pressione e temperatura.

In sintesi, $M_1 > 1 \implies M_2 \in (1, M_2), p_2 > p_1, p_{o2} < p_{o1}, T_2 > T_1, u_2 < u_1$.

CAPITOLO 3 - FLUSSI MONODIMENSIONALI

3.9.1 Parametri nel flusso di Fanno

Il Re fornisce indicazioni se il flusso è laminare, per $Re = \frac{uD}{\nu} < 2300$, o turbolento. Per un ingresso sufficientemente supersonico ($M \geq 8 \div 10$),

$$L^* = \left(\frac{6}{7} \ln 6 - \frac{5}{7} \right) \frac{D}{4C_f} \approx \frac{0.82D}{4C_f} = 40D \quad (3.54)$$

sono sufficienti lunghezze del condotto di circa 40 volte il diametro per rendere il flusso critico. Per $L > L^*$, come per il flusso di Rayleigh, nascono degli urti nel caso supersonico e rallentamenti in ingresso per il caso subsonico affinché il nuovo L sia L^* per il nuovo Mach di ingresso.

Inoltre $\lambda = f(Re, M)$ sarà anche funzione del Mach, nel caso compressibile, in quanto è direttamente proporzionale al C_f .

$$\lambda = \frac{dp/dx}{1/2 \rho u_{max}^2 / D} = -4C_f \quad (3.55)$$

Nel caso laminare esiste una formula in forma chiusa; nel caso turbolento esistono delle formulazioni empiriche

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda_{\text{lam}} = \frac{64}{Re} & Re < 2300 \\ \lambda_{\text{turb}} = \frac{0.32}{Re^{\frac{1}{4}}} & 2300 < Re < 10^5 \\ \lambda_{\text{turb}} = \frac{0.16}{Re^{\frac{1}{6}}} & 10^5 < Re < 10^8 \end{array} \right. \quad (3.56)$$

λ è dell'ordine del millesimo.

4. Onde oblique

4.1 Urti obliqui

Si introduce ora il comportamento di una corrente supersonica che incontra una parete deflessa: l'onda potrà essere compressa o espansa a seconda che la parete ostruisca o agevoli il suo avanzamento.

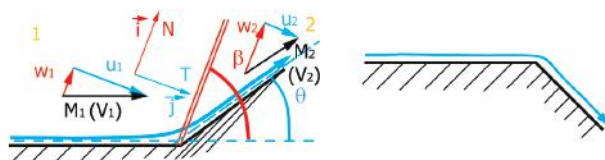


Figure 4.1: Compressione ed espansione in presenza di un condotto deflesso

ϑ indica la deflessione della parete e della corrente, data la condizione di tangenza, cioè la rotazione del vettore velocità fra valle e monte dell'urto.

L'angolo di inclinazione dell'urto, β , è definito fra la direzione della corrente a monte M_1 ed il piano che contiene l'urto. L'angolo fra la direzione della corrente a valle dell'urto e l'urto stesso è pari a $\beta - \vartheta$.

Si introducono delle ipotesi iniziali: i campi ① e ② sono uniformi ed isentropici; la dissipazione avviene in corrispondenza dell'urto. Il flusso è

- stazionario $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ (l'onda d'urto è ferma)
- inviscido, $\tau_{ij} = 0$ ed adiabatico, $q = 0$
- bidimensionale (la parete è estesa in profondità) con $\frac{\partial}{\partial z} = 0$

Si introducono le componenti di V_1 e V_2 rispetto all'urto

$$\begin{cases} \vec{V}_1 = u_1 \vec{N} + w_1 \vec{T} = u_1 \vec{i} + w_1 \vec{j} \\ \vec{V}_2 = u_2 \vec{N} + w_2 \vec{T} = u_2 \vec{i} + w_2 \vec{j} \end{cases} \quad (4.1)$$

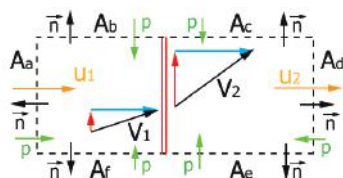


Figure 4.2: Volume di controllo - Onde oblique

4.1.1 Campo a valle dell'urto obliquo

Si prenda in esempio un condotto che si restringe, come in Figura (4.1) a sinistra. Siano dati come noti M_1 e ϑ , dove quest'ultimo quantifica il disturbo dato dal cambio di direzione. Si vuole calcolare il campo 2.

Il flusso è adiabatico, quindi $q = 0 \implies H_1 = H_2 \implies T_{o1} = T_{o2}$.

Per tutte le altre quantità è necessario considerare la componente normale del Mach di ingresso, che coincide con u a meno della velocità del suono a . Ciò che lega M a M_N è proprio $\sin \beta$, e allora $M_{1N} = M_1 \sin \beta$.

Si prendano direttamente le relazioni di Rankine-Hugoniot, valide per l'urto retto, e si sostituisca al loro interno il Mach normale all'urto obliquo. Dunque

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M_{1N}^2}{2 + (\gamma - 1)M_{1N}^2} \implies \boxed{\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \beta}{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \beta}} \quad (4.6a)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_{1N}^2 - 1) \implies \boxed{\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1)} \quad (4.6b)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 \rho_1}{p_1 \rho_2} \implies \boxed{\frac{T_2}{T_1} = \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1) \right] \left[\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \beta}{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \beta} \right]} \quad (4.6c)$$

Con qualche passaggio trigonometrico si può trovare il legame fra M , ϑ e β . Sempre prendendo in considerazione la Figura (4.1)

$$\begin{aligned} M_{1N} &= M_1 \sin \beta = \frac{V_1}{a_1} \sin \beta = \frac{u_1}{a_1} \\ M_{2N} &= \frac{u_2}{a_2} = \frac{V_1}{a_1} \sin(\beta - \vartheta) = M_2 \sin(\beta - \vartheta) \\ M_2 &= \frac{M_{2N}}{\sin(\beta - \vartheta)} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Dalla (3.22)

$$M_{2N}^2 = M_2^2 \sin^2(\beta - \vartheta) = \frac{2 + (\gamma - 1)M_{1N}^2}{2\gamma M_{1N}^2 - (\gamma - 1)} = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \beta}{2\gamma M_1^2 \sin^2 \beta - (\gamma - 1)}$$

URTO OBLIQUO

$$\boxed{M_2^2 = \frac{1}{\sin^2(\beta - \vartheta)} \left[\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \beta}{2\gamma M_1^2 \sin^2 \beta - (\gamma - 1)} \right]} \quad (4.8)$$

Le radici sono due: per un assegnato M_1 , M_2 fornisce due soluzioni di cui una è $M_2 < 1$ e l'altra è $M_2 > 1$. Comunque, vale sempre che $M_2 < M_1$, ma ciò significa che a valle di un urto obliquo non è detto che il flusso diventi subsonico: un urto obliquo forte porterà la corrente a valle ad essere subsonica, un urto obliquo debole potrà lasciarla supersonica ma rallentata rispetto a M_1 .

