NUMERO: 1962A - ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Ferracci Aleasa

MATERIA: Ricerca operativa

1 RICERCA OPERATIVA

1) Algoritmo simplesso

$$\max \; -2x_1 - 4x_2 - x_3 - 3x_4$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5$$

$$-x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -6$$

$B = [x_2, x_3]$

in forma standard

$$\min \; 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 6$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$B = [x_2, x_3]$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \det = -3$$

$B \quad B^{-1} \cdot b = x_B$
$z_0 = c_B^T \cdot x_B$
$\lambda^T = c_B^T \cdot B^{-1}$
$r_J = c_J - \lambda^T [a_J]$
$y_J = B^{-1} \cdot a_J$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \underset{\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}}{b} = \begin{bmatrix} 7/3 \\ 4/3 \end{bmatrix} x_B$$

$$z_0 = c_B^T \cdot x_B = [4 \;\; 1] \begin{bmatrix} 7/3 \\ 4/3 \end{bmatrix} = \frac{32}{3}$$

$$\lambda^T = c_B^T \cdot B^{-1}$$

$$\lambda^T = [4 \;\; 1] \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \left[-\frac{2}{3} \;\; \frac{7}{3}\right]$$

$$r_1 = 2 - [-2/3 \;\; 7/3] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$r_4 = 3 - [-2/3 \;\; 7/3] \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$r_1 = 2 - \frac{5}{3} > 0$

$r_4 = 3 - \frac{10}{3} < 0 \rightarrow$ quindi entra x_4

esce

$$y_4 = B^{-1} \cdot a_4 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

cerco minimo rapporto $\frac{x_B}{y_{iq}}$ $y_{iq} > 0$ $= \left\{ \frac{7/3}{2/3}, \frac{4/3}{2/3} \right\}$

esce x_3

$B = [x_2, x_4] \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \det = -2$$

$r_1 = > 0$
$r_3 = > 0$

$\boxed{\text{STOP OTTIMO}}$

$$\lambda^T = c_B \cdot B^{-1} = [4 \;\; 3] \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \left[-1 \;\; \frac{5}{2}\right]$$

$$\lambda^T = C_B^T \cdot B^{-1} = [-2 \quad 0] \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ -1/4 & 1 \end{bmatrix} = [-\tfrac{1}{2} \quad 0]$$

$$r_1 = 5 - [-\tfrac{1}{2} \quad 0] \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = >0$$

$$r_3 = -3 - [-\tfrac{1}{2} \quad 0] \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = <0 \rightarrow \text{quindi entra } x_3$$

$$y_3 = B^{-1} \cdot a_3$$

$$= \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ -\tfrac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cancel{-\tfrac{1}{2}} \\ \tfrac{5}{2} \end{bmatrix} \text{ esce } x_5$$

$$B = [x_2, x_3]$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \det = 10$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{5} & \tfrac{1}{5} \\ -\tfrac{1}{10} & \tfrac{2}{5} \end{bmatrix} \cdot b = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} x_B$$

$$b = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$z_0 = C_B^T \cdot x_B = [-2 \quad -3] \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = -20$$

soluzione migliora ancora F.O. minimo

$$\lambda^T = C_B \cdot B^{-1}$$

$$= [-2 \quad -3] \begin{bmatrix} \tfrac{1}{5} & \tfrac{1}{5} \\ -\tfrac{1}{10} & \tfrac{2}{5} \end{bmatrix} = [-\tfrac{1}{10} \quad -\tfrac{16}{10}]$$

$$r_1 = 5 - [-1/10 \quad -16/10] \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = >0$$

$$r_4 = 0 - [-1/10 \quad -16/10] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = >0$$

$$r_5 = 0 - [-\tfrac{1}{10} \quad -16/10] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = >0$$

$\boxed{\text{STOP OTTIMO}}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 86

$$\lambda^T = C_B^T \cdot B^{-1} = [1\ 0]\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix} = [1\ -1]$$

$$r_2 = 0 - [1\ -1]\begin{bmatrix}5\\-1\end{bmatrix} = <0$$ STOP mi fermo entra x_2

$$r_3 = 0 - [-1\ -1]\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$$

$$y_2 = B^{-1}\cdot a_2 = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\ \cancel{-1}\end{bmatrix}$$ esce x_1

$B = [x_2, x_1]$

$$B = \begin{bmatrix}5 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \quad det = 6$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix}1/6 & -1/6\\ 1/6 & 5/6\end{bmatrix} \cdot \underset{\begin{bmatrix}15\\3\end{bmatrix}}{b} = \begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix} x_B$$

$$z_0 = C_B^T \cdot x_B = [0\ 0]\cdot\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} = 0 \text{ OK}$$

$$\lambda^T = C_B^T \cdot B^{-1} = [0\ 0]$$

$$r_3 = 0 - 0 \geq 0$$
$$r_{y_1} = 1 - 0 > 0$$
$$r_{y_2} = 1 - 0 > 0$$

STOP **soluzione ottima con algoritmo artificiale**

torno al problema di partenza (senza algoritmo artificiale)

$$B = \begin{bmatrix}5 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix}1/6 & -1/6\\ 1/6 & 5/6\end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix} \quad \lambda^T = B^{-1} C_B^T$$ del problema di partenza

$$= \begin{bmatrix}1/6 & -1/6\\ 1/6 & 5/6\end{bmatrix}[5\ \ 1] =$$

$$= [1\ \ 4]$$

$$r_3 = -\frac{1}{2} - [1\ 4]\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix} < 0$$ STOP quindi entra x_3

esce → $$y_3 = B^{-1}\cdot a_3 = \begin{bmatrix}1/6 & -1/6\\ 1/6 & 5/6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}\cancel{-3/6}\\ 3/6\end{bmatrix}$$ esce x_1

$B = [x_2, x_3]$

→

2 Analisi sensibilità

- termini noti → controllo ammissibilità
- costi → controllo ottimo

TERMINI NOTI

perturbazione fissa

$b^* = b + \Theta$

ES. $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\Theta = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$b^* = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

controllo ammissibilità →

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} \cdot b^* = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cancel{-1/3} \\ 8/3 \end{bmatrix}$$

negativo ↓ soluzione non ammissibile

che però resta ottima

perturbazione parametrica

$b^* = b + k \cdot \Theta$

ES.

$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\Theta = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$b^* = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - k \\ 3 + 2k \end{bmatrix}$$

controllo ammissibilità

↓ ≥ 0

$$B^{-1} \cdot b^* = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3-k \\ 3+2k \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 - \frac{2}{3}k - 1 - \frac{2}{3}k \geq 0 \\ -1 + \frac{1}{3}k + 2 + \frac{4}{3}k \geq 0 \end{bmatrix}$$

$1 - \frac{4}{3}k \geq 0$

$k \leq \frac{3}{4}$

$1 + \frac{5}{3}k \geq 0$

$k \geq -\frac{3}{5}$

per avere ammissibilità

perturbazione parametrica

$$C^* = C + k \cdot \theta$$

ES. $\theta = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $C = [-1 \ -1 \ 10 \ 10]$

$$C^* = [-1 \ -1 \ 10 \ 10] + k \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

$$C^* \Rightarrow [-1+5k, -1+2k, 10-2k, 10+3k]$$

costo variabili perturbate

controllo ottimo

$$\lambda^T = C_B^T \, B^{-1} = [7/3 \ -\tfrac{2}{3}]$$

$$r_J = C_J - [7/3 \ -\tfrac{2}{3}][a_J] \geq 0$$

avrò un intervallo

k_1 k_2 che soddisfa condizione di ottimo

intervallo stabilità

costo variabile FUORI BASE

$$k \geq -r_J$$

costo variabile IN BASE

$$\rightarrow r_D^T - k \cdot \lambda_B^T \cdot B^{-1} \cdot D \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} \text{costo variabili fuori base} \end{bmatrix} - [k, 0, 0 \ldots] \begin{bmatrix} B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{matrice variabili fuori base} \end{bmatrix}$$

oppure intervallo stabilità di un C_J

C_J = costo variabile fuori base

riga corrispondente a variabile + costo

[costo variabili fuori base] − [k,0,0][B^{-1}][D]

matrice variabili fuori base

SE C_J IN BASE

(b) tableau → partendo dalla forma standard

variabili artificiale

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	
y_1	1	1	0	1	0	-2
y_2	2	-1	0	0	1	1
x_3	2	1	1	0	0	1
	~~3~~ 1	~~2~~ 1	1	0	0	

ma sono tutti positivi

→ problema ottimo ma soluzione NON AMMISSIBILE

in base quando aggiungo variab. artificiale = 0

in base

- costi negativi → entra minimo $\frac{b}{x_j}$ dove $x_j > 0$

- termini noti negativi → entra minimo $\frac{r}{|x_j|}$ $x_j < 0$

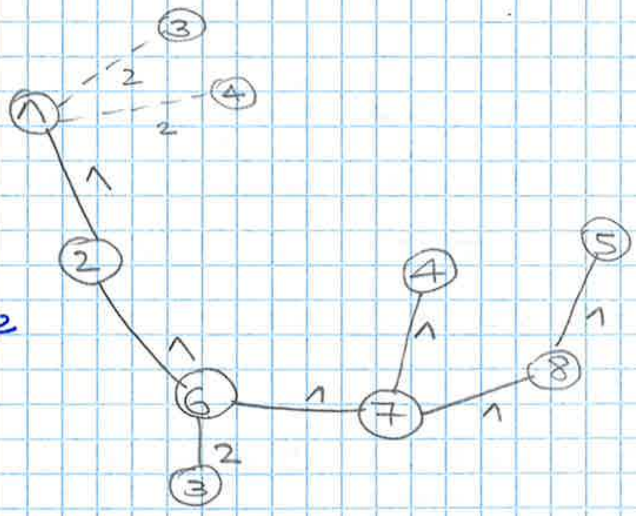
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 86

Algoritmo Kruskal

(✱)

(1,2) = 1 seleziomo arco SI
(2,6) = 1 seleziomo arco SI
(6,8) = 1 NO ciclo
(6,7) = 1 SI
(7,8) = 1 SI
(7,4) = 1 SI
(8,5) = 1 SI
(1,3) = 2 No già fatto (6,3)
(3,6) = 2 SI
(1,4) = 2 No ciclo
(4,8) = 2 No ciclo
(6,4) = 2 No ciclo
(3,7) = 3 No ciclo
(1,5) = 3 No ciclo

