NUMERO: 1955A - ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Navaretti Silvio

MATERIA: Metodi matematici per ingegneria Analisi - prof. Fagnani- Pellerey.pdf

INTEGRALI COI RESIDUI

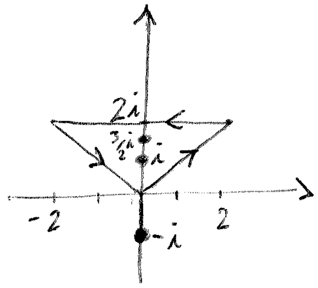
$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Re_f(z_k)$$

$$I = \int_C \frac{z^2}{(z^2+1)(z-i\frac{3}{2})}\,dz$$

$$C = \partial\left\{ z = x+iy : x,y \in \mathbb{R} \quad |x| \le y \le 2 \right\}$$

① Disegnare la regione

② Individuare i poli



③ Devo usare i residui interni alla curva, cioè i residui di i e $\frac{3}{2}i$ nell'esempio

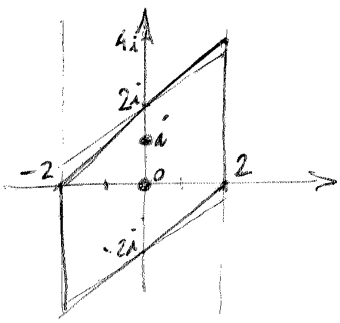
④ $$2\pi i \left[\left(\frac{z^2}{(z+i)(z-i\frac{3}{2})} \right)\Bigg|_{z=i} + \left(\frac{z^2}{z^2+1} \right)\Bigg|_{z=\frac{3}{2}i} \right]$$

Esempio

$$I = \int_C \frac{e^{\pi z}}{z(z-i)^2}\,dz \qquad C = \partial\left\{ z = x+iy : x,y \in \mathbb{R} \quad |y-x| \le 2, \ |x| \le 2 \right\}$$

$y \le 2+x$

$y \ge -2+x$



Poli in i, 0 ~~in 0 doppio~~

$$2\pi i \left(Re_f(i) + Re_f(0) \right) =$$

$$= 2\pi i \left(\frac{e^{\pi z}}{(z-i)^2}\Bigg|_0 + \cancel{\frac{e^{\pi z}}{z}\Bigg|_i} + \frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{\pi z}}{z}\right)\Bigg|_{z=1} \right)$$

- RESIDUO POLO SEMPLICE : la parte che non si annulla nel punto
- RESIDUO POLO DOPPIO : $\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left(\quad \right)$
- RESIDUO POLO n : $\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\quad \right)$

NON CENTRATO IN $z_0 = 0$

$z_0 = 1 \qquad \omega = z - 1$

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} = \frac{e^{2(\omega+1)}}{\omega^3} = \frac{e^2}{\omega^3} e^{2\omega} = \frac{e^2}{\omega^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\omega)^n}{n!} = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \omega^{n-3}$$

$$= e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} (z-1)^{n-3}$$ ed ho Taylor

$$= e^2 \left(\frac{1}{\omega^3} + \frac{2}{\omega^2} + \frac{2}{\omega} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^n \omega^{n-3}}{n!} \right)$$

$$= e^2 \left(\frac{1}{(z-1)^3} + \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{2}{z-1} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^n (z-1)^{n-3}}{n!} \right)$$ Laurent

Polo SEMPLICE

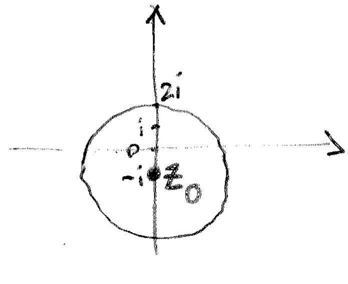
Residuo di f in 1 $\quad Re_f(1) = 2e^2$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 264

Come si usa l'integrale di Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

Esempio $I = \int_C \frac{\overbrace{\sin(z)}^{f(z)}}{\underbrace{z+i}_{\to z_0 = -i}}\, dz \qquad C: \{ z \in \mathbb{C} \,/\, |z+i| = 3 \}$



① Disegnare C, disegnare z_0 che dev'essere dentro C

② Se $f(z)$ è analitica il risultato è $f(z_0) \cdot 2\pi i$

Qui $\sin(-i)\, 2\pi i = 2\pi i \frac{e^{-ii} - e^{+ii}}{2i} = \pi (e^{1} - e^{-1})$

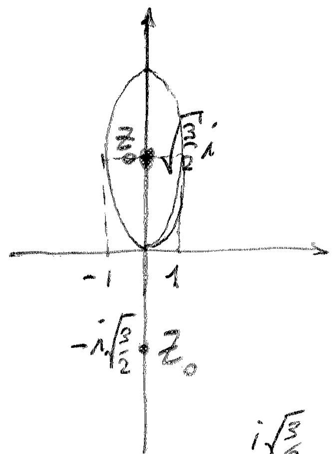
Esempio $I = \int_\gamma \frac{e^z (z^2 - 3)}{2z^2 + 3}\, dz$ Sostegno di γ: $\{ z : x + iy \,/\, x^2 + \frac{2}{3}\left(y - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 = 1 \}$

Esamino $2z^2 + 3 = 2\left(z^2 + \frac{3}{2}\right)$

$z_0 = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot i$

$$I = \int_\gamma \frac{\overbrace{e^z (z^2 - 3)}}{2\left(z + i\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(z - i\sqrt{\frac{3}{2}}\right)}\, dz$$

$f(z)$ analitica nella regione che ci interessa



$$I = 2\pi i\, f(z_0) = 2\pi i \left(\frac{e^{i\sqrt{3/2}} \left(\left(i\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 - 3 \right)}{2\left(2i\sqrt{\frac{3}{2}}\right)} \right) = \frac{-\pi e^{i\sqrt{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{2}} 3\sqrt{3}$$

③ Degli z_0 fuori non ce ne frega alcunché. (Come $-i\sqrt{\frac{3}{2}}$ dell'esempio)

Prendo la parte che avanza "aggiungendola" alla $f(z)$ sopra

Come si calcola il raggio delle serie di potenze,
come si valutano i bordi,
somme

$\sum_{n=n_0}^{\infty} a(n) z^n$

① Rapporto. RICORDARE IL MODULO ED $R = \frac{1}{\ell}$

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell \qquad R = \frac{1}{\ell}$$

IL MODULO POTREBBE ELIMINARE LE i SCOMODE

② Sul bordo però non sappiamo nulla

③ Se c'è $(z - z_0)^n$ è una circ. centrata in z_0 di raggio R

SUI BORDI

① ~~Conv. assoluta: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ se converge allora sul bordo converge, sostituisco a $(z-z_0)^n$ il raggio ottenendo $(\text{raggio})^n$~~

Esempio $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-4)^n}{n^3 (9i)^n}$ $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{n^3 (9i)^n}{(n+1)^3 (9i)^{n+1}} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^3 9^n}{(n+1)^3 \cdot 9 \cdot 9^n} = \frac{1}{9}$

$R = 9$

Sui bordi? $|z - 4| < \overset{\text{RAGGIO}}{9}$ allora da $\left| \frac{(z-4)^n}{n^3 (9i)^n} \right|$ a $\left| \frac{9^n}{n^3 (9i)^n} \right|$

ottengo $\frac{9^n}{n^3 9^n} = \frac{1}{n^3}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ Converge, dunque la mia serie originale converge sul bordo.