A monte, $\tan \beta = \frac{u_1}{w_1}$; a valle, $\tan(\beta - \vartheta) = \frac{u_2}{w_2}$. Il loro rapporto

$$\frac{\tan(\beta - \vartheta)}{\tan \beta} = \frac{u_2 w_1}{w_2 u_1} = \frac{u_2}{u_1} \stackrel{\text{Continuità}}{=} \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \beta}{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \beta} \quad (4.9)$$

... Trigonometria ...

$$\boxed{\tan \vartheta = \frac{2}{\tan \beta} \left[\frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos(2\beta)) + 2} \right]}$$

4.1.2 Polare dell'urto

Finora è stato utilizzato un piano fisico (x, y) per studiare un urto (la rampa, il cuneo, ...). Ma è possibile lavorare anche con il piano odografico, chiamato anche *strofoide*, e cioè

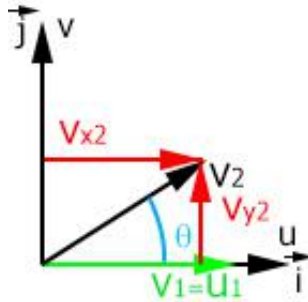


Figure 4.5: Piano odografico dell'urto

Il piano è cartesiano: in ascisse c'è la componente di velocità orizzontale e in ordinate la componente verticale. Trovata la componente del Mach a valle, $M_2 \equiv V_2$, $V_{x_2} = V_2 \cos \vartheta$ e $V_{y_2} = V_2 \sin \vartheta$. Il vettore V_1 a monte giace sull'asse delle ascisse, così come u_1 e M_1 , dato che coincidono nel campo ①. $V_2 < V_1$ è inclinato proprio della deflessione della rampa ϑ .

Per odografia si intende il luogo di tutti i punti di estremità V_2 al variare di ϑ e assegnato V_1 o, analogamente, M_1 . L'equazione che è alla base di questo studio è detta polare dell'urto obliquo

$$\begin{aligned}
 V_{y_2}^2 &= (V_1 - V_{x_2})^2 \frac{V_1 V_{x_2} - a^{*2}}{\frac{2}{\gamma+1} V_1^2 - V_1 V_{x_2} + a^{*2}} \\
 \div a^{*2} \quad \left(\frac{V_{y_2}}{a^*}\right)^2 &= \frac{1}{a^{*2}} (V_1 - V_{x_2})^2 \frac{a^{*2}}{a^{*2}} \frac{\frac{V_1}{a^*} \frac{V_{x_2}}{a^*} - 1}{\frac{2}{\gamma+1} \frac{V_1^2}{a^{*2}} - \frac{V_1}{a^*} \frac{V_{x_2}}{a^*} + 1} \\
 \left(\frac{V_{y_2}}{a^*}\right)^2 &= \left(M_1^* - \frac{V_{x_2}}{a^*}\right)^2 \frac{\left(M_1^* \frac{V_{x_2}}{a^*} - 1\right)}{\left(\frac{2}{\gamma+1} M_1^{*2} - M_1^* \frac{V_{x_2}}{a^*} + 1\right)} \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

Sul piano adimensionale avente in ascisse $\frac{u}{a^*}$ ed in ordinate $\frac{V}{a^*}$, a fissato valore di M_1 si possono tracciare numerose funzioni.

CAPITOLO 4 - ONDE OBLIQUE

Riprendendo in considerazione il piano normalizzato in Figura (4.6), se si facesse tendere a zero l'angolo ϑ si ricava che $\Delta V \rightarrow 0$ e diviene tangente alla polare in corrispondenza della corrente a monte nel punto angoloso (linea verde tratteggiata). Una corrente che investe un ostacolo di inclinazione $\vartheta = 0$ ha un urto evanescente ed ha inclinazione al più pari all'onda di Mach, inclinata di μ , definito come angolo fra la direzione di M_1^* e la direzione della tangente. Facendo intersecare questa tangente con la direzione dell'urto precedentemente trovata, si nota che l'angolo sotteso dall'intersezione (giallo-verde) è β , e che questo angolo è visivamente maggiore di μ . L'altra condizione è data dall'urto retto, quindi l'angolo del piano dell'urto deve essere sempre compreso fra queste condizioni limite $\mu < \beta < \frac{\pi}{2}$, ritrovando le condizioni nell'eq. (4.10).

Osservazioni

Fissando un M_1 si ottiene un univoco ϑ_{max} . Se si applica una deflessione $\vartheta > \vartheta_{max}$ si troverebbe, per una data odografa, una condizione non più tangente e non descrivibile dall'eq. (4.11) se non nelle immediate vicinanze all'urto. In questa situazione l'urto che si viene a creare è curvo e staccato. Situazione analoga la si ritrova facendo riferimento al cuneo in Figura (4.4) se si avesse una semiapertura maggiore della massima ammessa.

Si prenda in considerazione la Figura (4.1) a sinistra con un urto curvo per $\vartheta > \vartheta_{max}$. Nelle immediate vicinanze della parete il filetto fluido incappa in un urto retto, $\beta = \frac{\pi}{2}$, diviene subsonico e si allinea con la parete inclinata. Man mano che ci si allontana dalla parete, essendo l'urto curvo, i successivi filetti fluidi incontrano un $\beta < \frac{\pi}{2}$, anche se, comunque, molto grande: c'è un urto forte e i filetti fluidi vengono deflessi leggermente di più. Allontanandosi sempre più dalla parete, β decresce e M_2 aumenta, restando comunque subsonico, fino al punto in cui, per β sufficientemente deflesso, si può giungere alla condizione sonica (inviluppata dal cerchio sonico) e poi passare alla zona degli urti deboli obliqui, la più lontana dalla parete. Per una distanza sufficientemente grande dalla parete, $\beta \rightarrow \mu$ e l'urto diventa evanescente (diviene una linea di Mach).

Tutti gli step percorsi in questa osservazione sono, praticamente, punti consecutivi della curva in Figura (4.3) percorsa dal $\beta_{max} = \frac{\pi}{2}$ all'indietro.

Il raggiungimento della condizione sonica implica il raggiungimento del $\vartheta = \vartheta_{max}$, mentre la zona degli urti deboli si può ricongiungere con tutti i punti nel ramo a scendere a sinistra.

Da un altro punto di vista, più chiaro per la zona degli urti più forti, data l'odografa in Figura (4.6) si ottengono gli step partendo da (B), percorrendo il ramo superiore, oltrepassando il cerchio sonico, e giungendo fino al punto (A), corrispondente nel grafico $\vartheta - \beta$ allo zero nel ramo supersonico.

In ultimo, poichè il fenomeno è adiabatico il campo è omoentalpico, $H = \text{cost}$. Per il teorema di Crocco (3.3), dato che il campo è stazionario,

$$\nabla \wedge \vec{V} = \nabla H^0 - T \nabla S \quad (4.12)$$

ma l'urto è dissipativo, per cui è proprio il gradiente di entropia ad essere non nullo, e quindi il rotore delle velocità è diverso da zero, per cui il flusso è rotazionale e non ammette velocità potenziale.

4.2 Interazione di urti obliqui

4.2.1 Riflessione regolare

Si prenda un condotto con una deflessione ϑ_1 ed una corrente supersonica in ingresso M_1 . Questa condizione genera una onda d'urto obliqua inclinata di $\beta_1 = f(M_1, \vartheta_1)$. Se il condotto è chiuso, però, questa onda d'urto OO' va ad incontrare l'altra superficie del condotto e viene riflessa.

