



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1959A -

ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Artuso Giovanni

MATERIA: Dinamica dei sistemi meccanici (Riassunto) - prof. Marchisiello, Fasana più esercitazioni svolte

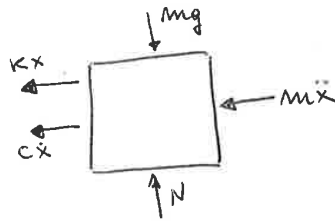
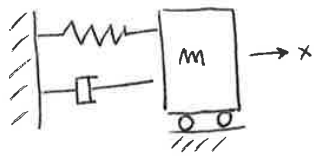
Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

DINAMICA DEI SISTEMI MECCANICI

VIBRAZIONI (sistemi a 1 g.d.l.)



$$\uparrow N = mg$$

$$\leftarrow kx + c\dot{x} + m\ddot{x} = 0$$

Equazione del moto (differenziale lineare)

La soluzione è del tipo $x(t) = A e^{\lambda t}$

Derivando $\dot{x}(t) = A \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t}$; $\ddot{x} = A \lambda^2 e^{\lambda t}$ e sostituendo

$$(m\lambda^2 + c\lambda + k)A e^{\lambda t} = 0$$

$A=0$ cioè $x=0$ soluzione banale

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \quad \text{"Equazione caratteristica"}$$

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} \quad (\text{il sistema presenta due soluzioni})$$

Determinante nullo: $c^2 - 4km = 0$

$$\rightarrow c = c_{crit} = \sqrt{4km} \quad \text{smorzamento critico}$$

Fattore di smorzamento $\zeta = c/c_{crit}$

Si presentano diversi casi possibili

1) $\Delta > 0$, $\zeta > 1$ sovrasmorzato

2) $\Delta = 0$, $\zeta = 1$ "criticamente" smorzato

3) $\Delta < 0$, $\zeta < 1$ sottosmorzato (caso più comune)

Inoltre dividendo tutto per m

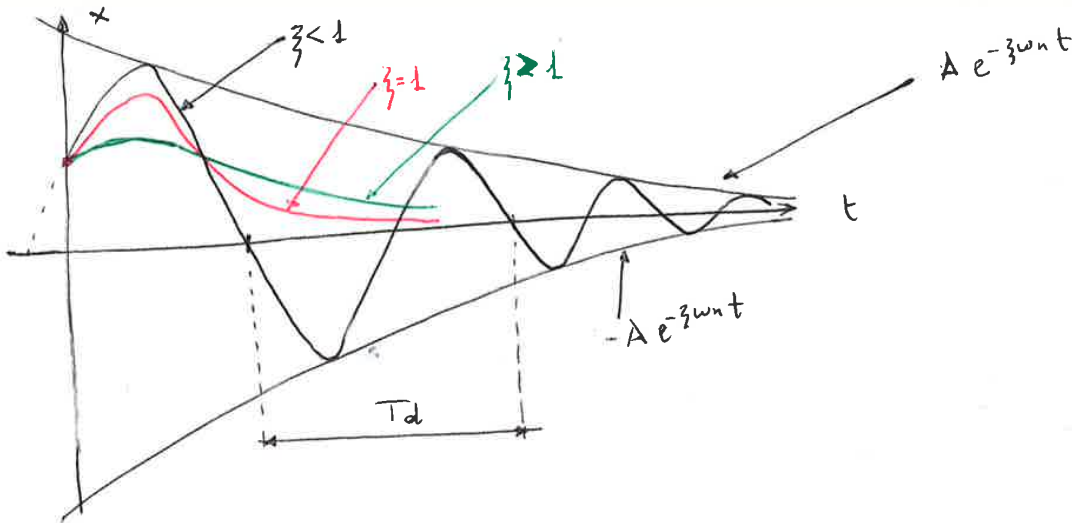
$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \frac{k}{m} = \omega_n^2 \quad ; \quad \frac{c}{m} = 2\zeta\omega_n$$

$$\rightarrow \lambda^2 + (2\zeta\omega_n)\lambda + \omega_n^2 = 0$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} =$$

$$\boxed{-\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

ω_n : pulsazione naturale del sistema

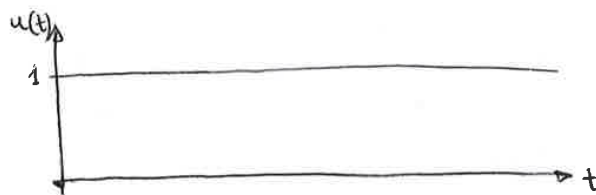


RISPOSTA AL GRADINO

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_0 \cdot u(t)$$

f_0 : ampiezza forzante

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t > 0 \end{cases}$$



Esempio pratico

$$x(t) = x_p(t) + x_g(t)$$

(Integrale particolare + Integrale generale)

• Integrale generale si ottiene ponendo a zero il secondo membro (omogenea associata, è anche detto transitorio)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_g(t) = 0 \quad (\text{il sistema è stabile, } x_g(t) \text{ tende a } 0)$$

• Integrale particolare: si vede che il secondo membro è una costante quindi anche il primo deve esserlo (perciò $\ddot{x} = \dot{x} = 0$) $\rightarrow x_p = \frac{f_0}{k} = \frac{mg}{k}$ (risposta a regime)

$$\text{Dunque } \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_p(t)$$

$$\text{Si ottiene } x(t) = \frac{f_0}{k} + (a \cos \omega_d t + b \sin \omega_d t) e^{-\zeta \omega_n t} \cdot u(t) \quad \zeta < 1$$

Condizioni iniziali $x(0) = 0$ $\dot{x}(0) = 0$

$$\dot{x}(t) = \omega_d (-a \sin \omega_d t + b \cos \omega_d t) e^{-\zeta \omega_n t} - \zeta \omega_n e^{-\zeta \omega_n t} (a \cos \omega_d t + b \sin \omega_d t)$$

$$x(0) = \frac{f_0}{k} + a = 0$$

$$\dot{x}(0) = b \omega_d - \zeta \omega_n a$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = -f_0/k \\ b = \frac{\zeta \omega_n a}{\omega_d} = -\frac{\zeta \omega_n f_0}{k \omega_d \sqrt{1-\zeta^2}} \end{cases}$$

QUINDI

$$x(t) = \frac{f_0}{k} \rightarrow \left(\frac{f_0}{k} \cos \omega_d t + \frac{\zeta f_0}{k \sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right) e^{-\zeta \omega_n t} \cdot u(t) =$$

$$= \frac{f_0}{k} \left[1 - \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right) e^{-\zeta \omega_n t} \cdot u(t) \right]$$

GUADAGNO (o fattore di amplificazione)

$$Q(i\omega) = \frac{X_0}{X_{ST}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + i2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}} = \frac{1}{1 - r^2 + i2\zeta r}$$

con $r = \frac{\omega}{\omega_n}$

Moltiplicando e dividendo per il complesso coniugato

$$Q = \frac{1 - r^2 - i2\zeta r}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}$$

$$\text{tg } \varphi^* = \frac{\text{Im}}{\text{Re}} = -\frac{2\zeta r}{(1 - r^2)}$$

- La fase è sempre negativa, quindi la risposta è sempre in ritardo

$$Q = |Q| e^{i\varphi^*} = |Q| e^{-i\varphi}$$

$$\text{tg } \varphi = -\text{tg } \varphi^* = \frac{2\zeta r}{(1 - r^2)}$$

STUDIO ASINTOTICO

lim $|Q| = 1$
 $r \rightarrow 0$

lim $|Q| = 0$
 $r \rightarrow \infty$

lim $|Q| = \infty$
 $r \rightarrow 1$

$\omega \ll \omega_n$, non si ha amplificazione, $X \approx X_{st}$

$\omega \gg \omega_n$, il sistema non si muove

Risonanza infinita

lim $\text{tg } \varphi = 0^+ \implies \varphi \rightarrow 0$
 $r \rightarrow 0$

lim $\text{tg } \varphi = 0^- \implies \varphi \rightarrow \pi$
 $r \rightarrow \infty$

* $\zeta = 0$ $r = 1 \rightarrow$ ESERCITAZIONE *

- Dove si trova il massimo dell'ampiezza?

Dove è minimo il radicando di $|Q|$

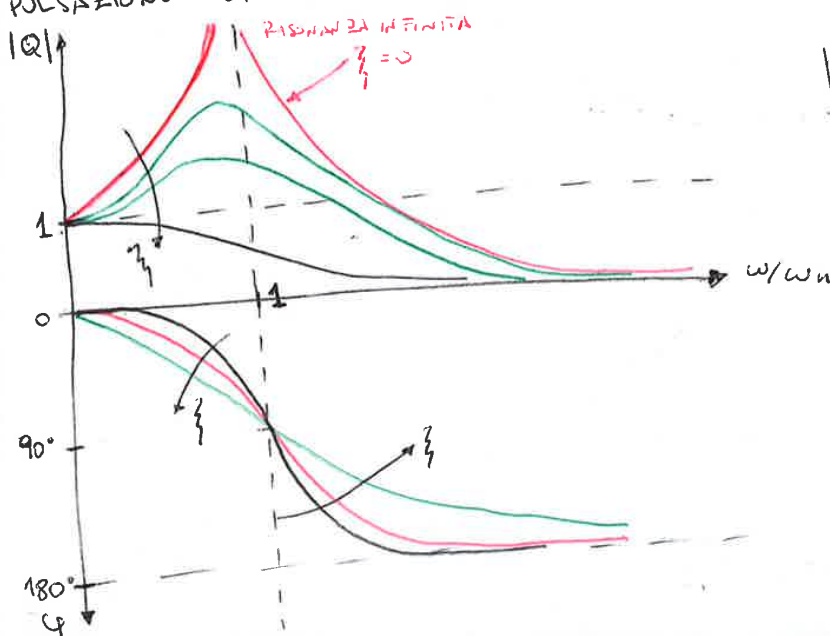
$$\frac{d}{dr} [(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2] = 2(1 - r^2)(-2r) + 4\zeta^2 r = -2(1 - r^2) + 4\zeta^2 r = 0$$

$$1 - r^2 = 2\zeta^2$$

$$r = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

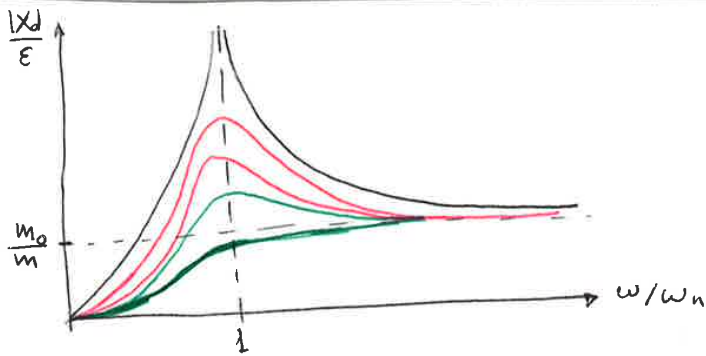
$\leftarrow r$ per cui l'ampiezza è massima

PULSAZIONE DI RISONANZA $\omega_{ris} = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$



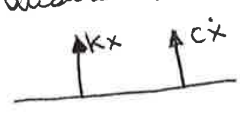
|Q| GUADAGNO

φ RITARDO DI FASE



TRASMISSIBILITÀ

- Si valuta quanto si trasmette di quello che viene fornito al sistema (funzione di trasferimento)
- Quanta forza trasmette a terra la levatrice?



$$f_v(t) = kx + cx = (k + i\omega c) X_0 e^{i\omega t}$$

considerando che $x = X_0 e^{i\omega t}$, $\dot{x} = X_0 e^{i\omega t} \cdot i\omega$

Quindi anche le forze trasmesse al vincolo è armonica
 $f_v(t) = F_v e^{i\omega t}$ con $F_v = (k + i\omega c) X_0 \in \mathbb{C}$

Trasmissibilità: $T_{lev} = \frac{F_v}{m_0 \cdot \omega_n^2 \cdot E}$

In realtà sarebbe F_v/F_0 ma F_0 (ampiezza forzante) non è costante

$$T_{lev} = \frac{(k + i\omega c) X_0}{m_0 \omega_n^2 E} = \frac{(k + i\omega c)}{m_0 \omega_n^2} \left(\frac{m_0}{m}\right) \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + i 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}} =$$

$$= \frac{1 + i 2\zeta \omega/\omega_n}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + i 2\zeta \omega/\omega_n} \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \quad \text{con } r = \frac{\omega}{\omega_n}$$

$$|T_{lev}| = r^2 \sqrt{\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

$$|T_{lev}(\sqrt{2})| = 2 \quad \forall \zeta$$

• Quindi tutte le curve passano per un punto detto punto di invarianza

$$|T_{lev}(0)| = 0$$

$\lim_{r \rightarrow \infty} |T_{lev}| = \infty$ - ciò succede a cause dello smorzamento ζ , quindi non è sempre bene aumentare lo smorzamento

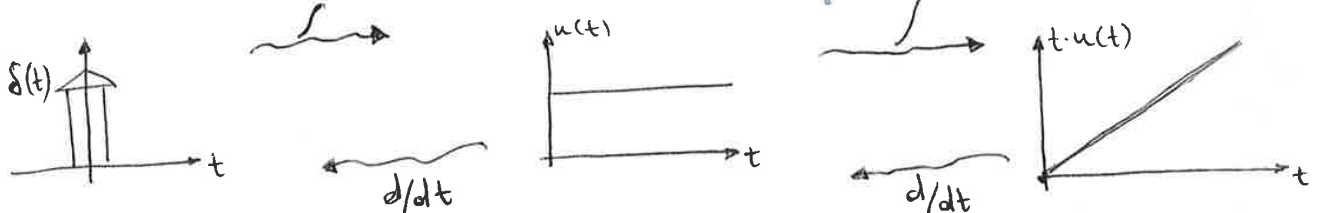
Ricapitolando

$$|T_{lev}| = \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \sqrt{\frac{1 + (2\zeta \omega/\omega_n)^2}{[1 + (\omega/\omega_n)^2]^2 + (2\zeta \omega/\omega_n)^2}}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} \int_{-\epsilon/2}^z (\dots) dt dz \quad \text{2 variabili temporali}$$

$$\int_{-\epsilon/2}^z \delta(t) dt \begin{cases} 1 & \text{se } z > 0 \\ 0 & \text{se } z < 0 \end{cases} = u(t) \text{ "gradino"}$$

$$\int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} u(z) dz = [z \cdot u(z)]_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2}$$



$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\epsilon}{2} u\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \right] = 0$$

Applicando la stessa cosa al 1° membro:

$$m [x(0^+) - x(0^-)] + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} c x(t) dt + \iint_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} k x(t) dt dz \right] = 0$$

Quindi $x(t)$ LIMITATA (la base $[-\epsilon/2, \epsilon/2]$ tende a zero \rightarrow l'area sottesa è nulla)

Quindi $x(0^+) = 0$

Cosa fa $\dot{x}(0^+)$? Integriamo una volta

$$m [\dot{x}(0^+) - \dot{x}(0^-)] + c [x(0^+) - x(0^-)] + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} k x(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} \delta(t) dt$$

$$m [\dot{x}(0^+)] = 1 \quad \rightarrow \quad \dot{x}(0^+) = \frac{1}{m} \quad \frac{[kg \cdot m/s^2 \cdot s]}{[kg]}$$

Con $\zeta < 1$

$$x(t) = (a \cos \omega_d t + b \sin \omega_d t) e^{-\zeta \omega_n t}$$

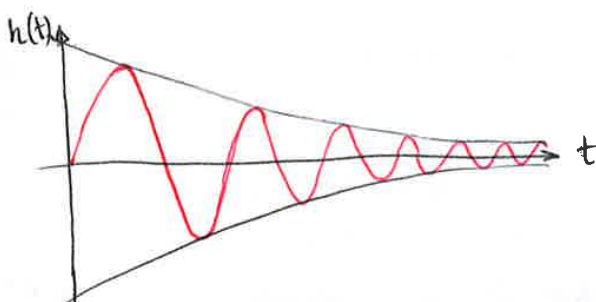
$$x(0) = a = 0$$

$$\dot{x}(t) = b \cos \omega_d t \cdot \omega_d \cdot e^{-\zeta \omega_n t} - \zeta \omega_n e^{-\zeta \omega_n t} \cdot \sin \omega_d t$$

$$\dot{x}(0) = b \omega_d = 1/m$$

Quindi la risposta all'impulso è

$$h(t) = \frac{1}{m \omega_d} \sin \omega_d t \cdot e^{-\zeta \omega_n t} \quad \text{Per rispettare la causalità del fenomeno}$$



Si può anche trovare scritto come $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \cdot h(t-z) \cdot dz$, per poter applicare le trasformate di Fourier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz = \int_{-\infty}^0 dz + \int_0^t dz + \int_t^{+\infty} dz$$

$$z < 0 \rightarrow f(z) = 0 \quad \text{per ipotesi} \quad \int_{-\infty}^0 dz = 0$$

$$z > t \rightarrow h(t-z) = 0 \quad \text{per completezza} \quad \int_t^{+\infty} dz = 0$$