SUL RETRO

RICHIAMI SUI COMPLESSI

V I

1

$$z = (x, y) = x + jy$$

Somma:

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

Prodotto:

$$j^2 = -1$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) =$$

$$= x_1 x_2 + x_1 j y_2 + j y_1 x_2 + j^2 y_1 y_2 =$$

$$= x_1 x_2 - y_1 y_2 + j(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Con queste due operazioni i complessi sono il campo $\mathbb{C}$

Coniugato: $z = x + jy$, $\bar{z} = x - jy$

Modulo: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$z \cdot \bar{z} = (x + jy)(x - jy) = x^2 - jxy + jxy - j^2 y^2$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

Se $z \neq 0$ allora $z \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$

Dunque $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ Inverso!

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{j(\theta_1+\theta_2)}$$

VI 2

Esempio:

$$\sqrt[3]{z} = 1+j \qquad \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{1+j}$$

$$\cancel{z = \sqrt[3]{\sqrt{1+1}}\ \sqrt[3]{e^{j\pi/4}}}$$

no!

$$\cancel{z = \sqrt[6]{2}\, e^{j\pi/12}}$$

OK, $|z| = \sqrt{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\cancel{\text{Ho } \frac{\theta}{3} = \frac{\pi}{12}, \quad \frac{\theta}{3} + 2\pi = \frac{\pi + 24\pi}{12},}$$

$$\cancel{\frac{\theta}{3} + 4\pi = \frac{\pi + 48\pi}{12} = \frac{49\pi}{12}}$$

~~3 angoli: $\frac{\pi}{12}$,~~

no! devo dividere anche $+2K\pi$!

3 angoli: $\frac{1}{3}(\theta+2\pi)$, $\frac{1}{3}\theta$, $\frac{1}{3}(\theta+4\pi)$

2 errori! Scrivere sempre $\rho e^{j(\theta+2K\pi)}$

$$e^{j(\theta_1)} \cdot e^{j(\theta_2)} = e^{j(\theta_1+\theta_2)}$$

Circonferenza unitaria chiusa rispetto alla moltiplicazione

VI 3

$$f(z) = \gamma z + z_0$$

TRASLO

ρ ESPANDO/CONTRAGGO ($+$ / $-$)

arg RUOTO (+ ANTIORARIO)

VII 1

FUNZIONI SU $\mathbb{C}$, ELEMENTI DI TOPOLOGIA

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$D \subseteq \mathbb{C} \quad \text{dominio}$$

AFFINI : $f(z) = \gamma z + z_0$

CONIUGATO : $f(z) = \overline{z}$

POLINOMI : $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$

$f(z) = z^2$ modulo rimpicciolito se < 1, aumentato se > 1

Rotazione non lineare, l'angolo raddoppia

RAZIONALI : $f(z) = \dfrac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \ldots + b_m z^m}$

$f : D \rightarrow \mathbb{C} \qquad D = \{ z \in \mathbb{C} / b(z) \neq 0 \}$

TOPOLOGIA DI $\mathbb{C}$

VII

2

$A \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$

O z_0 sta dentro, o sta fuori.

QUESTA ERA L' INSIEMISTICA

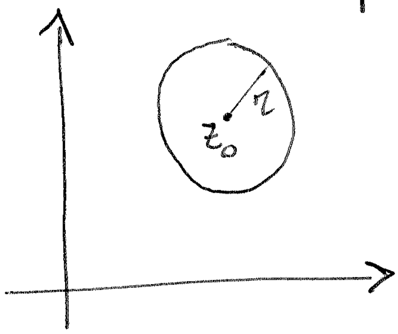
LA TOPOLOGIA :

- Sta dentro
- Sta fuori
- È di frontiera.

$$B_r(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, |z - z_0| < r \}$$

CERCHIO APERTO (senza bordo), detto interno o palla, centrato in z_0 e di raggio r

Bordo NON compreso.



STARE DENTRO : una palla del punto sta in A

se $\exists\, r > 0 \,/\, B_r(z_0) \subseteq A$ INTERNO

STARE FUORI, ESTERNO

Se è interno al complementare di A, A^C

Si può scrivere VII

3

$w = z_0 + \rho e^{j\theta}$ con $\rho < r$, θ qualunque

$Imm(w) = Imm(z_0) + \rho\sin(\theta) \geq Imm(z_0) - \rho$

$Imm(z_0) - \rho > Imm(z_0) - r = 0$

$w \in A$

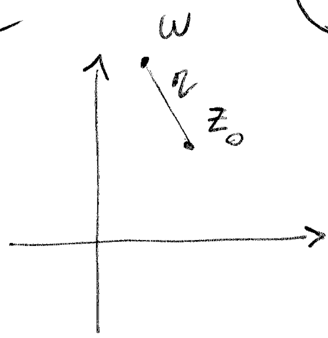
Analogamente se $Imm(z_0) < 0$, $z_0 \in \mathring{A}^c$

se $Imm(z_0) = 0$, $z_0 \in \partial A$

ELEMENTI DI TOPOLOGIA VIII

1

Esempio: $A = \{z_0\} \in \mathbb{C}$



$z_0 \in \partial A$

Prendo $w \neq z_0$

$|w - z_0| = r > 0$

$B_r(w) \cap A = \emptyset$

Posso prenderla anche più piccola

Esempio:

$A = C \setminus \{z_0\}$

$\mathring{A} = A$, $\partial A = \{z_0\}$, $\mathring{A}^c = \emptyset$

VIII

12

(1) Un sottoinsieme è chiuso se e solo se il suo complementare è aperto.

(2) CHIUSURA di A : $\bar{A} = A \cup \partial A$

(3) $A \in \mathbb{C}$, $\mathring{A}$ è un aperto

(4) A, B aperti $\longrightarrow$ $A \cup B$, $A \cap B$ aperti

(5) A, B chiusi $\longrightarrow$ $A \cup B$, $A \cap B$ chiusi

---

CURVE sul piano complesso

Una curva in $\mathbb{C}$ è una funzione continua $\gamma : [a, b]$ definita sul piano $\mathbb{C}$

intervallo

$$\gamma(t) = x(t) + j\,y(t)$$

x e y continue in t

Supporto: $\operatorname{supp}(\gamma) = \{ \gamma(t) \,/\, t \in [a, b] \} \subseteq \mathbb{C}$

è l'immagine.

LA CURVA NON VA CONFUSA COL SUO SUPPORTO, $\gamma(t)$ è la descrizione della posizione di un punto che si muove sul piano al variare del tempo t

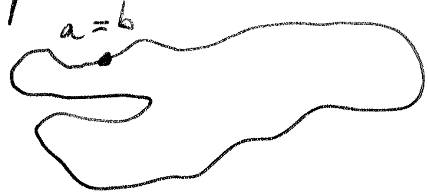
C^1 a tratti: funzione ~~continua~~ derivabile, VIII

3

la cui derivata è continua tranne al più per un numero FINITO di punti.

Consideriamo SEMPRE funzioni continue e C^1 a tratti.

CURVA DI JORDAN: se C^1 a tratti, continua, chiusa e semplice tranne che per il punto iniziale e finale.



TEOREMA non dimostrato: facendo una curva di Jordan dividiamo $\mathbb{C}$ in una parte INTERNA e LIMITATA ed una ESTERNA e ILLIMITATA.

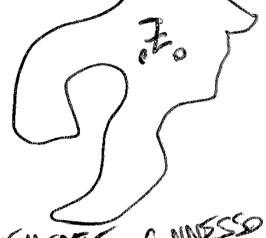
Curva SEMPLICEMENTE CONNESSA se non ha buchi all'interno.