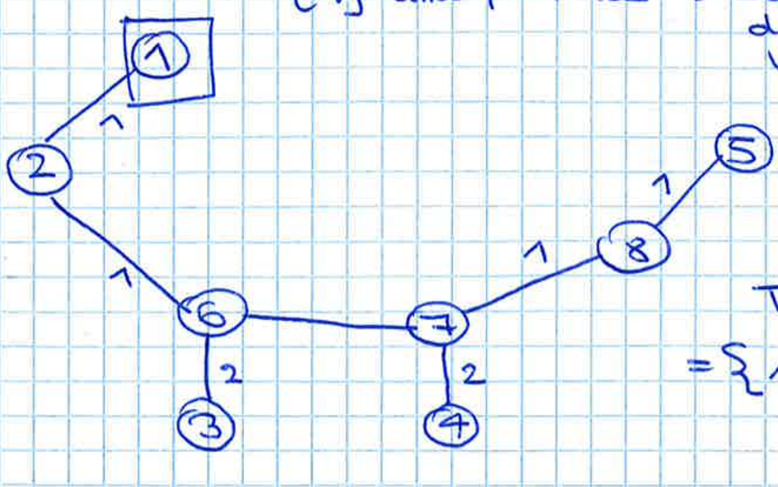
8-1 = 7 spigoli
|V| - 1 = archi



algoritmi ≠ grafo non univoco ma potrebbe corrispondere

Prim

T = {1} alla partenza → scelgo minimo tra archi dal nodo T a un nodo non di T



T finale =
= {1, 2, 6, 3, 7, 4, 8, 5}

$J = E$ $\qquad \bar{S} = \{F, G, H\}$

$J = E \cap \bar{S} = \{F\}$

$\pi(E) = 4$ ottimo $\qquad P(E) = B$

$\pi(G) = 4$

$\pi(F) = \min(7, 1+3+3) = 7$

$J = G$ $\qquad \bar{S} = \{F, H\}$ $\qquad J = G \cap \bar{S} = \{F, H\}$

$\pi(G) = 4$ ottimo

$P(G) = C$

$\pi(F) = \min(7, \underbrace{2+2}_{4}+x)$ $\quad 4+x$

$\pi(H) = \min(\infty, 2+2+4) = 8$

$J = F$ $\qquad \bar{S} = \{H\}$

$P(F) = G$ $\qquad \pi(F) = 4 + x$ ottimo

$\pi(H) = \min(8, 2+2+x+1)$

$\downarrow$

$4 + x + 1 = \boxed{7}$ $\quad A - H$

$X = 2$

quindi

$\pi(F) = 6$

$\pi(H) = 7$

$\pi(H) = F$

$J = H \rightarrow \bar{S} = \{\emptyset\}$ STOP

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 86

6 Metodo dei trasporti

	1	2	3	4	a_i
1	5	3	6	2	100
2	5	6	8	4	60
3	1	4	3	7	85
4	8	1	6	5	55
b_J	70	90	90	50	

a) verifico che sia bilanciato

$$\sum a_i = \sum b_J$$

$$100+60+85+55 = 70+90+90+50$$

SI OK

$$c_{iJ} = u_i + v_J$$

$$r_{iJ} = c_{iJ} - (u_i + v_J)$$

r=1 r=−2 r=−3 r=3 r=−2 r=−3 r=5 r=2 r=−3

					u_i
$\boxed{5}$ 70	$\boxed{3}$ 30	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$	100	4
$\boxed{5}$	$\boxed{6}$ 60	$\boxed{8}$ −	$\boxed{4}$ + 0	60	7
$\boxed{1}$	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$ 85	$\boxed{7}$	85	2
$\boxed{8}$	$\boxed{1}$ +	$\boxed{6}$ − 5	$\boxed{5}$ 50	55	5
70	90	90	50		
1	−1	1	0		

$x_{4,2}$ v_J

sempre parto da qui

tra i r_J scelgo quello minore e lo faccio entrare in base scelgo $x_{4,2}$ e quindi costruisco il ciclo: tra θ ⊖ scelgo quello minore affinché esca dalla base quindi $\theta = 5$

↓

70	30		
	55	5	
		85	
	5	/	

variabile $x_{4,3}$ è uscita

$r=2$

[8] esce	[5] 60	[8] 30	[9]	7
[4] − 50	[6] $r=3$	[10] $r=4$	[4] +	5
[2] 30 +	[11] $r=10$	[4] 0	[3] 30 −	3
[0]	[0]	[0]	[0] 20	0
−1	−2	1	0	

$r=-1$

$r=-1$ $r=2$ $r=1$

Entra $X_{2,4}$
esce $X_{3,4}$
$\theta = 30$

[8] $r=2$	[5] 60	[8] 30	[9] $r=3$	6
[4] 20	[6] $r=3$	[10] $r=4$	[4] 30	4
[2] 60	[11] $r=10$	[4] − 0	[3] + esce	2
[0] $r=0$	[0]	[0] +	[0] − 20	0
0	−1	2	0	

$r=1$ $r=-2$

Entra $X_{4,3}$
esce $X_{3,3}$
$\theta = 0$

[8]	[5] + 60	[8] − 30	[9]	8	90
[4] − 20	[6]	[10]	[4] + 30	4	50
[2] + 60	[11]	[4] esce	[3]	2	60
[0]	[0]	[0] + 0	[0] − 20	0	20
0	−3	0	0		
80	60	30	50		

magazzino

negozio

r_J costi tutti ≥ 0 positivi quindi STOP OTTIMO

per il teorema della Dualità Debole la massima variazione di F.O. è pari a $\mu_i \Delta + v_j \Delta$

Obbiettivo: ridurre la F.O.
quindi aumenta capacità del negozio 2 e quella del magazzino del 3

$\Delta \leq 20$
in modo che $X_{2,1}$ e $X_{4,4}$ diventino non negative
↓
prendo $\Delta = 20$

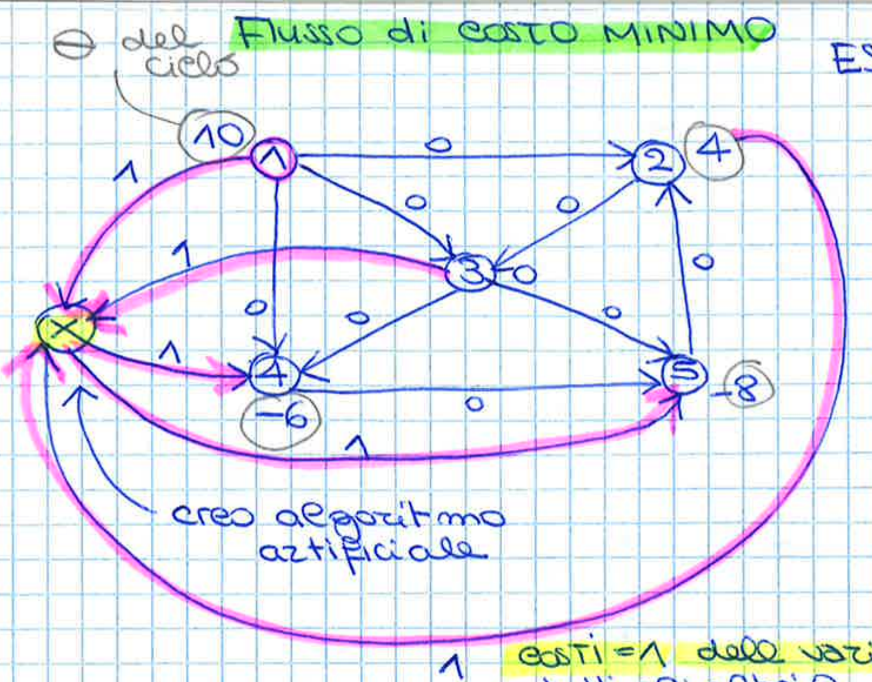
→ (avendo costi maggiori allora si aumento i carichi)

	80	10		90
0			50	50
80				80
		20	0	20
80	80	30	50	

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 86

Flusso di costo minimo

ES. con Algoritmo artificiale

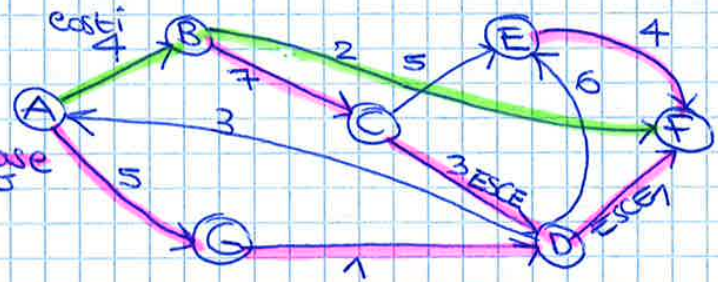


valori negativi ← X ← valori positivi

costi = 1 delle variabili in base con X
tutti gli altri 0

e pongo $\lambda_x = 0$

Flusso costo minimo: esempio



offerta/domanda =
$b_A = 10$
$b_B = 8$
$b_C = -6$
$b_D = -8$
$b_E = 1$
$b_F = -8$
$b_G = 3$

variabili in base
θ x il ciclo

$X_{EF} = 1$
$X_{BC} = 8$
$X_{AG} = 10$
$X_{GD} = 13$
$X_{DF} = 7$
$X_{CD} = 2$

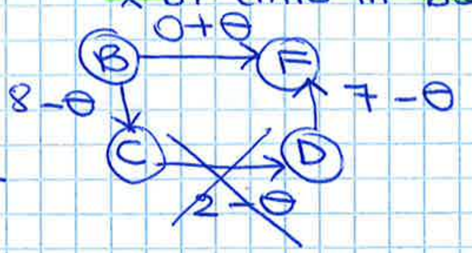
impongo $\lambda_F = 0$

$C_{DF} = \lambda_D - \lambda_F \rightarrow \lambda_D = 1$
$C_{EF} = \lambda_E - \lambda_F \rightarrow \lambda_E = 4$
$C_{BC} = \lambda_B - \lambda_C \rightarrow \lambda_B = 11$
$C_{AG} = \lambda_A - \lambda_G \rightarrow \lambda_A = 7$
$C_{GD} = \lambda_G - \lambda_D \rightarrow \lambda_G = 2$
$C_{CD} = \lambda_C - \lambda_D \rightarrow \lambda_C = 4$

$r_{ij} \rightarrow$ variabili non in base e al primo < 0 mi fermo e lo faccio entrare in base

$r_{AB} = C_{AB} - \lambda_A + \lambda_B => 0$
$r_{BF} = C_{BF} - \lambda_B + \lambda_F = -9$ STOP
X_{BF} entra in base

$X_{EF} = 1$
$X_{BC} = 6$
$X_{AG} = 10$
$X_{GD} = 13$
$X_{DF} = 5$
~~X_{CD}~~ = FUORI BASE
X_{BF} = ENTRA = 2

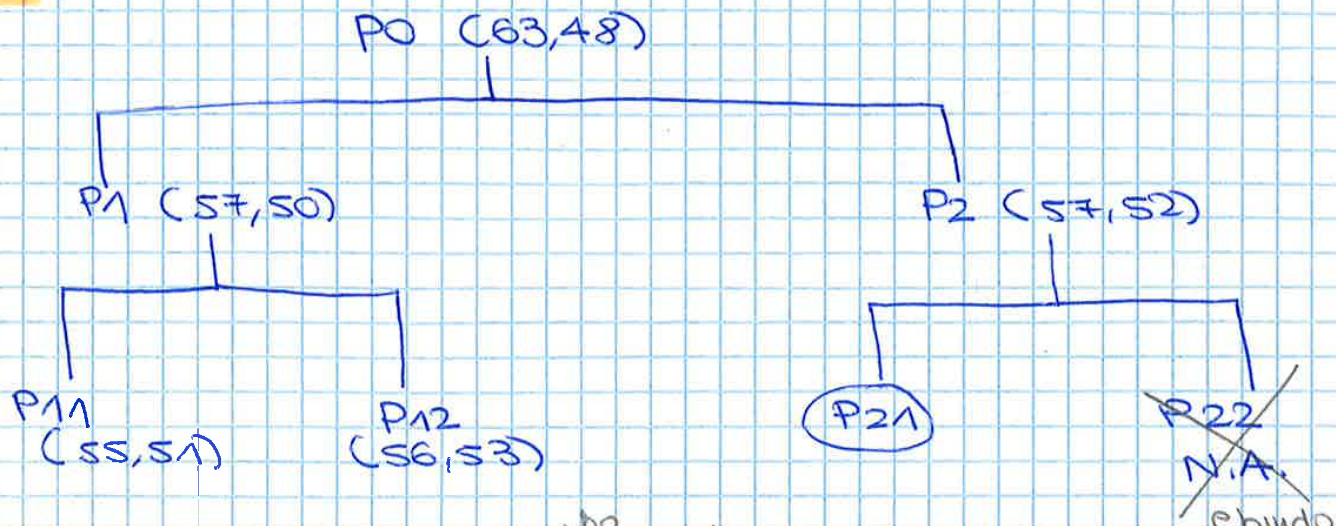


$\theta = 2$
esce X_{CD}

→

8

Branch & Bound (UB, LB)



ne ho variabili NO intere allora MINIMO

ne problema **MINIMO**

LB non potrà essere più piccolo del LB padre

$LB_{21} \geq LB_2$

$UB_{21} \geq LB_{21}$

$\underset{\text{padre}}{\alpha} \leq LB = UB \leq \beta$

ne problema **MASSIMO**

$UB \leq z^*$

$\beta < LB \leq UB \leq \underset{}{\overset{\text{padre}}{\alpha}}$

α = padre

LB può essere al massimo pari all'UB del nodo padre

(e LB della z^* e la miglior soluzione trovata)