* Se ci sono condizioni iniziali diverse si può sommare la risposta alle condizioni iniziali ($x_g = x(0) \neq 0$)

$$x(t) = I.C. + x_g(t)$$

BATTIMENTO (Quando un'armonica è modulata nel tempo da un'altra armonica)

$$m\ddot{x} + kx = f_0 \cos \Omega t$$

$$x(t) = \frac{f_0}{k - m\Omega^2} \cos \Omega t$$

Ω : pulsazione dell'eccitazione

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}}$$

In questo caso, la risposta di transitorio non finisce mai ($c=0$)

$$\tan \varphi = - \frac{c\Omega}{k - m\Omega^2}$$

Di conseguenza la risposta in assenza di smorzamento diventa

$$x(t) = \frac{f_0}{k - m\Omega^2} \cos \Omega t + A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{f_0}{k - m\Omega^2} + A = 0 \\ B\omega = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = - f_0 / (k - m\Omega^2) \\ B = 0 \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{f_0}{k - m\Omega^2} (\cos \Omega t - \cos \omega t) =$$

Usando le formule di prostaferesi (non richieste)

$$= \frac{f_0}{k - m\Omega^2} 2 \sin\left(\frac{\Omega + \omega}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega - \Omega}{2} t\right)$$

$$\frac{\Omega + \omega}{2} = \omega_{\text{media}}$$

$$\frac{\omega - \Omega}{2} = \epsilon$$

$$x(t) = 2 \frac{f_0}{m(\omega_n^2 - \Omega^2)} \sin \omega_m t \sin \epsilon t$$

$$\omega_n^2 - \Omega^2 = (\omega_n + \Omega)(\omega_n - \Omega) = 2\omega_m \cdot 2\epsilon$$

$$x(t) = \frac{1}{2} \frac{f_0}{m \omega_m \epsilon} [\sin(\omega_m t)] [\sin(\epsilon t)] = \frac{f_0}{m(\omega_n^2 - \Omega^2)} (\cos \Omega t - \cos \omega t)$$

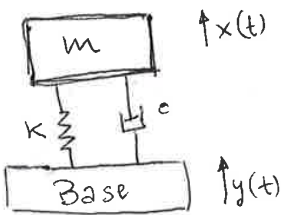
• Supponendo che $\Omega \approx \omega_n$; $\epsilon = \frac{2\pi}{T_\epsilon}$ e ϵt allora $T_\epsilon \uparrow \Rightarrow T_\epsilon \gg T_m$

ACCELEROMETRO



massa sismica

cristallo piezoelettrico $V(t) \propto$ alla sua deformazione



$$\zeta \ll 1$$

$$V(t) \propto x - y$$

$$x - y = z$$

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0$$

$$m(\ddot{z} + \ddot{y}) + c\dot{z} + kz = 0$$

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y}$$

$$y = y_0 e^{i\Omega t}$$

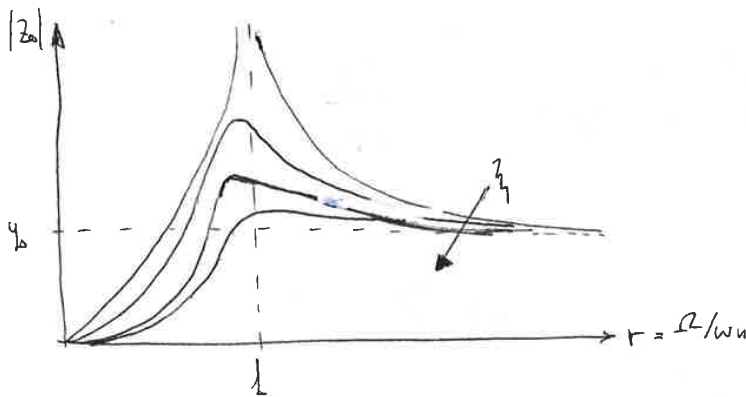
$$z = z_0 e^{i\Omega t} = |z_0| e^{i(\Omega t + \varphi)}$$

Donque

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = m\Omega^2 y_0 e^{i\Omega t}$$

$$|z_0| = \frac{m y_0 \Omega^2 / k}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

$$= \frac{y_0 r^2}{\sqrt{\dots}} \quad \text{con } r = \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)$$



- L'accelerometro è in grado di misurare accelerazioni se $r \ll 1$ ($r < \frac{1}{4}$)

Se $r \ll 1$, $|z_0| \approx y_0 r^2 = y_0 \frac{\Omega^2}{\omega_n^2} = \frac{1}{\omega_n^2} (y_0 \Omega^2)$

Ecco perché misura le accelerazioni $\xrightarrow{\text{L'ampiezza delle accelerazioni della base}}$
 (L'ampiezza di $|z_0|$ diventa proporzionale all'accelerazione della base)

$V(t) \propto (y_0 \Omega^2)$ per $r \ll 1$

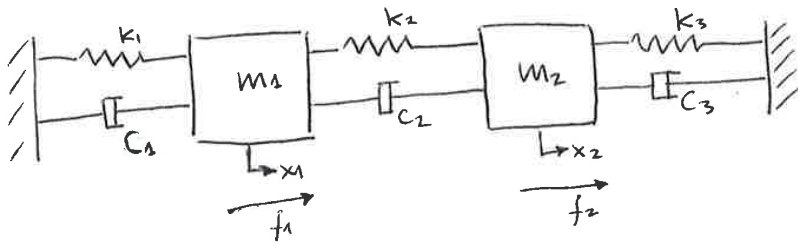
Tensione (e quindi segnale elettrico) proporzionale a $|z_0|$ e quindi proporzionale all'accelerazione della base

- A frequenze molto basse la fase è prossima allo zero

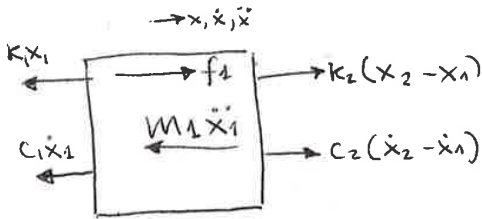
$$\text{tg } \varphi = - \frac{2\zeta r}{1 - r^2}$$

MOLTI GRADI DI LIBERTÀ (MDOF)

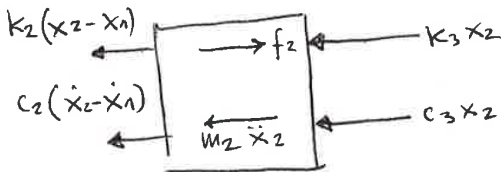
Analisi modale (è uno strumento matematico)



Systema a 2 G.D.L
 * I gradi di libertà sono il numero minimo di variabili indipendenti per descrivere il moto



- Ipotesi che $x_2 > x_1$, se dovesse essere il contrario la forza cambierebbe semplicemente di segno



$$\textcircled{1} \leftarrow m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 - c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1) - f_1 = 0$$

$$\textcircled{2} \leftarrow m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_3 \dot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) + k_3 x_2 - f_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

Equazione del moto in forma matriciale

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{f\}$$

[M] matrice di massa: REALE, SIMMETRICA, DEFINITA POSITIVA

[K] matrice di rigidità: REALE, SIMMETRICHE, DEFINITE O SEMIDEFINITE POSITIVE

[C] matrice di smorzamenti:

Usando Lagrange la matrice è sempre simmetrica, usando Newton no. (Comunque le matrici possono sempre essere modificate)

~~CRITERIO~~

* DEFINITA POSITIVA

* SEMIDEFINITA POSITIVA

* CRITERIO DI SYLVESTER

* ESEMPIO PRATICO SDOF

* ESEMPIO PRATICO MDOF

- In questo caso particolare siamo riusciti a disaccoppiare le 2 equazioni di partenza per ottenere 2 equazioni separate per risolvere il sistema ma è un caso particolare. In generale non si può fare così perché si usa l'analisi modale

I modi sono in numero pari ai gradi di libertà
 La relazione completa sarà una combinazione lineare di tutti i contributi modali (visto che il sistema è lineare)

$$x(t) = \sum_{r=1}^n A_r \cos(\omega_r t + \theta_r) \{\Psi_r\}$$

senza aver considerato smorzamento e forzante

r : pedice armonico
 $\cos(\omega t + \theta_r)$: andamento armonico

ω_r : radice dell'autovalore
 $\{\Psi_r\}$: autovettore

Contribuiscono il modo r-esimo e si calcolano con l'autoproblema
 Ar e θ_r dipendono dalle condizioni iniziali (servono le c.i. di tutte le masse)

ORTOGONALITÀ DEI MODI

$$([K] - \omega^2 [M]) \{x_0\} = \{0\} \quad \{\Psi_r\}, \omega_r^2$$

$$\{\Psi_s\}^T \omega_r^2 [M] \{\Psi_r\} = \{\Psi_s\}^T [K] \{\Psi_r\} \quad ①$$

$$\{\Psi_r\}^T \omega_s^2 [M] \{\Psi_s\} = \{\Psi_r\}^T [K] \{\Psi_s\} \quad ②$$

$$②^T \quad \omega_s^2 \{\Psi_s\}^T [M]^T \{\Psi_r\} = \{\Psi_s\}^T [K]^T \{\Psi_r\}$$

Ricordando le ipotesi iniziali $[M]^T = [M]$, $[K]^T = [K]$

In questo modo si ottiene che il secondo membro è uguale in ① e ②^T. Sottraendo membro a membro: $(\omega_r^2 - \omega_s^2) \{\Psi_s\}^T [M] \{\Psi_r\} = 0$

- se $\omega_r \neq \omega_s$ si ha per forza $\{\Psi_s\}^T [M] \{\Psi_r\} = 0 \rightarrow$ Ciò indica la proprietà di m-ortogonalità ~~dei~~ degli autovettori
- se $\omega_r = \omega_s$ il primo fattore sarà sempre nullo e si avrà $\rightarrow \{\Psi_r\}^T [M] \{\Psi_r\} = m_r > 0$ (massa modale)

Viste queste proprietà si ha che:

- se $\omega_r \neq \omega_s$, dalla ① $\rightarrow 0 = \{\Psi_s\}^T [K] \{\Psi_r\} \rightarrow$ K-ortogonalità
- se $\omega_r = \omega_s$ ($r = s$) $\rightarrow \{\Psi_r\}^T [K] \{\Psi_r\} = K_r = m_r \omega_r^2 \geq 0$ (K semidefinita positiva)
 (Se il sistema non sono ben vincolati possono avere un autovalore nullo)

Queste 4 proprietà si possono riassumere in queste 2 relazioni:

$$[\Psi]^T [M] [\Psi] = \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_r \end{bmatrix}$$

$$[\Psi]^T [K] [\Psi] = \begin{bmatrix} K_1 & & \\ & \ddots & \\ & & K_r \end{bmatrix}$$

← • Matrici piene di zeri, tranne che sulla diagonale principale dove $r = s$

DISACCOPIAMENTO

$$[m]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}$$

Dalla risoluzione dell'auto problema abbiamo ottenuto $[\Psi] \begin{bmatrix} m_r \\ \vdots \\ m_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_r \\ \vdots \\ k_r \end{bmatrix}$
 $c_{vr}^2 = k_r/m_r$

Trasformazione modale diretta: $\{x\} = [\Psi]\{\eta(t)\}$

con $\{\eta(t)\}$ vettore delle coordinate modali

$[\Psi] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ non dipende dal tempo

~~Coordinate~~ *In generale le coordinate modali non hanno significato fisico*

Substituendo nell'equazione del moto

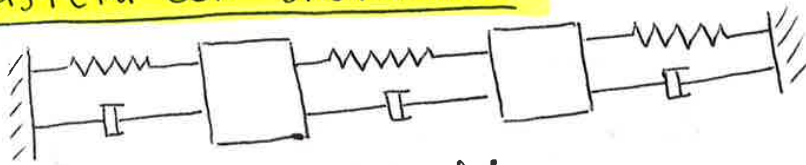
$$[m][\Psi]\{\ddot{\eta}\} + [K][\Psi]\{\eta\} = \{0\}$$

Moltiplicando per $[\Psi]^T$ si diagonalizzano le matrici $[m]$ e $[K]$

$$\begin{bmatrix} m_{r1} & & 0 \\ & m_{r2} & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{r1} & & 0 \\ & k_{r2} & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

• Dunque otteniamo un sistema di n equazioni differenziali disaccoppiate
 eguine delle quali è a G.D.L.

SISTEMI CON SMORZAMENTO



$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}$$

Applichiamo la trasformazione modale e premoltiplichiamo per $[\Psi]^T$

$$[\Psi]^T [m] [\Psi] \{\ddot{\eta}\} + [\Psi]^T [c] [\Psi] \{\dot{\eta}\} + [\Psi]^T [K] [\Psi] \{\eta\} = 0$$

↑ diagonali

$[\Psi]^T [c] [\Psi]$ non diagonale in genere

In generale

$[c]$ è non proporzionale se $[\Psi]^T [c] [\Psi]$ non è diagonale

Dunque

$$[\Psi]^T [c] [\Psi] \text{ DIAGONALE} \longrightarrow \underline{\text{SMORZAMENTO PROPORZIONALE}}$$

Condizione sufficiente ma non necessaria perché $[c]$ sia proporzionale

$$[c_p] = \alpha [m] + \beta [K] \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

2^a STRADA ("Autovettori")

$$\{x(t)\} = \underbrace{[\Psi]}_{\text{TMD}} \underbrace{\{y(t)\}}_{\text{Th. di Espansione}} = \sum_{r=1}^n \{\Psi_r\} y_r(t)$$

→ Equivalenza tra TMD e Th. di Espansione
 $\dot{y}_r = \omega_r (-A_r \sin + B_r \cos) e^{-\zeta_r \omega_r t} - \zeta_r \omega_r e^{-\zeta_r \omega_r t} (A_r \cos + B_r \sin)$

$$\begin{cases} y_r(0) = A_r \\ \dot{y}_r(0) = B_r \omega_r - \zeta_r \omega_r A_r \end{cases}$$

Quindi

$$[M] \{x_0\} = [M] \sum_{r=1}^n \{\Psi_r\} A_r$$

Pre-moltiplichiamo per $\{\Psi_s\}^T$

$$\{\Psi_s\}^T [M] \{x_0\} = \{\Psi_s\}^T [M] \sum_{r=1}^n \{\Psi_r\} A_r = m_s \cdot A_s$$

$$\rightarrow A_s = \frac{\{\Psi_s\}^T [M] \{x_0\}}{m_s}$$

Stessa cosa con la derivata prima

$$\{\Psi_s\}^T [M] \{\dot{x}_0\} = \{\Psi_s\}^T [M] \sum_{r=1}^n \{\Psi_r\} (B_r \omega_r - A_r \omega_r \zeta_r) = m_s (B_s \omega_s - A_s \zeta_s \omega_s)$$

$$\rightarrow B_s = \frac{\{\Psi_s\}^T [M] (\{\dot{x}_0\} + \{x_0\} \zeta_s \omega_s)}{m_s \omega_s}$$

- Nei sistemi a 1 G.D.L. l'autovettore vale 1
- Vantaggi di questa strada: non bisogna invertire le matrici, non bisogna calcolare tutti gli autovettori per avere un certo modo s

* Ponendo $\zeta_s = 0$ si ricava anche la **RISPOSTA LIBERA NON SMORZATA**

$$A_s = \frac{\{\Psi_s\}^T [M] \{x_0\}}{m_s}$$

$$B_s = \frac{\{\Psi_s\}^T [M] \{\dot{x}_0\}}{m_s \omega_s}$$

RISPOSTA ALLA FORZANTE GENERICI

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{f(t)\}$$

Per disaccoppiare le equazioni

$$([L], [\Psi]) = \text{EVP}([K], [M]) \quad \leftarrow \text{non interviene } [C]$$

Applichiamo la trasformazione modale diretta

$$\{x(t)\} = [\Psi] \{y(t)\} \quad \text{T.M.D.}$$

Pre-moltiplichiamo per $[\Psi]^T$ e otteniamo n equazioni S.D.O.F.

$$m_r \ddot{y}_r + c_r \dot{y}_r + k_r y_r = \underbrace{\{\Psi_r\}^T \{f(t)\}}_{Q_r(t)} = Q_r(t)$$

↳ Si proietta il vettore delle forze in un nuovo spazio, quello modale
 ↳ Considerare le componenti r-esime di $[\Psi]^T \{f(t)\}$ equivale a considerare l'autovettore r-esimo

Smorzamento modale $c_r = \{\Psi_r\}^T [c] \{\Psi_r\}$

Definiamo $\alpha_{jk}(\omega) = \frac{X_{j0}}{F_{k0}} \Big|_{F_{i0}=0, i \neq k}$

*Elemento jk della matrice di reattanza

Lo A patto che tutte le altre forze sono nulle tranne la k -esima

X_{j0} : ampiezza dello spostamento forzato

F_{k0} : ampiezza delle forze k -esima

- Quando voglio calcolare una FRF devo specificare di quale massa (dove applico le forze) e quale spostamento mi interessa

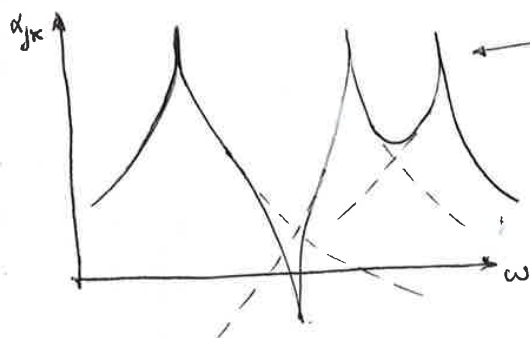
Esprimendo la reattanza

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{\Psi_{kr} \Psi_{jr}}{m_r - m\omega^2 + i\omega c_r}$$

• Se c'è smorzamento, la reattanza è un numero complesso $\alpha_{jk}(\omega) \in \mathbb{C}$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Se } j=k \rightarrow \text{Reattanza punto-punto (o puntuale)} \\ \text{Se } j \neq k \rightarrow \text{Reattanza incrociata} \end{array} \right.$

RECIPROCIÀ: $\alpha_{jk} = \alpha_{kj}$ (caratteristica dei sistemi lineari) se applico la forza alla 1^a massa e misuro lo spostamento della 3^a massa, ottengo lo stesso risultato che se fossi il contrario

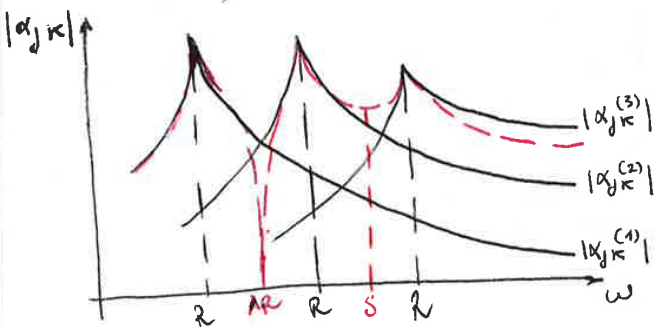


3 picchi = 3 G.D.L

• O meglio, se a sono 3 G.D.L allora si possono avere massimo 3 risonanze

Esempio di FRF

• $|\alpha_{jk}|$ non è la somma dei vari moduli

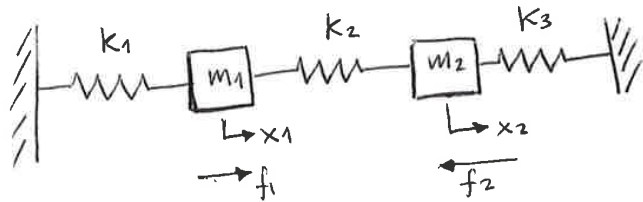


AR: Antirisonanza
S: Punto di sella

Antirisonanza: in presenza di antirisonanza le fase salta di 180° . Ci sono dei modi che ha uno dei contributi identici ma di segno opposto \rightarrow la loro somma si annulla (quindi all'anti risonanza lo spostamento di 1 G.D.L si annulla)

Così non può avvenire in presenza di smorzamento, in questo caso lo spostamento non si annulla ma si riduce molto.