$\forall$ Jordan $\gamma : [a, b] \longrightarrow A$

$$\Longrightarrow Int(\gamma) \subseteq A$$

"I CERCHI SONO CONNESSI, ADDIRITTURA CONVESSI"

Un segmento può unire 2 punti



NON SEMPLICEMENTE CONNESSO

Es esame

Zeri della funzione e dominio

$$f(z) = \frac{e^{3iz} - 1}{z^4 - 4}$$

Dominio:

$$\text{dom}(f) = \{ z \in \mathbb{C} : z^4 \neq 4 \}$$

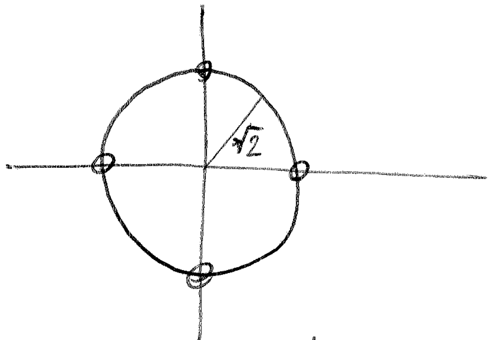
$$z^4 = 4$$

$$z = \rho e^{i\theta} \quad , \quad 4 = 4e^{i\theta}$$

$$z^4 = 4 \longleftrightarrow \rho^4 e^{i4\theta} = 4e^{i(0+2k\pi)}$$

$$\rho^4 = 4 \quad , \quad 4\theta = 0 + 2k\pi$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt[4]{4} \\ \theta = \frac{1}{2}k\pi \quad k = 1,2,3,4 \end{cases}$$



Zeri del numeratore $e^{3iz} - 1 = 0$

$$e^{3iz} = 1 \qquad e^{3iz} = 1e^{i(0+2k\pi)}$$

$$\cancel{3i}z = 2k\pi\cancel{i} \qquad z = \frac{2}{3}\pi k$$

Oss.

$$\left.\begin{aligned} \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} &= \sin(t) \\ \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} &= \cos(t) \end{aligned}\right] \text{EULERO}$$

Def.

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Prop.

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$$

Dim

$$\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 = 1$$

$$\frac{1}{4}\left(\cancel{e^{2iz}} + 2\cancel{e^{iz}}\cancel{e^{-iz}} + \cancel{e^{-2iz}}\right) - \frac{1}{4}\left(\cancel{e^{2iz}} - 2\cancel{e^{iz}}\cancel{e^{-iz}} + \cancel{e^{-2iz}}\right) =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

DEF.

$$\sinh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \qquad \cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

$$\cosh^2(z) + \sinh^2(z) = 1$$

$$\sinh(z) = 0 \,, \quad z = k\pi i \,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cosh(z) = 0 \,, \quad z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi i \,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Es

$$f(z) = \frac{2\cosh(z) - e^{z} - 1}{z^2 + i}$$

dom: $\quad z^2 = -i \qquad \rho^2 e^{2i\theta} = e^{-\frac{\pi}{2} i}$

$$\rho = 1 \qquad 2\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\theta = -\frac{\pi}{4} + k\pi \,, \quad k = 1, 2$$

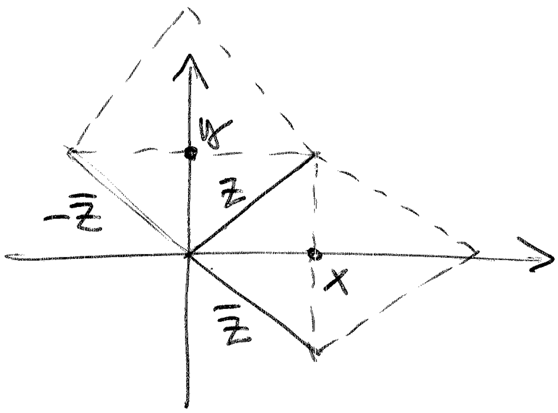
$$\cancel{2}\, \frac{e^{z} + e^{-z}}{\cancel{2}} - \cancel{e^{z}} - 1 = 0$$

$$e^{-z} - 1 = 0 \qquad e^{-z} = 1 e^{i\theta}$$

$$-z = 2k\pi i \qquad z = -2k\pi i$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

Non coincidono coi poli



$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Limiti e continuità

V VII

Ω regione di $\mathbb{C}$

1

$f : \Omega \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \bar{\Omega}$ (chiusura di Ω)

Def di limite $\ell \in \mathbb{C}$, z tende a $z_0 \in \bar{\Omega}$

Con $z \in \Omega$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$:

$$|z - z_0| < \delta \longrightarrow |f(z) - \ell| < \varepsilon$$

$z \neq z_0$

Palla $B_\ell(\varepsilon)$.

CONTINUITÀ

In una regione $\Omega \to \mathbb{C}$

Continua se (nel punto z_0)

$$\exists \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Polinomi, Razionali, esponenziale, trigonometriche, iperboliche: sono tutte continue nel loro dominio.

Es.

$$f(z) = e^{z^2} + \frac{\sin(z) - 1}{z^2 - 5}$$

Non continua ~~solo~~ in $f = \mathbb{C} - \{\pm\sqrt{5}\}$

$$\rho^2 e^{2i\theta} = 5e^{i0} \qquad \rho = \pm\sqrt{5} \qquad 2\theta = 0 + 2k\pi \qquad \theta = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

DERIVABILITÀ

In un DOMINIO (aperto e connesso in $\mathbb{C}$)

$f: D \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$

Derivabile in z_0 se $\exists \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$

Es.

$$f(z) = z^2, \qquad \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = z + z_0$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z + z_0) = 2z_0$$

SOLITE REGOLE

$$\lim_{z \to z_0} \frac{w(z)}{z - z_0} = 0 \qquad w(z) = w_1(x,y) + i\, w_2(x,y)$$

$$\Updownarrow \quad \lim_{z \to z_0} \frac{|w(z)|}{|z - z_0|} = 0$$

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ (x,y) \to (x_0,y_0)}} \frac{\sqrt{w_1(x,y)^2 + w_2(x,y)^2}}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

$$\left| \frac{w_1(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \right| \leq \frac{\sqrt{w_1(x,y)^2 + w_2(x,y)^2}}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}$$

↑ Vale anche con w_2 a numeratore

Insomma w_1 e w_2 sono o piccoli di $|w(z)|$

È il discorso dei triangoli.

Ah, $u(x,y)$ e $v(x,y)$ sono differenziabili perchè valgono questi sviluppi lineari, e abbiamo le derivate parziali.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \operatorname{Re} f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = \operatorname{Imm} f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

Se u e v sono differenziabili e valgono le relazioni, la funzione è DERIVABILE

Secondo teorema, non puntuale

Def.

$f: D \to \mathbb{C}$ si dice OLOMORFA su D se è derivabile su ogni punto di D

teorema:

$f: D \to \mathbb{C}$, D dominio

$$f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$$

Sono equivalenti:

differenziabili in ogni punto del dominio

(1) f è OLOMORFA su D

(2) u e v sono di classe C^1 su D

(3) Valgono le CR

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

Con l'esistenza della derivata complessa si ha la differenziabilità di u e v e sono CONTINUE le loro derivate parziali.

In analisi I la derivata poteva non essere continua, non era "gratuita" (la continuità della derivata).

LE OLOMORFE HANNO DERIVATA CONTINUA
(A sua volta la derivata prima/seconda ecc. sono tutte derivabili!)

(2) $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} =$

$= e^x (\cos(y) + i\sin(y))$

$u(x,y) = e^x \cos(y) \quad , \quad v(x,y) = e^x \sin(y)$

Sono $\in C^1$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos(y) = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin(y) = -\frac{\partial v}{\partial x} = -e^x \sin(y)$$

$f(z) = e^z$ è OLOMORFA

(3) $f(z) = \bar{z} = x - iy$

$u(x,y) = x \quad , \quad v(x,y) = -y$ entrambe C^1

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = -1 \quad \text{No!}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$f(z) = \bar{z}$ NON è OLOMORFA quindi

NON È DERIVABILE!