In questo caso =

MIN $\quad \underset{\text{padre}}{\overset{\alpha}{52}} \leq LB = UB \leq 51 \qquad [51,51]$ $[52,52]$

MAX $\quad 56 \leq LB \leq UB \leq \underset{\text{padre}}{\overset{\beta}{57}}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 86

Branch & Bound

$\max \; 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4$ — f_1

s.t. $2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 11$ — f_2

f_1, f_2 → 2 F.O.

rapporto variabili $\frac{F.O}{vincolo}$

ordine decrescente → $\boxed{x_1, x_4, x_3, x_2}$

trova la soluzione ottima e dimmi se è efficiente rispet. a Z^* trovata in una iterazione precedente

$Z_0 [13, 11]$ (f_1, f_2)

nodo $\varnothing$

$x_1 = 1$
$x_4 = 1$
$x_3 = 1$
$x_2 = \frac{5}{6}$

$[10, 13.33]$

$Z^* = 10$

essendo problema MAX miglior soluzione ottima = LB

UB = stima ottimistica

$x_2 = 0$

$x_2 = 0$
$x_1 = 1$
$x_4 = 1$
$x_3 = 1$

$[10, 10]$

UB = LB

X chiudo nodo

$x_2 = 1$

$x_2 = 1$
$x_1 = 1$
$x_4 = 1$
$x_3 = \frac{2}{3}$

$[11, 13]$

UB migliore di Z^* continuo

$x_3 = 0$

$x_3 = 0$
$x_2 = 1$
$x_1 = 1$
$x_4 = 1$

$[11, 11]$

X chiudo nodo

UB = LB

$Z^* = 11$

$x_3 = 1$

$x_3 = 1$
$x_2 = 1$
$x_1 = 1$

$[12, 12]$

chiudo nodo

X

UB = LB

$Z^* = 12$ Soluzione OTTIMA

F.O. del $\boxed{\text{vincolo}}$

$3x_3 + 6x_2 + 2x_1$ con $x_3 = 1$, $x_2 = 1$, $x_1 = 1$

confronto

$Z^* [12, 11]$

$Z_0 [13, 11]$

per la F.O del f_2 del vincolo sono uguali

per la F.O del f_1 essendo un problema di max f_1 di $Z_0 = 13$ è più efficiente perchè $12 < 13$

↓

quindi Z_0 domina Z^*

TEORIA

Soluzioni di base = estraiamo da A m vettori colonna ottieniamo B m × m

$B x_B = b$

$x = (x_B, 0)$ variabili di base

$\boxed{Ax = b}$

soluzione di base ammissibile

$$\boxed{\begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}}$$

ad ogni passaggio del simplesso l'algoritmo F.O migliora? → non è detto si può anche tornare al punto di partenza o x ES = valore resta costante se base entra con valore nullo.

TEOREMA dualità

$\lambda^T A x' \leq c^T x'$

se PP è illimitato allora il PD non ha soluzione perché non esiste niente che valga meno di -infinito.

CONDIZIONI di complementarità

$(A^T \lambda' - c)^T x' = 0$

o

$(A x' - b)^T \lambda' = 0$

se almeno una delle due è soddisfatta

primale

$\min c^T x$

$Ax \geq b$

$x \geq 0$

duale

$\max b^T \lambda$

$A^T \lambda \leq c$

DEFINIZIONI

Albero = grafo connesso senza cicli

Minimo spanning tree = non diretto + pesato + aciclico + + minor costo + contiene |V| - 1 spigoli + + non è necess. unico + tocca tutti i vertici

$b_\alpha = 1$

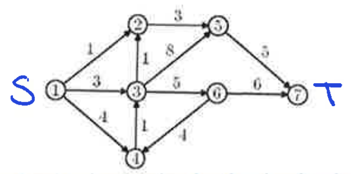
$b_\beta = 1$

$b_\gamma = -2$

TEMA ESAME

DOMANDE:

1. Formulare un modello di Programmazione Lineare relativo al problema di massimo flusso del grafo in figura (i valori sugli archi rappresentano le capacità degli archi stessi) che consideri anche il seguente vincolo aggiuntivo: se gli archi (3, 2) e (3, 5) hanno flusso > 0 allora l'arco 6, 4 deve avere flusso nullo.



F.O. $\max z = v$

$-(x_{12} + x_{13} + x_{14}) = -v$

che escoso da S

che entrano in T

$x_{57} + x_{67} = v$

nodi intermedi

nodo 2 $x_{12} + x_{32} - x_{25} = 0$

nodo 3 $x_{13} + x_{43} - x_{32} - x_{35} - x_{36} = 0$

nodo 4 $x_{14} + x_{64} - x_{43} = 0$

nodo 5 $x_{25} + x_{35} - x_{57} = 0$

nodo 6 $x_{35} - x_{64} - x_{67} = 0$

$\Rightarrow$ (nodi che entrano positivi
nodi che escono negativi)

vincolo logico

$y_{32} + y_{35} \leq 2 - y_{64}$

$y_1, y_2, y_3 = \{0, 1\}$

(oppure $y_{32} + y_{64} \leq 1$)

$y_{35} + y_{64} \leq 1$

2. Risolvere con il simplesso revisionato il seguente problema di P.L. partendo dalla base $[x_1, x_2]$

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 \\ \text{s. a}\ & 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i \end{aligned}$$

in forma standard

$\min -2x_1 - x_2 - 5x_3 - 6x_4$

$3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 4$

$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 4$

$B = [x_1, x_2]$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \det = 8$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 3/8 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & 3/8 \end{bmatrix} \cdot \underset{\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}}{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_B$$

$$\lambda^T = c_B^T \cdot B^{-1} = [-2 -1] \begin{bmatrix} 3/8 & -1/8 \\ -\frac{1}{8} & 3/8 \end{bmatrix} = \left[-\frac{5}{8}, -\frac{1}{8}\right]$$

$$r_3 = -5 - \left[-\frac{5}{8} \ -\frac{1}{8}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{33}{8}$$

$$r_4 = -6 - \left[-\frac{5}{8} \ -\frac{1}{8}\right] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{37}{8} \qquad x_4 \text{ entra}$$

esce $\rightarrow$ $y_4 = B^{-1} \cdot a_4 = \begin{bmatrix} 3/8 & -1/8 \\ -1/8 & 3/8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/8 \\ 1/8 \end{bmatrix}$

minor rapporto $\frac{x_B}{y_4}$

$= \left\{ \frac{1}{\frac{5}{8}}, \frac{1}{\frac{1}{8}} \right\}$ esce x_1

3) In quali condizioni l'algoritmo del simplesso può trovarsi a ciclare all'infinito senza raggiungere l'ottimo se non viene applicata la regola di Bland?

Domanda 3.

E' possibile che l'algoritmo del simplesso cicli infinitamente senza riuscire a trovare una soluzione quando si sceglie come elemento di pivot un elemento (p,q) a cui corrisponde $y_{p0} = 0$, ossia quando siamo dinanzi a una *soluzione degenere*. Dal momento che in queste condizioni il valore della funzione obiettivo non diminuisce, vi è il rischio di passare da una soluzione degenere ad un'altra e di tornare così al tableau di partenza (loop).
La regola di Bland rappresenta una regola semplice e di facile applicazione (oltre che priva di dimostrazione formale) per evitare questo tipo di rischi. Tale regola ci impone di far entrare in base la variabile con minimo indice di colonna tra quelle con $r_j<0$ e di fare uscire dalla base quella con minimo indice di riga tra quelle che hanno stesso minimo rapporto y_{i0} / y_{1q} con $y_{iq}> 0$.
La regola assicura che l'algoritmo termini dopo un numero finito di passi di pivot.

4) Perché l'Algoritmo di Bellman-Ford riesce ad individuare cicli di lunghezza negativa (se esistono) nel problema di cammino minimo?

Domanda 4.

L'algoritmo di Bellman-Ford si basa sul seguente presupposto: per andare dal nodo iniziale 1 al generico nodo *i* è necessario passare per uno dei nodi *j* predecessori di *i*. Il valore della lunghezza del cammino minimo tra 1 e *i* sarà quindi pari a:

$$\Pi(i) = \min [\, \Pi(i), \min_{j \text{ di } \Gamma_i^{-1}} (\Pi(j) + l_{ij}) \,]$$

L'algoritmo prosegue per k iterazioni, con $k \leq n$, e ad ogni iterazione riaggiorna sempre il valore del cammino minimo per ogni nodo i $\Pi^k(i)$ come il minimo tra $[\, \Pi^{k-1}(i), \min_{j \text{ di } \Gamma_i^{-1}} (\Pi^{k-1}(j) + l_{ij})]$ fino a quando per ogni i sia ha che $\Pi^k(i) = \Pi^{k-1}(i)$, cioè fino a quando, per ogni i, $\Pi^k(i)$ raggiunge la stabilità. Sappiamo che il cammino minimo tra 2 nodi passando una sola volta per ogni arco può al massimo essere pari a n-1 archi (con n numero di archi che uniscono i due nodi). Il valore del cammino minimo per ogni i dovrebbe quindi divenire stabile al più in $k = n$ iterazioni. Se ciò non accade, l'algoritmo si ferma ed evidenzia la presenza di circuiti di lunghezza negativa.
Proprio per la capacità di individuare, ove vi siano, circuiti di lunghezza negativa, l'algoritmo di Bellman-Ford viene utilizzato ogni qual volta si abbiano archi di lungezza arbitraria (positiva, negativa o nulla) o si abbia il sospetto che vi possano essere circuiti negativi.

5) Descrivere la procedura di calcolo dei moltiplicatori nell'algoritmo di Dantzing x il problema del trasporto.

Domanda 5

Nell'algoritmo di Dantzig per il problema del trasporto è possibile calcolare i moltiplicatori del simplesso u_i e v_j nel modo che segue.
Scriviamo il vettore dei moltiplicatori λ^T scrivendo tanti elementi quanti sono le origini (e dunque tanti quanti sono i vincoli associati) e tanti elementi quante sono le destinazioni:

$$\lambda^T = [u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_n] \quad \text{(nel caso di } m \text{ origini e } n \text{ destinazioni).}$$

Sappiamo che per ogni generica variabile x_{ij} il costo ridotto r_{ij} è ottenibile come:

$$r_{ij} = c_{ij} - \lambda^T a_{ij}$$

La matrice dei coefficienti dei vincoli è caratterizzata dal fatto di avere in ogni colonna soltanto due elementi con valore 1 e tutti i restanti pari a 0.
Esempio:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

E quindi abbiamo $a_{ij} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$

Per tutte le variabili il costo ridotto r_{ij} è dato dal coefficiente di costo corrispondente meno il moltiplicatore relativo all'origine meno quello relativo alla destinazione:

$$r_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j \qquad \forall i, j \in A$$

Per tutte le variabili in base abbiamo $r_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j = 0 \rightarrow c_{ij} = v_j + u_i$
Dal momento che conosciamo c_{ij} e dal momento che abbiamo un vincolo ridondante (abbiamo infatti più vincoli che variabili), possiamo scegliere in modo arbitrario il valore di un moltiplicatore (che porremo per semplicità pari a 0) e ricavare così a partire dai coefficienti di costo delle variabili in base tutti gli altri moltiplicatori e da questi ricavare i valori dei costi ridotti delle variabili fuori base.