EFFETTI CAMBIAMENTO COORDINATE



Disegnando i diagrammi di corpo libero si ottiene

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1+K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2+K_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ -f_2 \end{bmatrix}$$

• Se cambiamo set di coordinate $x_1, \Delta = x_2 - x_1$ otteniamo

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\Delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & -K_2 \\ K_3 & K_2+K_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ -f_2 \end{bmatrix}$$

• Se le matrici non sono simmetriche non possiamo applicare l'ortogonalità come l'abbiamo vista.

Demunque o si usano le coordinate di prima o si eseguono una serie di trasformazioni che rendono le matrici simmetriche

TRASFORMAZIONI ELEMENTARI

Allo 1° equazione sostituiscono 1°+2°

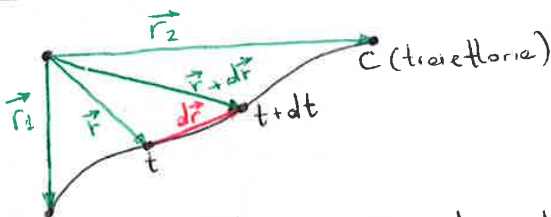
$$\begin{bmatrix} m_1+m_2 & m_2 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\Delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1+K_3 & K_3 \\ K_3 & K_2+K_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 - f_2 \\ -f_2 \end{bmatrix}$$

Ora le matrici sono simmetriche → ortogonalità dei modi...

Questo è l'approccio NEWTONIANO, c'è un altro modo che ci garantisce di trovare sempre matrici simmetriche → APPROCCIO LAGRANGIANO

- MECCANICA VETTORIALE (si basa sulle forze) Diagramma di corpo libero, NEWTON
- MECCANICA ANALITICA (si basa su lavoro e energia)

MOTO DI UNA PARTICELLA (traiettoria C)



LAVORO INFINITESIMO SVOLTO DALLA FORZA

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Il trattino superiore indica che è un differenziale non esatto

Considerando \vec{F} la risultante delle forze applicate

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{r} dt = d\left(\frac{1}{2} m \vec{r} \cdot \vec{r}\right) = dT$$

En. Cinetica

$$\int_{r_1}^{r_2} dW = \int_{r_1}^{r_2} dT = T_2 - T_1 = \Delta T$$

• Teorema dell'energia cinetica (o della forza viva): Il lavoro svolto dalle forze risultante è pari alla variazione di energia cinetica

$$\vec{r} = (l_0 + x) \hat{i} \quad ; \quad d\vec{r} = dx \hat{i} \quad ; \quad F_m = -Kx$$

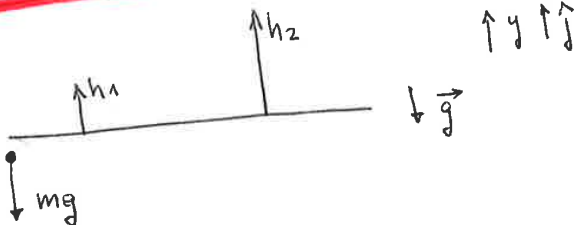
$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (-Kx) dx = \int_{r_1}^{r_2} (-Kx) dx + \int_{r_1}^{r_2} (-Kx) dx = \int_{r_1}^{r_2} (-Kx) dx - \int_{r_2}^{r_1} (-Kx) dx =$$

$$= \int_{\delta_1}^0 (-Kx) dx - \int_0^{\delta_2} (-Kx) dx = \left[-\frac{1}{2} Kx^2 \right]_{\delta_1}^0 - \left[-\frac{1}{2} Kx^2 \right]_{\delta_2}^0 =$$

$$= +\frac{1}{2} K \delta_1^2 - \frac{1}{2} K \delta_2^2 = -\Delta V$$

$V = \frac{1}{2} K \delta^2$ Energia potenziale elastica
 ↑ Lavoro svolto dalle forze conservative \vec{F}_m per portare la molla da δ a 0 (riferim)

ESEMPIO 2: Forza peso mg



- Non importa quale livello di riferimento si sceglie perché tanto si elide sempre.

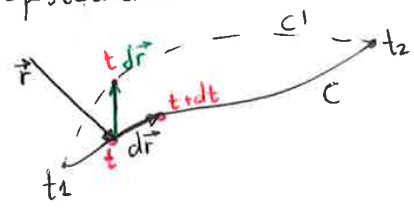
$$\vec{r} = y \hat{j}$$

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_c d\vec{r} = \int_{h_1}^{h_2} (-mg \hat{j}) dy \hat{j} = \int_{h_1}^{h_2} (-mg) dy - \int_{h_2}^{h_1} (-mg) dy = V_1 - V_2 = -\Delta V$$

V : Energia potenziale gravitazionale (lavoro compiuto dalla forza peso per riportare un oggetto da un certo livello h a 0 (liv. di rif.))
 $V = mgh$ con h positivo verso l'alto. Se y è verso il basso si mette il -

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

Spostamento virtuale $d\vec{r}$



- Partenziamo un percorso fittizio C' (moto virtuale)
- In pratica $d\vec{r}$ è un cambiamento di variabili istantaneo
- Essendo uno spostamento virtuale istantaneo ($d\vec{r}$) siamo sempre all'istante t

• $d\vec{r}$ è uno spostamento infinitesimo, arbitrario, compatibile con i vincoli

Consideriamo un SISTEMA DI PARTICELLE

- $m_i \quad i = 1, \dots, N$
- Risultante delle forze \vec{R}_i

$$-K'L(1-\cos\theta)L\sin\theta d\theta + mgL\cos\theta d\theta = 0 \quad \forall d\theta$$

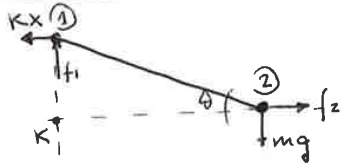
Quindi possiamo semplificare il $d\theta$

$$mgL\cos\theta = KL^2(1-\cos\theta)\sin\theta$$

Dividendo per $KL^2\cos\theta$

$$\frac{mg}{KL} = (1-\cos\theta)\tan\theta$$

* Usando la meccanica vettoriale (Diagr. Corpo libero)



$$\textcircled{2} \quad -KxL\sin\theta + mgL\cos\theta = 0$$

$$\frac{mg}{K} = x\tan\theta \quad \text{con } x = L - L\cos\theta$$

$$\frac{mg}{KL} = (1-\cos\theta)\tan\theta$$

Si ottiene lo stesso risultato

PRINCIPIO GENERALIZZATO DI D'ALEMBERT

Newton: $\vec{R} = m\vec{a}$

D'Alembert: $\vec{R} - m\vec{a} = 0$

Introducendo delle forze (di inerzia) $\vec{F}' = -m\vec{a}$ si possono studiare i sistemi dinamici come se fossero statici

$\vec{R} + \vec{F}' = 0$ Principio di d'Alembert

Dunque il PLV assume la seguente forma detta:

Principio generalizzato di d'Alembert $\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \delta \vec{r}_i = 0$

- \vec{R} : Risultante
- \vec{F}' : forze attive (interne/esterne)
- \vec{F} : reazione vincolare
- $\vec{F}' = -m\vec{a}$: forza di inerzia
- $\vec{R} + \vec{F}'$: forze effettive

ESEMPIO

Rifacciamo l'esercizio precedente con d'Alembert

$$\vec{F}_1 \delta \vec{r}_1 + (\vec{F}_2 - m\vec{a}_2) \delta \vec{r}_2 = 0$$

$$\vec{r}_2 = y \hat{j} \quad \vec{a}_2 = \ddot{y} \hat{j}$$

$$-Kx \delta x + (mg - m\ddot{y}) \delta y$$

In funzione di θ

$$y = L \sin\theta \quad \dot{y} = L \cos\theta \dot{\theta} \quad \ddot{y} = -L \sin\theta \dot{\theta}^2 + L \cos\theta \ddot{\theta}$$

$$x = L - L \cos\theta \quad \delta x = L \sin\theta \delta\theta \quad \delta y = L \cos\theta \delta\theta$$

Sostituendo

$$-KL(1-\cos\theta)L\sin\theta d\theta + [mg - m(-L\sin\theta\dot{\theta}^2 + L\cos\theta\ddot{\theta})]L\cos\theta d\theta = 0$$

ESEMPIO

Applichiamo Hamilton all'esempio precedente
Calcoliamo T e V

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2$$

$$V = \frac{1}{2} k x^2 - mgy$$

Scriviamo x e y in funzione di θ e sostituiamo

$$T = \frac{1}{2} m L^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2$$

$$V = \frac{1}{2} k L^2 (1 - \cos \theta)^2 - mgL \sin \theta$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m L^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + mgL \sin \theta - \frac{1}{2} k L^2 (1 - \cos \theta)^2$$

$$d\mathcal{L} = mL^2 \cos \theta (-\sin \theta) \dot{\theta}^2 d\theta + \frac{1}{2} mL^2 \cos^2 \theta 2\dot{\theta} d\dot{\theta} + mgL \cos \theta d\theta - kL^2 (1 - \cos \theta) \sin \theta d\theta$$

È presente un termine $\dot{\theta} d\dot{\theta}$, dobbiamo ricondurre $d\dot{\theta}$ a $d\theta$

$$\int_{t_1}^{t_2} mL^2 \cos^2 \theta \dot{\theta} d\dot{\theta} dt = \int_{t_1}^{t_2} mL^2 \cos^2 \theta \dot{\theta} \frac{d}{dt} (d\theta) dt$$

Quindi $d\dot{\theta}$ è la derivata nel tempo di $d\theta$.

Integrando per parti

$$\int_{t_1}^{t_2} mL^2 \cos^2 \theta \dot{\theta} \frac{d}{dt} (d\theta) dt = \left[mL^2 \cos^3 \theta \dot{\theta} d\theta \right]_{t_1}^{t_2} - \dots$$

Quindi quel termine si annulla [$d\theta(t_1) = d\theta(t_2) = 0$] e abbiamo ottenuto l'equazione del moto $f(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) = 0$

COORDINATE LAGRANGIANE (o generalizzate)

- \vec{r}_i potrebbero essere dipendenti
- Meglio usare le coordinate q_k (in numero pari ai G.D.L.)
- q_k : coordinate lagrangiane \rightarrow sempre indipendenti ($k=1, \dots, n$)

Relazione tra \vec{r}_i e dq_k ?

$$\vec{r}_i(q_1; q_2; \dots; q_n; t)$$

$$d\vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} dq_1 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} dq_n = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} dq_k$$

Il dt non si considera (spostamento virtuale istantaneo)

N : numero di particelle
 n : numero di gradi di libertà

In generale $N > n$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2} mL^2 \cos^2 \theta \cdot 2\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{1}{2} mL^2 \cdot 2 \cos \theta (-\sin \theta) \dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{2} kL^2 \cdot 2(1 - \cos \theta)(\sin \theta) - mgL \cos \theta$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = -2 mL^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 + mL^2 \cos^2 \theta \ddot{\theta}$$

Quindi si avrà

$$-2 mL^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 + mL^2 \cos^2 \theta \ddot{\theta} + mL^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 + kL^2(1 - \cos \theta) \sin \theta - mgL \cos \theta = 0$$

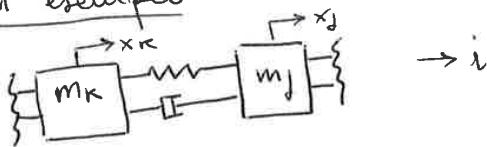
FUNZIONE DISSIPATIVA DI RAYLEIGH \mathcal{F} (forze dissipative)

- Ad esempio in presenza di movimenti viscosi

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j$$

$$Q_k = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k}$$

Ad esempio



- Consideriamo solo due masse di un sistema più complesso

$$\leftarrow \boxed{k} \rightarrow c_{kj} (\dot{x}_j - \dot{x}_k)$$

$$\leftarrow \boxed{j} \rightarrow c_{kj} (\dot{x}_j - \dot{x}_k)$$

$$Q_k^{(c_{kj})} = \sum_{i=1}^2 \vec{F}_{ijnc} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_k}$$

$$\vec{F}_1 = c_{kj} (\dot{x}_j - \dot{x}_k) \hat{i}$$

$$\vec{F}_2 = c_{kj} (\dot{x}_j - \dot{x}_k) (-\hat{i})$$

$$\vec{r}_1 = \dot{x}_k \hat{i}$$

$$\vec{r}_2 = \dot{x}_j \hat{i}$$

$$Q_k^{(c_{kj})} = c_{kj} (\dot{x}_j - \dot{x}_k) \hat{i} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{x}_k} \hat{i} - c_{kj} (\dot{x}_j - \dot{x}_k) \hat{i} \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{x}_k} \hat{i} = c_{kj} (\dot{x}_j - \dot{x}_k) =$$

$$= - \frac{\partial}{\partial \dot{x}_k} \left[\frac{1}{2} c_{kj} (\dot{x}_j - \dot{x}_k)^2 \right] = - \frac{\partial}{\partial \dot{x}_k} \mathcal{F}^{(c_{kj})}$$

- Dunque abbiamo dimostrato la relazione tra Q_k e \mathcal{F}

- Se ci sono forze dissipative si inseriscono a primo membro con $+ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k}$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} = Q_k \quad k=1, \dots, n}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial q_k} = 0 \right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \Delta} = K_2 \Delta + K_3 (\Delta + x_1)$$

$$Q_2 = f_1 \hat{i} \frac{\partial(x_1 \hat{i})}{\partial \Delta} - f_2 \hat{i} \frac{\partial(x_2 \hat{i})}{\partial \Delta} = -f_2$$

Otteniamo

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\Delta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_3 & K_3 \\ K_3 & K_2 + K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ \Delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 - f_2 \\ -f_2 \end{Bmatrix}$$

- Matrici simmetriche

DI MOSTRAZIONE: SIMMETRIA MATRICE DI MASSA

CALCOLARE 3 TERMINI EN. CINETICA

L'energia cinetica si scrive come somma di tre contributi

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

T_2 : forma quadratica omogenea

T_1 : dipendenza lineare alla velocità Lagrangiana

T_0 : nessuna dipendenza dalla velocità Lagrangiana

Supponiamo ci siano N masse puntiformi m_i [N masse, n G.D.L.]

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right)}_{a \cdot c} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{k=1}^n \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)}_{a \cdot b} \dot{q}_k + \sum_{i=1}^N \underbrace{\frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}}_{b^2} = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} M_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{k=1}^n M_k \dot{q}_k + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left| \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right|^2 \end{aligned}$$

Dove $M_k = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$

$M_{jk} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$

Inoltre: $M_{jk} = M_{kj}$ cioè la matrice di massa è simmetrica, per la proprietà commutativa del prodotto.