AVVERTENZA : VERIFICARE LA DERIVABILITÀ

(1) Riconoscere $f(z)$ come OLOMORFA :
polinomi, razionali, esponenziale, trigonometriche, iperboliche e loro somme/prodotti/composizioni.
Ricordarsi i vincoli dei dominii, specie per le razionali

(2) Dividere in $u(x,y)$ e $v(x,y)$ che devono $\in C^1$, poi testare le condizioni di Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \; ; \; \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

---

(1) $f(z) = \mathrm{Re}(z) = x$ $\quad u(x,y) = x \quad v(x,y) = 0$ ok, $\in C^1$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$ non olomorfa !

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

(2) $f(z) = \mathrm{Imm}(z) = iy$ $\quad u(x,y) = 0, \; v(x,y) = y \in C^1$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$ non olomorfa !

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

(3) $$f(z) = \frac{\bar{z}-1}{z} = \frac{x-iy-1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} =$$

$$= \frac{x^2 - ixy - ixy - y^2 - x + iy}{x^2+y^2} = \ldots$$

Funzioni analitiche

V

XII 1

DEF

ANALITICA: E2

$\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$

f è derivabile in z_0 se $\exists \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}$

Analitica se derivabile in ogni punto di Ω.

Usiamo la verifica delle condizioni di Cauchy-Riemann

~~(1) Valgono CR~~

(1) f derivabile $\longrightarrow$ Valgono CR

(2) Valgono CR in z_0, u, v differenziabili in z_0 $\longrightarrow$ f derivabile.

ES $f(z) = 2\,\mathrm{Re}(z) + z^2 + 2$

$x + iy = z$, $x, y \in \mathbb{R}$

$f(z) = 2x + (x+iy)^2 + 2 = 2x + y^2 + x^2 + 2ixy + 2$

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) &= x^2 + 2x - y^2 + 2 \\ v(x,y) &= 2xy \end{aligned}\right] \text{sono } \in C^1$$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2 = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$ No!

$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y$

$f(z)$ NON olomorfa in nessun punto del dom.

Es

$$f(x+iy) = \sin(x-y) + i\cos(x-y)$$

$$\left(u_{(x,y)} = \sin(x-y) \quad , v(x,y) = \cos(x-y) \right) \in C^1$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \cos(x-y) = \dfrac{\partial v}{\partial y} = +\sin(x-y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\cos(x-y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = +\sin(x-y) \end{cases}$$

$$\cos(x-y) = -\cos(x-y)$$

$$\hookrightarrow x-y = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(x-y) = \sin(x-y)$$

$$\hookrightarrow x-y = k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

No! Mai derivabile

Es

Con f analitica in un aperto connesso $\Omega \subseteq \mathbb{C}$

Supponendo $\mathrm{Imm}\, f = \text{cost.} \in \mathbb{R}$, dimostrare che $f(z) = \text{cost.}$

$v(x,y) = \text{cost.}$, $f(x,y) = f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$

Essendo analitica le condizioni di Cauchy-Riemann sono rispettate,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} ,$$

essendo $v(x,y) = \text{cost}$ allora

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Es

Determinare le f analitiche $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\, f(z) = \mathrm{Imm}(z) \\ f(0) = i \end{cases}$$

$\longrightarrow \quad u(x,y) = y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 1$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = 1 \longrightarrow v(x,y) = -x + 1$$

$$f(x,y) = y + i(-x+1)$$

Es

Per quali $K \in \mathbb{N}$ è analitica in $\mathbb{C}$

$$f(x+iy) = (K+2)x + i\,3y^K$$

$$u(x,y) = x(K+2) \qquad v(x,y) = 3y^K$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = K+2 = \frac{\partial v}{\partial y} = 3Ky^{K-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$K+2 = 3Ky^{K-1} \qquad 2 = 3Ky^{K-1} - K$$

Vale per $K=1$

$K=0$ No

$K=1$, $2 = 3-1$ ok.

$K=2$, $2 = 6y - 2$, $y = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ No, SOLO UN PUNTO! DA $K=2$

Ogni funzione con i coefficienti di x^2 e y^2 uguali e opposti e di grado 2, è armonica.

Per ogni grado si definiscono le condizioni di armonicità.

GRADO 3:

$$u(x,y) = ax^3 + by^3 + cx^2y + dxy^2 + ex^2 + fy^2 + gxy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3ax^2 + 2cxy + dy^2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6ax + 2cy$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3by^2 + 2cx^2 + 2dxy$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6by + 2dx$$

$$6ax + 2cy = 6by + 2dx$$

$$x(6a - 2d) = y(6b - 2c)$$

Esempio

$$u(x,y) = x^2 - y^2 + x - 7y$$ che è armonica

(segni opposti di x^2 e y^2)

Impongo le condizioni di Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1 = \frac{\partial v}{\partial y} \cancel{-2y-7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y - 7 = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Allora

$$\cancel{v(x,y) = 2xy + y + Cost. -2yx - 7x}$$

$$\cancel{v(x,y) = y - 7x + Cost.}$$

$$\int \frac{\partial v}{\partial y} dy = 2xy + y + C(x)$$

$$\int \frac{\partial v}{\partial x} dy = 2yx + 7x + C(y)$$

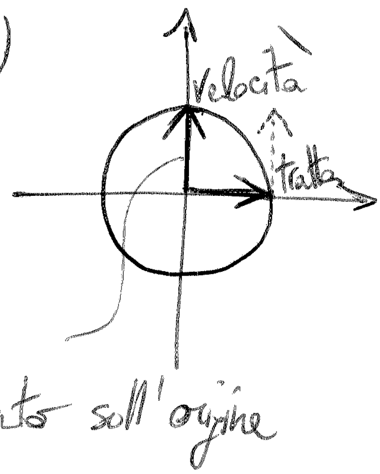
Ora so che $\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + 7$

Allora $\cancel{2y} + C'(x) = \cancel{2y} + 7$ $\quad C(x) = 7x + C$

$$v(x,y) = 2xy + y + 7x + C$$

<u>Es</u>

$$\gamma(t) = Re^{it} = R\cos(t) + iR\sin(t)$$
$$t \in [0, 2\pi]$$
$$\gamma'(t) = -R\sin(t) + iR\cos(t) =$$
$$= i\,\gamma(t)$$



CURVA = CAMMINO

(1) Invertire il senso di percorrenza

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$-\gamma : [-b, -a] \longrightarrow \mathbb{C} \qquad (-\gamma)t = \gamma(-t)$$

Inverto a e b, cambio i loro segni.

(2) Concatenare curve

$$\gamma_1 : [0, b] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{C}$$
$$\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$$
$$\gamma_1 \vee \gamma_2 : [a, c] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(\gamma_1 \vee \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } t \in [0, b] \\ \gamma_2(t) & \text{se } t \in]b, c] \end{cases}$$

Se γ_1 e γ_2 regolari,
$\gamma_1 \vee \gamma_2$ regolari.

Quello era l'integrale DEI COMPONENTI

INTEGRALE DI UN CAMPO SU UNA CURVA (il lavoro)

CAMPO: funzione che associa un vettore ad ogni punto del dominio.