TEMA d' ESAME

DOMANDE:

1. Una ditta gestisce la raccolta differenziata ed il riciclaggio di rifiuti (carta, vetro e alluminio) in quattro siti S_1, S_2, S_3, S_4. Ognuno dei siti produce le seguenti quantità di rifiuti, in quintali/settimana:

	S_1	S_2	S_3	S_4
Carta	40	40	5	28
Vetro	20	30	90	9
Alluminio	30	50	15	12

La raccolta viene effettuata con due flotte di veicoli attrezzati. La prima flotta è in grado di servire tutti e quattro i siti, con una capacità di 200 quintali/settimana. La seconda flotta ha autonomia limitata, e può servire soltanto i siti S_2 e S_3 con una capacità di 90 quintali/settimana. La raccolta costa, nei quattro siti, 25, 10, 15 e 12 euro/quintale rispettivamente. La ditta riesce ad ottenere un ricavo di 20 euro/quintale sulla carta, 30 euro/quintale sul vetro e 40 euro/quintale sull'alluminio raccolti e riciclati in proprio. L'eventuale quantità che non riesce a raccogliere non dà profitti e viene raccolta da una ditta subappaltatrice, che si fa pagare 15 euro/quintale indipendentemente dal tipo di rifiuti. Formulare il programma lineare per pianificare la raccolta di rifiuti settimanale massimizzando i profitti. = RICAVI - COSTI

$i = C, V, A$

$J = S_1, S_2, S_3, S_4$

$K =$ flotta 1, 2

$X_{iJK} =$ quantità rifiuti raccolti

$X_{iJK} \geq 0$

F.O. max $20 \sum_J \sum_K X_{CJK} + 30 \sum_J \sum_K C_{VJK} + 40 \sum_J \sum_K X_{AJK} - 15 Y - 25 \sum_i \sum_K X_{iS_1K} - 10 \sum_i \sum_K X_{iS_2K} - 15 \sum_i \sum_K X_{iS_3K} + - 12 \sum_i \sum_K X_{iS_4K}$

$Y \geq 0$

vincolo raccolta delle flotte

1°) $\sum_i \sum_J X_{iJ1} \leq 200$

2°) $\sum_i (X_{iS_22} + X_{iS_32}) \leq 90$

vincolo raccolta di tutti i rifiuti

$(40+40+5+28+20+30+90+9+30+50+15+12) - \sum_i \sum_J \sum_K X_{iJK} = Y$ rifiuti NON raccolti

TOTALE RIFIUTI − quelli RACCOLTI = Y

vincolo limitazione 2° flotta $\forall i \; X_{iS_12} = 0$

$\forall i \; X_{iS_42} = 0$

$B = [x_2, x_3]$ $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad det = -1$

$B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \underset{\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}}{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} x_B$

$\lambda^T = c_B^T \cdot B^{-1} = [0\ 0]\, B^{-1} = [0\ 0]$

$\forall_J\ r_J = 0$ OTTIMO

$\downarrow$

torniamo al problema di partenza $\quad \min\ 2x_1 - x_2 - 3x_3$

$-2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2$

$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 6$

$B = [x_2, x_3]$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad det = -1 \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \underset{\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}}{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} x_B$

$\lambda^T = c_B^T \cdot B^{-1} = [-1\ -3] \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = [-7\ \ 2]$

$r_1 = 2 - [-7\ 2] \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = -10$ STOP entra x_1

$y_1 = B^{-1} \cdot a_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \cancel{-5} \end{bmatrix}$ esce x_2

$B = [x_1, x_3] = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad det = -3$

$B^{-1} = \begin{bmatrix} -2/3 & 1/3 \\ -1/3 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ $\quad \lambda^T = c_B^T \cdot B^{-1} = [2\ -3] \begin{bmatrix} -2/3 & 1/3 \\ -1/3 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = [-1/3\ \ 4/3]$

$r_4 = 0 - [-1/3\ \ 4/3] \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} < 0$ STOP entra x_4

esce $\quad y_4 = B^{-1} \cdot a_4 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$ $\quad \left\{ \frac{x_B}{y_4} \right\}$ minore $\quad$ esce x_1

$B = [x_4, x_3]$

Soluzione OTTIMA

$\forall_J\ r_J \geq 0$

$z_0 = c_B^T \cdot x_B = -9$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 86

Verifico che sia bilanciata

$\sum a_i \neq \sum b_j$ NO!

4. Risolvere il seguente problema di trasporto con tre origini (righe) e tre destinazioni (colonne) e costi, domande ed offerte specificate in tabella.

	1	2	3	a_i
1	12	3	4	100
2	20	8	1	150
3	2	5	3	70
b_j	90	160	50	

[12] 90	[3] 10	[4] r=0	[0] r=7	100	-7
[20] r=3	[8] 150	[1] 0	[0] r=2	150	-2
[2] r=-17	[5] r=-5	[3] 50	[0] 20	70	0
90	160	50	20		
19	10	3	0		

Entra X_{31} Esce X_{33} $\theta = 50$

[12] 40	[3] 60	[4] r=8	[0] r=-10	10
[20] r=3	[8] 100	[1] 50	[0] r=-15	15
[2] 50	[5] r=12	[3] r=17	[0] 20	0
2	-7	-14	0	

Entra X_{24} Esce X_{34} $\theta = 20$

[12] 20	[3] 80	[4] r=8	[0] r=5	-5
[20] r=3	[8] 80	[1] 50	[0] 20	0
[2] 70	[5] r=12	[3] r=17	[0] r=15	-15
17	8	1	0	

costi ≥ 0 STOP SOLUZIONE OTTIMA

F.O. $Z = 20 \cdot 12 + 80 \cdot 4 + 80 \cdot 8 + 50 \cdot 1 + 20 \cdot 0 + 70 \cdot 2 =$
$= 1390$

2. (a) Dato il seguente programma lineare, determinare i valori reali del parametro t per i quali la base $[x_1, x_3]$ costituisce l'ottimo.

$$\begin{array}{ll} \min & (t+2)x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 3t + 2 \\ & x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_6 = 5 \\ & x_1, \dots, x_6 \geq 0. \end{array}$$

~~(b) Calcolare la soluzione ottima del problema per $t = 2$.~~

$B[x_1, x_3]$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

per quali valori ho è ottimo?

$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\det = 2$ $\quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot b \begin{bmatrix} 3t+2 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\lambda^T = c_B^T \cdot B^{-1} = [t+2, 2] \cdot B^{-1} =$

$= \begin{bmatrix} 3t+2-5 \\ -\frac{3}{2}t - 1 + 5 \end{bmatrix} \geq 0$ perché deve soddisf. condizione di ammissib.

$= [t+2, 2] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} =$

$3t + 2 - 5 \geq 0$

$-\frac{3}{2}t - 1 + 5 \geq 0$

$t \geq 1$

$t \leq \frac{8}{3}$

$1 \quad \frac{8}{3}$ intervallo ammissibil.

$= [t+2-1, -t-2+2]$

$= [t+1, -t]$

$r_2 = 1 - [t+1, -t] \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \geq 0$

per condizione ottimalità

$r_4 = 2 - [t+1, -t] \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \geq 0$

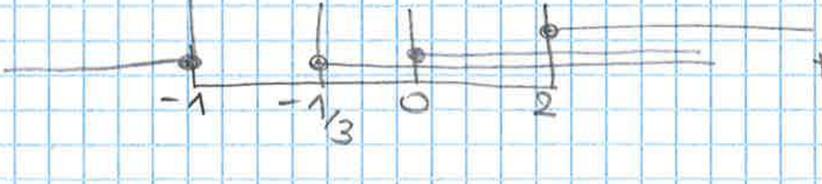
$r_2 = 1 - (3t + 3 - 4t) \geq 0 \rightarrow 1 + t - 3 \geq 0$

$r_4 = 2 - (t + 1 - t4) \geq 0 \quad 2 + 3t - 1 \geq 0$

$r_5 = 0 \rightarrow -(t+1, -t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow -(t+1) \geq 0$

$r_6 = 0 \rightarrow (t+1, -t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad +t \geq 0$

$t \geq 0 \quad t \leq -1 \quad t \geq 2 \quad t \geq -\frac{1}{3}$



L'INTERSEZIONE NO valore PER CUI BASE $[x_1, x_3]$ SIA L'OTTIMO

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 86

TEMA d'ESAME

1. **(max. 8 pt)** Un'azienda ha a disposizione 7,5 milioni di euro per rinnovare il suo parco macchine che comprende berline di lusso per i dirigenti, auto di media cilindrata per i rappresentanti e furgoncini per i fattorini. Sono necessari almeno 70 furgoncini, almeno 150 auto di media cilindrata e almeno 35 berline. L'azienda si rifornisce da tre concessionari diversi, ciascuno dei quali offre un pacchetto di più vetture: il primo concessionario offre un pacchetto che comprende due furgoncini, una berlina e una vettura a media cilindrata al costo di 75000 euro, il secondo concessionario offre un pacchetto che comprende una berlina, due furgoncini e due vetture a media cilindrata al costo di 115000 euro, mentre il terzo concessionario offre un pacchetto composto da due berline, due vetture a media cilindrata e due furgoncini al costo di 130000 euro.

   La quota annuale dell'assicurazione è di 250 euro per una berlina, di 125 euro per un'auto di media cilindrata e di 75 euro per un furgoncino. Sapendo che l'azienda ha un budget annuale di 50000 euro per pagare le assicurazioni delle vetture e che tutte le vetture acquistate vengono assicurate, scrivere il modello in programmazione lineare che massimizzi il numero di vetture acquistate.

x_i = numero di pacchetti comprati dal concessionario i

Il pacchetto del primo concessionario comprende 4 vetture, quello del secondo ne comprende 5, mentre quello del terzo ne comprende 6. La funzione obiettivo che massimizza il numero di vetture acquistate è perciò:

$$\text{F.O.} \quad \max 4x_1 + 5x_2 + 6x_3$$

Il primo vincolo riguarda il denaro a disposizione per gli acquisti:

$$75000x_1 + 115000x_2 + 130000x_3 \leq 7500000$$

Il secondo vincolo riguarda il budget disponibile per le assicurazioni:

$$250[x_1 + x_2 + 2x_3] + 125[x_1 + 2x_2 + 2x_3] + 75[2x_1 + 2x_2 + 2x_3] \leq 50000$$

Il terzo gruppo di vincoli garantisce il minimo numero di vetture per tipo:

berline $x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 35$

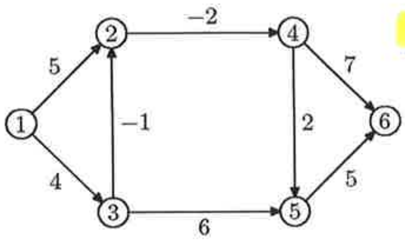
media cilindrata $x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 150$

furgoncini $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 70$

Le variabili sono tutte intere positive:

$$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}^+$$

3. **(max. 7 pt)** Calcolare il cammino minimo tra il nodo 1 e tutti gli altri nodi del grafo dato:



Bellman = perché presenti archi di lunghez. negativa

	π^0	π^1	π^2	π^3	π^4	π^5	π^6
1	0	0	0	0	0	0	0
2	∞	5	3	3	3	3	3
3	∞	4	4	4	4	4	4
4	∞	∞	3	1	1	1	1
5	∞	∞	10	5	3	3	3
6	∞	∞	∞	10	8	8	8

iterando continuano ad essere uguali stop → OTTIMO

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 86

TEMA D'ESAME

1. Un'azienda produttrice di automobili deve pianificare lo smistamento delle vetture in un paese straniero. Le vetture raggiungono il paese via mare e le navi possono attraccare in 3 diversi porti, P_1, P_2 e P_3. Per ciascun porto si deve pagare una tassa per ciascuna automobile del carico: nel porto P_1 la tassa ammonta a 150 euro per vettura, nel porto P_2 a 250 euro per vettura, mentre nel porto P_3 la tassa è di 200 euro a vettura. Le automobili devono essere inviate ai 4 centri di smistamento presenti nel paese, S_1, S_2, S_3 e S_4. L'invio di un'automobile dal porto P_1 costa 0.2 euro/Km, l'invio di un'automobile dal porto P_2 costa 0.1 euro/Km, mentre dal porto P_3 costa 1 euro/Km. Le distanze, in chilometri, tra porti e centri di smistamento sono riportate nella tabella.