SISTEMA NATURALE

Sistema meccanico in cui $T_2 \neq 0$, $T_1 = T_0 = 0$

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} = 0 \quad \{\dot{q}\} = [\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n]^T$$

$$T = T_2 = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n M_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [M] \{\dot{q}\}$$

Dove gli elementi della matrice $[M]$ sono le M_{jk}

$$\Delta y \approx \ln\left[\left(1 + \frac{2y}{l_0}\right)^{1/2} - 1\right]$$

sviluppo binomiale $(1+z)^x \approx 1 + xz \quad z \rightarrow 0$

$$\Delta y \approx \ln\left[1 + \frac{y}{l_0} - 1\right] = \frac{y}{l_0}$$

Stessi ragionamenti lungo $x \rightarrow \Delta x \approx \frac{x}{l_0}$

Dunque considerando che:

$$V = \frac{1}{2} k_x (\Delta x)^2 + \frac{1}{2} k_y (\Delta y)^2 \rightarrow V = \frac{1}{2} k_x x^2 + \frac{1}{2} k_y y^2$$

Ipotesizziamo che in parallelo a ciascuna molla ci sia uno smorzatore

(c_x, c_y)
 Si avrà analogamente alle molle $\dot{\Delta y} \approx \dot{y}$, $\dot{\Delta x} \approx \dot{x}$

$$T' = \frac{1}{2} c_x \dot{x}^2 + \frac{1}{2} c_y \dot{y}^2$$

SMORZAMENTO INTERNO (presente anche se $\Omega = 0$)

Possiamo aggiungere anche lo smorzamento esterno dovuto alle reolcata assoluta:

$$T'' = \frac{1}{2} h \dot{X}^2 + \frac{1}{2} h \dot{Y}^2 = \frac{1}{2} h v^2$$

In conclusione otteniamo

$$T = T' + T'' = \frac{1}{2} c_x \dot{x}^2 + \frac{1}{2} c_y \dot{y}^2 + \frac{1}{2} h [(\dot{x} - \Omega y)^2 + (\dot{y} + \Omega x)^2]$$

Adesso possiamo ottenere le equazioni del moto di Lagrange

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} = 0 \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_k$$

$q_1 = x$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m(\dot{x} - \Omega y) \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} - m\Omega \dot{y}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = m\Omega(\dot{y} + \Omega x)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k_x \cdot x$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = c_x \cdot \dot{x} + h(\dot{x} - \Omega y)$$

• le forze viscoso non conservative le consideriamo in T

$Q_x = 0$ • le forze non conservative, non di tipo viscoso, sono nulle

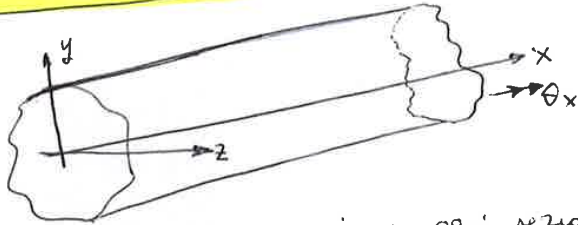
$q_2 = y$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m(\dot{y} + \Omega x) \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\ddot{y} + m\Omega \dot{x}$$

SISTEMI A PARAMETRI DISTRIBUITI

- Rispetto ai sistemi discreti cambiano solo le notazioni, quindi si possono usare i risultati dei parametri discreti (differenze solo formali, non sostanziali)
- I gradi di libertà sono infiniti (∞ DOF)
- Equazioni ~~algebraiche~~ differenziali alle derivate parziali (PDE)

TRAVI E ASTE



- Monodimensionale: una delle tre dimensioni prevale sulle altre

- Ci sono infinite sezioni e ogni sezione ha 6 G.D.L.

- 1) TRASLAZIONE ASSIALE u (lungo x)
- 2) TRASLAZIONE TRASVERSALE v (in y)
- 3) " " w (in z)
- 4) ROTAZIONE TORZIONALE θ_x (intorno a x)
- 5) ROTAZIONE FLESSIONALE θ_y (in y)
- 6) " " θ_z (in z)

- Torze generalizzate (Forze e Momenti)

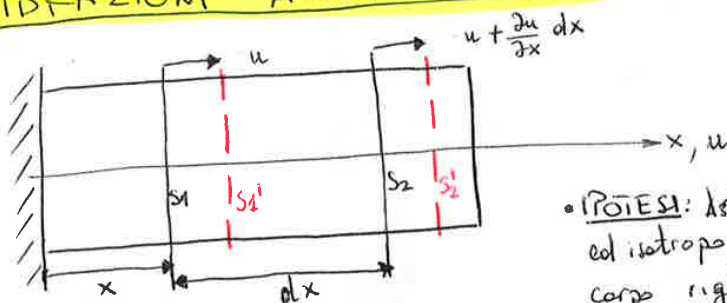
- 1) FORZA ASSIALE N (in direzione x)
- 2) FORZA DI TAGLIO T_y (in y)
- 3) " " " T_z (in z)
- 4) MOMENTO TORCENTE M_x (intorno a x)
- 5) MOMENTO FLETTENTE M_y (intorno a y)
- 6) " " " M_z (in z)

• Noi studieremo 3 casi: vibrazioni assiali, torsionali, flessionali

IPOTESI SEMPLIFICATIVE

- Se la trave è rettilinea il DOF della traslazione assiale è disaccoppiato dagli altri (forze assiale \rightarrow la trave vibra solo assialmente)
- Le travi hanno per ogni sezione, due assi di simmetria mutuamente ortogonali e con direzione costante lungo l'asse (flessione nel piano xy disaccoppiato da quello nel piano xz) \rightarrow NON SVERGOLATE

VIBRAZIONI ASSIALI ASTE



- In assenza di deformazioni, le due sezioni S_1 e S_2 distano dx

• IPOTESI: Aste prismatiche di materiale elastico lineare ed isotropo, ciascuna sezione si comporta come un corpo rigido (si trascura cioè la contrazione trasversale, quella legata al modulo di Poisson)

$u(x, t)$

Le soluzioni sono del tipo

$$\begin{cases} \eta(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) & \rightarrow \eta(t) : \text{coordinate modale} \\ \phi(x) = C \cos\left(\frac{\omega}{c} x\right) + D \sin\left(\frac{\omega}{c} x\right) & \rightarrow \phi(x) : \text{autofunzione (come gli autovettori nei discreti)} \end{cases}$$

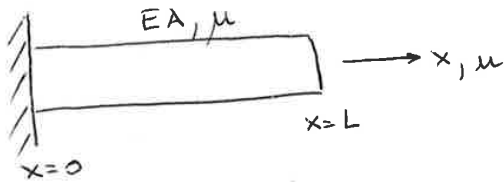
• η e ϕ sono infinite, diversamente dai sistemi discreti

La soluzione sarà una sommatoria

$$u(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} (A_r \cos \omega_r t + B_r \sin \omega_r t) (C_r \cos \frac{\omega_r}{c} x + D_r \sin \frac{\omega_r}{c} x)$$

A_r, B_r sono costanti che dipendono dalle condizioni iniziali (non le calcoliamo mai)
 C_r, D_r, ω_r sono costanti che dipendono dalle condizioni al bordo (al contorno)
 ω_r \rightarrow Frequenza propria asta

CASO PARTICOLARE, Incastro - Libero



$$\phi(x) = C \cos \frac{\omega}{c} x + D \sin \frac{\omega}{c} x$$

$$c = \sqrt{\frac{EA}{\mu}}$$

Condizioni al bordo

- Quando ho un vincolo sulle forze, non ce l'ho sullo spostamento
- Quando ho un vincolo sullo spostamento, non ce l'ho sulle forze

$$\begin{aligned} \underline{u(0,t) = 0 \quad \forall t} & \rightarrow \phi(0) \eta(t) = 0 \quad \forall t \rightarrow \phi(0) = 0 \\ \underline{N(L,t) = 0 \quad \forall t} & \rightarrow AE \phi'(L) \eta(t) = 0 \quad \forall t \rightarrow \phi'(L) = 0 \end{aligned}$$

$$N(x,t) = AE \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

$$\phi(x) \eta(t) = u(x,t)$$

$$\phi'(x) = \frac{\omega}{c} (-C \sin \frac{\omega}{c} x + D \cos \frac{\omega}{c} x)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \phi(0) = 0 \rightarrow C = 0 \\ \phi'(L) = 0 \rightarrow + \frac{\omega}{c} D \cos \frac{\omega}{c} L = 0 \end{cases}$$

- $\omega = 0$ modo rigido non è soluzione
- $D = 0$ soluzione banale non si muove niente
- $\cos \frac{\omega}{c} L = 0 \rightarrow \frac{\omega}{c} L = r \frac{\pi}{2} \rightarrow \omega_r = r \frac{\pi}{2L} c$ con $r = 1, 3, 5, \dots$ (soluzioni ω)

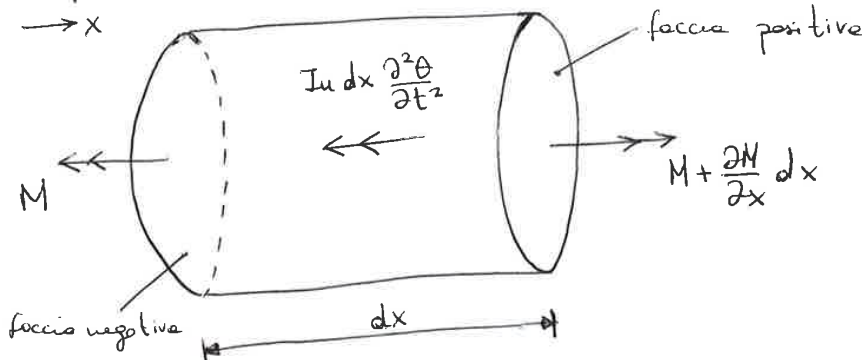
• Dunque come è fatta la ϕ ? È definita e meno di una costante moltiplicativa da noi ipotizziamo pari a 1

$$\phi(x) = \sin\left(r \frac{\pi}{2L} x\right)$$

VIBRAZIONI TORSIONALI

- Corpi con una dimensione che prevale sulle altre. Le sezioni hanno due assi di simmetria ortogonali

Approccio allo D'Alembert



• I_u : MOMENTO DI INERZIA DI MASSA PER UNITA' DI LUNGHEZZA

$$\left[\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{m}} \right] = [\text{kg} \cdot \text{m}]$$

• $\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$: ACCELERAZIONE

$$\rightarrow M + \frac{\partial M}{\partial x} dx - M - I_u dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = I_u \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

$$M = G J_p \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

Analogia con N nelle vibrazioni assiali

G: analogo al modulo di Young

J_p : è il momento polare d'area = $\int_A r^2 dA$



Demique

$$G J_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = I_u \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{G J_p}{I_u} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

$c = \sqrt{\frac{G J_p}{I_u}}$: velocità di propagazione onde torsioni

$$I_u = \rho J_p \quad [\text{kg} \cdot \text{m}] = \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \text{m}^4 \right]$$

$$\rightarrow c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

Si può dimostrare che alla fine l'onda si può scrivere come qualcosa del tipo $\theta(x, t) = \phi(x) \eta(t)$

$$\theta(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \left[(A_r \cos c \omega t + B_r \sin c \omega t) \left(C_r \cos \left(\frac{\omega r}{c} x \right) + D_r \sin \left(\frac{\omega r}{c} x \right) \right) \right]$$

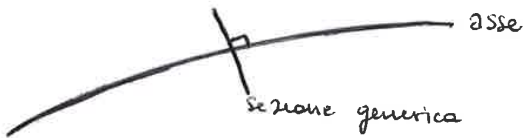
Come le vibrazioni assiali

* Perché abbiamo usato la derivata parziale per l'accelerazione?

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

- Ma non siamo interessati a un punto che ha una x fissa e che quindi non varia con t

$$\text{con } t \rightarrow \frac{dx}{dt} = 0 \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial \theta}{\partial t}$$



Ogni sezione (generica) si mantiene sempre \perp all'asse $\rightarrow \theta = \frac{\partial v}{\partial x}$

Quindi $M = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ dove v è la freccia

Sostituendo nelle prime equazioni:

$$-EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + f(x,t) = 0$$

EQUAZIONE DEL MOTO

Se $f=0 \rightarrow EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$ Equazione di Eulero-Bernoulli

$v(x,t) = \phi(x) \gamma(t)$. Cerchiamo soluzioni in forma di variabili separabili
 $\gamma(t) = \gamma_0 \sin(\omega t + \alpha)$ $\ddot{\gamma}(t) = -\gamma_0 \omega^2 \sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2 \gamma(t)$

$$EI \phi^{(4)}(x) \gamma(t) - \mu \omega^2 \phi(x) \gamma(t) = 0$$

$$EI \phi^{(4)}(x) - \mu \omega^2 \phi(x) = 0 \rightarrow \left[\phi^{(4)} - \frac{\mu \omega^2}{EI} \phi = 0 \right] \text{ AUTOPROBLEMA DIFFERENZ.}$$

Postando $\beta^4 = \frac{\mu \omega^2}{EI} \rightarrow \phi^{(4)} - \beta^4 \phi = 0$

Essendo $\phi = \phi_0 e^{\lambda x}$ se sostituiamo: $(\lambda^4 - \beta^4) \phi_0 e^{\lambda x} = 0$

$$\lambda_{1,2} = \pm \beta, \lambda_{3,4} = \pm i\beta$$

$$\phi(x) = A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) + C \cosh(\beta x) + D \sinh(\beta x)$$

$$v(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) \cdot (\bar{T}_r \cos(\omega t) + \bar{H}_r \sin(\omega t)) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) \cdot \gamma_r(t)$$

- \bar{T}_r, \bar{H}_r dipendono dalle condizioni iniziali
- $A_r, B_r, C_r, D_r, \beta_r$ (che contiene ω_r) dipendono dalle condizioni al bordo:

TRE CASI DI CONDIZIONI AL BORDO



LIBERA

$$M=0 \rightarrow EI \phi'' = 0$$

$$T=0 \rightarrow -EI \phi''' = 0$$



APPOGGIATA

$$M=0 \rightarrow EI \phi'' = 0$$

$$v=0 \rightarrow \phi = 0$$



INCASTRATA

$$v=0 \rightarrow \phi = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \rightarrow \phi' = 0$$

$\beta l = 0$: si ha una molteplicità 2 (non solo le due curve si intersecano, ma hanno anche stesse tangente)

$$\phi^{IV} = \beta^4 \phi = 0$$

$$\phi = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \rightarrow \phi''(0) = \phi'''(0) = 0 \rightarrow C = D = 0$$

$$\phi(x) = A + Bx$$

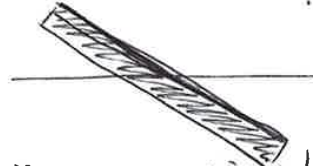
Dunque a zero si ha moto rigido senza deformazioni ($\beta l = 0$)

TRASLAZIONE PURA $w = 0$



$$r = 0$$

ROTAZIONE PURA $w = ?$



Dopo un po' gli zeri dell'equazione iniziano a coincidere con gli zeri del coseno quindi possiamo usare le forme approssimate

$$r=1 \quad \beta r l \approx \frac{3}{2} \pi = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \pi$$

$$r=2 \quad \beta r l \approx \frac{5}{2} \pi = \left(2 + \frac{1}{2}\right) \pi$$

$$r=3 \quad \beta r l \approx \frac{7}{2} \pi = \left(3 + \frac{1}{2}\right) \pi$$

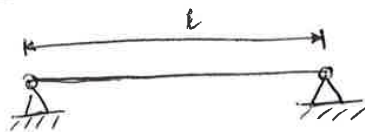
In generale

$$\beta r l \approx \left(r + \frac{1}{2}\right) \pi$$

con $r = 1, 2, 3, \dots$

$$\omega r = \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu}} = \left(r + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

TRAVE APPOGGIATA-APPOGGIATA



$$\phi(0) = \phi(l) = 0$$

$$\phi''(0) = \phi''(l) = 0$$

$$\phi(x) = \dots$$

$$\phi'(x) = \dots$$

$$\phi''(x) = \dots$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(0) = A + C = 0 \rightarrow A = -C \rightarrow A = C = 0 \\ \phi''(0) = \beta^2(-A + C) = 0 \rightarrow A = C \end{array} \right\} x = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(l) = B \sin(\beta l) + D \sinh(\beta l) = 0 \\ \phi''(l) = \beta^2(-B \sin(\beta l) + D \sinh(\beta l)) = 0 \end{array} \right\} x = l$$

APPROCCIO UNIFICATO

1) Assiali $\mu(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} [AE(x) \frac{\partial u}{\partial x}] = 0$

2) Torsionali $I_u(x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} [GJ_p(x) \frac{\partial \theta}{\partial x}] = 0$

3) Flessionali E-B: $\mu(x) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}] = 0$

Tutti i sistemi sono governati da una equazione differenziale alle derivate parziali del tipo:

$$M \left[\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right] + K[W] = 0$$

dove $w(x, y, z, t)$ è la soluzione con certe condizioni iniziali ($t=0$) e certe condizioni al bordo (espr. dell'operatore $B_i [W] = 0$ in alcune regioni del dominio D)

1) $M = \mu(x)$; $K = -\frac{\partial}{\partial x} [AE(x) \frac{\partial}{\partial x}]$

2) $M = I_u(x)$; $K = -\frac{\partial}{\partial x} [GJ_p(x) \frac{\partial}{\partial x}]$