D dominio, $\gamma : [a, b] \to D$ regolare

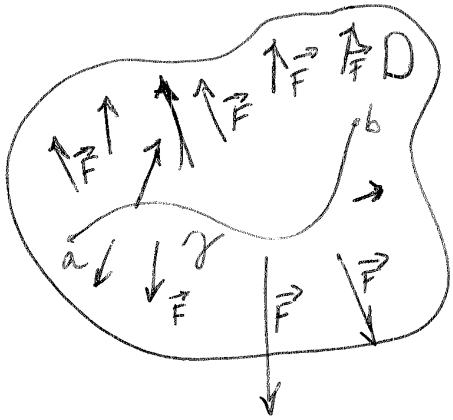
$\vec{F} : D \to \mathbb{R}^2$ campo continuo

$$\vec{F}(x,y) = \big(\alpha(x,y),\ \beta(x,y)\big)$$

$$\gamma(t) = \big(x(t),\ y(t)\big)$$

$$\int_\gamma \vec{F}(x,y)\, d\vec{\ell} = \int_a^b \Big[\overbrace{\alpha\big(x(t), y(t)\big)\, x'(t) + \beta\big(x(t), y(t)\big)\, y'(t)}^{\text{prodotto scalare tra campo e velocità istantanea}} \Big] dt$$

Abbiamo un campo di forze: in ogni punto un vettore ne rappresenta l'effetto, abbiamo un CAMPO.
Considero un corpo che segue la traiettoria γ da a a b



Integrale di linea di $\vec{F}$ lungo γ

"Lavoro lungo la tratta"

$$\int_\gamma f(t)\,dt = A + iB$$

integriamo $u, -v$ lungo γ, integrale del campo $u - v$ sulla curva γ

$$A = \int_a^b \left[u(x(t), y(t))\,x'(t) - v(x(t), y(t))\,y'(t)\right] dt$$

$$B = \int_a^b \left[u(x(t), y(t))\,y'(t) + v(x(t), y(t))\,x'(t)\right] dt$$

integriamo il campo v, u lungo la curva γ

Due campi diversi

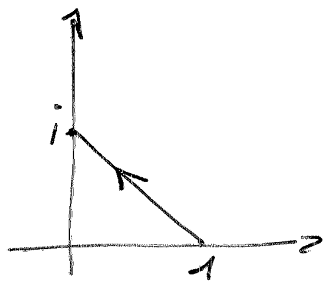
$$A = \int_\gamma \overrightarrow{(u, -v)}\, d\vec{l}$$

$$B = \int_\gamma \overrightarrow{(v, u)}\, d\vec{l}$$

Esempio

$f(z) = z^2 + 1$ $\gamma(t) = 1 + t(i - 1)$

$t \in [0, 1]$



$$\cancel{\int_\gamma f(z)\,dz = \left[\frac{1}{3} z^3 + z\right]_0^1 = \frac{4}{3}}$$

$$\cancel{\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 [1 + t(i-1)]\,\gamma'(t)\,dt =}$$

$$\cancel{= \int_0^1 [1 + t(i-1)]\,(i-1)\,dt = (i-1)\int_0^1 1 + it}$$

Il lavoro NON dipende dalla velocità con cui si percorre la tratta.

↳ Se dipende solo dal punto iniziale e da quello finale: CONSERVATIVO

DIM

$$\int_{\gamma\circ\mathfrak{I}} f(t)\,dt = \int_c^d f(\gamma(\mathfrak{I}(s)))(\gamma\circ\mathfrak{I})'(s)\,ds$$

$$= \int_c^d f(\gamma(\mathfrak{I}(s)))\gamma'(\mathfrak{I}(s))\mathfrak{I}'(s)\,ds$$

$\mathfrak{I}(s) = t$ sostituzione, $dt = \mathfrak{I}'(s)ds$

$$= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_\gamma f(z)\,dz$$

(4) Disparità alle inversioni di cammini

$f: D \to \mathbb{C}$ cont.

$\gamma: [a,b] \to D \qquad -\gamma: [-b,-a] \to D$

$(-\gamma)(t) = \gamma(-t)$

$$\int_{-\gamma} f(t)\,dt = -\int_\gamma f(t)\,dt$$

PROP.

Se $f = u + iv : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

è olomorfa = analitica in Ω

allora $\Delta u = 0 = \Delta v$, u e v sono

ARMONICHE

ES $f(x+iy) = x^2 + i(x^3 - 3xy^2)$

Analitica?

$u(x,y) = x^2$, $v(x,y) = x^3 - 3xy^2$ sono C^1

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} = -6xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x} = -3x^2 + 3y^2$$

$$\begin{cases} x = -3xy \\ x^2 = y^2 \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} -\frac{1}{3} = y \\ x^2 = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$(x,y) = (0,0) \cup \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

non analitica in $\mathbb{R}^2$

$u(x,y) = x^2$ NON è armonica

Dunque f non può essere analitica in $\mathbb{R}^2$

ES

Sia $u(x,y) = x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y$

ordine 2, segno opposto, pari modulo, è armonica.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + \dots \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 + \dots \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y + \dots \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 + \dots$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{armonica}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 2y - 2 \cancel{+ C'(x)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y - 2x + 3$$

$$\int \frac{\partial v}{\partial y} dy = 2xy - y^2 - 2y + C(x)$$

$$\cancel{\frac{\partial v}{\partial x} = +2x + C'(x) = +2y + 2x + 3}$$

$$\cancel{C'(x) = 2y - 3 \quad , \quad C(x) = 2xy - 3x}$$

$$\cancel{v(x,y) = 2xy - y^2 - 2y + 2y - 3}$$

$$\cancel{v(x,y) = 2xy - y^2 - 2y + 2xy - 3x + C}$$

$$\cancel{2y} + C'(x) = \cancel{2y} + 2x - 3$$

$$C'(x) = 2x - 3 \qquad C(x) = x^2 - 3x + C$$

$$v(x,y) = 2xy - y^2 - 2y + x^2 - 3x + C$$

INTEGRALI DI LINEA COMPLESSI

$f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ continua

$\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega$ di classe C^1 a tratti

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt \in \mathbb{C}$$

ES ESAME

$I = \int_\gamma (2\bar{z}+3)\,dz$, γ cammino chiuso semplice avente come sostegno la circonferenza di centro l'origine e raggio 1, in senso antiorario

$$\gamma = 0 + e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\int_0^{2\pi} (2\overline{e^{it}}+3)\, i e^{it}\,dt = \int_0^{2\pi} (2e^{-it}+3)\, i e^{it}\,dt =$$

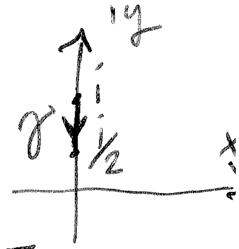
$$= \left[2it + 3 \cancel{\tfrac{1}{i}}\, e^{it}\right]_0^{2\pi} = 4\pi i + \cancel{3e^{i2\pi}} - \cancel{3e^{i0}}$$

$$= 4\pi i \neq 0$$

Non è analitica, altrimenti otterremmo 0

ES

$I = \int_\gamma e^{\pi z}\,dz$, γ segmento da i a $\frac{i}{2}$



Parametrizzo $-\gamma$: $-\gamma(t) = it$, $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

$\gamma(t) = -it$

~~$I = \int_{1/2}^{1} e^{\pi z} dz$~~

Qui $a = 1$, $b = \sqrt{2}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

$$\gamma(t) = \begin{cases} \cos(t) \\ \sqrt{2}\sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$I = \int_\gamma \bar{z}\, dz = \int_0^{2\pi} \overline{(\cos(t) + i\sqrt{2}\sin(t))}\,(-\sin(t) + i\sqrt{2}\cos(t))\, dt$$

$$I = \int_0^{2\pi} -\cos(t)\sin(t) + \cos^2(t)\, i\sqrt{2}\cancel{\cos(t)} + i\sqrt{2}\sin^2(t) +$$

$$+ 2\sin(t)\cos(t)\, dt$$

$$I = \int_0^{2\pi} \sin(t)\cos(t) + i\sqrt{2}\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sin(2t) + i\sqrt{2}\, dt = 0$$

0 perchè $f(z)$ non è analitica:

$f(z) = \bar{z} = x - iy$ $\quad \left. \begin{array}{l} u(x,y) = x \\ v(x,y) = -y \end{array} \right] \in C^1$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = -1$ CR non rispettate,

non è olomorfa.