	S_1	S_2	S_3	S_4
P_1	250	150	100	200
P_2	400	300	300	600
P_3	40	15	30	10

$x_{ij} \in \mathbb{Z}^+$

La richiesta del centro di smistamento S_1 è di almeno 170 vetture, quella del centro S_2 è di 130 vetture, quella del centro S_3 è di 100 vetture mentre la domanda di S_4 è di 200 vetture. Sapendo che il porto P_1 gestisce al più 250 automobili, il porto P_2 gestisce al più 180 vetture mentre il terzo porto gestisce al più 200 vetture, scrivere il modello in programmazione lineare che pianifichi la distribuzione delle vetture minimizzando i costi.

$x_{ij} \geq 0$
$i = P_i$ porto
$j = S_j$ centro smistam.

F.O. $\min z = 150(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}) +$
$+ 250(x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24}) +$
$+ 200(x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34}) +$
$+ 0.2 \cdot 250\, x_{11} + 0.2 \cdot 150 \cdot x_{12} + 0.2 \cdot 100\, x_{13} + 0.2 \cdot 200\, x_{14} +$
$+ 0.1 \cdot 400\, x_{21} + 0.1 \cdot 300 \cdot x_{22} + 0.1 \cdot 300\, x_{23} + 0.1 \cdot 600\, x_{24} +$
$+ 1 \cdot 40\, x_{31} + 1 \cdot 15\, x_{32} + 30 \cdot 1\, x_{33} + 1 \cdot 10\, x_{34}$

vincolo dei centri di smistamento S_J

$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 170$
$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 130$
$x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 100$
$x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 200$

vincolo gestione P_i

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 250$
$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 180$
$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 200$

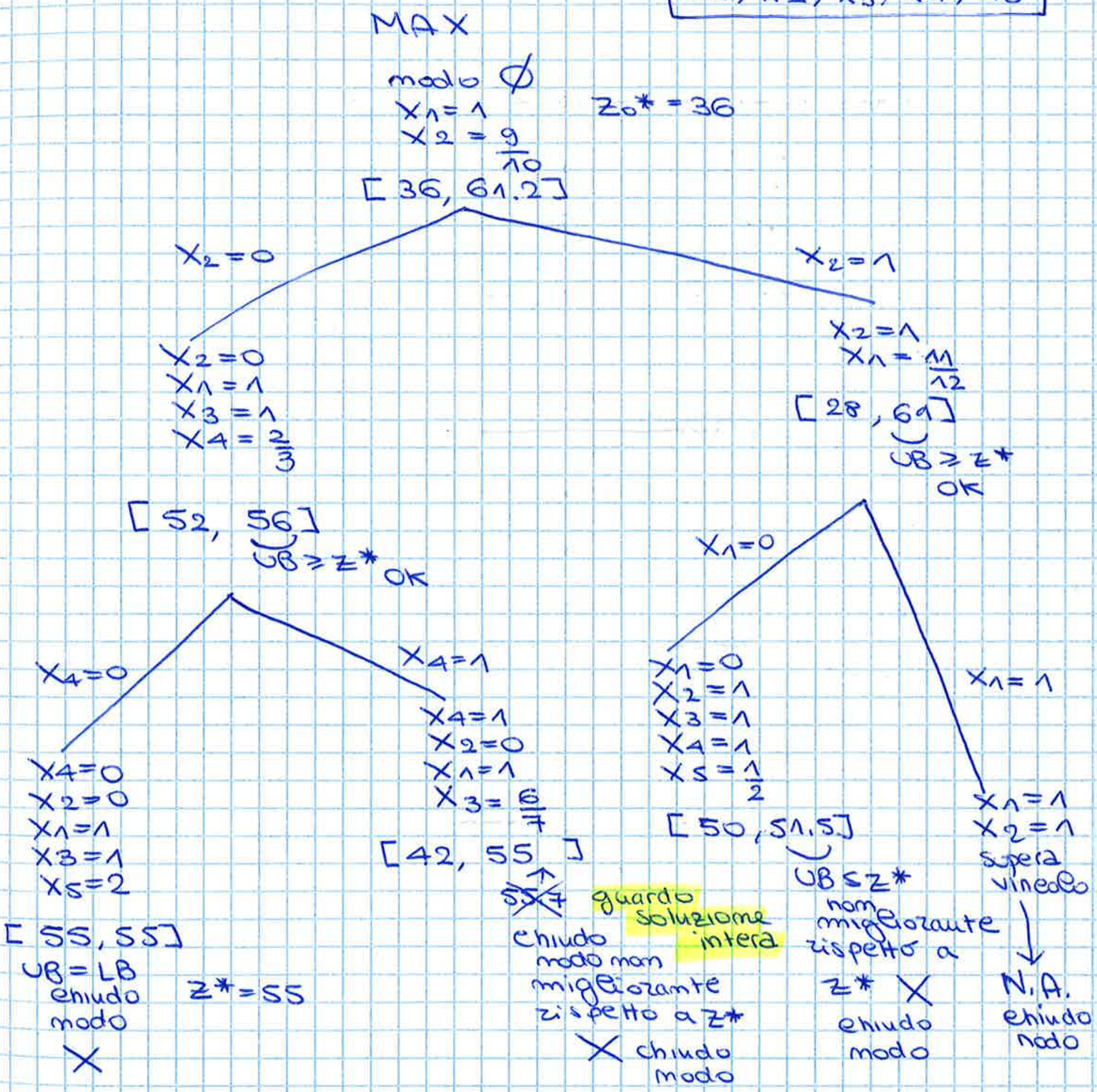
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 86

3. Risolvere, con l'algoritmo del Branch and Bound, il seguente problema dello zaino:

$$\begin{array}{ll} \max & \overset{3}{36x_1} + \overset{2.8}{28x_2} + \overset{2.28}{16x_3} + \overset{2}{6x_4} + \overset{1.5}{3x_5} \\ \text{s.t.} & 12x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 \leq 21 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\}. \end{array}$$

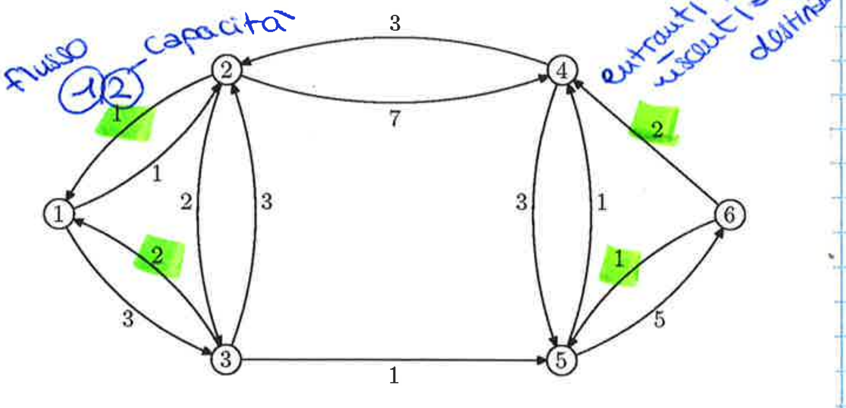
ordine decrescente

$\boxed{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5}$

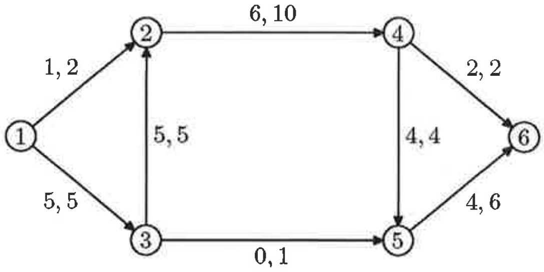


$z^*_{ottima} = 55$

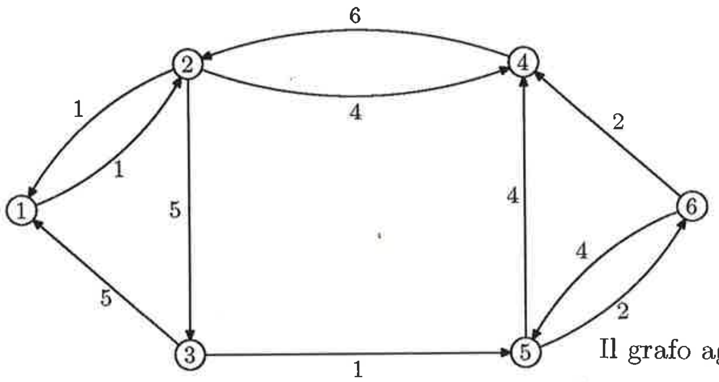
4. Il flusso iniziale è $v = 3$. Sul primo grafo di scarto si individua il cammino aumentante il cammino $1 - 3 - 2 - 4 - 5 - 6$, con $\epsilon = \min\{3, 3, 7, 3, 5\} = 3$.



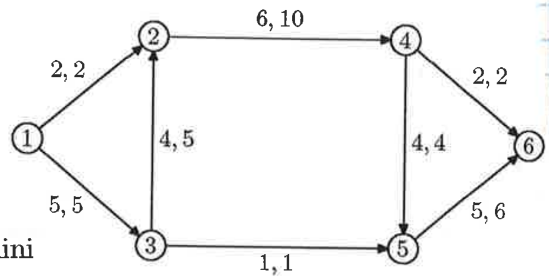
Il grafo aggiornato è:



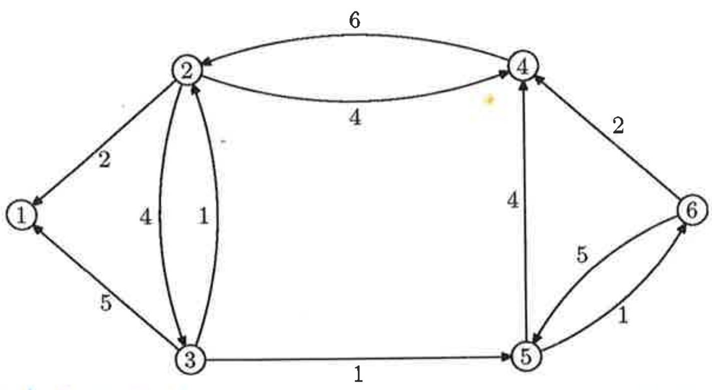
Il flusso diventa $v = 3 + \epsilon = 6$. Sul nuovo grafo di scarto si individua il cammino $1 - 2 - 3 - 5 - 6$, con $\epsilon = \min\{1, 5, 1, 2\} = 1$.