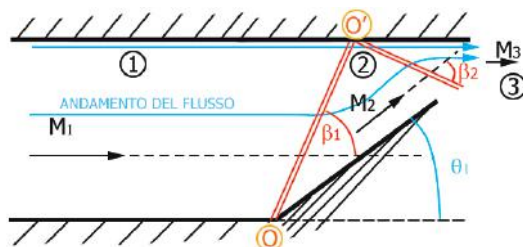
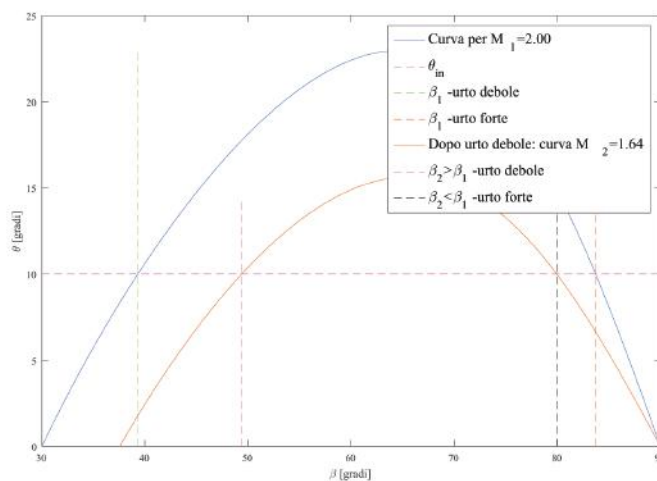


Figure 4.8: Riflessione regolare di un flusso supersonico in un condotto

Così come la prima onda d'urto è generata dalla velocità M_1 , la seconda onda avrà come generatrice la corrente M_2 immediatamente a monte, deflessa di ϑ_1 per la condizione di aderenza a parete. Si vengono quindi a generare tre campi i cui margini sono proprio gli urti: la riflessione è detta regolare perchè nel campo ② e ③ viene rispettata la condizione di tangenza; nell'ultimo campo la corrente, deflessa di ϑ_1 nel precedente, si riallinea a M_1 inclinandosi di $\vartheta_2 = -\vartheta_1$.

Analogamente, come la prima onda d'urto è deflessa di $\beta_1 = f(M_1, \vartheta_1)$, così $\beta_2 = f(M_2, \vartheta_2)$: nel piano β - ϑ -Mach si nota che la riflessione non è speculare, difatti $\beta_2 > \beta_1$ supponendo un urto obliquo debole, viceversa nel caso forte. Inoltre, gli urti hanno intensità differente: il primo è il più intenso dei due.



Dunque il campo ③ ha $M_3 < M_2 < M_1$ ed è possibile affermare che $\frac{p_2}{p_1} > \frac{p_3}{p_2}$. ①, ② e ③ sono tutti campi uniformi: il passaggio $p_1 \rightarrow p_2$ avviene con una discontinuità a causa dell'urto, così come il $p_2 \rightarrow p_3$. Nel punto O' $p_1 \rightarrow p_3 > p_2$.

4.2.2 Intersezione di urti

Convenzionalmente gli urti appartengono ad una specifica *famiglia* a seconda del verso di rotazione dell'urto rispetto alla parete che lo genera. Se l'urto ruota in senso antiorario è un *left running*, come OO' in Figura (4.8), e appartiene alla I famiglia; altrimenti è un *right running* e appartiene alla II famiglia.

Intersezione di urti di famiglie opposte

Ci sia un condotto con due porzioni deflesse rispettivamente di $\vartheta_2 > \vartheta_3$.

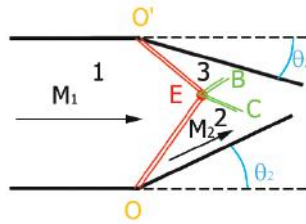


Figure 4.10: Interazione fra urti obliqui deboli

Sia ϑ_2 l'angolo di deflessione inferiore, che genererà un urto left running OE, e ϑ_3 il superiore per un right running O'E. Nel punto di intersezione (E) c'è una riflessione di urti: OE ed O'E riflettono rispettivamente a valle in EB ed EC.

Da un diagramma ϑ - β -Mach, supposti gli urti come deboli, fissato M_1 ed essendo $\vartheta_2 > \vartheta_3$, si ricaverebbe subito che $\beta_{O'E} < \beta_{OE}$.

I campi delimitati dai triangoli \widehat{OEC} e $\widehat{O'EB}$ hanno proprietà differenti: partendo da $\vartheta_2 \neq \vartheta_3$, di conseguenza $M_2 \neq M_3$, $p_2 \neq p_3$, ..., ma alla loro interazione deve nascere un fenomeno che crei una congiunzione fra le pressioni, al fine di uguagliarle a valle, e che renda concordi e parallele le linee di corrente.

Il fenomeno è detto *slip line* o *contact surface*, ed è un intermezzo fra i campi generati dagli urti riflessi e la direzione comune, inclinata di un certo angolo ϕ rispetto all'orizzontale, che è la direzione che avrebbe una linea di corrente passando direttamente attraverso l'intersezione (E) dal campo (1).

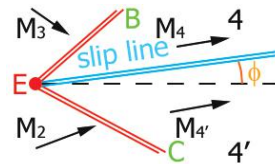


Figure 4.11: Slip line a valle di un'intersezione di urti di famiglie opposte

L'imposizione data dalla slip line è che il campo (4) sia uguale al campo (4'). Per la precisione, è la pressione a dover essere uguale perchè ci sarebbe, altrimenti, un gradiente di pressione verticale e quindi un moto traslazionale verticale, mentre l'esperienza dimostra che così non è. In tutte le altre grandezze possono esistere delle disuguaglianze, e solitamente è così, cioè $V_4 \neq V_{4'}$, $T_4 \neq T_{4'}$, $S_4 \neq S_{4'}$, $\rho_4 \neq \rho_{4'}$.

CAPITOLO 4 - ONDE OBLIQUE

Supponendo entrambi gli urti deboli, tutte le velocità in ogni campo saranno supersoniche e precisamente $M_3 < M_2 < M_1$. Nel piano ϑ - β -Mach, ϑ_2 va ad intersecarsi con la curva data da M_1 e fornisce β_2 . La deflessione per il campo ③ non è ϑ_3 , perchè M_2 viene deflessa solo del secondo ostacolo; dunque, per la seconda curva data da M_2 , bisogna entrare nelle ordinate con $\vartheta'_3 = \vartheta_3 - \vartheta_2$ e, essendo la curva M_2 interna ad M_1 , con certezza $\beta_3 > \beta_2$.

Questo risultato implica che le due onde debbano, prima o poi, collidere: i due urti vanno in coalescenza generando una terza onda d'urto obliqua (rossa).

Al momento sono quindi definiti quattro campi: il campo ① indisturbato, il campo ② a valle del primo urto, il ③ a valle del secondo ed il campo ⑤ fra l'ultima onda e il campo indisturbato. Una linea di corrente che passa direttamente da ① a ⑤ genera, come visto in Figura (4.11), una slip line. Questo è vero, ma la slip line non è l'unica nuova componente a generarsi: fisicamente le pressioni in campo ⑤ ed in campo ③ non possono compensarsi, ed è dunque necessario che si formi, nel punto di coalescenza, un'ulteriore onda riflessa debole (o d'urto obliqua o di espansione, in verde). Allora si origina il campo ④, ed è vero che $p_4 = p_5$ e che le velocità in ④ e ⑤ hanno medesima direzione, mentre $p_3 \neq p_4 \wedge p_5$, dato che esiste un'onda d'urto o un'espansione.