PROP. $f : D \to \mathbb{C}$ continua

$\gamma : [a,b] \to D$ regolare ← continua, C^1 a tratti

Allora $\left| \int_\gamma f(t)\,dt \right| \leq M L(\gamma)$

dove $M = \sup\limits_{z \in supp(\gamma)} |f(z)|$

$Supp(\gamma)$ = immagine di $\gamma(t) = \{ \gamma(t) \,/\, t \in [a,b] \}$

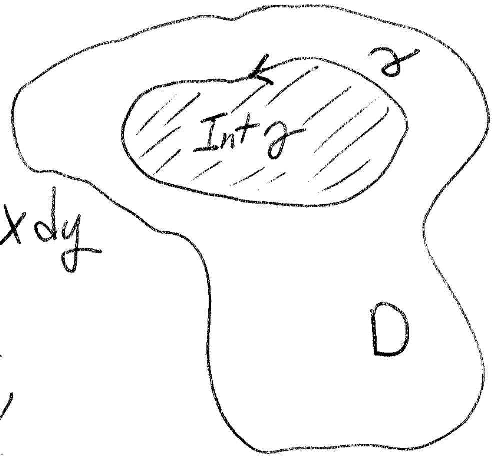
TEOREMA DI GREEN

$\vec{F} : D \to \mathbb{R}^2 \qquad \vec{F}(x,y) = (\alpha(x,y), \beta(x,y))$

di classe C^1 (basterebbe localmente)

$\gamma : [a,b] \to D$ curva di Jordan (regolare, chiusa, semplice tranne che in $a = b$)

$Int\, \gamma \subseteq D$



$$\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{l} = \iint_{Int\gamma} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) dx\,dy$$

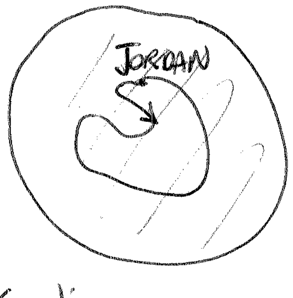
In molti casi, come coi potenziali, il campo è CONSERVATIVO e sappiamo che l'integrale fa 0 (integrale su linea CHIUSA in un campo conservativo)

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x} = 0$$

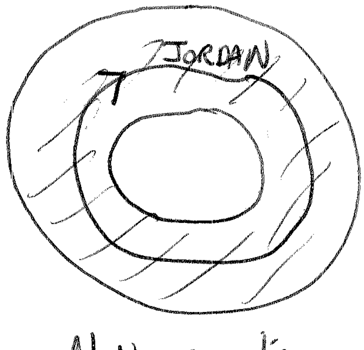
ROTORE DI $\vec{F}$ fa 0 nei campi conservativi

$rot(\vec{F})$: è uno scalare per campi bidimensionali

Vale in $\mathbb{R}^3$ (Gauss-Green) ed il rotore è un campo in $\mathbb{R}^3$



Semplicem. connesso



<u>NON</u> semplicemente connesso

<u>COR.</u>

D dominio semplicemente connesso :

$f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa, $\gamma : [a,b]$ Jordan,

allora $$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

<u>ESEMPI</u>

(1) $f(z) = z^K \qquad \gamma(t) = R e^{it} \quad t \in [0, 2\pi]$

$K \geq 0$ naturale

$f(z)$ quindi olomorfa su tutto $\mathbb{C}$

Allora dovrebbe venire 0 per Cauchy-Goursat

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} (Re^{it})^K R i e^{it}\,dt = iR^{K+1}\int_0^{2\pi} e^{i(k+1)t}\,dt =$$

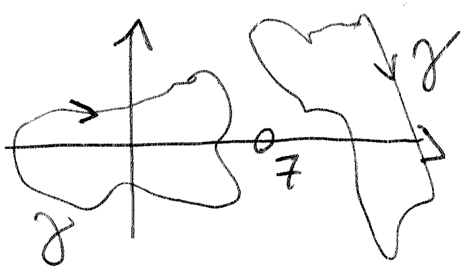
$$= \cancel{i}R^{K+1}\left[\frac{1}{\cancel{i}(k+1)} e^{i(k+1)t}\right]_0^{2\pi} = \frac{R^{K+1}}{K+1}\left[e^{i2\pi(k+1)} - e^0\right] =$$

$$= 0$$

Possiamo farlo anche per K negativi, $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$

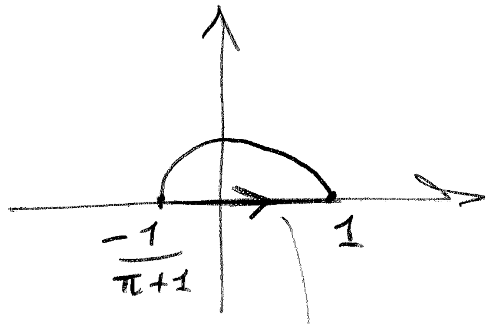
Il piano complesso meno lo 0 <u>non</u> è semplicemente connesso. Se la curva di Jordan gira attorno all'origine non si può PREDIRE che faccia 0

(3) $\int_\gamma \frac{e^{z^4} - 5z\sin(z)}{z-7}\,dz = 0$ se la curva di Jordan non circonda $z = 7$



(4) $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ $\quad \gamma(t) = \frac{e^{it}}{t+1}$

Calcolare $\int_\gamma z^2 dz$



Andando all'infinito è una spirale

Non è di Jordan!

Non so risolverlo!

Chiudo con il segmento rosso

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(t), & t \in [0, \pi] \\ -\frac{1}{\pi+1} + \left(1 - \left(-\frac{1}{\pi+1}\right)\right)(t-\pi), & t \in [\pi, \pi+1] \end{cases}$$

Così è di Jordan e l'integrale $\int_{\tilde{\gamma}} z^2 dz = 0$

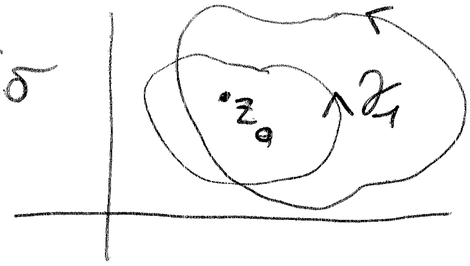
Per il teorema di Cauchy-Goursat.

$$0 = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \int_{\text{segmento di chiusura}} f(z)\,dz$$

Conseguenze utili:

PROP $f : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa

γ_1, γ_2 di Jordan in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ ed entrambe contengono z_0, entrambe orientate in senso antiorario



Allora

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

Non sappiamo a priori il risultato, ma è comodissimo!