Il grafo aggiornato, relativo al flusso $v = 6 + 1 = 7$, è:



Sul nuovo grafo di scarto non è possibile individuare nuovi cammini aumentanti: l'algoritmo è terminato. Il flusso massimo è pari a 7.



2. Dato il seguente problema di P.L.

$\min 8x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 2x_4$

$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 4$

$x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 6$

$x_i \geq 0 \quad \forall i$

(a) scrivere il modello duale;

(b) calcolare la soluzione ottima partendo dalla base $[x_1, x_3]$.

modello duale

$\max 4\lambda_1 + 6\lambda_2$

$\lambda_1 + \lambda_2 \leq 8$

$2\lambda_1 + \lambda_2 \leq 5$

$\lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 7$

$2\lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 2$

$\lambda_1 \geq 0 \quad \lambda_2 \leq 0$

forma standard

$\min 8x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 2x_4$

$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 4$

$x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_6 = 6$

$\downarrow$

algoritmo artificiale NO! → ho già la base $B = [x_1, x_3]$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \det = 1 \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \underset{\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}}{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} x_B$$

$$\lambda^T = c_B^T \cdot B^{-1} = [8 \quad 7] \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= [9 \quad -1]$$

$$r_2 = 5 - [9 \quad -1] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -12$$

$$r_4 = 2 - [9 \quad -1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -14 \rightarrow$$ minore STOP entra x_4

$$y_4 = B^{-1} \cdot a_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

minimo rapporto

$$\left\{ \frac{2}{2}, \cancel{\frac{2}{0}} \right\}$$

$\downarrow$ esce x_1

$$B = [x_4, x_3] \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \det = 2$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1} \cdot \underset{\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}}{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} x_B$$

$$\lambda^T = c_B^T \cdot B^{-1} = [2 \quad 7] \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = [-5 \quad 6]$$

$r_1 > 0$

$r_2 > 0$

$$r_5 = 0 - [-5 \quad 6] \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -5$$ $\rightarrow$

$$r_6 = 0 - [-5 \quad 6] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -6 \rightarrow$$ minore STOP entra x_6

4) Sia dato un grafo composto da 100 vertici. Quante iterazioni dell'algoritmo di Bellman sono necessarie x determinare cammino minimo dal vertice 1 al vertice 40 con al più 20 archi?

Domanda 4

Per determinare il cammino minimo dal vertice 1 al vertice 40 con al più 20 archi sono necessarie al più 20 iterazioni. Infatti l'algoritmo di Bellman calcola all'iterazione k la soluzione ottima del problema con al più k archi. Quindi per avere la soluzione ottima con al più 20 archi, sono necessarie 20 iterazioni.

→ O(20)
O(21) se comprend. iterazione iniziale

5) Sia data una soluzione ottima x il problema di Flusso massimo = è possibile incrementare il flusso massimo aumentando la capacità di un arco non appartenente al taglio di minima capacità?

Domanda 5

Data una soluzione ottima per il problema del flusso massimo, non è possibile incrementare il flusso massimo aumentando la capacità di un arco non appartenente al taglio di capacità minima in quanto questo rappresenta proprio il "collo di bottiglia" del sistema. Il taglio di capacità minima ha infatti capacità pari alla somma delle capacità degli archi in avanti che lo compongono e il flusso che lo attraversa è pari al massimo flusso possibile. Aumentare la capacità degli altri archi non modifica la soluzione di massimo flusso ottenuta in quanto non incide sul "fattore limitante" della soluzione stessa.

6. Sia dato un problema di minimo e sia indicato qui di seguito lo sviluppo parziale dell'albero di ricerca del Branch and Bound associato. Con $P_i(UB_i, LB_i)$ indichiamo rispettivamente il sottoproblema considerato (P_i), il suo upper bound (UB_i - soluzione ottima del problema rilassato) ed il suo lower bound (LB_i - soluzione ammissibile del problema P_i ottenuta con una qualche euristica).

```
                 UB LB
               P0(32,17)      z0* = 17
           -----------|-----------
           |                     |
       P1(26,21)             P2(28,20)
       ----|----            ------|-----
       |       |            |          |
P11(24,22) P12(25,23)      P21        P22 ✗ (NA)
```

Se il problema $P_{2,2}$ non ha soluzione ammissibile, discutere l'intervallo di valori di upper bound $UB_{2,1}$ e lower bound $LB_{2,1}$ del problema $P_{2,1}$, tali per cui si sia in grado di riconoscere immediatamente la soluzione ottima del problema. Motivare la risposta.

$\boxed{20 \leq LB_{21} = UB_{21} \leq 22}$

LB_{21} non potrà essere minore del LB del padre

per chiudere nodo
$UB_{21} = LB_{21}$
$LB_{21} \leq UB_{21}$

2. Calcolare la soluzione ottima, partendo dalla base $[x_1, x_2]$, del seguente problema di P.L.

$\min 9x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4$
$2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \geq 9$
$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6$
$x_i \geq 0 \ \forall i$

in forma standard

$\min 9x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4$
$2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 9$
$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6$

$B = [x_1, x_2]$

$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ det = 1 $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \underset{\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix}}{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} x_B$

$\lambda^T = C_B^T \cdot B^{-1} = [9 \ 4] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = [5 \ -1]$

$r_3 = 6 - [5 \ -1] \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = -2$

$r_4 = 1 - [5 \ -1] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -8$ minore Entra x_4

$r_5 = 0 - [5 \ -1] \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 5$

$y_4 = B^{-1} \cdot a_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ minimo $\left\{ \frac{x_B}{y_{iq}} \right\}$

$= \left\{ \frac{3}{1} \ \cancel{\frac{3}{0}} \right\}$

esce x_1

$B = [x_4, x_2]$

$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $B^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} x_B$

$\lambda^T = C_B^T \cdot B^{-1} = [1 \ 4] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = [-3 \ 7]$

$r_1 > 0$

$r_3 = 6 - [-3 \ 7] \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = -2$

$r_5 = 0 - [-3 \ 7] \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -3$ minore Entra x_5

$y_5 = B^{-1} \cdot a_5 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cancel{-1} \\ 1 \end{bmatrix}$

esce x_2

$B = [x_4, x_5]$

$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ det = 1 $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \underset{\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix}}{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} x_B$

$\lambda^T = C_B^T \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} [1 \ 0] = [0 \ 1]$

$\forall j \ r_j \geq 0$ STOP

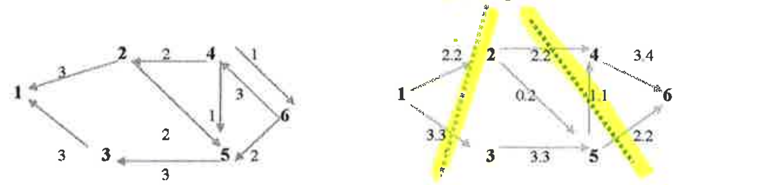
$z_0 = C_B^T \cdot x_B = [1 \ 0] \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = 6$ soluzione ottima

5) Data la soluzione ottima del problema di massimo flusso → come si ricava un taglio di minima capacità?

Domanda 5

Data la soluzione ottima del problema di massimo flusso, è possibile individuare sul grafo di scarto un taglio di minima capacità. Ricordiamo che per *taglio* si intende l'insieme H_S di quegli archi del grafo G che hanno un estremo in S (sottoinsieme degli n nodi del grafo che comprende il nodo origine, ma non il nodo destinazione) e l'altro estremo in T = N-S. La capacità di un taglio è pari alla somma delle capacità degli archi in avanti e per qualsiasi flusso che soddisfi i vincoli del problema e per qualunque taglio si ha che $v \leq C(H_S)$. E' possibile ricavare un taglio di capacità minima partendo dal grafo di scarto. Se nel grafo di scarto non posso individuare un cammino aumentante, vuol dire che ho trovato la soluzione ottima del problema. A questo punto individuo i nodi che posso raggiungere dal nodo origine e vado avanti fino a quando non sono più in grado di procedere. Tutti i nodi raggiungibili dal nodo origine costituiranno assieme al nodo origine l'insieme S, mentre tutti gli altri nodi costituiranno l'insieme N-S.

Esempio:
grafo di scarto *grafo di partenza*



E' possibile individuare nell'esempio anche un altro taglio partendo dal nodo destinazione: in questo caso guardo tutti quegli archi che arrivano al nodo destinazione e anche qui, quando mi fermo, posso dire di aver trovato un taglio di minima capacità (taglio blu nell'esempio).

6. Risolvere con il metodo branch and bound il seguente problema

$$\max 9x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 12x_4 + 11x_5 + 6x_6$$
$$5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 7x_4 + 8x_5 + 4x_6 \leq 9$$
$$x_i \in \{0,1\} \quad \forall i$$

ordine decrescente

$\boxed{x_3, x_2, x_1, x_4, x_6, x_5}$

1.8	3.33	3.5	1.7	1.3	1.5
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6

MAX

nodo Ø
$x_3 = 1$
$x_2 = 1$ $\quad z^* = 17$
$x_1 = \frac{4}{5}$
[17, 24.2]

$x_1 = 0$

$x_1 = 0$
$x_3 = 1$
$x_2 = 1$
$x_4 = \frac{4}{7}$
[15, 22.8]

$x_4 = 0$

$x_4 = 0$
$x_1 = 0$
$x_3 = 1$
$x_2 = 1$
$x_6 = 1$
UB = LB $\quad z^*_{nuova} = 23$
[23, 23] chiudo nodo

$x_4 = 1$

$x_4 = 1$
$x_1 = 0$
$x_3 = 1$
UB = LB
[19, 19] chiudo nodo

$x_1 = 1$

$x_1 = 1$
$x_3 = 1$
$x_2 = \frac{2}{3}$
[16, 22,6]
UB ≤ z^*_{nuova}
chiudo nodo
completam. non migioran.

2. Dato il seguente problema di P.L.

$\min 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &\geq 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 6 \\ x_i \geq 0 & \quad \forall i \end{aligned}$$

calcolare la soluzione ottima partendo dalla base $[x_2, x_4]$.

in forma standard

$\min 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4$

$x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 5$

$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 6$

$B = [x_2, x_4]$ $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \det = -2$ $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \underset{\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}}{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x_B$

$\lambda^T = c_B^T \cdot B^{-1} = [4 \ \ 3] \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = [-1 \ \ \tfrac{5}{2}]$

$r_1 = 2 - [-1 \ \ \tfrac{5}{2}] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = > 0$

$r_3 = 1 - [-1 \ \ \tfrac{5}{2}] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = > 0$

STOP $c_j \geq 0$ soluzione ottima $B = [x_2, x_4]$

3. Sia data una soluzione ottima di un problema di Programmazione Lineare con n variabili e m vincoli. Se il termine noto del primo vincolo aumenta di una unità, quale è il nuovo valore della soluzione considerata? Motivare la risposta.

Siccome all'ottimo la F.O. primale coincide con F.O. duale si ha che

$z = c^T x = \lambda^T b = \lambda_1 \cdot b_1 + \dots \lambda_n b_n$

teorema dualità forte

se b_1 aumenta di un'unità allora λ_1 (prezzo marginale) dovrà diminuire (se problema di minimo) o aumentare (se problema di massimo) affinché si ottimizza la F.O.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 86

5. In quali modi è possibile chiudere un nodo dell'albero di ricerca nel metodo del Branch and Bound?

1) soluzione non ammissibile → si supera il vincolo di saturità
N.A.