3) $M = \mu(x)$; $K = \frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2}]$

Ci limitiamo allo studio di sistemi monodimensionali

→ $w = W(x, t)$

e cerchiamo la soluzione nella forma a variabili separabili

ϕ : autofunzione $\eta = \eta_0 \sin(\omega t + \alpha)$

→ $w(x, t) = \phi(x) \eta(t)$

Di conseguenza otteniamo: $M[\phi] \ddot{\eta} + K[\phi] \eta = 0$

$$\frac{\ddot{\eta}(t)}{\eta(t)} = -\frac{K[\phi]}{M[\phi]} = -\omega^2$$

↳ f sob del tempo

↳ f sob dello spazio

Quindi la coordinate modale soddisfa l'equazione $\ddot{\eta}(t) + \omega^2 \eta(t) = 0$

→ $K[\phi] = \omega^2 M[\phi]$ AUTOPROBLEMA DIFFERENZIALE (EVP)

Evidenti analogie con i sistemi discreti rigidi

- Esiste anche sia la M che la K ortogonalità (invece di simmetrie si parla di **OPERATORI AUTO-AGGIUNTI**)

• Definiamo un generico operatore lineare \mathcal{L} (\mathcal{L} sarà M o K)

• $u(x), v(x)$ sono due generiche funzioni che soddisfanno le condizioni al bordo

ORTOGONALITÀ DEI MODI PROPRI (delle autofunzioni ϕ)

Solo l' enunciato

$$\int_0^l \phi_i m[\phi_j] dx = m_i \delta_{ij}$$

$$\int_0^l \phi_i K[\phi_j] dx = m_i \omega_i^2 \delta_{ij} = K_i \delta_{ij}$$

INDICE DI KRONECKER $\delta_{ij} \begin{cases} \rightarrow 0 & \text{se } i \neq j \\ \rightarrow 1 & \text{se } i = j \end{cases}$ (ortogonalità) (modale)

VIBRAZIONI FORZATE

$$M \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] + K[w] = f(x, t)$$

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \eta_i(t) \quad \text{Th. di Espansione (per i continui)}$$

M e K sono operatori differenziali lineari.

$$\int_0^l \phi_i(x) \sum_{i=1}^{\infty} m[\phi_i] \ddot{\eta}_i dx + \int_0^l \phi_i(x) \sum_{i=1}^{\infty} K[\phi_i] \eta_i dx = \int_0^l \phi_i(x) f(x, t) dx$$

Quindi, applicando la m-L e la K-L

$$m_r \ddot{\eta}_r + K_r \eta_r = \int_0^l \phi_r(x) f(x, t) dx = N_r(t)$$

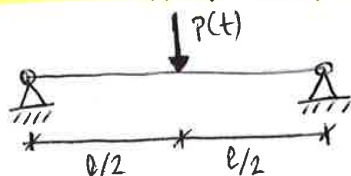
•• Infiniti singoli gradi di libertà (∞ SDOF)

$$\eta_r(t) = \int_0^t N_r(\tau) \cdot h_r(t-\tau) d\tau \quad (\text{Integrale di convoluzione})$$

- Si calcola questo valore e lo si ricombina con il th. di espansione

$$\rightarrow w(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) \eta_r(t) \quad \text{per calcolare il valore di } w$$

ESEMPIO (trave appoggiata-appoggiata con carico in mezz'aria)



- In statica: $\delta_{st}(l/2) = \frac{P_0 l^3}{48 EI}$

In dinamica (prima consideriamo il caso senza carico per calcolare i modi)

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

$$v(0, t) = v(l, t) = 0 \rightarrow \phi(0) = \phi(l) = 0$$

$$M(0, t) = M(l, t) = 0 \rightarrow \phi''(0) = \phi''(l) = 0$$

- Facendo i calcoli (vedi esempio svolto in precedenza) si ricava

$$\beta_r = r \frac{\pi}{l}, \quad \omega_r^2 = \frac{\pi^4 r^4}{l^4} \frac{EI}{\mu}, \quad \phi_r = \sin\left(r \frac{\pi}{l} x\right)$$

• Dunque è possibile individuare gli autovalori come rapporti tra le energie

- Sostituiamo l'autovettore con un generico vettore $\{u\} \in \mathbb{R}^n$

$$R(\{u\}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\{u\}^T [K] \{u\}}{\{u\}^T [M] \{u\}} = \omega^2 \quad \text{QUOZIENTE DI RAYLEIGH}$$

→ Th. di Espansione: $\{u\} = \sum_{r=1}^n \{\Psi_r\} c_r$

• Adesso dobbiamo esprimere una perturbazione: $c_i = \epsilon_i c_r$ con $\epsilon_i \ll 1$, $i \neq r$

• In pratica noi pesiamo $\{\Psi_r\}$ con c_r e poi pesiamo tutti gli altri $\{\Psi_i\}$ con un fattore $c_i \ll c_r$ per vedere come varia ω^2 dopo aver "sporcato" l'autovettore $\{\Psi_r\}$

$$\rightarrow R(\{u\}) \approx \omega^2 + \sum_{i \neq r} \epsilon_i^2 (\omega_i^2 - \omega_r^2)$$

* Il quoziente di Rayleigh è stazionario nell'intorno di un autovettore

COROLLARIO

$r=1$ (Modo fondamentale)

$$R(\{u\}) \approx \omega_1^2 + \sum_{i=2}^n \epsilon_i^2 (\omega_i^2 - \omega_1^2) > \omega_1^2 \quad \text{perché } \omega_i > \omega_1$$

* Solo per il 1° modo si ha che la configurazione migliore di tutte è quella che fornisce il quoziente di Rayleigh più piccolo

(Il quoziente di Rayleigh sovrastima sempre la prima frequenza propria)

METODO DELL'ENERGIA DI RAYLEIGH

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\}$$

con soluzione sinuosa $\{x(t)\} = \{x_0\} g(t)$

$$g(t) = \sin(\omega t + \alpha)$$

$$\dot{g}(t) = \omega \cos(\omega t + \alpha)$$

$$T(t) = \frac{1}{2} \{\dot{x}\}^T [M] \{\dot{x}\} = \frac{1}{2} \{x_0\}^T [M] \{x_0\} [\dot{g}(t)]^2$$

$$V(t) = \frac{1}{2} \{x\}^T [K] \{x\} = \frac{1}{2} \{x_0\}^T [K] \{x_0\} [g(t)]^2$$

$$V_{\max} = \frac{1}{2} \{x_0\}^T [K] \{x_0\} \quad \text{perché } (\sin \theta)^2 \text{ massimo è pari a 1}$$

$$\frac{T_{\max}}{\omega^2} = \frac{1}{2} \{x_0\}^T [M] \{x_0\} = \frac{1}{\omega^2} \quad \text{perché } (\omega \cos \theta)^2 \text{ massimo è pari a } \omega^2$$

$$E = T + V = \frac{1}{\omega^2} + 0 = 0 + V_{\max}$$

$(\cos^2 = 1) \rightarrow (\sin^2 = 0) \quad (\cos^2 = 0) \leftarrow (\sin^2 = 1)$

Considerando che $\theta(x,t) = u(x) \sin(\omega t + \alpha)$; $V_{max} = T_{max} = \omega^2 \tilde{T}$

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^l GJ_p \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \cdot \sin^2(\omega t + \alpha) dx$$

$\downarrow (V_{max})$

$$T = T_{barra} + T_{rotazione} = \frac{1}{2} \int_0^l I_n dx \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} I \left[\frac{\partial \theta}{\partial t}(l,t) \right]^2$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \omega \cos(\omega t + \alpha) u(x) \rightarrow \text{mettiamo in evidenza } \omega^2$$

$$T = \omega^2 \left[\frac{1}{2} \int_0^l I_n u^2(x) dx + \frac{1}{2} I u^2(l) \right] \cos^2(\omega t + \alpha)$$

$\downarrow (T_{max})$

Quindi $\omega^2 = \frac{V_{max}}{\tilde{T}} = \frac{\int_0^l GJ_p \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx}{\left[\int_0^l I_n u^2(x) dx + I u^2(l) \right]}$ Quoziente di Rayleigh.

Adesso bisogna scegliere la trial function $u(x)$
(Deve soddisfare le condizioni al bordo geometriche)

| | CB. GEOMETRICHE | CB. NATURALI | |
|-------|-----------------|--------------|---------------------|
| TRAVE | v, v' | v'', v''' | Trave - Flessionale |
| ASTA | u | w' | Asta - Assiale |
| BARRA | θ | θ' | Barra - Torsionale |

CB Geometriche derivate più basse \rightarrow Incontri / Geometria

CB Naturali derivate più alte \rightarrow Torze generalizzate

Scegliamo una funzione semplice $u(x) = x$ 1^a scelta

$x(0) = 0 \rightarrow$ C.B. Geometriche rispettate

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l GJ_p 1 dx}{\int_0^l I_n x^2 dx + I l^2} = \frac{GJ_p l}{I_n \frac{l^3}{3} + I l^2} = \frac{(GJ_p)/l}{\frac{I_n l}{3} + I} \quad (\text{controllare pre controllo dimens.})$$

- Controllo parametrico

• se $I_n \rightarrow 0$ $\omega^2 \rightarrow \frac{GJ_p}{l} / I$: cioè se I_n va a 0, il risultato approssimato va al valore esatto

2^a scelta

$$u(x) = C = \cos t$$

$$u(0) = \cos t$$

non rispetta le condizioni al bordo geometriche

* Si otterrebbe $\omega^2 = 0$ (case moto rigido) \rightarrow NON È POSSIBILE ; ~~non~~ Inoltre si avrebbe

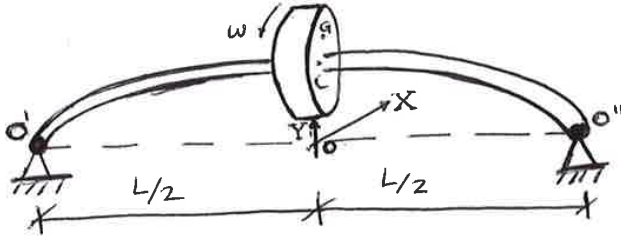
$0 > \omega^2$ VERBA \rightarrow NON È POSSIBILE

DINAMICA DEI ROTORI (vibrazioni critiche flessionali)

ROTORE: sistema formato da un albero rotante elastico e continuo su cui sono adattate palette, turbine o dischi

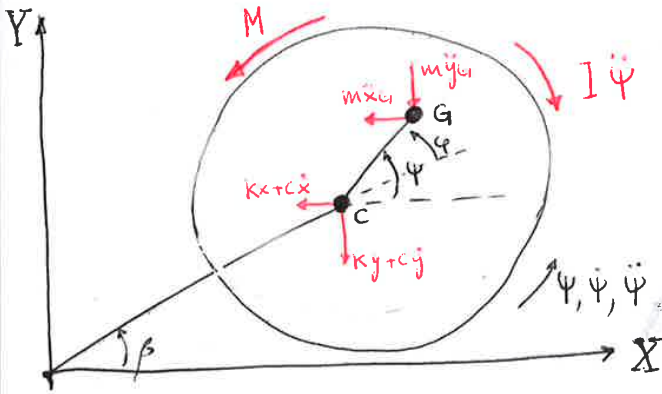
IPOTESI

- Massa disco \gg Massa albero
- Spessore disco trascurabile rispetto alla lunghezza dell'albero



- Il piano medio del disco (OXY) si mantiene sempre parallelo a se stesso \rightarrow non ci sono effetti giroscopici

• Equilibramento statico non perfetto \rightarrow $\left\{ \begin{array}{l} C: \text{centro geometrico del disco} \\ G: \text{baricentro del disco} \end{array} \right.$
 (C e G non coincidono)



β : angolo di precessione

ω : frequenza

e : eccentricità

• Ruote a velocità ω e forma triangolo $\psi = \varphi + \beta$ con l'asse x

• $\dot{\psi} \equiv \omega$; $\ddot{\psi} \equiv \dot{\omega}$

• $C(x_c, y_c) = (x, y)$

$$\leftarrow m\ddot{x}_G + Kx + cx = 0$$

$$\downarrow m\ddot{y}_G + Ky + cy = 0$$

$$G) (M - I\ddot{\psi} + (Ky + cy)e \cos \psi - (Kx + cx)e \sin \psi) = 0$$

• Ci sono 3 gradi di libertà (x, y, ψ)

$M(t)$ tale che $\dot{\psi} = \omega = \text{cost} \rightarrow \psi = \omega t$

$$\begin{cases} x_G = x + e \cos \omega t \\ y_G = y + e \sin \omega t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_G = \ddot{x} - e\omega^2 \cos \omega t \\ \ddot{y}_G = \ddot{y} - e\omega^2 \sin \omega t \end{cases}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{trasinamento}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{relativo}}$

Quindi si ottiene:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + cx + Kx = m\omega^2 e \cos \omega t & (1) \\ m\ddot{y} + cy + Ky = m\omega^2 e \sin \omega t & (2) \end{cases}$$

[Sistema interconnesso soprattutto al posto di c]

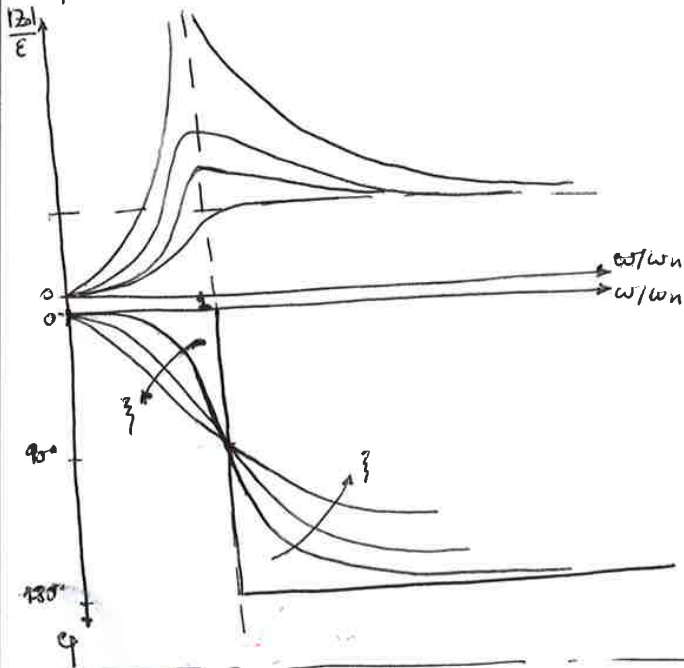
- Sistema a 2 gdl, ma con le equazioni sono disaccoppiate e ognuna può essere studiata come un sistema a 1 gdl

$$\frac{\dot{\beta}}{\omega} = \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2(\omega t - \varphi)} = + \frac{1}{\underbrace{\cos^2}_{\substack{\text{sinusoidal} \\ \text{concorde}}}} \rightarrow \text{Precessione}$$

$$\omega = \dot{\beta} \quad (\dot{\varphi} = 0) \\ (\Psi = \omega t = \beta + \varphi)$$

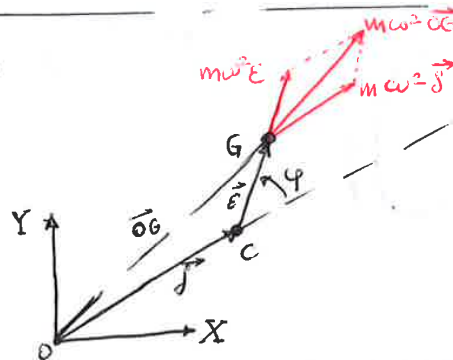
Forzante: forze centrifuge $m\omega^2 E$

Risposta (distanza OC) FRF



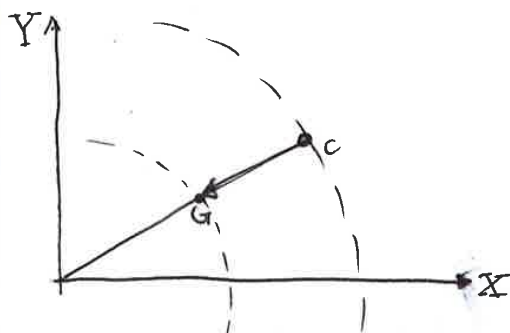
- φ è il ritardo della risposta rispetto alla ~~forzante~~ forzante
- φ è l'angolo tra \vec{s} (risposta) e \vec{E} (equilibrio)

* $m\omega^2 E$ non è la forza centrifuga totale (che è $m\omega^2 OG$) ma è solo una sua componente vettoriale.
 • PERO' $m\omega^2 E$ COSTITUISCE PER INTERO LA FORZANTE



SIGNIFICATO DELLA FASE

- 1) $\omega < \omega_n \rightarrow \varphi \approx 0$ (Il baricentro si trova all'esterno della traiettoria percorsa da C)
- 2) $\omega = \omega_n \rightarrow \varphi = 90^\circ$ ($\vec{E} \perp \vec{s}$)
- 3) $\omega \gg \omega_n \rightarrow \varphi \approx 180^\circ \rightarrow \vec{s} \approx -\vec{E}$



- Auto-centramento: quando la velocità di rotazione diventa molto grande, il baricentro si pone all'interno della traiettoria di C

Abbiamo due equazioni a 1 G.D.L. disaccoppiate → Aspetta a regime:

$$\begin{cases} x_c = x_0 \cos \omega t \\ y_c = y_0 \sin \omega t \end{cases} \quad \text{con } x_0, y_0 \in \mathbb{R}$$

