NUMERO: 1944A - ANNO: 2016

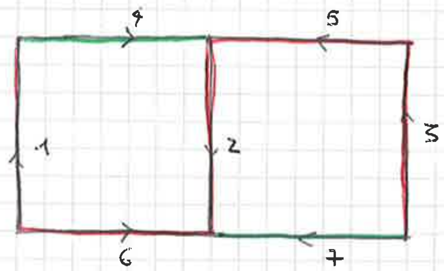
A P P U N T I

STUDENTE: Stoppelli Federico

MATERIA: Elettrotecnica - (Esercizi+temi di esame) -prof Ragusa

PRINCIPI DI KIRCHHOFF

Una rete elettrica è costituita da un insieme di rami | bipoli connessi per il tramite dei loro morsetti, si dicono LATI (o rami) gli elementi costituenti, NODI i punti di contatto di 3 o più lati.
Un certo numero di lati della rete connessi a formare un percorso chiuso individuano una MAGLIA.
Si definisce ALBERO di una rete un qualunque percorso, costituito da $(N-1)$ degli L lati della rete, che ne colleghi gli N nodi senza formare maglie.



- Albero $L = N - 1$
- Co-Albero

- Le tensioni incognite (4, 7) sono complementari all'albero.

LKC: Legge di Kirchhoff per le correnti

$$\boxed{\sum_i (\pm 1) I_i = 0}$$

La somma delle correnti di un circuito è nulla.

LKT: Legge di Kirchhoff per le Tensioni

Definiamo la tensione: $V_{AB} = \frac{L_{AB}}{q}$ [Volt]; La tensione è definita tra coppie di nodi.

$$\boxed{\sum_i V = 0}$$

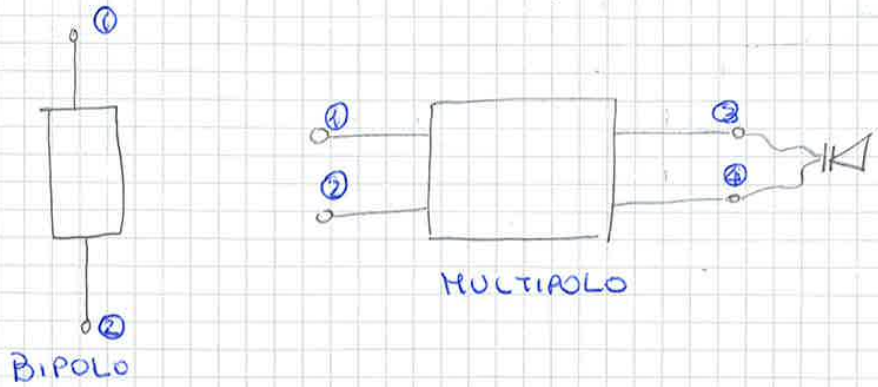
Oppure calcolabile grazie alla f.e.m (E) e alla caduta di tensione (Ri):

$$\boxed{\sum_i (\pm 1) E_i + (\pm R_i I_i) = 0}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 210