Riflessione di Mach con $\vartheta > \vartheta_{max}|_{M_2}$

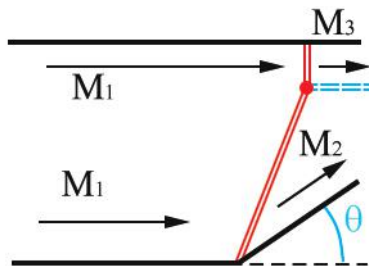


Figure 4.13: Riflessione di Mach

La casistica è analoga alla riflessione regolare (4.2.1), ma il fenomeno qui espresso è che l'angolo di rampa ϑ sia $\vartheta < \vartheta_{max}|_{M_1}$ ma $\vartheta > \vartheta_{max}|_{M_2}$. Ciò significa che nel piano ϑ - β -Mach l'entrata ϑ interseca la curva M_1 ma non M_2 .

In sostanza, non sono soddisfatte le condizioni affinché si verifichi una riflessione regolare. Allora la corrente a parete superiore deve necessariamente generare un'urto retto che va a raccordarsi, in un certo punto, con l'urto obliquo inferiore: nel punto di coalescenza si genera una slip line che avrà direzione parallela a M_1 e M_3 . In particolare, M_3 , essendo a valle di un urto retto, è sicuramente subsonico.

Come per la Figura (4.12), nel punto di coalescenza si genera anche un'ulteriore onda che raccorda le condizioni nei diversi campi.

4.3 Espansione supersonica

L'espansione supersonica è la controparte fisica della compressione vista finora in cui la corrente a valle si allontana dal flusso a monte. Allontanandosi, il flusso deve necessariamente accelerare, sicchè

Variabile	COMPRESSIONE	ESPANSIONE
M	$M_2 < M_1$	$M_2 > M_1$
p	$p_2 > p_1$	$p_2 < p_1$
T	$T_2 > T_1$	$T_2 < T_1$
ρ	$\rho_2 > \rho_1$	$\rho_2 < \rho_1$
T_o	$T_{o1} = T_{o2}$	$T_{o1} = T_{o2}$
p_o	$p_{o2} < p_{o1}$	$p_{o1} = p_{o2}$
S	$\left\{ \begin{array}{l} \Delta S = 0 \text{ elementare} \\ \Delta S \neq 0 \text{ urto} \end{array} \right.$	$\Delta S = 0$

Table 4.1: Confronto compressione - espansione supersonica

Un'espansione adiabatica è sempre reversibile, sia che nasca da uno spigolo vivo (espansione di Prandtl-Mayer) o da una parete continuamente curvata. Il fenomeno è dunque isoentropico. Inoltre, oltre alla temperatura totale, rispetto alla compressione si conserva anche la pressione totale.

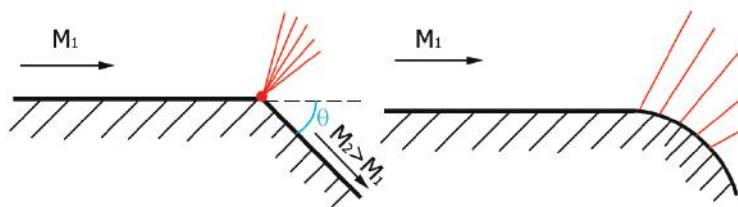


Figure 4.16: Espansione supersonica - spigolo vivo o curvatura continua

Nel caso del condotto a curvatura continua le onde di espansioni sono semplici, subiscono una piccola deflessione $\delta\vartheta$ e sono tutte onde di Mach inclinate rispetto alla corrente immediatamente a monte M dell'angolo $\mu = \sin\left(\frac{1}{M}\right)^{-1}$. Poichè il Mach aumenta, μ decresce sempre di più e dunque le infinite onde di espansione non si incontrano mai: nell'espansione le onde smettono di essere prodotte quando non c'è più deflessione e oramai la condizione di tangenza è stata raggiunta continuamente.

Nel caso di uno spigolo è proprio il punto critico il generatore delle onde di espansione: il fascio di espansione è centrato nello spigolo e le sue onde si allontanano l'una dall'altra. Questa particolare casistica è definita espansione di Prandtl-Meyer.

Ci si occupa ora di trovare le condizioni del campo a valle dell'espansione assegnato il campo a monte, in particolare il Mach M_1 e la deflessione ϑ .

CAPITOLO 4 - ONDE OBLIQUE

Allora, valida per $d\vartheta$ infinitesimi,

$$\boxed{d\vartheta = \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V}} \quad (4.15)$$

Si nota, però, che si è supposto un incremento di velocità a causa di una espansione: ma l'espansione elementare, cioè una linea di Mach, generata da un $d\vartheta$ infinitesimo positivo, può equivalere ad una compressione elementare generata da un ipotetico $d\vartheta$ infinitesimo negativo o, più semplicemente, da una riduzione di velocità pari a $-dV$. Allora la (4.15) è valida sia per l'espansione che per la compressione elementare, sicchè, in base alla situazione, $d\vartheta$ vale rispettivamente

$$\boxed{d\vartheta = \pm \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V}} \quad (4.16)$$

VARIAZIONE DI PRESSIONE

Da Eulero, (1.28) $V dV = -\frac{dp}{\rho} \quad \div V^2$

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dp}{V^2 \rho} \quad a^2 = \gamma \frac{p}{\rho} \quad (4.17)$$

$$= -\frac{1}{V^2} \frac{a^2 dp}{\gamma p} = \frac{1}{\gamma M^2} \frac{dp}{p}$$

$$\boxed{\frac{dp}{p} = -\gamma M^2 \frac{dV}{V} \stackrel{(4.15)}{\implies} -\gamma M^2 \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} d\vartheta} \quad (4.18)$$

Alcune considerazioni: le variazioni di velocità positive si traducono in un decremento percentuale di pressione e il valore del Mach è un fattore moltiplicativo, quindi la diminuzione di pressione è più evidente dell'incremento di velocità. Nella compressione, invece, il " - " si elide e l'incremento di pressione è proporzionale all'incremento di velocità.

$$\frac{dV}{V} = f(M)$$

Si prenda in considerazione il rapporto $\left(\frac{a_o}{a}\right)^2 = \frac{T_o}{T} \implies a = a_o \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Differenziando $da = a_o \left[-\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot \frac{\gamma-1}{2} \cdot 2M dM\right] = a_o \left[-\frac{\gamma-1}{2} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-\frac{3}{2}} M dM\right]$

Da $M = \frac{V}{a} \implies V = Ma$ Facendo i logaritmi

$\ln V = \ln(M) + \ln(a)$ Differenziando

$$\frac{dV}{V} = \frac{dM}{M} + \frac{da}{a} \quad \text{Sostituendo } a \text{ e } da \quad (4.19)$$

$$= \frac{dM}{M} - \frac{\gamma-1}{2} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-1} M dM$$

$$\boxed{\frac{dV}{V} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM}{M} \implies d\vartheta = \pm \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM}{M}} \quad (4.20)$$

4.3.1 Campo a valle di un'espansione di Prandtl-Meyer

Ci sia un'espansione come in Figura (4.16 sx) con $M_1 > 1$ che produce, a valle, una corrente ancora supersonica con $M_2 > M_1$.

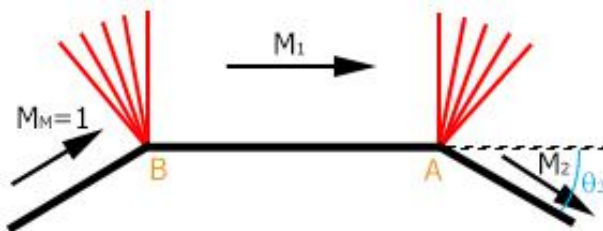
Assegnato M_1 e $\vartheta > 0$, dalla tabulazione $M-\nu-\mu$ si ricava $\nu(M_1)$ e dalla (4.22) $\nu(M_2) = \vartheta + \nu(M_1)$. A questo punto, rientrando nella tabella $M-\nu-\mu$ con $\nu(M_2)$, si ricava M_2 . Nel frattempo si possono ricavare le varie μ e, soprattutto, μ_1 e μ_2 , prima ed ultima inclinazione del fascio d'espansione.