Non c'è smorzamento quindi $\varphi = 0^\circ$ o $\varphi = 180^\circ$

$$(K_x - m\omega^2)x_0 = m\omega^2 E \quad \longrightarrow \quad x_0 = \frac{m\omega^2 E}{K_x - m\omega^2} = \frac{\omega^2 E}{\omega_x^2 - \omega^2}$$

$$(K_y - m\omega^2)y_0 = m\omega^2 E \quad \longrightarrow \quad y_0 = \frac{m\omega^2 E}{K_y - m\omega^2} = \frac{\omega^2 E}{\omega_y^2 - \omega^2}$$

Definiamo due velocità critiche flessionali (l'ordine del pedice I/II dipende da chi è più piccolo, supponiamo $K_x < K_y$)

$$\omega_x = \sqrt{\frac{K_x}{m}} = \omega_{crit I} \quad \omega_y = \sqrt{\frac{K_y}{m}} = \omega_{crit II}$$

Inoltre considerando le coordinate $(x_c, y_c) = (x, y)$ scritte prima:

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 = \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1 \quad \text{ELLISSE: Moti di precessione ellittici}$$

$|x_0|, |y_0|$: semiassi del moto di precessione ellittico

$$\tan \beta = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{y_0}{x_0} \tan \omega t \quad \forall t$$

Derivando

$$\frac{1}{\cos^2 \beta} \dot{\beta} = \frac{y_0}{x_0} \frac{1}{\cos^2 \omega t} \omega$$

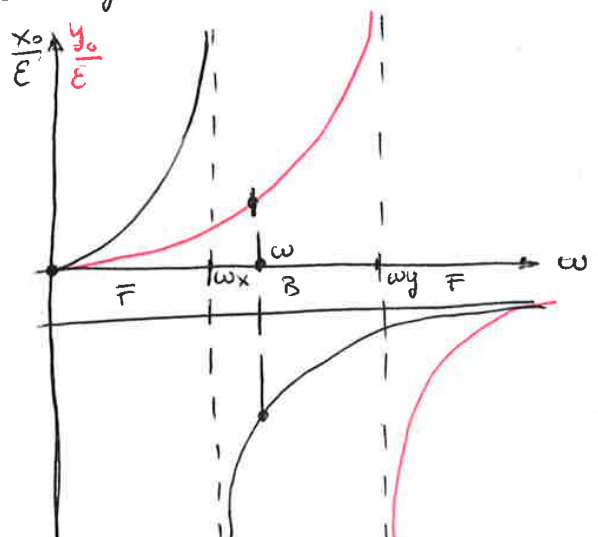
$$\left(\frac{\dot{\beta}}{\omega} = \frac{y_0}{x_0} \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \omega t}\right)$$

Possiamo notare subito che $\left|\frac{\dot{\beta}}{\omega}\right| \neq 1$ per via dell'anisotropia dei cuscinetti

Inoltre si ha che $\text{sign} \frac{\dot{\beta}}{\omega} = \text{sign} \frac{y_0}{x_0}$ (i due rapporti hanno lo stesso segno)

Studiamo il segno del rapporto $\frac{y_0}{x_0} = \frac{\omega_x^2 - \omega^2}{\omega_y^2 - \omega^2}$

| | | | |
|-------------------------|------------|------------|----------|
| | ω_x | ω_y | ω |
| $\omega_x^2 - \omega^2$ | + | - | - |
| $\omega_y^2 - \omega^2$ | + | + | - |
| $\frac{y_0}{x_0}$ | + | - | + |
| | Forward | Backward | Forward |



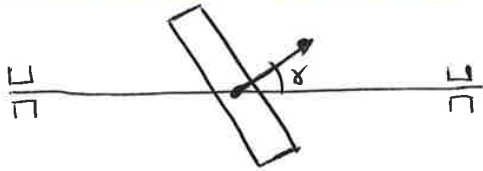
Forward: la linea elastica gira in modo concorde con ω

Backward: gira in modo discordo

Allo zero i moti non sono più ellittici ma rettilinei

Ad esempio per una certa ω si può scrivere:
 $x_0 < 0, y_0 > 0, |x_0| > |y_0|$

SQUILIBRIO DINAMICO (Squilibrio dinamico essente)



MOMENTO RISULTANTE DELLE FORZE DI INERZIA

$$\vec{M}_O = - \frac{d\vec{K}_O}{dt} - \vec{v}_O \wedge \vec{Q}$$

\vec{K}_O : Momento della quantità di moto rispetto O
 \vec{v}_O : velocità del punto O
 \vec{Q} : quantità di moto

SE $O \equiv G$ oppure O fisso $\rightarrow \vec{M} = - \frac{d\vec{K}_O}{dt}$

Inoltre $\underbrace{\{K_O\}}_{\text{vettore}} = [I]\{\omega\}$

$$\vec{\omega} = p\hat{i}_1 + q\hat{j}_1 + r\hat{k}_1$$

$(\hat{i}_1, \hat{j}_1, \hat{k}_1)$ vettori di una terna destrorsa

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \text{ : Tensore di inerzia}$$

$$I_{xx} = \int_V \rho (y^2 + z^2) dV = A$$

$$I_{yy} = \int_V \rho (x^2 + z^2) dV = B$$

$$I_{zz} = \int_V \rho (x^2 + y^2) dV = C$$

$$I_{xy} = - \int_V \rho (xy) dV = I_{yx}$$

$$I_{xz} = \dots = I_{zx}$$

$$I_{yz} = \dots = I_{zy}$$

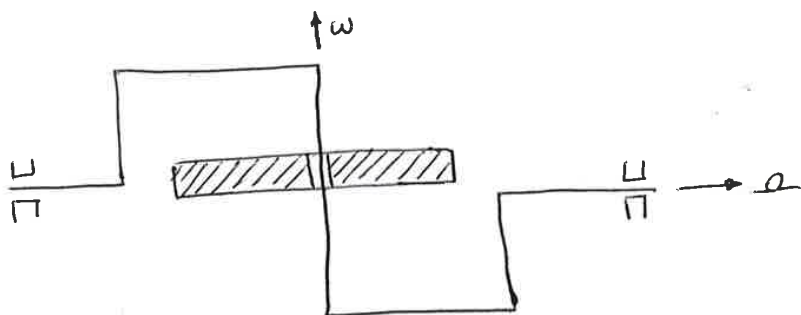
$[I] = [I]^T$: matrice simmetrica

Definizioni

- 1) Terna di riferimento baricentrica (centrata nel baricentro)
- 2) Terna di riferimento principale ($[I]$ = diagonale)
- 3) ① + ② \rightarrow Terna centrale

In presenza di simmetrie è facile trovare la terna centrale di inerzia. È quello che dà maggiori semplificazioni

Se $\gamma = 90^\circ$ e/o $\omega \gg \Omega$ (In genere $\omega > \Omega$)

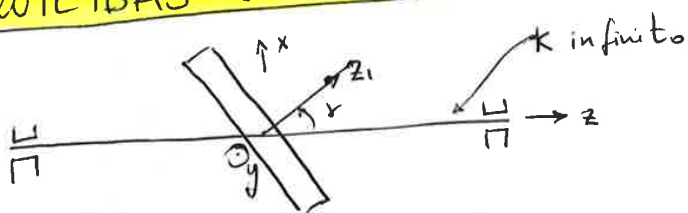


(fenomeni giroscopici)

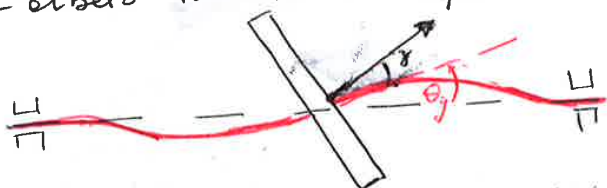
$$\vec{M}^i = -I_p \omega \Omega \hat{j}_1$$

Momento giroscopico: tende sempre a riportare $\vec{\omega}$ su $\vec{\Omega}$

SQUILIBRIO DINAMICO



- L'albero tenderà a inflettersi

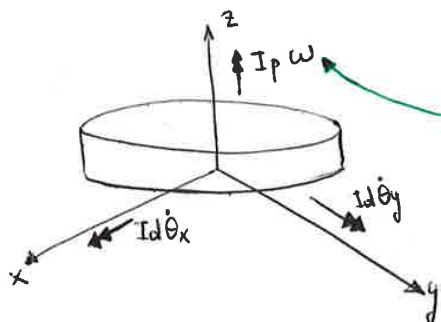


- Esisterà anche un θ_x

- La terra tenderà a cambiare continuamente nel tempo (θ_x, θ_y)

1) Consideriamo $\gamma = 0$

$\theta_x \cong 0, \theta_y \cong 0$ ma $\dot{\theta}_x \neq 0, \dot{\theta}_y \neq 0$



$$\{K_G\} = [I_G] \{w\}$$

- cambia direzione durante la rotazione (x in deve tenere conto nella derivazione)

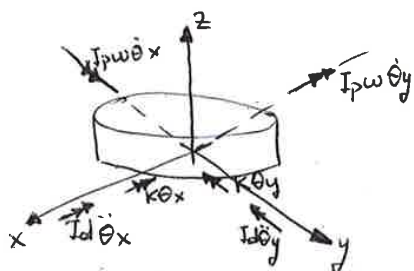
$$[I_G] = \text{diag}(I_d, I_d, I_p)$$

\downarrow rispetto z
 \downarrow rispetto y
 \downarrow rispetto x

* limite dell'esempio 2, solo che al posto di Ω si ha $\dot{\theta}$ (effetto giroscopico)

Diagramma di corpo libero ($\omega = \text{cost}, \gamma = 0$)

- Equilibrio alla rotazione intorno x e y



$$\begin{cases} I_d \ddot{\theta}_x + I_p \omega \dot{\theta}_y + K \theta_x = 0 \\ I_d \ddot{\theta}_y - I_p \omega \dot{\theta}_x + K \theta_y = 0 \end{cases}$$

Studiamo l'OMOGENEA ASSOCIATA ($\gamma=0$)

$Id\ddot{\theta} - i I_p \omega \dot{\theta} + K\theta = 0$ Campore un coefficiente complesso

- Cerchiamo la soluzione nella forma $\theta = \theta_0 e^{\lambda t}$ $\lambda \in \mathbb{C}$
 (scritto anche come $\theta = \theta_0 e^{i\lambda t}$ $\lambda \in \mathbb{R}$)

- Il sistema è conservativo (si ha parte reale nulla)

SISTEMA GIROSCOPICO CONSERVATIVO

$(-\lambda^2 Id - i I_p \omega i \lambda + K) \theta_0 e^{\lambda t} = 0$

$\lambda^2 Id - I_p \omega \lambda - K = 0$

- Regole di Cartesio: 2 variazioni di segno; 1 permanenza di segno ~~...~~
 → 2 soluzioni positive; 1 soluzione negativa

$$\lambda = \frac{I_p \omega \pm \sqrt{(I_p \omega)^2 + 4 Id K}}{2 Id}$$

$$\lambda_1 = \frac{I_p \omega + \sqrt{(I_p \omega)^2 + 4 Id K}}{2 Id}$$

FORWARD $\frac{\lambda}{\omega} > 0$

$\lambda = \lambda(\omega)$

$$\lambda_2 = \frac{I_p \omega - \sqrt{(I_p \omega)^2 + 4 Id K}}{2 Id}$$

BACKWARD $\frac{\lambda}{\omega} < 0$

- Avremo un moto di precessione in avanti e uno indietro (uno discorde e uno concorde con ω)

~~...~~

Se $\omega \rightarrow \infty$

$\lambda_1 \propto \frac{I_p}{Id} \omega$ asintoto obliquo

$\lambda_2 \propto 0$ asintoto orizzontale

Studiamo l'INTEGRALE PARTICOLARE (deve avere la stessa forma delle forzate)

$\theta = \bar{\theta} e^{i\omega t}$ con ω : velocità di rotazione

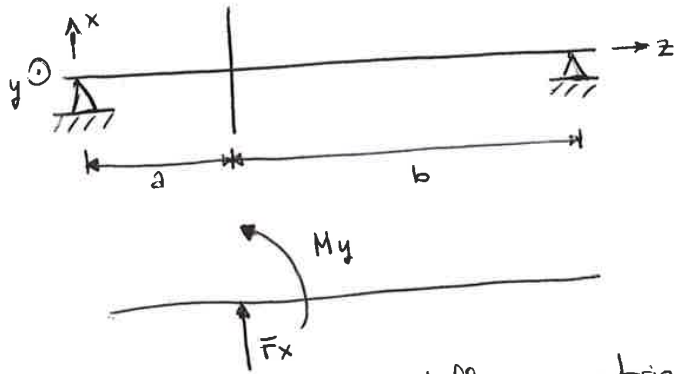
Sostituiamo

$(K - \omega^2 Id + i\omega^2 I_p) \bar{\theta} = -i \gamma \omega^2 (I_p - Id)$

$$\bar{\theta} = i \frac{\gamma \omega^2 (I_p - Id)}{K - \omega^2 (Id - I_p)}$$

- Dipendenza da ω^2 → eccitazione prodotta dalle forze di inerzia

SQUILIBRIO STATICO E DINAMICO



$$a \neq b$$

$$\gamma \neq 0$$

$$e \neq 0$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_x \\ \bar{M}_y \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \delta \end{bmatrix}}_{\text{Matrice di rigidità}} \begin{Bmatrix} x \\ \theta_y \end{Bmatrix}$$

• α, β, δ dipendono dalla geometria, dal materiale, dai vincoli...

• se $a = b \rightarrow \beta = 0$ (matrice diagonale)

• Questo vorrebbe dire che la risposta all'equilibrio statico è disaccoppiata da quella all'equilibrio dinamico

$$\begin{cases} \bar{F}_x \rightarrow x \text{ e non } \theta_y \\ \bar{M}_y \rightarrow \theta_y \text{ e non } x \end{cases}$$

• le consideriamo $z = x + iy, \theta = \theta_x + i\theta_y$

$$m\ddot{z} + \alpha z - i\beta\theta = m\omega^2 \epsilon e^{i\omega t}$$

• MODELLO DI JEFFCOTT

$$I_d \ddot{\theta} - iI_p \omega \dot{\theta} + i\beta z + \delta \theta = i(I_p - I_p) \omega^2 \gamma e^{i(\omega t + \varphi_1)}$$

• MODELLO DI ROTORE CON SQUILIBRIO DINAMICO

• Sono le due equazioni viste prima ma accoppiate; se $\beta = 0$ allora sono disaccoppiate

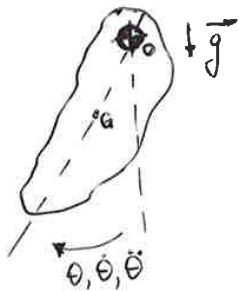
• si definisce un modello a 4 gdl ma si possono scrivere solo due equazioni complesse

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0$$

$$y(t) = (a \cos \omega_d t + b \sin \omega_d t) e^{-\frac{1}{2}\omega_n t}$$

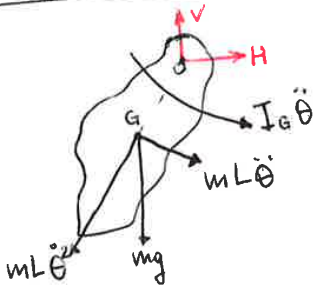
- Campore sob l'integrale generale - (transitorio)
- Se non diamo un impulso alla mossa, queste all'istante zero non si sposta dalle condizioni di equilibrio statico

ESERCIZIO: pendolo con massa distribuita

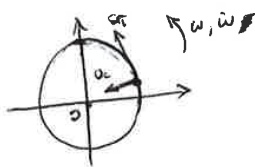


m: massa pendolo
 I_G : momento di inerzia rispetto ad un asse baricentrico
 $[I_G] = [kg \cdot m^2]$
 $\overline{OG} = L$

DIAGRAMMI DI CORPO LIBERO



- Il corpo subisce le forze di inerzia dovute all'accelerazione centripeta e tangenziale (le forze di inerzia si rappresentano sempre nel verso opposto rispetto a $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$)



- acentripeta ($\omega^2 \cdot r$) | le forze di inerzia avranno verso opposto
- a tangenziale ($\dot{\omega} \cdot r$)

$$\circlearrowleft) I_G \ddot{\theta} + mL^2 \ddot{\theta} + mg \sin \theta \cdot L = 0$$

$$(I_G + mL^2) \ddot{\theta} + mgL \sin \theta = 0$$

I_0 : momento di trasporto

$$\boxed{I_0 \ddot{\theta} + mgL \sin \theta = 0} \quad \text{- Equoz. differenz. a coeff. cost. del 2° ordine non lineare}$$

* Se spostamenti piccoli $\sin \theta \approx \theta, \cos \theta \approx 1$

- Si possono avere 3 tipi di sistemi
 - Assolutamente stabile
 - Stabile
 - Instabile

Derivando e sostituendo

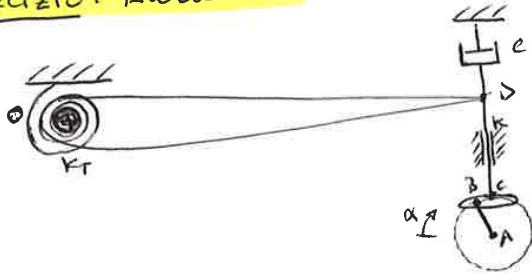
$$I_0 \ddot{\theta} - mgL = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{mgL}{I_0}}$$