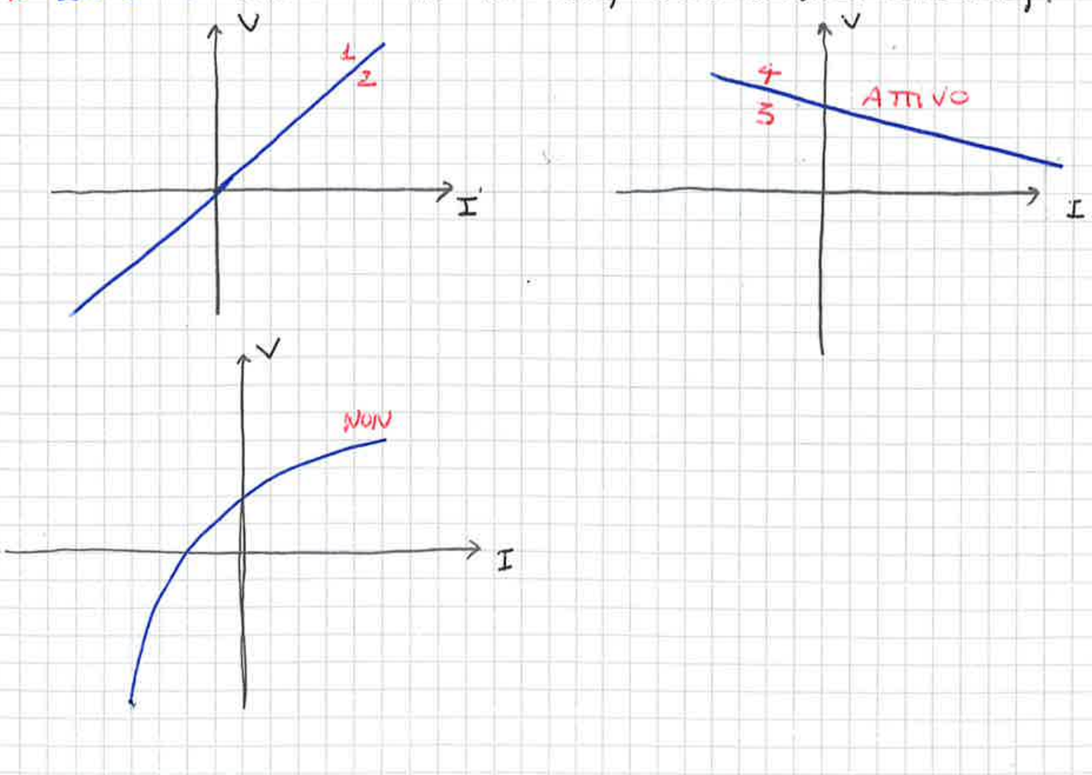
TEORIA DEI MULTIPOLI

Un elemento di rete può essere fisicamente accessibile attraverso una serie di punti detti MORSETTI.



Un Bipolo è completamente identificato dalla relazione CORRENTE-TENSIONE detta CARATTERISTICA.
In base alla sola caratteristica si possono classificare diversi tipi di bipolo.

1. INERTE (caratteristica passante per l'origine)
2. PASSIVO (caratteristica situata in quadranti opposti del piano, in modo tale che il prodotto delle coordinate risulti sempre dello stesso segno)
3. ATTIVO (quando non soddisfa la caratteristica di passività)
4. LINEARE (detto anche normale, caratteristica Lineare).



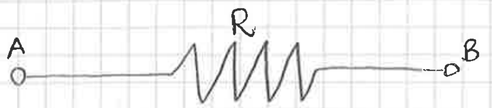
BIPOLI FONDAMENTALI

1. RESISTORE, quando la tensione V_{AB} è legata alla corrente dalla legge di OHM

$$V_{AB} = R_{AB} I_{AB}$$

Un resistore di resistenza R dissipa potenza sotto forma di calore, attraverso la legge di Joule:

$$P = R I^2$$



La resistenza può essere trovata dalla relazione:

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

dove: ρ è la Resistività $[\Omega \, mm^2 \, m^{-1}]$

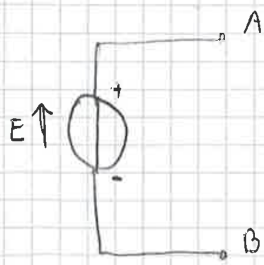
2. CORTO-CIRCUITO IDEALE

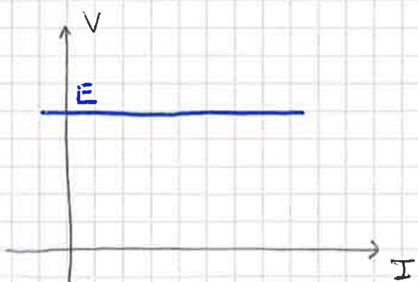
Un bipolo corto-circuito ideale è un bipolo tale che ai suoi capi, la tensione, sia sempre nulla (resistore a resistenza nulla)

$$U = 0$$

3. CIRCUITO APERTO IDEALE è tale che la corrente che lo attraversa è nulla qualunque sia il valore della tensione ai morsetti (resistore a resistenza infinita).

4. GENERATORE è un bipolo che impone ai suoi morsetti la f.e.m. E indipendentemente dalla corrente che lo attraversa.

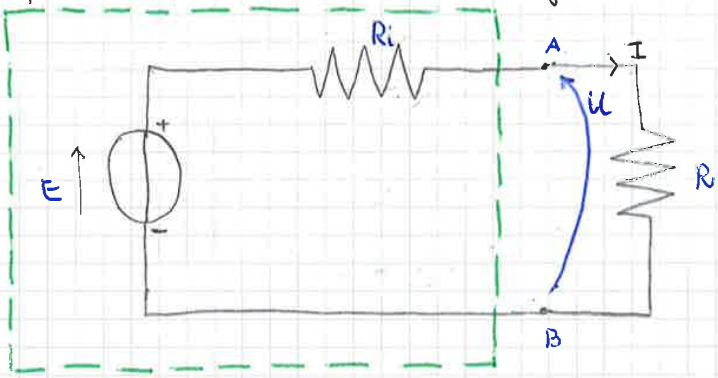




Se f.e.m. = 0 ⇒ corto-circuito ideale.

GENERATORE REALE DI TENSIONE

I generatori reali di tensione si differenziano da quelli ideali per la presenza di una resistenza interna R_i della quale si tiene conto ponendola in serie con il generatore.