Assegnati anche T_1 e p_1 , poichè il processo è isentropico e $T_{o1} = T_{o2}$, allora dalle relazioni dell'isentropica si ricavano le (3.42, 3.44, 3.45).

Concludendo, il fascio di espansione è sempre inclinato di μ a seconda del Mach locale. Ciò significa che, al più, $\mu = \frac{\pi}{2}$ per $M = 1$ e la prima espansione elementare è normale al condotto: tutte le altre sono necessariamente inclinate verso valle, come in Figura (4.16 sx).

4.3.2 Espansioni in serie

E' necessario definire cosa sia $\nu(M_1)$. Si prenda sul piano fisico una parete orizzontale con una deflessione ϑ_2 in A. Si immagini che questa corrente nel condotto orizzontale, per diventare supersonica, sia sonica nel campo a monte di B e abbia già subito una prima espansione. L'ultima inclinazione della prima espansione è inclinata di $\mu_1 = \sin^{-1}\left(\frac{1}{M_1}\right)$: se M_1 è praticamente ancora sonica, si ritrova che la linea di Mach è perpendicolare e quindi si ritrova la condizione di $k_\nu = 0$ in campo sonico. $\nu(M_1)$ è quindi la rotazione che ha avuto la corrente sonica $M_M \in [1, 1 + \varepsilon]$ a monte di B per portarsi in condizione supersonica in campo (A, B).



La condizione limite $\Delta\vartheta_{max}$ si ritrova ponendo $M_2 = \infty$, come nella tabulazione precedente, ed è pari a $\Delta\vartheta = 130.4541^\circ$ nell'aria: ciò significa che matematicamente la corrente, da un ipotetico condotto orizzontale, riesce a deflettersi ben oltre la verticale, tornando addirittura indietro. Fisicamente questo comportamento non è possibile: dato che $M = \frac{V}{a}$, $M \propto \frac{1}{T}$, per avere $M = \infty$ si dovrebbe avere lo zero K assoluto, condizione non raggiungibile; inoltre, essendo il flusso viscoso, per effetto di forze centrifughe in rotazione del flusso la corrente si separa dal condotto.

CAPITOLO 4 - ONDE OBLIQUE

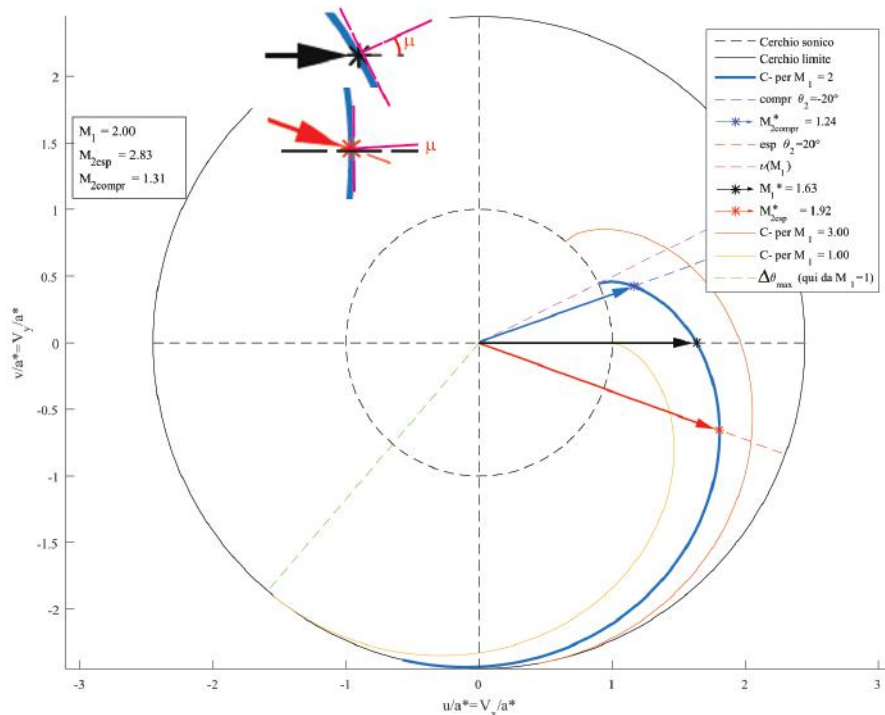


Figure 4.18: Epicycloide C_- - deflessione $\vartheta = 20^\circ$ oraria, $M_1 = 2$

Si consideri un'espansione per deflessione oraria, come in Figura (4.16): l'iter per trovare l'epicycloide^[5] consiste, con M_1 e ϑ noti, in primo luogo nel calcolare i due cerchi delle (4.26 (1), (2)) e poi $\nu(M_1)$ e $M_1^* = f(M_1)$ (\rightarrow in Figura 4.18). A questo punto, o si trova prima M_2^* e poi si traccia il luogo dei punti al vertice di tutti i M_2^* al variare di ϑ , oppure si procede a ritroso.

Nel secondo caso, si calcola $\nu(M_2)$ (4.22) per $\vartheta \in [-\nu(M_1), \vartheta_{max}]$ ^[6] e si estrapolano per via numerica tutti i M_2 , per poi essere convertiti in M_2^* : rappresentando il luogo dei punti, l'epicycloide deve passare per il vertice di M_1^* .

A questo punto si può calcolare lo specifico risultato ripetendo il procedimento precedente con il ϑ fornito come dato. Per un condotto con deflessione ϑ positiva o negativa, posizionato al di sotto della corrente, si ottiene rispettivamente un'espansione (\rightarrow) o una compressione (\leftarrow).

A titolo esemplificativo, si supponga un condotto a deflessione variabile con curvatura continua al di sotto di un flusso: lo si ponga con la minima deflessione per cui ci sia una compressione, $-\nu(M_1)$; gradualmente lo si inclini verso il basso portandolo oltre l'orizzontale fino a ϑ_{max} . Al variare del ϑ si è percorsa l'epicycloide C_- dalla prossimità del cerchio sonico fino al cerchio limite.

L'inclinazione di tutte le onde di Mach nel fascio d'espansione è ingrandita in Figura (4.18). L'angolo sotteso fra la normale alla tangente in ogni punto compreso fra i vertici di M_1^* ed M_2^* e la direzione di M_1^* è proprio μ e, per una C_- , si inclina sempre di più verso il basso.

^[5]In sostanza per le C_- è come se gli angoli si considerassero positivi in senso orario

^[6] $\vartheta_{max} = -\nu(M_1) + \nu(M)_{max}$, $\nu(M)_{max} = 130.4541^\circ$.