DIM

Si consideri $\Omega = \operatorname{Int}\gamma_1 \cap (\operatorname{Int}\gamma_2)^c$

Ω è dominio con bordo e le γ di Jordan che ne parametrizzano la frontiera, orientate positivamente, sono $-\gamma_1, \gamma_2$

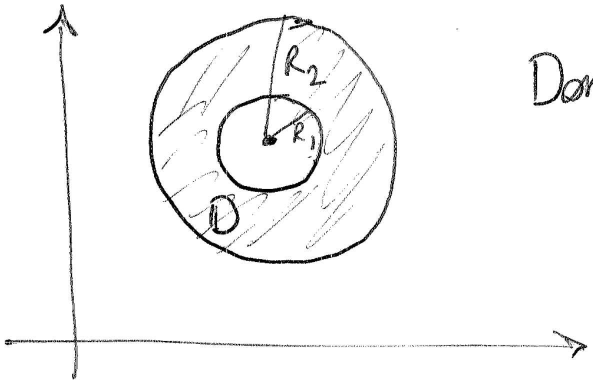
Quindi

$$0 = \int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = \int_{-\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

$$\Longrightarrow \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

$\gamma_1 = z_0 + R_1 e^{it}$ $\qquad \gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$

$\gamma_2 = z_0 + R_2 e^{it}$ $\qquad \gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$



Dominio con bordo

DEF

Se D è un dominio con bordo e $\gamma_1, \dots \gamma_s$ sono curve di Jordan che parametrizzano la sua frontiera, ~~potremmo riparametrizzarle,~~ percorrendole in SENSO OPPOSTO (diverso da riparametrizzarle) è: ORIENTATE POSITIVAMENTE: chi percorre le curve ha l'insieme D alla propria sinistra. (vettore normale verso la parte interna)

Orientamenti positivi

TEOREMA,

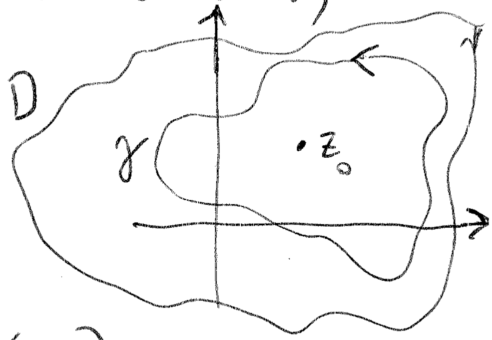
La formula di Cauchy

D dominio semplicemente connesso

$f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa, γ di Jordan, in D

percorsa in senso antiorario,

$z_0 \in \mathrm{Int}\,\gamma$



Allora

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

Tolgo un punto z_0 nella curva γ

Dominio $= D - \{z_0\}$

Con z_0 esterno a γ, $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = 0$

Per Cauchy - Goursat.

Con $f(z) = 1$,

$$\int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\,dz = 2\pi i = \int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\,dz = \int_\gamma (z - z_0)^K$$

Con $K = -1$ faceva $2\pi i$

FORMULA DI CAUCHY

IIXX

1

TEO.

D dom. semplicemente connesso

$f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa

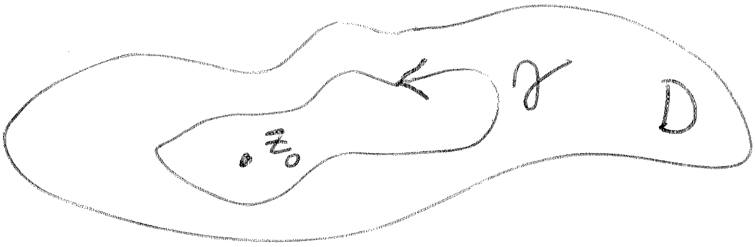
γ come curva di Jordan in D, $z_0 \in \mathrm{Int}\,\gamma$

Allora $\cancel{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz}$

$$\cancel{\int_\gamma f(z)\,dz}$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

$f(z)$ è olomorfa all'infuori di z_0, in D



$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

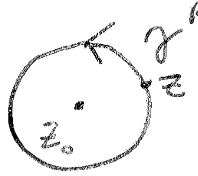
Non dipende dalla forma di γ, finchè gira attorno a z_0

$$|I| = \left| \int_{\gamma^R} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz \right| \leq$$

$$\leq \sup_{z\in Supp(\gamma^R)} \left| \frac{f(z)-f(z_0)}{\underbrace{z-z_0}_{R,\ \text{sono sulla circonf.}}} \right| \cdot \underbrace{L(\gamma^R)}_{2\pi R \text{ lunghezza circ.}} =$$

$$= \sup_{z\in Supp(\gamma^R)} \left| \frac{f(z)-f(z_0)}{\cancel{R}} \right| 2\pi \cancel{R}$$

centrale che si elidano gli R



Quindi

$$\left| \int_{\gamma^R} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz \right| \leq \sup_{z\in Supp(\gamma^R)} \left| f(z)-f(z_0) \right| 2\pi$$

f è olomorfa, quindi continua in z_0.

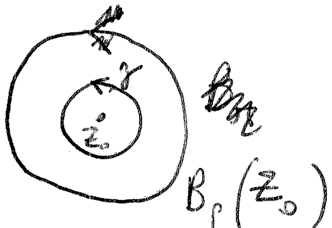
Allora fissato $\varepsilon > 0$ qualunque, $\exists\, \delta$

tale che $|z-z_0| < \delta \longrightarrow |f(z)-f(z_0)| < \varepsilon$

ovvero avvicinandomi a z_0 la risposta diminuisce

Scegliendo $R < \delta$,

$$\sup_{z\in Supp(\gamma^R)} |f(z)-f(z_0)| \leq \varepsilon$$



In particolare, se

$$\gamma(t) = z_0 + Re^{it} \qquad (\mathrm{Int}\,\gamma \subseteq D)$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+Re^{it})}{\cancel{Re^{it}}}\,\cancel{R}e^{it}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(z_0+Re^{it})\,dt$$ PROPRIETÀ DELLA MEDIA

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(z_0+Re^{it})\,dt$$

~~Il valore che ha una funzione olomorfa ha in un punto è sempre il valore la media~~

Il valore assunto da una funzione olomorfa in un punto è la media dei valori che la funzione assume sulle circonferenze centrate sul punto.

$$\mathrm{Re}\, f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\, f(z_0+Re^{it})\,dt$$

Vale anche per le funzioni armoniche!

Se conosco f sul bordo posso ricostruire quanto vale nella parte interna.

$\Longrightarrow$ Tutte le olomorfe derivabili ∞ volte

Usando i teoremi di scambio tra integrali e derivate si può mostrare che la regolarità in ω di $\frac{f(z)}{z-\omega}$ si trasporta

nell'integrale $\int_\gamma \frac{f(z)}{z-\omega}\, dz$

$$\frac{d^K}{d\omega^K}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-\omega}\, dz = \int_\gamma \left(\frac{d^K}{d\omega^K}\frac{f(z)}{z-\omega}\right) dz$$

$$\frac{d^K}{d\omega^K}\frac{f(z)}{z-\omega} = f(z)\frac{d^K}{d\omega^K}(z-\omega)^{-1} =$$

$$= f(z)(-1)(-2)(-3)\cdots(-K)(z-\omega)^{K-1}(-1)^K =$$

$$= f(z)\frac{K!}{(z-\omega)^{K+1}}$$

Morale della favola, abbiamo un teorema

XXI ①

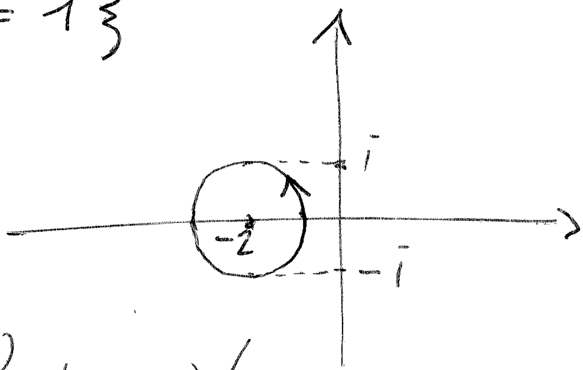
ES

ES

Calcolare $I = \int_C \frac{z^{12}}{e^{\cos(z)}} dz$

$C = \{ z \in \mathbb{C} : |z+1| = 1 \}$

(In senso antiorario) non specificato.