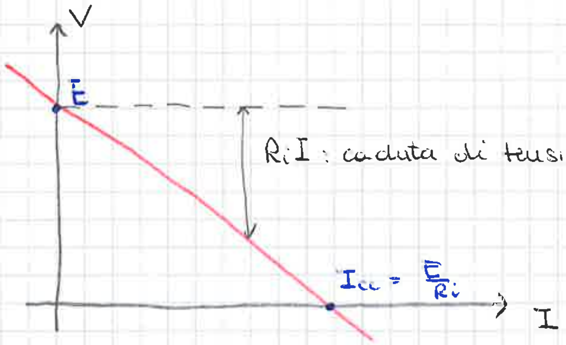
$$I = \frac{E}{R + R_i}$$

Con la convenzione dei generatori, ai morsetti A e B la tensione vale

$$V_{AB} = E - R_i I$$

$$V_{AB} = 0 \Rightarrow I = \frac{E}{R_i} = I_{cc}$$

$$I = 0 \Rightarrow V_{AB} = E = f.e.m.$$



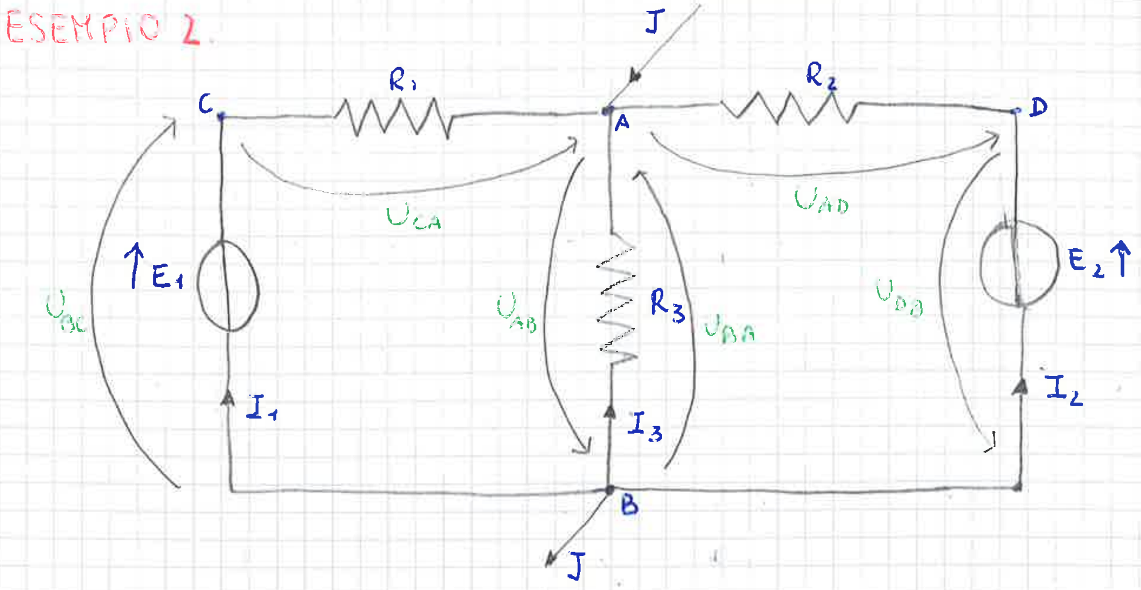
$$P_g = EI = E \cdot \frac{E}{R + R_i} = \frac{E^2}{R + R_i} = \frac{I^2 (R + R_i)^{\cancel{2}}}{\cancel{(R + R_i)}} = (R_i + R) I^2$$

$$P_u = R I^2 = \frac{E^2}{(R_i + R)^2} \cdot R = \left(\frac{E}{R_i + R} \right)^2 \cdot R$$

Il funzionamento di un generatore può essere misurato con il RENDIMENTO η:

$$\eta = \frac{P_u}{P_g} = \frac{\cancel{E^2}}{(R_i + R)^{\cancel{2}}} \cdot R \cdot \frac{\cancel{(R_i + R)}}{\cancel{E^2}} = \frac{R}{R_i + R}$$

ESEMPIO 2



nodo A $\quad I_1 + I_2 + I_3 + J = 0$

$$I_1 + I_2 + I_3 = -J$$

Maglia I $\quad U_{BC} + U_{CA} + U_{AB} = 0$

$$-E_1 + R_1 I_1 - R_3 I_3 = 0$$

Maglia II $\quad U_{AD} + U_{DB} + U_{BA} = 0$

$$-R_2 I_2 + E_2 + R_3 I_3 = 0$$

Quindi avremo che:

$$\begin{cases} E_1 = R_1 I_1 - R_3 I_3 \\ E_2 = R_2 I_2 - R_3 I_3 \\ I_1 + I_2 + I_3 = -J \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10\,A = I_5 + I_1 \\ I_1 + I_4 - I_3 = 0 \\ -10\,A = I_3 - I_2 \\ +R_5 I_5 + E_1 + R_1 I_1 + R_4 I_4 = 0 \\ R_3 I_3 + E_2 + R_2 I_2 + R_4 I_4 = 0 \end{cases}$$