CAPITOLO 4 - ONDE OBLIQUE

$$\begin{cases} \phi_{xx} \left(1 - \frac{\phi_x^2}{a^2}\right) + \phi_{yy} \left(1 - \frac{\phi_y^2}{a^2}\right) - \phi_{xy} \frac{2\phi_x\phi_y}{a^2} = 0 \\ d\phi_x = \frac{\partial\phi_x}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi_x}{\partial y} dy = \phi_{xx} dx + \phi_{xy} dy = du \\ d\phi_y = \frac{\partial\phi_y}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi_y}{\partial y} dy = \phi_{xy} dx + \phi_{yy} dy = dv \end{cases}$$

Mettendo in colonna ϕ

$$\begin{cases} \phi_{xx} \left(1 - \frac{\phi_x^2}{a^2}\right) - \phi_{xy} \frac{2\phi_x\phi_y}{a^2} + \phi_{yy} \left(1 - \frac{\phi_y^2}{a^2}\right) = 0 \\ \phi_{xx} dx + \phi_{xy} dy + 0 = du \\ 0 + \phi_{xy} dx + \phi_{yy} dy = dv \end{cases} \quad (4.31)$$

Si ha un sistema di 3 equazioni in 3 incognite. Sfruttando la regola di Cramer

$$x_i = \frac{|\det C_i|}{|\det C|} = \frac{\text{incognita con termini noti nella colonna i-esima}}{\text{omogenea associato}} \quad (4.32)$$

$$\phi_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} 1 - \frac{u^2}{a^2} & 0 & 1 - \frac{v^2}{a^2} \\ dx & du & 0 \\ 0 & dv & dy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 - \frac{u^2}{a^2} & -\frac{2uv}{a^2} & 1 - \frac{v^2}{a^2} \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix}} = \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{D}} \quad \phi_{xy} \neq 0 \wedge [\mathcal{D} = 0]$$

Imporre $\mathcal{D} = 0$ permette di trovare le direzioni caratteristiche nella forma generale. Imporre anche $\mathcal{N} = \mathcal{D} = 0$ permette di ritrovare le equazioni che descrivono il modo in cui le grandezze si evolvono lungo le linee caratteristiche.

Per $\mathcal{D} = 0$, cercando il determinante ed imponendolo pari a zero

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{D}) &= \left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) (dy \cdot dy - 0 \cdot dx) - \left(-\frac{2uv}{a^2}\right) (dx \cdot dy - 0 \cdot 0) + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) (dx \cdot dx - dy \cdot 0) \\ &= \left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) dy^2 + \frac{2uv}{a^2} dx dy + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) dx^2 = 0 \\ \div dx^2 &= \left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{2uv}{a^2} \left(\frac{dy}{dx}\right) + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) = 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

$\frac{dy}{dx}$ è la pendenza della tangente della linea caratteristica cercata. Allora

4.6 Visualizzazione di flussi compressibili

Per visualizzare le varie tipologie di onde esistono tecniche che sfruttano diversi principi fisici. La tecnica *Shadowgraph* sfrutta la convezione naturale di un flusso per visualizzare il comportamento della corrente tramite ombre; la *Schlieren* lavora sui gradienti di densità mentre l'interferometria è la più precisa.

4.6.1 Flusso supersonico in un condotto

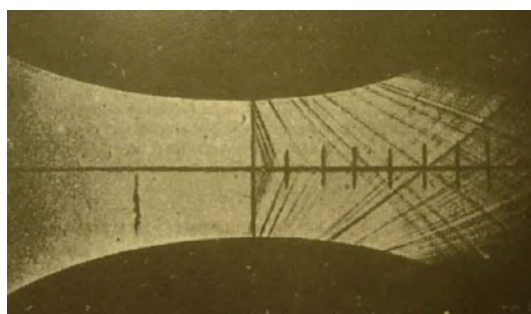


Figure 4.20: Ugello supersonico - tecnica Schlieren

In questo ugello il flusso a monte della gola è subsonico ed il salto di pressione è tale da renderlo supersonico. La parete interna è stata ricoperta da microrugosità che, disturbando il flusso, inducono una visualizzazione più chiara delle onde di espansione, coincidenti con le linee di Mach.

Nel tratto subsonico, il discriminante della (4.34) è negativo e si nota l'assenza di linee caratteristiche anche in presenza di microrugosità. Sulla gola la linea di Mach, coincidente con l'unica linea caratteristica, è inclinata di $\mu = 90^\circ$, essendo un'onda d'urto. A monte esistono due linee caratteristiche e le relazioni di Prandtl-Meyer valgono finché tali onde, inclinate di $\mu = \sin\left(\frac{1}{M}\right)^{-1}$, non si intersecano: una volta intersecate, le onde non sono più rette e si incurvano.

4.6.2 Flusso attorno ad un proiettile

Flusso subsonico - transonico locale



Figure 4.21: Flusso subsonico compressibile - tecnica Shadowgraph

Aumentando il Mach a monte (sempre $M < 1$), localmente il Mach può essere $M_{loc} \geq 1$: da qualche parte si forma un'onda d'urto che tenderà a spostarsi in avanti al crescere di M fino a $M = 1$, momento in cui si porterà al bordo d'attacco. Si nota, sul retro del proiettile, una rampa presso la quale il flusso non si distacca ma può avvenire un'espansione se $M_{loc} \geq 1$: la separazione avviene allo spigolo terminale del corpo, ove si forma la scia.

CAPITOLO 4 - ONDE OBLIQUE

4.6.3 Flusso supersonico attorno ad un cono

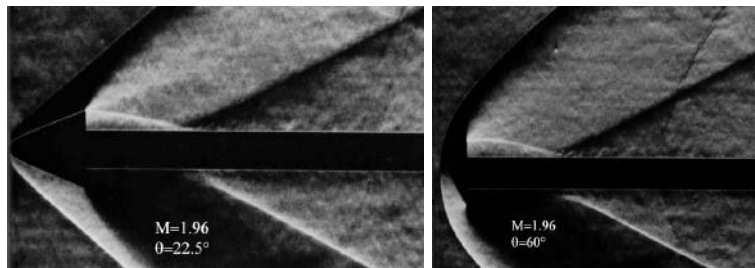


Figure 4.25: Urto conico attaccato e staccato - tecnica Schlieren

Si nota come l'espansione di Prandtl-Meyer nasca nella discontinuità dovuta al termine dello spigolo del cono. Inoltre l'espansione è leggermente più inclinata dell'onda d'urto frontale e dunque andrà a coalescere in un certo punto fuori immagine. L'attaccamento dell'urto o il distacco dell'urto curvo dipende dal ϑ_{max} sopportabile da una corrente avanzante a $M = 1.96$.

4.6.4 Flusso supersonico attorno ad una sfera

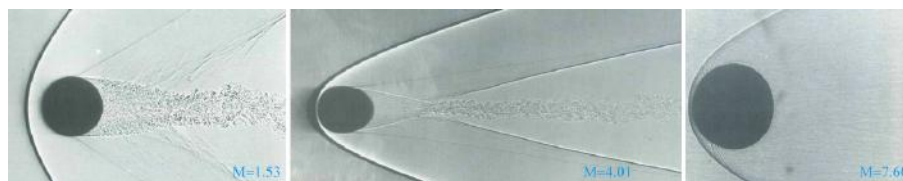


Figure 4.26: Urto sferico - tecnica Schlieren

L'urto curvo diviene, a distanza crescente dal corpo, oltre la scia, una linea di Mach. Più ci si addentra nell'iperpersonico più si assottiglia il campo disturbato dall'urto. Per $M = 7.6$ l'onda d'urto è quasi attaccata al corpo, separata solo dallo strato limite nel punto d'arresto.



Figure 4.27: Urto sferico e riflesso - tecnica Schlieren

In questo caso la sfera ha al di sotto un piano fisico perforato sulla sua superficie. Attraverso il foro si genera un passaggio di corrente e si notano delle onde di piccola perturbazione, un disturbo acustico, che, se involuppate, si mostrano inclinate di μ .