2) UB = LB → soluzione intera ammissibile ottima per quel nodo (il che non implica che sia la soluzione del problema)

3) z^* intera già trovata chiudo nodo se
- MAX ⇒ $UB \leq z^*$
- MIN ⇒ $LB \geq z^*$

Tema d'esame

1. Un'azienda deve pianificare il lavoro giornaliero delle sue tre macchine. Si possono assegnare fino ad un massimo di otto jobs, ognuno dei quali ha i seguenti requisiti:

job	1	2	3	4	5	6	7	8
tempi (h)	7	3.5	3	6.5	4	4	5	2.5
ricavi (k$)	2	1.2	0.8	1.5	1.1	0.9	1.3	0.7

$x_{ij} \in \{0,1\}$ $i = 1,2,3$ macchine
$j = 1, \dots, 8$ jobs

Ogni job può essere assegnato ad una sola macchina ed ogni macchina ha una capacità lavorativa ordinaria di 10 ore. Inoltre è possibile aggiungere fino ad un massimo di 4 ore di lavoro straordinario per macchina al costo aggiuntivo di \$300 all'ora. Formulare il programma lineare per l'identificazione dell'assegnazione che massimizza il profitto.

F.O. MAX
$$2\sum_i x_{i1} + 1.2\sum_i x_{i2} + 0.8\sum_i x_{i3} + 1.5\sum_i x_{i4} + 1.1\sum_i x_{i5} + 0.9\sum_i x_{i6} + 1.3\sum_i x_{i7} + 0.7\sum_i x_{i8} - 0.3 \cdot y_s$$

ogni jobs = una macchina

$$\forall_i \sum_{j=1,2,3,4,5,6,7,8} x_{ij} = 1$$

per ogni macchina la somma dei jobs x ogni macchina = 1

29

y_i lavoro straordinario $\{0,1\}$

ogni macchina ha un costo

macchina 1: $7x_{11} + 3.5x_{12} + 3x_{13} + 6.5x_{14} + 4x_{15} + 4x_{16} + 5x_{17} + 2.5x_{18} \leq 10 + 4y_s$

macchina 2 //

macchina 3 //

lavoro straordinario y_s = tot ore 10 − tempi(h) per ogni macchina

2. Si risolva partendo dalla base $[x_3, x_4]$ il seguente problema di P.L.

$\min x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 6 \\ x_i \geq 0 & \quad \forall i \end{aligned}$$

già in forma standard OK!

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

$B = [x_3, x_4]$ $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \det = -2$

$B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}}_{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x_B$

$\lambda^T = c_B^T \cdot B^{-1} = [3 \;\; 5] \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = [2 \;\; \frac{1}{2}]$

$r_1 = 1 - [2 \;\; \frac{1}{2}] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{3}{2}$

$r_2 = 2 - [2 \;\; \frac{1}{2}] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{5}{2}$ Entra x_2 esce

$y_2 = B^{-1} \cdot a_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

minimo $\left\{ \frac{1}{1} \;\; \frac{2}{\frac{3}{2}} \right\}$ esce x_3

$B = [x_2, x_4]$ $\quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \det = 2$ $\quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{b}_{\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix} x_B$

$\lambda^T = c_B^T \cdot B^{-1} = [2 \;\; 5] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} =$

$= [-\frac{1}{2} \;\; 3]$

STOP

soluzione di base non ammissibile x_B deve essere ≥ 0

$r_1 = 1 - [-\frac{1}{2} \;\; 3] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$

$r_3 = 3 - [-\frac{1}{2} \;\; 3] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} =$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 86

Tema d'esame

1. Un'azienda produce cibi in scatola. La domanda per i prossimi cinque mesi è di 850000, 900000, 800000, 750000 e 700000 scatole rispettivamente. L'azienda utilizza due impianti produttivi con capacità di 700000 e 500000 scatole rispettivamente. I costi di produzione sono di 6 dollari a scatola nel primo impianto e di 4 dollari a scatola nel secondo impianto. I costi di magazzino sono di 1 dollaro a scatola per mese. Formulare un P.L. per pianificare la produzione a costo minimo.

$Y_J \in \mathbb{Z}^+ \ \forall J$

Y_J costi magazzino per mese

X_{iJ} $i = A, B$ impianti

$J = 1, \dots, 5$ mesi

$X_{iJ} \in \mathbb{Z}^+ \ \forall i, \forall J$

F.O. $\min \ 6 \sum_J X_{AJ} + 4 \sum_J X_{BJ} + 1 \cdot \sum_J Y_J$

$\left(1 \cdot \sum_i \sum_J X_{iJ}\right)$ senza introdurre Y_J

$X_{A1} + X_{B1} \geq 850000$

$X_{A2} + X_{B2} \geq 900000$

$X_{A3} + X_{B3} \geq 800000$

$X_{A4} + X_{B4} \geq 750000$

$X_{A5} + X_{B5} \geq 700000$

domanda x i 5 mesi

vincolo capacità

$\sum_J X_{AJ} \leq 700000$

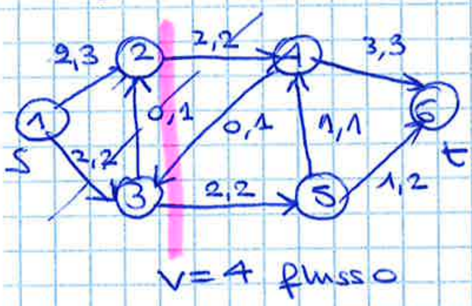
$\sum_J X_{BJ} \leq 500000$

3. Si consideri il problema del massimo flusso su grafo. Un taglio che in corrispondenza dell'ottimo abbia un arco in avanti non saturo, può essere un taglio di minima capacità? Perchè? NO

i tagli possono essere più di uno, è il valore della capacità minima ad essere unico.
Dato una soluzione ottima → considero grafo di scarto, esisteranno cammini raggiungibili da s e non raggiungibili da S (non esistono cammini tra s ed t perché siamo all'ottimo)
In S metto i grafi raggiungibili da s e in N\S gli altri nodi non raggiungibili.
Si noti che dati gli archi del taglio di minima capacità gli archi forward del taglio sono saturi mentri quelli backward sono completamente scarichi.

Sì perché se arco in avanti i dati vuol dire che non è saturo e il taglio di minima capacità ci dice solo di partire da S o da T e andare avanti finché esiste un cammino, nel momento in cui ci blocchiamo avremo un taglio di minima capacità sì anche non saturi.

ES.



5. Sia dato un problema di max e sia indicato qui di seguito lo sviluppo parziale dell'albero di ricerca del Branch and Bound associato. Con $P_i(UB_i, LB_i)$ indichiamo rispettivamente il sottoproblema considerato (P_i), il suo upper bound (UB_i) ed il suo lower bound (LB_i).

```
                     P0(27,18)
              ___________|___________
              |                     |
          P1(25,19)             P2(26,22)
           ____|____            ______|_____
           |        |           |          |
  P11(24,20) P12(23,21)        P21        P22
                                           NA
```

Se il problema $P_{2,2}$ non ha soluzione ammissibile, per quali valori di upper bound $UB_{2,1}$ e lower bound $LB_{2,1}$ del problema $P_{2,1}$, si è in grado di riconoscere immediatamente la soluzione ottima del problema? Motivare la risposta.

$24 < LB_{21} = UB_{21} \leq 26$

LB_{21} potrà essere al massimo pari al UB del padre

LB è maggiore di z^* migliore trovata fin ei.

3. Si risolva con il simplesso revisionato, partendo dalla base $[x_1, x_2]$ il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & 8x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 6x_4 \\ & 3x_1 + 2x_2 + \tfrac{3}{2}x_3 + x_4 \geq 2 \\ & 8x_1 + 12x_2 + 8x_3 + 6x_4 \geq 8 \\ & x_1, \ldots, x_4 \geq 0 \quad \forall i. \end{aligned}$$

in forma standard

$$\begin{aligned} \min \quad & 8x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 6x_4 \\ & 3x_1 + 2x_2 + \tfrac{3}{2}x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ & 8x_1 + 12x_2 + 8x_3 + 6x_4 - x_6 = 8 \end{aligned}$$

$B = [x_1, x_2]$

$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}$ det $= 20$

$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{20} \end{bmatrix} \cdot \underset{b}{\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} x_B$

$\lambda^T = C_B^T \cdot B^{-1} = [8 \quad 8] \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{5} & 3/20 \end{bmatrix} = \left[\frac{8}{5} \quad \frac{2}{5}\right]$

$r_3 = 4 - \left[\frac{8}{5} \quad \frac{2}{5}\right] \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 8 \end{bmatrix} = < 0$ entra x_3

$r_4 = 6 - \left[\frac{8}{5} \quad \frac{2}{5}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} = > 0$

esce $y_3 = B^{-1} \cdot a_3$

$= \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{20} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

minimo $\left\{ \frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{10}} \quad \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} \right\}$ esce x_2

$B = [x_1, x_3]$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 3/2 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$ det $= 12$

$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \underset{b}{\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} x_B$

$\lambda^T = C_B^T \cdot B^{-1} = [8 \quad 4] \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{2}{3} & 1/4 \end{bmatrix} = \left[\frac{8}{3} \quad 0\right]$

$r_2 = 8 - \left[\frac{8}{3} \quad 0\right] \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \end{bmatrix} = > 0$

$r_4 = 6 - \left[\frac{8}{3} \quad 0\right] \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} = > 0$ STOP

Soluzione OTTIMA

$z_0 = C_B^T \cdot x_B = [8 \quad 4] \begin{bmatrix} 1/3 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \frac{26}{3}$

Tema d'esame

1) problema P.L.

$$\min 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \geq 9$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 6$$
$$x_i \geq 0$$

(a) modello duale

(b) calcolare ottimo con algoritmo del simplesso

(c) verificare condizioni di complementarità relativa alla prima variabile duale.

(a) $\max\ 9\lambda_1 + 6\lambda_2$

$$2\lambda_1 + \lambda_2 \leq 7$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 \leq 4 \qquad \lambda_1 \geq 0 \quad \lambda_2 \text{ libera}$$
$$2\lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 6$$
$$2\lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 1$$

(b) in forma standard

$$\min 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 + y_1 = 9$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + y_2 = 6$$

$\min\ y_1 + y_2$

Algoritmo artificiale

$B = [y_1, y_2]$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ det $= 1$

$B^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} x_B$

$\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix}$

$\lambda^T = c_B^T \cdot B^{-1} = [1\ 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1\ 1]$

$r_1 = 0 - [1\ 1]\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -3$

$r_2 = 0 - [1\ 1]\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -2$

$r_3 = 0 - [1\ 1]\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = -4 \rightarrow$ entra x_3 (regola Bland)

$r_4 = 0 - [1\ 1]\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = -4$

$r_5 = 0 - [1\ 1]\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} > 0$

esce $\rightarrow y_3 = B^{-1} \cdot a_3 =$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\min\left\{ \frac{9}{2}\ \frac{6}{2} \right\}$

esce y_2 →

$B = [x_1, x_4]$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ $B^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

$$\lambda^T = C_B^T \cdot B^{-1} = [7 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \left[\frac{13}{2} \quad -6\right]$$

$$r_2 = 4 - \left[\frac{13}{2} \quad -6\right] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} > 0$$

$$r_5 = 0 - \left[\frac{13}{2} \quad -6\right] \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} > 0$$

STOP OTTIMO

$$z_0 = C_B^T \cdot x_B = [7 \quad 1] \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \frac{45}{2}$$

(c) relativa a (λ_1)