$\theta = \int \dot{\theta} \text{ particolare} + \int \dot{\theta} \text{ generale}$

$$\theta = \pi + A_1 e^{-\sqrt{mgL/I_0} t} + A_2 e^{\sqrt{mgL/I_0} t}$$

- Il sistema è instabile per $\theta_{eq} = \pi$, in quanto una volta allontanato da tale posizione non tornerà più all'equilibrio

Esercizio: Allettone



$$\alpha \equiv \Omega t, \quad \Omega = \text{cost}$$

K_T incognita

$$\overline{AB} = R$$

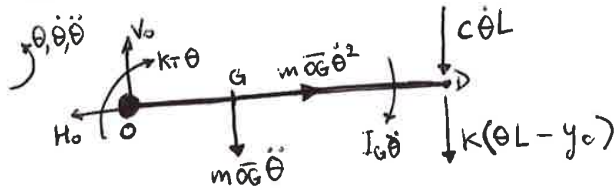
$$\overline{OD} = L$$

$$\theta_{max} = 5^\circ \rightarrow \begin{cases} \sin \theta \approx \theta \\ \cos \theta \approx 1 \end{cases} \quad (\theta \ll 1)$$

- Molla di torsione $M = K_T \theta$
 - Molla lineare $F = Kx$

$$y_c = \overline{AB} \sin \alpha = R \sin \alpha$$

(C e D si muovono di moto armonico)



- L'allettone si sta muovendo verso l'alto

- Forza peso già bilanciata da STAT

$K_T \theta$: Proposte della molla

$c \dot{\theta} L$: Proposte smorzatore

$m \overline{OG} \ddot{\theta}$: ~~accelerazione~~ Forza di inerzia (acc tangenziale)

$m \overline{OG} \dot{\theta}^2$: Forza centrifuga

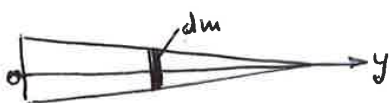
$I_G \ddot{\theta}$: Momento risultante delle forze di inerzia

$$y_c = R \sin(\Omega t)$$

$$K_T \theta + m \overline{OG}^2 \ddot{\theta} + I_G \ddot{\theta} + c \dot{\theta} L^2 + K(\theta L - y_c) L = 0$$

$$(I_G + m \overline{OG}^2) \ddot{\theta} + c \dot{\theta} L^2 + (K_T + K L) \theta = K L R \sin(\Omega t)$$

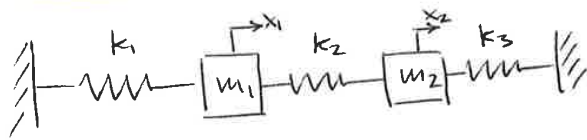
- Dobbiamo calcolare il momento di inerzia $I_0 = I_G + m \overline{OG}^2$ e quindi abbiamo voluto la distribuzione di massa:



$$\mu = \mu_0 (1 - \frac{y}{L})$$

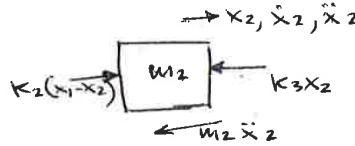
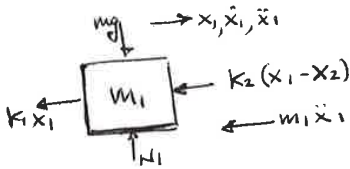
$$dm = \rho dV = \mu dy$$

SISTEMI A MOLTI GRADI DI LIBERTÀ



$m_1 = 5 \text{ Kg}$ $m_2 = 10 \text{ Kg}$
 $k_1 = k_2 = 2 \text{ N/m}$
 $k_3 = 4 \text{ N/m}$

- Determinare $\omega_1, \omega_2, \{\psi_1\}, \{\psi_2\}$



$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[m] \{\ddot{x}\} + [k] \{x\} = \{0\}$$

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 4 - \omega^2 5 & -2 \\ -2 & 6 - \omega^2 10 \end{pmatrix} = 0$$

$$24 - 40\omega^2 - 30\omega^2 + 50\omega^4 - 4 = 0$$

$$50\omega^4 - 70\omega^2 + 20 = 0$$

$$5\omega^4 - 7\omega^2 + 2 = 0$$

(Polinomio caratteristico di grado 2 perché 2 g.d.l.)

$$\omega_1^2 = \frac{2}{5} \left(\frac{\text{rad}}{s}\right)^2$$

$$\omega_2^2 = 1 \left(\frac{\text{rad}}{s}\right)^2$$

↓ due autovalori (devono essere positivi)

* [M] e [K] reali simmetriche definite positive

- Adesso sostituiamo a turno gli autovalori, per trovare gli autovettori, ~~o~~ nell'equazione: $([K] - \omega^2 [M]) \{A\} = \{0\}$

ω₁

$$\begin{bmatrix} 4 - \frac{2}{5} 5 & -2 \\ -2 & 6 - \frac{2}{5} 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ψ_{11} : prima massa, primo modo
 ψ_{21} : seconda massa, sempre primo modo

$$\begin{cases} 2\psi_{11} - 2\psi_{21} = 0 \\ -2\psi_{11} + 2\psi_{21} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \psi_{11} = \psi_{21} \\ \psi_{21} = \psi_{11} \end{cases} \rightarrow \{\psi_1\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Supponiamo arbitrariamente ψ_{11} e otteniamo di conseguenza ψ_{21} . In questo caso, se spostiamo di 1 la massa 1 si sposterà di 1 anche la massa 2. ~~(Per il secondo modo)~~ (con ω_2)

INVERSA DI UNA MATRICE

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \text{Cof}(a_{11}) & \text{Cof}(a_{12}) & \dots \\ \text{Cof}(a_{21}) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \frac{1}{\det(A)}$$

• $\text{Cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot C_{ij}$

• C_{ij} è il determinante della matrice A a cui è stata tolta la i-esima riga e la j-esima colonna

$$\eta_1 = A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_1 t$$

$$\eta_{10} = 0 \quad \dot{\eta}_{10} = 2$$

$$\begin{cases} A_1 = 0 \\ B_1 \omega_1 = 2 \end{cases} \quad B_1 = 2 \sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{10}$$

$$\rightarrow \eta_1(t) = \sqrt{10} \sin(\omega_1 t)$$

$$\eta_2 = A_2 \cos \omega_2 t + B_2 \sin \omega_2 t$$

$$\eta_{20} = 0 \quad \dot{\eta}_{20} = 0$$

$$\begin{cases} A_2 = 0 \\ B_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \eta_2(t) = 0$$

Quindi si avrà

$$\begin{cases} \eta_1(t) = \sqrt{10} \sin \omega_1 t \\ \eta_2(t) = 0 \end{cases}$$

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Per calcolare $\{x\}$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sqrt{10} \sin \omega_1 t \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{10} \sin \omega_1 t \\ x_2 = \sqrt{10} \sin \omega_1 t \end{cases}$$

• Utilizziamo un altro metodo (metodo alternativo) \square

Nuove condizioni iniziali: $\{x_0\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ $\{v_0\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$$A_r = \frac{[\Psi_r]^T ([M] \{x_0\})}{m_r} \quad ; \quad B_r = \frac{[\Psi_r]^T ([M] \{v_0\})}{m_r \omega_r}$$

$$A_1 = \frac{\{1 \ 1\} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}}{15} = \frac{[\Psi_1]^T ([M] \{x_0\})}{m_1 \omega_1} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$A_2 = \frac{\{1 \ -1/2\} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}}{15/2} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$B_1 = B_2 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = \eta_1 + \eta_2 = \frac{1}{3} \cos \omega_1 t + \frac{2}{3} \cos \omega_2 t \\ x_2 = \eta_1 - \frac{1}{2} \eta_2 = \frac{1}{3} \cos \omega_1 t - \frac{1}{3} \cos \omega_2 t \end{cases}$$

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\Psi\} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2K - I\omega_1^2 & -K \\ -K & 2K - 2I\omega_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi_{11} \\ \Psi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ψ_{11} : prima massa, primo autovettore
 Ψ_{21} : seconda massa, primo autovettore

$$(2K - I\omega_1^2) \Psi_{11} - K \Psi_{21} = 0$$

~~$(2K - I\omega_1^2) \Psi_{11} - K \Psi_{21} = 0$~~

$$(2K - I \frac{3-\sqrt{3}}{2} \frac{K}{I}) \Psi_{11} - K \Psi_{21} = 0$$

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} \Psi_{11} = \Psi_{21}$$

$$\rightarrow \Psi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2K - I\omega_2^2 & -K \\ -K & 2K - 2I\omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi_{12} \\ \Psi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ψ_{12} : prima massa, secondo modo
 Ψ_{22} : seconda massa, secondo modo

$$(2K - I \frac{3+\sqrt{3}}{2} \frac{K}{I}) \Psi_{12} - K \Psi_{22} = 0$$

$$\frac{1-\sqrt{3}}{2} \Psi_{12} = \Psi_{22}$$

$$\rightarrow \Psi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix}$$

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1,366 & -0,366 \end{bmatrix}$$

- se eccitiamo con ω_1 , i valori si muoveranno in fase: spostando di 1° il valore 1, si sposterà di $1,366^\circ$ il valore 2
- se eccitiamo con ω_2 , i valori si muoveranno in contro fase: spostando di 1° il valore 1, si sposterà di $-0,366^\circ$ il valore 2

Considerando i valori

$$I_1 = 40,5 \text{ kg m}^2$$

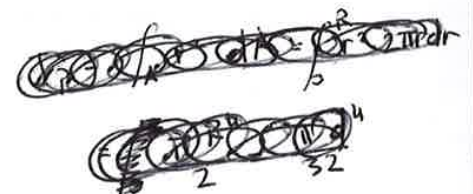
$$d = 10 \text{ mm}, l = 900 \text{ mm}$$

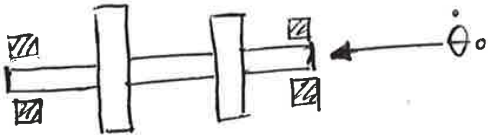
$$G = 80000 \text{ N/mm}^2$$

$$K_T = \frac{G I_P}{L} = \frac{G}{L} \frac{\pi d^4}{32} \approx 87,2 \text{ Nm}$$

$$I_P = \int r^2 dA = \int_0^R r^2 2\pi r dr = \frac{1}{4} R^2 2\pi = \frac{1}{32} \pi d^4$$

$$\rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 1,17 \text{ rad/s} \\ \omega_2 = 2,26 \text{ rad/s} \end{cases}$$





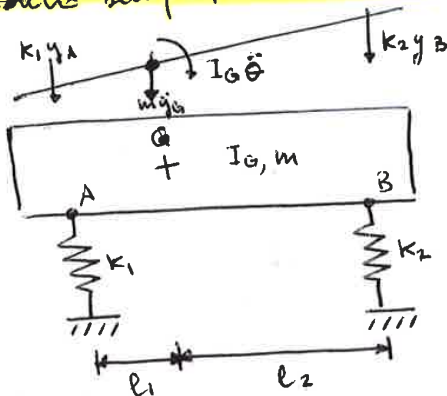
- Viene bloccato istantaneamente mentre ruota a $\dot{\theta}_0$
 → RISPOSTA LIBERA?

Per determinare la risposta libera meglio pensare alle coordinate modali

$$\begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1(t=0) \\ \dot{\theta}_2(t=0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \theta_1(t=0) \\ \theta_2(t=0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Esercizio: Modello semplificato di un'autorettrice



Angoli piccoli
 $\theta \ll 1 \text{ rad}$

Coordinate y_A, θ

$$\downarrow m \ddot{y}_G + k_1 y_A + k_2 y_B = 0$$

$$\begin{cases} y_G = y_A + l_1 \theta \\ y_B = y_A + l_2 \theta \end{cases}$$

$$l_1 + l_2 = l$$

$$\downarrow m (\ddot{y}_A + l_1 \ddot{\theta}) + k_1 y_A + k_2 (y_A + l_2 \theta) = 0$$

$$m \ddot{y}_A + m l_1 \ddot{\theta} + (k_1 + k_2) y_A + k_2 l_2 \theta = 0$$

$$A) I_G \ddot{\theta} + (m \ddot{y}_A + m l_2 \ddot{\theta}) l_2 + (k_2 y_A + k_2 l_2 \theta) l_2 = 0$$

$$(I_G + m l_1 l_2) \ddot{\theta} + m l_1 \ddot{y}_A + k_2 l_2 y_A + k_2 l_2^2 \theta = 0$$

$$\begin{bmatrix} m & m l_1 \\ m l_1 & I_G + m l_1 l_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_A \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 l_2 \\ k_2 l_2 & k_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_A \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Coordinate y_G, θ

$$\downarrow m \ddot{y}_G + k_1 (y_G - l_1 \theta) + k_2 (y_G + l_2 \theta) = 0$$

$$G) I_G \ddot{\theta} + k_2 (y_G + l_2 \theta) l_2 - k_1 (y_G - l_1 \theta) l_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_G \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 l_2 - k_1 l_1 \\ k_2 l_2 - k_1 l_1 & k_2 l_2^2 + k_1 l_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_G \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Per avere matrici di massa e di rigidezza disuguali dovrà essere $k_2 l_2 - k_1 l_1 = 0$
 (Per avere modi disaccoppiati quindi equazioni disaccoppiate)

$$\begin{Bmatrix} y_G \\ \theta \end{Bmatrix} = [Y] \begin{Bmatrix} A_1 \cos \omega t \\ A_2 \cos \omega_2 t \end{Bmatrix}$$

Introducendo lo smorzamento viscoso proporzionale

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K]$$

$$\alpha = \beta = 0,2$$

Fattori di smorzamento ζ_1, ζ_2 ?

$$C_r = \alpha m_r + \beta K_r$$

↑ ↑
"MODALI"

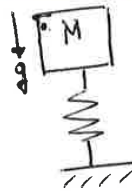
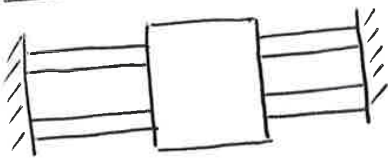
$$\zeta_r = \frac{C_r}{2 m_r \omega_r}$$

$$\zeta_r = \frac{\alpha m_r}{2 m_r \omega_r} + \frac{\beta K_r}{2 m_r \omega_r} = \frac{\alpha}{2 \omega_r} + \frac{\beta \omega_r}{2}$$

$$\omega_1 \Rightarrow \zeta_1 = 63\%$$

$$\omega_2 \Rightarrow \zeta_2 = 95\%$$

ESERCIZIO: Assorbitore dinamico



$$M_g = \delta_{STA} \cdot K$$

$$M_g = \delta_{STAT} \cdot 2 \left(\frac{192 EI}{L^3} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{K_0}$

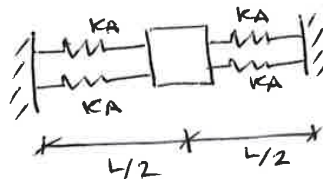
Considerando un $\delta_{max} = 1 \text{ mm} \rightarrow I_{min} = 3,28 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4 = 32,8 \text{ cm}^4$
 Scegliamo lo scabato con $I_x = 38,4 \text{ cm}^4$; $I_y = 3,64 \text{ cm}^4$
 - Le due travi lavorano come due molle in parallelo, vedano la stessa deformazione $K = K_1 + K_2 = 2 \cdot \left(\frac{192 EI}{L^3} \right)$

$$\omega_{vert} = \omega_0 = \sqrt{\frac{2}{M} \left(\frac{192 EI_x}{L^3} \right)} = 106,7 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{orizz} = \sqrt{\frac{2}{M} \left(\frac{192 EI_y}{L^3} \right)} = 32,97 \text{ rad/s}$$

$$K_{mole} = \frac{EA}{l}$$

$$l \approx \frac{L}{2}$$



$$K_{tot} = 4 \cdot \frac{EA}{L/2} \rightarrow \omega_{tot} = \sqrt{\frac{K_{tot}}{M}}$$

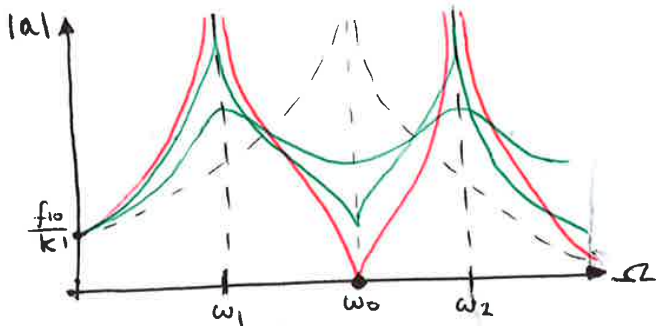
La frequenza propria delle oscillazioni flessionali verticali è $\omega_{tot} = 106,67 \text{ rad/s}$
 Quindi la velocità che causerebbe risonanza flessionale è:

$$N_0 = \frac{\omega_n \cdot 60}{2\pi} = 1018,7 \text{ rpm}$$

$$K_2 = 5690 \text{ N/m}$$

- Adesso però abbiamo un sistema a 2 GDL quindi avremo 2 f. di risonanza: $\det[KD] = 0 \rightarrow \omega_1^2, \omega_2^2$