CAPITOLO 4 - ONDE OBLIQUE

tali condizioni convergono ai valori della slipline curva, che sopporta gradienti di velocità ma non di pressione . Il campo finora studiato si può analizzare con l'espansione di Prandtl-Meyer, difatti tramite l'isentropica è possibile risalire ad M_4 nota $p_4 = p_a$. E' possibile ancora ricavare $\nu(M_4)$ così come si può ricavare $\nu(M_1)$, dato che M_1 è già noto, e dunque è possibile sapere anche di quanto si sia deflessa la corrente e cioè $\vartheta = \nu(M_4) - \nu(M_1)$.

$$p_{o1} = p_{o4} = p_4 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_4^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \implies \text{ricavo } M_4$$

$$\nu(M_1) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \sqrt{M_1^2 - 1} \right) - \tan^{-1} \left(\sqrt{M_1^2 - 1} \right) \quad (4.37)$$

$$\nu(M_4) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \sqrt{M_4^2 - 1} \right) - \tan^{-1} \left(\sqrt{M_4^2 - 1} \right)$$

La slipline si incurva perchè incontra le onde riflesse che interagiscono. Queste onde riflesse, tra l'altro, si riflettono nuovamente sulla slipline per portarsi nuovamente in direzione della "parete" mediana. In questo caso, però, le onde riflesse per la seconda volta hanno fatto espandere fin troppo la corrente, e dunque nei campi (7), (10), (11), (13), (14) e (15) $p_1 < p_a$ e le onde sono di compressione, e difatti coalescono. Come visto nella Figura (4.13), in casi come questo nasce un urto retto fino alla "parete" e al di sotto l'onda si riflette. Poco dopo, nel campo (17), la compressione è stata fin troppo vigorosa e nuovamente $p_1 > p_a$; il fenomeno è pronto a ripetersi di pari passo come se questa porzione di spazio fosse l'uscita dell'ugello, cioè (1) \equiv (17). Se non esistessero fenomeni dissipativi questi urti retti nel getto sarebbero periodici ed infiniti.



Figure 4.29: Diamond shear - Visualizzazione dei dischi di Mach

Si nota, infine, che $p_4 = p_8 = p_{12} = p_{16} = p_a$ perchè tutte a contatto con la slipline, mentre $M_4 \neq M_8 \neq M_{12} \neq M_{16} \neq M_a = 0$.

4.8 Teoria dell'urto-espansione

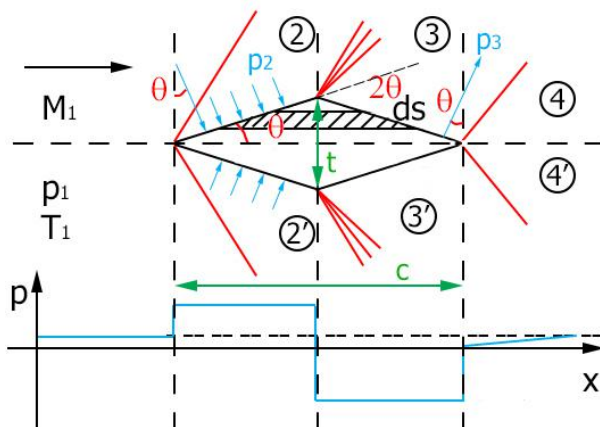


Figure 4.31: Profilo a diamante simmetrico investito da una corrente supersonica

Sia presente un'ala il cui profilo sia simmetrico a diamante e sia presente un flusso d'aria supersonico che la investe. Si vuole studiare la combinazione degli effetti della simultanea presenza dell'urto e dell'espansione su di un corpo.

Nel profilo a diamante, prendendo in considerazione l'emisezione superiore, la corrente investe una superficie assimilabile ad una rampa inclinata di ϑ : si genera un urto attaccato obliquo e per la condizione di aderenza la corrente, passando dal campo ① al ②, avrà ruotato in senso antiorario di ϑ . Ciò significa, dato l'urto, che tutto il campo ② avrà una pressione $p_2 > p_1$ a monte.

Incontrando lo spigolo del diamante, la corrente subisce una deflessione pari a 2ϑ rispetto alla direzione del flusso nel campo ②. Allontanandosi dalla direzione del campo ②, in ③ è avvenuta un'espansione e $p_3 < p_1$ e non solo $p_3 < p_2$, dato che la deflessione è maggiore del singolo ϑ della compressione.

In corrispondenza del bordo di fuga, supponendo tutti gli urti deboli, la corrente è supersonica e si generano due urti obliqui, di intensità diversa rispetto ai primi, necessari per riequilibrare le pressioni. Se l'incidenza del profilo è nulla, i campi ④ e ④' sono identici e non è necessaria la formazione di una slipline.

Integrando la distribuzione di pressione, mostrata in Figura (4.31), è possibile ricavare i coefficienti adimensionali di portanza e resistenza. Inoltre, il coefficiente di pressione C_p ha due formulazioni: una generica, dove si ricorre ai valori indisturbati (∞) ed una specifica per le teorie in esame, che coinvolge il Mach; in questo caso, la generica pressione p è quella del campo ricercato (ad esempio ②) mentre p_1 è la pressione a monte (①)

$$\begin{aligned}
 C_p &= \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2} \equiv \frac{2}{\gamma M_1^2} \left(\frac{p}{p_1} - 1 \right) \\
 C_L &= \frac{L}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 S} = f(p) \\
 C_D &= \frac{D}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 S} = f(p)
 \end{aligned}
 \tag{4.38}$$

4.8.1 Profilo biconvesso simmetrico

Definito ϑ_{le} (*leading edge*), angolo di semiapertura del profilo biconvesso simmetrico^[9] al bordo d'attacco, se l'angolo massimo ammesso per avere un urto attaccato ϑ_{max} , dato un certo M a monte, è $\vartheta_{max} < \vartheta_{le}$, allora l'urto è attaccato. Altrimenti, come nel caso della figura seguente, è staccato.

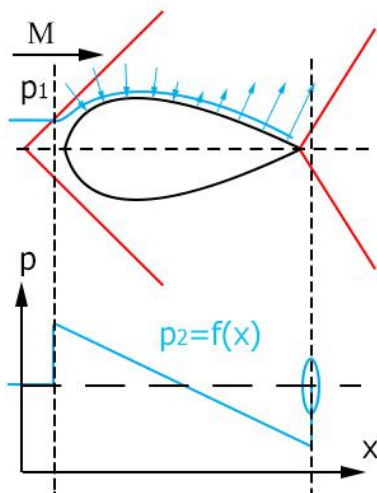


Figure 4.32: Profilo biconvesso simmetrico investito da una corrente supersonica

La corrente supersonica incontra il primo urto obliquo, e subito a valle dell'urto la pressione cresce divenendo $p_2 > p_1$. Però questa pressione non può mantenersi costante, perchè in ogni punto del profilo la pendenza locale cambia e, allontanandosi la corrente sempre più dal tratto precedente, esistono successive espansioni ed in ogni punto del profilo partono delle onde di espansioni elementari. La riduzione di pressione ha una legge che varia a seconda della geometria: nella Figura (4.32) si è supposta una riduzione lineare.

Esisterà un certo punto in cui l'espansione avrà portato $p_2(x) = p_1$, ma solitamente avviene che l'espansione continua e p_2 discende al di sotto della pressione a monte p_1 . In corrispondenza del bordo di fuga deve nascere un ulteriore urto obliquo per riequilibrare le pressioni nell'intorno di p_1 .