$(A^T \lambda' - c)^T x' = 0$ &

$(A x' - b)^T \lambda' = 0$

λ^T allbttimo $= \begin{bmatrix} \frac{13}{2} & -6 \end{bmatrix}$

$x' = 0$

$A^T \lambda' = c$

$\lambda_1 = 4$

$\lambda_2 = -1$

$A x' = b$

$\lambda' = 0$

x_B ottimo $x_2 = x_4 = y_2 = x_5 = 0$ (*)

$x_1 = 3$

$x_3 = \frac{3}{2}$

Condizioni complementarietà =

P.P. usoi vincoli in forma standard con termine noto riportato di qua

$$(2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 1x_5 \overset{+y_1}{-} 9)\lambda_1 = 0$$

$$(x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + y_2 - 6)\lambda_2 = 0$$

P.D.

$$(2\lambda_1 + \lambda_2 - 7)x_1 = 0 \rightarrow \text{SI}$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 \overset{-4}{\cancel{-}}) x_2 = 0$$

$$(2\lambda_1 + 2\lambda_2 - 6)x_3 = 0$$

$$((2\lambda_1 + 2\lambda_2) - 1)x_4 = 0$$

(*) variabili fuori base $= 0$

2. Dato il seguente programma lineare, determinare l'intervallo di valori reali del parametro t per i quali la base $[x_1, x_3]$ sia ottima e ammissibile.

$$\begin{aligned} \min\ & (t+2)x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \\ \text{s.t.}\ & 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 3t + 2 \\ & x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 \geq 5 \\ & x_1, \dots, x_6 \geq 0. \end{aligned}$$

$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ det = 2 $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot b = \begin{bmatrix} 3t+2 \\ 5 \end{bmatrix}$

per condizione ammissibilità = $B^{-1} \cdot b \geq 0$ $\begin{bmatrix} 3t+2-5 \geq 0 \\ -\frac{3}{2}t - 1 + 5 \geq 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$t \geq 1 \quad t \leq \frac{8}{3}$

$1 \quad \frac{8}{3}$

$\lambda^T = C_B^T \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} [t+2,\ 2] =$

$[t+2-1,\ -t-2+2]$

ottimo se $r_j \geq 0$

$r_2 = 1 - [t+1, -t]\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 1 - (3t+3-4t) \geq 0$

$1-(-t+3) \geq 0$

$r_4 = 2 - [t+1, -t]\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 - (t+1-4t) \geq 0$

$2-(-3t+1) \geq 0$

$t \geq 2 \quad t \geq -\frac{1}{3}$

Perché in forma standard

$r_5 = 0 - [t+1, -t]\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow t+1 \geq 0$

$r_6 = 0 - [t+1, -t]\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow -t \geq 0$

$t \leq 0 \quad t \geq -1$

$t \geq 2 \quad t \geq -\frac{1}{3}$

$\downarrow$

intersezione

No valori x cui base sia ottima

(1)

$x_1 = 0$

$x_4 = 0$
$x_3 = 0$
$x_1 = 0$
$x_2 = 1$
$x_5 = 1$

$[130, 130]$
UB, LB
X

$x_1 = 1$

$x_1 = 1$
$x_3 = 0$
$x_4 = 0$
$x_2 = 1$
$x_5 = \frac{1}{5}$

$[101, \underbrace{118{,}5}]$
$UB \leq z^*$
quindi non migliorante
chiudo nodo

(2)

$x_5 = 0$

$x_5 = 0$
$x_3 = 1$
$x_4 = 0$
$x_2 = 1$
$x_1 = \frac{3}{6}$

$[101, \underbrace{131}]$
$UB \leq z^*$
chiudo nodo

$x_5 = 1$

$x_5 = 1$
$x_3 = 1$
$x_4 = 0$

$[149, 149]$
UB = LB
X $z^* = 149$

$z^* = 149$

Branch & Bound
↓
approccio

Best First
selezionο il nodo più promettente

Depth First
seleziono nodo di livello più alto (profondo)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 86

Algoritmo Simplesso Duale

se coeff. di ... ente di
che deve us... sono +
o nulli ie ... soluzi...
in quanto ... associata
del tableau ... te non
soddisfatt... somma
positive o ... ati x
non può ... uaglia
termine ... 0.

MASSIMO

$UB \leq Z^*$ per chiudere nodo

* soluz. del rilassam. è UB una soluzi. ammi. LB

LB_{21} può essere al massimo pari UB_2 padre

$\alpha < LB \leq UB \leq \beta$ padre

MINIMO

$LB_{21} \geq LB_2$

$UB_{21} > LB_{21}$ padre

$\alpha \leq LB = UB \leq \beta$

3) **metodo trasporti**
m origini
n destinazioni

perché ammette sempre soluzione ammissibile?
da quante variabili è composta una base di tale problema? Perché? Metodo trasporti è un caso particolare del problema di flusso di costo minimo corrispondente a una rete di nodi (offerta) sorgente e pozzo (domanda) e archi che vanno solo dai nodi sorgente ai nodi pozzo.

Per essere bilanciato $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_j$

quindi ESISTE SEMPRE UNA SOLUZIONE AMMISSIBILE
in quanto ogni x_{ij} arco è limitato da a_i e b_j; visto che ammette soluzione ammissibile + limitato → ammette sempre soluzione ammi. ottima

$\sum\sum x_{ij} = \sum b_j = \sum a_i$
per bilanciamento

(rango matrice A vincoli linearm. indipend. POSSO ELIMINARE 1 VINCOLO

una base per il problema dei trasporti è composta da $m+n-1$ vettori e una soluzione ammissibile di base da $m+n-1$ variabili.

FABER-CASTELL

•) Nella fase I del simplesso ci sia una variabile con costo ridotto negativo la cui colonna aggiornata nella matrice dei vincoli abbia tutti coefficienti negati o nulli?

se la matrice dei vincoli aggiornati è tutta con coeff. nulli o negativi questo equivale a dire che il sistema ammette soluzione $-\infty$, illimitata ma essendo nella fase 1 del simplesso la F.O. è data dalla somma delle variabili artificiali e quindi non potrà mai essere < 0 il minimo della F.O.

SOLUZIONI di base → estraiamo da A m vettori ottemiamo B $m \times n$

$$Bx_B = b$$
$$\downarrow$$
$$x = (x_B, 0)$$
$$\downarrow$$
$$Ax = b$$ → soluzioni di base ammissibili $x \geq 0$

CONDIZIONI COMPLEMENTARITÀ

$(A^T \lambda' - c)^T x' = 0$ o $(Ax' - b)^T \lambda' = 0$

λ^T all'ottimo $\quad x_B$ = ottimo

P.P	P.D
$\min c^T x$	$\max \lambda^T b$
$Ax = b$	$\lambda^T A \leq c$
$x \geq 0$	

BLAND = è possibile che l'algoritmo del simplesso cicli infinitamente senza riuscire a trovare una soluzione quando si sceglie come elemento di pivot un elemento di pivot un elemento (p,q) a cui corrisponde $y_{p0} = 0$, ossia quando siamo dinanzi a soluzione degenere. Regola Bland = entra in base la variabile con minimo indice di colonna tra quelle $r_j < 0$ e fa uscire dalla base quella con minimo indice di riga tra quelle che hanno stesso minimo rapporto $\frac{y_{i0}}{y_{iq}}$ con $y_{iq} > 0$. Regola assicura che l'algoritmo termina dopo K finito passi.

BELLMAN-FORD = per andare dal nodo iniziale 1 al generico nodo i è necessario passare per uno dei nodi j predecessori di i. Valore lunghezza cammino ⇒ $\pi(i) = \min[\pi(i), \min \pi(j) + l_{ij}]$. Per ogni i si ha $\pi^k(i) = \pi^{k-1}(i)$ cioè fino a quando $\forall i$ $\pi^k(i)$ raggiunge la stabilità. Sappiamo che il cammino minimo tra 2 nodi passando una sola volta $\forall$ arco può essere al massimo pari $n-1$ archi. Il cammino minimo $\forall i$ dovrebbe divenire stabile al più $k = n$ iterazioni. Se questo non accade l'algoritmo si ferma e evidenzia cammino di lungh. negativa.

PROBLEMA del TRASPORTO

vettore moltiplicatori $\lambda^T = [u_1 \dots u_m, v_1 \dots v_n]$

m origini, n destinazioni

$$r_{ij} = c_{ij} - \lambda^T \underbrace{a_{ij}}$$

vettore con tutti = 0 tranne 1 su j-esimo vincolo di destinazione, 1 su i-esimo vincolo d'origine

$$r_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

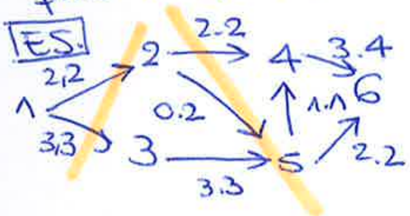
essendo il costo delle variabili in base = 0

avrò $\quad c_{ij} = u_i + v_j$

PROBLEMA MAX FLOW

soluzione ottima → come si ricava taglio di minima capacità
Individuo sul grafo di scarto il taglio di minima capacità.
Per taglio si intende insieme Hs degli archi del grafo G che hanno un estremo in S e l'altro in T = N-S. La capacità di taglio è pari alla somma delle capacità degli archi in avanti per qualsiasi flusso che soddisfi i vincoli e qualsiasi taglio $V < C_{Hs}$.
Se dal grafo di scarto non posso trovare un cammino aumentante significa che ho trovato la soluzione ottima. A questo punto individuo i nodi che posso raggiungere dal nodo d'origine fino a quando stop, costituiranno insieme S e tutti gli altri N-S.

ES.



1) Ogni taglio di capacità minima con il flusso massimo è costituito interamente da archi saturi? NO

2) In corrispondenza dell'ottimo si abbia un arco in avanti non saturo, può essere taglio di minima capacità? NO
Gli archi in avanti sono saturi mentre quelli all'indietro sono scarichi, infatti se così non fosse sarebbe possibile aumentare il flusso di almeno un unità.
Taglio di minima capacità
↑ NON APPARTIENE
arco in avanti non saturo

TERMINE NOTO AUMENTA di 1 UNITÀ

data soluzione ottima se aumento di un unità il termine noto del 1° vincolo il nuovo valore della soluzione sarà → $Z = C^T X = \lambda^T \cdot b = \lambda_1 b_1 \cdots +$
se b_1 aumenta essendo F.O. MIN
cerco di minimizzare quindi diminuisco λ_1 (prezzo marginale)
OTTIMO P.P = OTTIMO P.D → dualità forte

CHIUDERE NODO

ordinare n elementi O(n)
ricerca binaria $O(\log_2 n)$
Dijstra $O(n^2)$
Kruskal $O(m \cdot n)$
Bellman O(archi)
Prim $O(m \cdot n) \cdot O(n^3)$, $O(n^2)$
B & B $O(\log_2 n)$
ordinale $O(n \cdot \log_2 n)$

1) Soluzione N.A (supera vincolo saturità)
2) UB = LB → soluzione intera ammissibile ottima x quel nodo (non è detto lo sia per il problema)
3) Z* intera già trovata chiudo nodo se
MAX UB ≤ Z*
MIN LB ≥ Z*

ILLIMITATEZZA soluzioni ammissibili

↓

Teorema miglioramento della soluzione ammissibile di base =
sia data soluzione ammissibile di base non degenere e F.O = Zo se esiste J tale che $C_J - Z_J < 0$ allora esiste una soluzione ammissibile con Z < Zo. Se il vettore a_J può essere sostituito allora esiste una soluzione ammissibile di base, se a_J non può essere sostituito allora il poliedro delle K soluzioni ammissibili è illimitato e F.O. = -∞.