$f(z) = \frac{z^{12}}{e^{\cos(z)}}$ olomorfa,

$\text{dom} = \mathbb{C}$, $e^{\cos(z)} \neq 0 \ \forall z$

Quindi $I = 0$ per Cauchy-Goursat

CIRCONFERENZA

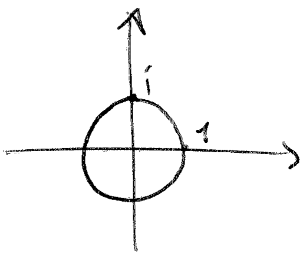
$\{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r \}$

$|z - z_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$

dove $z = x + iy$
$z_0 = x_0 + iy_0$

ES $I = \int_\gamma z e^{-z} dz$ con

γ che ha come sostegno $C = \{ z \in \mathbb{C} / |z| = 1 \}$



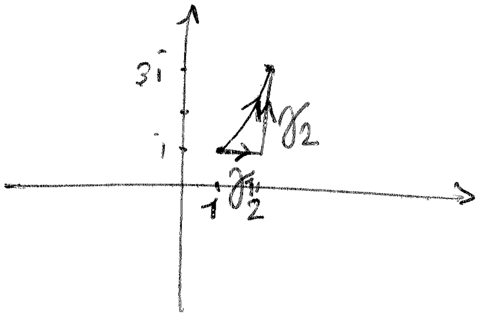
$I = 0$, siccome $f(z)$ è analitica e $\text{dom} f(z) = \mathbb{C}$

ES

Calcolare $\int_C (12z^2 - 4iz)\,dz = I$

$f(z)$ analitica in $\mathbb{C}$

$C = \{ x+iy : x,y \in \mathbb{R},\ y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1,$
$1 \leq x \leq 2 \}$ percorsa da $(1,+i)$ a $(2,+3i)$



Ma chissene della γ

Integro su γ_1 e γ_2

$\cancel{\gamma_1(t) = (x-1) + (y-1) + tx, \quad t \in [1,2]}$

$\gamma_1(t) = (t, 1), \quad t \in [1,2]$

$\gamma_2(t) = (1, t), \quad t \in [1,3]$

$\gamma_1(t) = t + i$

$\gamma_2(t) = 2 + it$

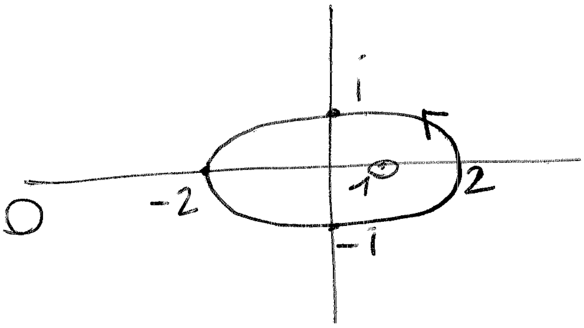
$\cancel{I = \int_1^2 (12t + 12i - 4it + 4)(1)\,dt + \int_1^3}$

ATTENZIONE A SOSTITUIRE !!!

ES

$\gamma(t) = 2\cos(t) + i\sin(t) \qquad t \in [-2\pi, 4\pi]$

$\int_\gamma \frac{1}{z-1}\, dz$



Comprende la singolarità, non fa 0

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}$$

Qui $f(z) = 1$

3 giri antiorari, sommo 3 integrali da $2\pi i$

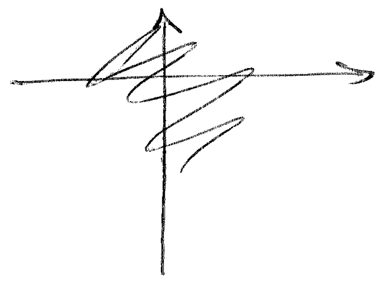
$$\int_\gamma \frac{1}{z+1} dz = 3 \cdot 2\pi i = 6\pi i$$

Formula di Cauchy: $f: \Omega \to \mathbb{C}$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, f analitica, γ curva di Jordan in senso positivo, $z_0 \in Int(\gamma)$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

ES

$I = \int_\gamma \frac{\sin(z)}{z+i} dz \qquad C = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| = 3\}$

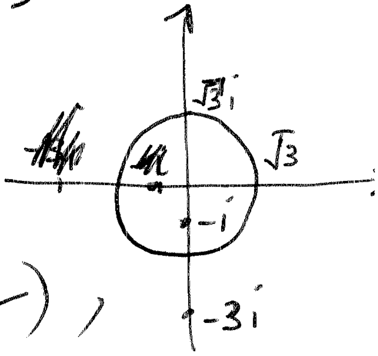


ES

$$I = \int_C \frac{e^{-5iz}}{z^2 + 4iz - 3}\, dz$$

$$C = \partial B_{\sqrt{3}}(0) = \{ z : |z| = \sqrt{3} \}$$

$$z^2 + 4iz - 3 = (z+i)(z+3i)$$



$\sqrt{3} \simeq 1{,}73$

OK con $-i$, olomorfa in $\mathrm{Int}(\gamma)$,

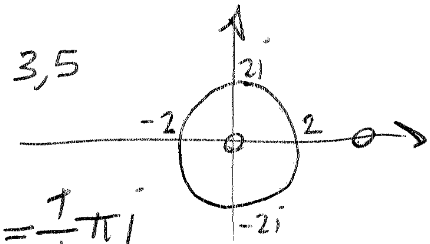
$$\int_C \cdots = 2\pi i f(-i) = 2\pi i \left(\frac{e^{-5iz}}{z+3i} \right)\Bigg|_{z=-i}$$

$$= 2\pi i \, \frac{e^{-5}}{2i} = \pi e^{-5}$$

ES

$$I = \int_\gamma \frac{\cos(z)}{z(z^2+8)}\, dz \qquad \gamma \text{ ha sostegno } \{ z : |z| = 2 \}$$

$$z^2 = 8 \qquad z = \sqrt{8} = 2\sqrt{3} \simeq 3{,}5$$

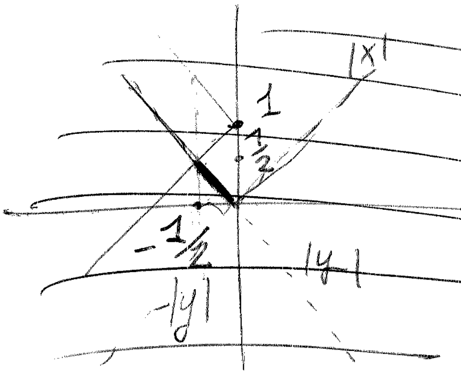


$$\int_\gamma \cdots = 2\pi i \, \frac{\cos(z)}{z^2+8}\Bigg|_{z=0} = \frac{2\pi i}{8} = \frac{1}{4}\pi i$$

ES

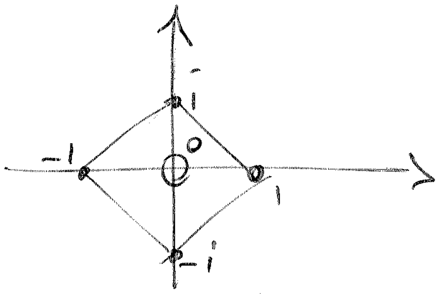
$$I = \int_\gamma \frac{\cosh(z)}{z^5}\, dz$$

Sostegno di γ : $C = \{ z : x+iy : x, y \in \mathbb{R},\ |x|+|y|<1 \}$



$\cancel{|x|+|y|<1}$

$\cancel{|x| < 1-|y|}$



$f(z) = \cosh(z)$ olomorfa in $Int(\gamma)$,

Polo quintuplo $\in Int(\gamma)$,

$$f^{IV}(z_0) = \frac{4!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\cosh(z)}{z^{4+1}}\, dz$$

$$I = f^{IV}(0) \cdot \frac{2\pi i}{4!} = \cancel{\frac{1}{2}\pi i \cdot \frac{2\pi i}{24} = \frac{1}{12}\pi i}$$

$$= \frac{1}{12}\pi i$$

ATTENZIONE! AL K+1 !