Anche in questo caso il $C_L = 0$ mentre la resistenza d'onda è presente, poichè $C_{D_w} \neq 0$. Per $\alpha \neq 0^\circ$ gli urti e le espansioni diventano asimmetriche e $C_L \neq 0$.

^[9]Un profilo lenticolare

5. Flussi linearizzati

Le equazioni di governo del campo di moto, scritte nella forma della velocità potenziale $\phi = \phi(x, y, z)$ non sono lineari e complesse da risolvere. Linearizzare un fenomeno fisico significa assumere che il campo di moto ed il corpo al suo interno siano poco perturbati, affinché le linee di flusso siano “quasi lineari”.

Per profili sottili e per piccole incidenze $\alpha \approx 3 \div 4^\circ$ è possibile linearizzare le equazioni, mantenendo un’ottima approssimazione rispetto al caso reale.

Si imposta il problema matematico su un piano fisico (x, y) in cui esista un profilo alare di spessore $y = f(x)$ in un flusso inviscido ($\mu = 0$)

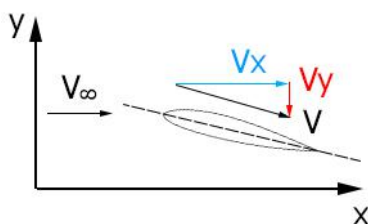


Figure 5.1: Modello matematico per la teoria delle piccole perturbazioni

Introducendo le velocità di perturbazione u', v', w' , a monte $\vec{V} = \{V_\infty, 0, 0\}$, mentre a valle $\vec{V} = \{V_\infty + u', v', w'\}$. Per un flusso irrotazionale e per un’evoluzione isentropica, \vec{V} si può esprimere con il gradiente della funzione potenziale ϕ ,

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \vec{V}_x + \vec{V}_y + \vec{V}_z = (V_\infty + u') \vec{i} + v' \vec{j} + w' \vec{k} \\ \vec{V} = \nabla \phi &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Per l’analisi delle piccole perturbazioni, occorre distinguere fra la funzione potenziale della velocità macroscopica, o funzione potenziale totale, d’ora in avanti indicata con Φ , e la funzione potenziale di perturbazione, ϕ .

$$\Phi(x, y, z) = V_\infty x + \phi'(x, y, z) \implies \begin{cases} V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = V_\infty + u' = V_\infty + \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ V_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = v' = \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ V_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = w' = \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{cases} \quad (5.2)$$

CAPITOLO 5 - FLUSSI LINEARIZZATI

Procedimento analogo per il secondo e terzo termine della (5.4 (3)), fatta eccezione per i termini in rosso, che non compaiono nelle altre equazioni dato che non esiste una V_∞ a monte nelle direzioni y e z . Invece prendendo il resto della (5.4 (3)), e ricordando che, ad esempio, $\frac{\partial u'}{\partial y} = \frac{\partial v'}{\partial x}$,

$$\begin{aligned}
 0 &= 2(V_\infty + u')v' \frac{\partial u'}{\partial y} + 2(V_\infty + u')w' \frac{\partial u'}{\partial z} + 2v'w' \frac{\partial v'}{\partial z} \\
 0 &= (V_\infty + u')v' \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) + (V_\infty + u')w' \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right) + u'w' \left(\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y} \right) \quad \div a_\infty^2 = \frac{V_\infty^2}{M_\infty^2} \\
 0 &= M_\infty^2 \left[\frac{v'}{V_\infty} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) + \frac{u'v'}{V_\infty^2} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) + \frac{w'}{V_\infty} \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right) + \frac{u'w'}{V_\infty^2} \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right) + \frac{v'w'}{V_\infty^2} \left(\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y} \right) \right] \quad (5.6) \\
 0 &= M_\infty^2 \left[\frac{v'}{V_\infty} \left(1 + \frac{u'}{V_\infty} \right) \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) + \frac{w'}{V_\infty} \left(1 + \frac{u'}{V_\infty} \right) \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right) + \frac{v'w'}{V_\infty^2} \left(\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y} \right) \right]
 \end{aligned}$$

La grande equazione può essere riscritta come di seguito, portando a primo membro i termini in forma chiusa e a secondo membro le componenti non lineari

$$\begin{aligned}
 (1 - M_\infty^2) \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= M_\infty^2 \left[(\gamma + 1) \frac{u'}{V_\infty} + \frac{\gamma + 1}{2} \frac{u'^2}{V_\infty^2} + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{(v'^2 + w'^2)}{V_\infty^2} \right] \frac{\partial u'}{\partial x} + \\
 &+ M_\infty^2 \left[(\gamma - 1) \frac{u'}{V_\infty} + \frac{\gamma + 1}{2} \frac{v'^2}{V_\infty^2} + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{(u'^2 + w'^2)}{V_\infty^2} \right] \frac{\partial v'}{\partial y} + \\
 &+ M_\infty^2 \left[(\gamma - 1) \frac{u'}{V_\infty} + \frac{\gamma + 1}{2} \frac{w'^2}{V_\infty^2} + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{(u'^2 + v'^2)}{V_\infty^2} \right] \frac{\partial w'}{\partial z} + \\
 &+ M_\infty^2 \left[\frac{v'}{V_\infty} \left(1 + \frac{u'}{V_\infty} \right) \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) + \frac{w'}{V_\infty} \left(1 + \frac{u'}{V_\infty} \right) \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right) + \frac{v'w'}{V_\infty^2} \left(\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y} \right) \right] \quad (5.7)
 \end{aligned}$$

Questa equazione non ha subito ancora semplificazioni per assunzioni sulle entità delle velocità di perturbazione u' , v' , w' : dunque, è ancora esatta per flussi irrotazionali ed isentropici e per qualsiasi regime. Introducendo le ipotesi di piccole perturbazioni per Mach compreso in $M \in [0, 0.8] \cup [1.2, 5)$,

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{u'}{V_\infty} \ll 1 \quad \left(\frac{u'}{V_\infty} \right)^2 \ll 1 &\implies [1 - M_\infty^2] \frac{\partial u'}{\partial x} \gg M_\infty^2 \underbrace{[\dots]}_{\ll 1} \frac{\partial u'}{\partial x} \\
 \frac{v'}{V_\infty} \ll 1 \quad \left(\frac{v'}{V_\infty} \right)^2 \ll 1 &\implies \frac{\partial v'}{\partial y} \gg M_\infty^2 \underbrace{[\dots]}_{\ll 1} \frac{\partial v'}{\partial y} \\
 \frac{w'}{V_\infty} \ll 1 \quad \left(\frac{w'}{V_\infty} \right)^2 \ll 1 &\implies \frac{\partial w'}{\partial z} \gg M_\infty^2 \underbrace{[\dots]}_{\ll 1} \frac{\partial w'}{\partial z}
 \end{aligned} \right. \quad (5.8)$$

Con le prime due ipotesi di piccole perturbazioni, per ogni riga della (5.8), i primi tre termini del secondo membro della (5.7) si annullano finchè siamo in campo subsonico o supersonico; in transonico ed ipersonico, invece, i termini divengono quasi paragonabili. L'ultimo termine del secondo membro della (5.7) vede comparire i prodotti delle velocità di perturbazioni, quindi è a maggior ragione trascurabile: inoltre, è circa nullo anche nel caso reale.

Allora la grande equazione diviene

$$\boxed{(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0} \quad (5.9)$$