Facendo i calcoli si ottiene $\omega_1 = 103 \text{ rad/s}$ $\omega_2 = 110,5 \text{ rad/s}$



- Si elimina il problema delle risonanze in ω_0 ma si creano oltre due risonanze in ω_1 e ω_2 . Conviene allargare l'intervallo tra ω_1 e $\omega_2 \rightarrow$ si aumenta m_2
 $m_2' = 5 \text{ kg}$; $k_2' = 56900 \text{ N/m}$
 $\omega_1' = 95,4 \text{ rad/s}$; $\omega_2' = 119,3 \text{ rad/s}$

- Con lo smorzamento $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$

I massimi si abbassano e i minimi si alzano. Si estendono le curve. I massimi si spostano leggermente verso sinistra

ESERCIZIO: Autocarro a 4 gdl

Come gradi di libertà abbiamo θ , spostamenti del baricentro, di m_1 e di m_2

$z_1, z_2, z, \theta \rightarrow 4 \text{ GDL}$

$$z = q_1, \theta = q_2, z_1 = q_3, z_2 = q_4$$

u_1 e u_2 sono spostamenti rispetto dal terreno

$$T = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} J_y \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{z}_2^2$$

$$V = \frac{1}{2} k_1 (z_1 - u_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (z_2 - u_2)^2 + \frac{1}{2} k_{s1} (z + a_1 \theta - z_1)^2 + \frac{1}{2} k_{s2} (z - a_2 \theta - z_2)^2$$

• La molla k_{s1} si deforma di $(z_1 - z_1) = (z + a_1 \theta) - z_1 = (\theta \ll 1)$
 • La molla k_{s2} si deforma di $(z_2 - z_2) = (z - a_2 \theta) - z_2$

$$V = \frac{1}{2} c_1 (\dot{z}_1 - \dot{u}_1)^2 + \frac{1}{2} c_2 (\dot{z}_2 - \dot{u}_2)^2 + \frac{1}{2} k_{s1} (\dot{z} + a_1 \dot{\theta} - \dot{z}_1)^2 + \frac{1}{2} k_{s2} (\dot{z} - a_2 \dot{\theta} - \dot{z}_2)^2$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k \rightarrow L = T - V$$

$$\left| \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = Q_k \right|$$

$$q_k = q_2 = \theta$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = I_G \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = k_{s1} \cdot a_1 (z + a_1 \theta - z_1) + k_{s2} a_2 (z - a_2 \theta - z_2)$$

SISTEMI CONTINUI

ESERCIZIO: Vibrazioni assoli barra prismatica

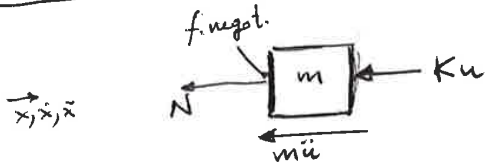
1^a cosa da fare \rightarrow condizioni al bordo

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

con soluzione $u(x,t) = \phi(x) e^{i\omega t} = \phi(x) \cos(\omega t + \varphi)$

$x=0$ $u(0,t) = 0 \rightarrow \phi(0) = 0$

$x=L$



- tutta forza positiva agisce la forza elastica della molla che non rispetta la convenzione del corpo continuo (f.p./f.n.) ma reagisce semplicemente all'oppostamento verso destra
 - tutta forza negativa si rispetta la convenzione

$$\leftarrow (N + m\ddot{u} + Ku)_{x=L} = 0$$

$$N = EA \frac{\partial u}{\partial x} = EA \phi'(x) \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$u(x,t) = \phi(x) \gamma(t) = \phi(x) \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{u}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \phi(x) \cdot (-\omega^2) \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\left[EA \phi'(L) + m \phi(L) (-\omega^2) + k \phi(L) \right] \cos(\omega t + \varphi) = 0$$

$$EA \phi'(L) + (k - m\omega^2) \phi(L) = 0$$

Donque le due condizioni al bordo sono

$$\begin{cases} \phi(0) = 0 \\ EA \phi'(L) + (k - m\omega^2) \phi(L) = 0 \end{cases}$$

Si ricavi l'equazione caratteristica:

$$u(x,t) = \cos(\omega t + \varphi) \cdot \underbrace{\left(a \cos \frac{\omega}{c} x + b \sin \frac{\omega}{c} x \right)}_{\phi(x)}$$

$x=0 \rightarrow a=0$

$$\phi' = b \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega}{c} x$$

$$c^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{EA}{\mu} = \frac{E}{\rho}$$

$x=L \rightarrow EA b \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega}{c} L + (k - m\omega^2) b \sin \frac{\omega}{c} L = 0$

Le forme modali sono definite a meno di una costante quindi b si deve semplificare

$$\Rightarrow \text{tg} \frac{\omega}{c} L = - \frac{EA \frac{\omega}{c}}{k - m\omega^2} \rightarrow \text{Da qui si può ricavare } \omega$$

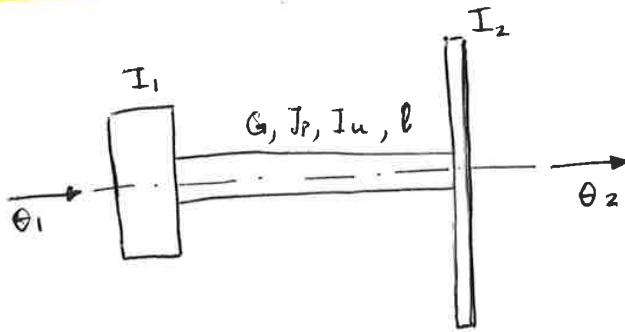
Si ottiene:

$$(-EI\phi''' - m\omega^2\phi)_L = 0 \quad (3)$$

$$(EI\phi'' - \omega^2 Id\phi')_L = 0 \quad (4)$$

• (1), (2), (3), (4) → Equazione caratteristica

ESERCIZIO: Oscillazioni torsionali con due volani



• Albero elastico non inerte

$$K_T = G \frac{J_p}{L} = G \frac{J_p}{l}$$

(Non inerte ≡ non ha inerzia, quindi non se ne tiene conto)

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2$$

$$V = \frac{1}{2} K_T (\theta_2 - \theta_1)^2 = \frac{1}{2} K_T (\theta_1 - \theta_2)^2$$

• Applicando l'equazione di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = 0 \quad \text{con } q_1 = \theta_1, \quad q_2 = \theta$$

otteniamo:

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_T & -K_T \\ -K_T & K_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} K_T - \omega^2 I_1 & -K_T \\ -K_T & K_T - \omega^2 I_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$K_T^2 - K_T \omega^2 I_2 - K_T \omega^2 I_1 + \omega^4 I_1 I_2 - K_T^2 = 0$$

$$I_1 I_2 \omega^4 - \omega^2 (I_1 K_T + I_2 K_T) = 0$$

$$\omega_1^2 = 0 \rightarrow \theta_{11} = \theta_{21} \quad \text{moto rigido}$$

$$\omega_2^2 = \frac{(I_1 + I_2) K_T}{I_1 I_2} \rightarrow \omega_2 = 8013 \text{ rad/s}$$

$\begin{cases} \theta_{11} & \text{primo modo, primo modo} \\ \theta_{21} & \text{secondo modo, primo modo} \end{cases}$

Parliamo di equazione delle snote $\rightarrow \phi$ è armonica

$$\phi(x) = A \cos \frac{\omega}{c} x + B \sin \frac{\omega}{c} x$$

$$c^2 = \frac{GJ_p}{I_u} = \frac{G}{\rho}$$

$$\phi'(x) = \frac{\omega}{c} (-A \sin \frac{\omega}{c} x + B \cos \frac{\omega}{c} x)$$

1^a condizione al contorno: $GJ_p \frac{\omega}{c} B + I_1 \omega^2 A = 0$

2^a condiz. cont.: $GJ_p \frac{\omega}{c} (-A \sin(\frac{\omega}{c} L) + B \cos(\frac{\omega}{c} L)) - I_2 \omega^2 (A \cos(\frac{\omega}{c} L) + B \sin(\frac{\omega}{c} L)) = 0$

Scrivendo in forma matriciale otterremo:

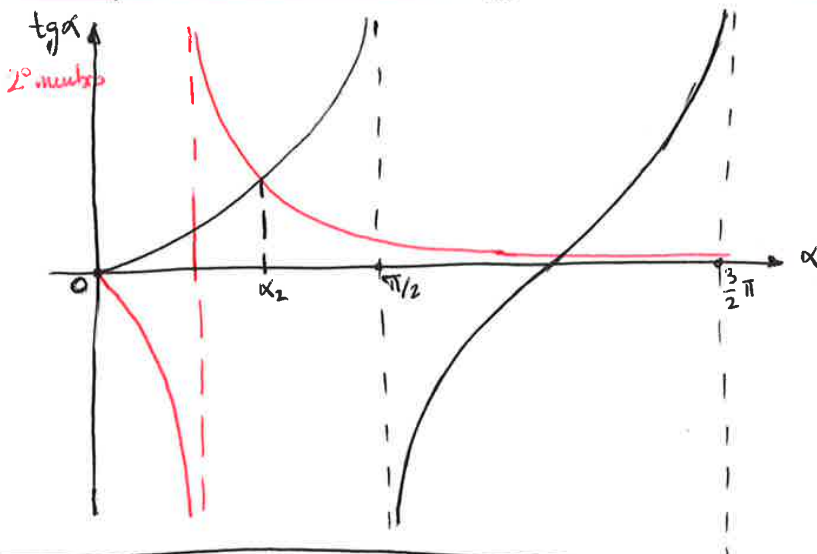
$$\begin{bmatrix} \text{Matrice} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \det([\text{Matrice}]) = 0$$

Si ottiene $\text{tg}(\alpha) = \frac{I_1 + I_2}{\frac{I_1 I_2}{I} \alpha - \frac{I}{\alpha}}$ Equazione caratteristica

$$\alpha = \frac{\omega}{c} L$$

$$I = I_u L$$

In questo secondo caso la pulsazione deve essere minore del primo caso perché abbiamo aggiunto l'inerzia dell'albero



$$\alpha_1 = \frac{\omega_1}{c} L = 0 \rightarrow \omega_1 = 0$$

$$\alpha_2 = \frac{\omega_2}{c} L = 0,696 \rightarrow \omega_2 = 7786 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

* α_1 e α_2 sono i punti in cui si intersecano le curve del 1° e del 2° membro

CALCOLO CON IL METODO DELL'ENERGIA DI RAYLEIGH

$$\Theta(x, t) = C \cdot \sin(\omega t + \varphi) \cdot f(x)$$

- C è una costante pari a 1 che serve per far quadrare l'analisi di momento

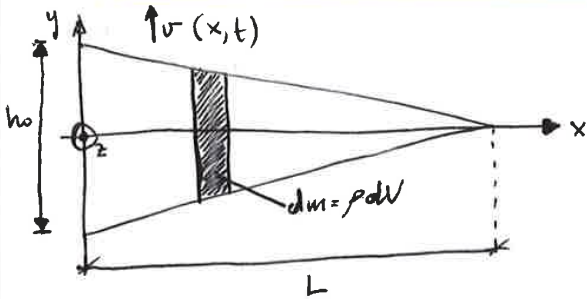
$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\Theta}^2(x=0) + \frac{1}{2} I_2 \dot{\Theta}^2(x=L) + \frac{1}{2} \int_0^L I_u \dot{\Theta}^2(x) dx$$

Considerando che $\dot{\Theta} = C \omega \cos(\omega t + \varphi) f(x)$

$$T = \frac{1}{2} C^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \left[I_1 f^2(0) + I_2 f^2(L) - \int_0^L I_u f^2 dx \right]$$

T_{max} si ha quando $\cos^2(\omega t + \varphi) = 1$

Esercizio: Oscillazioni flessionali ala

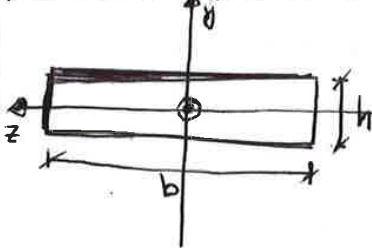


- Trascuriamo traslazioni lungo x e inerzia alla rotazione
- Altezza variabile $h = (1 - \frac{x}{L})h_0$

$$T = \frac{1}{2} \int_m \dot{v}^2 dm = \frac{1}{2} \int_0^L \dot{v}^2 \rho h b dx = \frac{1}{2} \rho b \int_0^L \dot{v}^2 (1 - \frac{x}{L}) h_0 dx$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L E I_z \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{b h^3}{12} E \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \frac{E b h_0^3}{12} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right)^3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

$v = \frac{1}{2} E I \frac{d^2 v}{dx^2} dx$ con $dx = \frac{dv}{\frac{d^2 v}{dx^2}}$



$$v(x, t) = \omega \sin(\omega t + \varphi) f(x)$$

$$\dot{v}(x, t) = \omega \cos(\omega t + \varphi) f(x)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{dx^2} \sin(\omega t + \varphi) = f'' \sin(\omega t + \varphi)$$

$$T_{MAX} = V_{MAX}$$

$$\frac{1}{2} \rho b h_0 \int_0^L \omega^2 f^2 \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \frac{E b h_0^3}{12} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right)^3 (f'')^2 dx$$

$$\omega^2 = \frac{E h_0^2 \int_0^L f''^2 \left(1 - \frac{x}{L}\right)^3 dx}{\rho \cdot 12 \int_0^L f^2 \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx}$$

- Se scegliessimo $f(x) = x \rightarrow f' = 1 \rightarrow f'' = 0$

~~Assunzione non possibile~~

Verrebbe $\omega = 0$ (moto rigido senza deformazione) \rightarrow non è plausibile

- Scegliamo $f(x) = x^2 \quad f' = 2x \quad f'' = 2$

$$\omega^2 = \frac{E h_0^2}{12 \rho} \frac{\int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right)^3 \cdot 4 dx}{\int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) x^4 dx} \rightarrow \omega \approx 2\pi \cdot 3 \text{ rad/s} \quad (f \approx 3 \text{ Hz})$$

- La soluzione corretta sarà più piccola di queste

- Se avessimo scelto $f(x) = x^3, f' = 3x^2, f'' = 6x$
È ammissibile

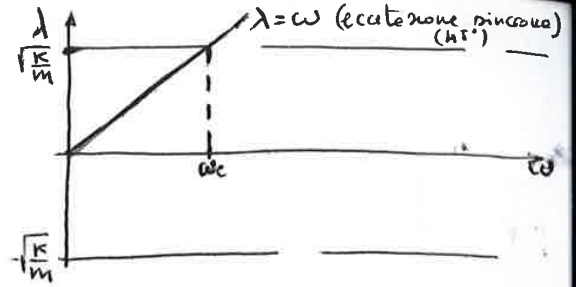
Rifacendo i calcoli si otterrebbe $f \approx 3, \text{ Hz}$

$$m\ddot{z} + kz = 0$$

$$z = A e^{i\lambda t}$$

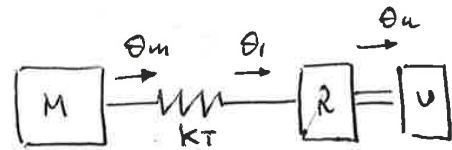
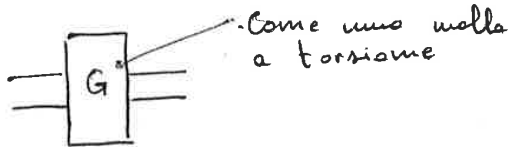
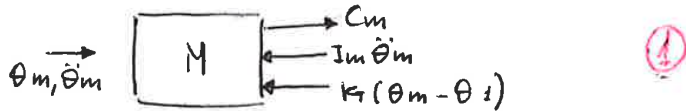
$$-m\lambda^2 + k = 0 \rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Quindi il diagramma di Campbell si riduce a:

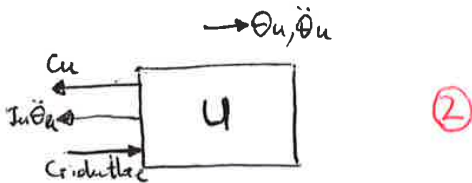


ESERCIZIO. Trasmissione con giunto elastico

Coordinate indipendenti θ_m : motore, θ_u : utilizzatore



Riduttore $\tau = \frac{1}{G} = \frac{\omega_{out}}{\omega_{in}} = \frac{\dot{\theta}_u}{\dot{\theta}_1}$ (3)



$$\eta = \frac{C_u \dot{\theta}_u}{K_T (\theta_m - \theta_1) \dot{\theta}_1}$$
 (4)

Passiamo a Lagrange

$$T = \frac{1}{2} I_m \dot{\theta}_m^2 + \frac{1}{2} I_u \dot{\theta}_u^2$$

$$V = \frac{1}{2} K_T (\theta_m - \theta_1)^2$$

$$\tau = \frac{\theta_u}{\theta_1}$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

$$\vec{F}_i \begin{cases} \vec{C}_m = C_m \vec{i} \\ \vec{C}_u = -C_u \vec{i} \end{cases} \rightarrow \vec{i}$$

$$\vec{r}_i \begin{cases} \theta_m \vec{i} \\ \theta_u \vec{i} \end{cases}$$