$R_1 = R_2 = R_3 = R'$

$R_4 = R_5 = R''$

$$\begin{cases} I_5 + I_1 - I_3 - I_2 = 10[A] \\ I_1 + I_4 - I_3 = 0 \\ + R'' I_5 + E_1 + R' I_1 + R'' I_4 = 0 \\ R' I_3 + E_2 + R' I_2 + R'' I_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{-R''(I_5 + I_4) - E_1 + R' I_1 = 0} \\ \cancel{R'(I_3 + I_2) + E_2 + R'' I_4 = 0} \\ \cancel{I_5 + I_1 = J} \\ \cancel{I_3 - I_2 = J} \\ \cancel{I_1 + I_4 - I_3 = 0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 + I_5 = 10 \\ I_3 - I_2 = 10 \\ I_1 + I_4 - I_3 = 0 \\ 2 I_5 - 5 I_1 + 2 I_4 = -100 \\ 5 I_3 + 5 I_2 + 2 I_4 = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} I_1 &= 15{,}77\,A \\ I_2 &= 0{,}96\,A \\ I_3 &= 10{,}96\,A \\ I_4 &= -4{,}81\,A \\ I_5 &= -5{,}77\,A \end{aligned}$$

La P_{g_J} (potenza generata) dal generatore di corrente J (non mostrato in figura):

$$P_g = U_{AC} J = (R_3 I_3 - E_1 + R_1 I_1) J =$$

$$= [5 \cdot (10{,}96) - 100\,V + 5(15{,}77)] \cdot 10\,A = 336{,}5\,W$$

$P_{g_{E_1}}$ (potenza generata dal generatore di f.e.m $= E_1 = 100V$)

$$P_{g_{E_1}} = E_1 I_1 = 100\,V \cdot 15{,}77\,A = 1577\,W$$

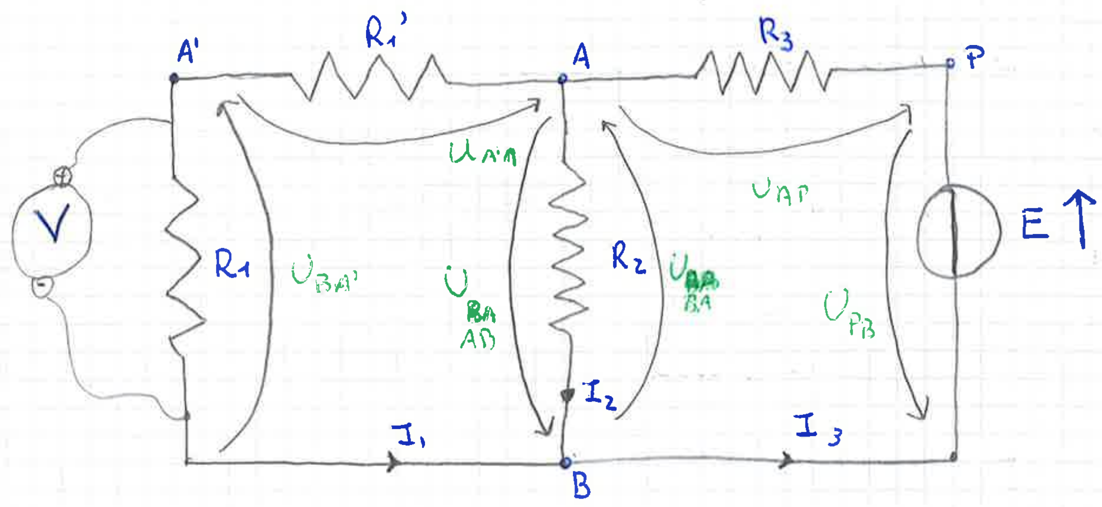
$P_{g_{E_2}}$ (potenza generata dal generatore di f.e.m $E_2 = -50V$)

$$P_{g_{E_2}} = E_2(-I_2) = -50\,V \cdot (-0{,}96\,A) = 48\,W$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 210

ESEMPIO 4.

Si determini il valore della f.e.m erogata dal generatore E, sapendo che il voltmetro V misura una tensione pari a 100 V.



dati:

$R_1 = 10\,\Omega$; $R_1' = 5\,\Omega$; $R_2 = 30\,\Omega$; $R_3 = 4\,\Omega$

$V = 100\ V = U_{BA}$

$$U_{BA'} = R_1 I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{U_{BA'}}{R_1} = \frac{100\ V}{10\,\Omega} = 10\ A$$

Maglia I

convenzione degli utilizzatore

$$U_{AB} = U_{BA'} + U_{A'A} =$$
$$= R_1 I_1 + R_1' I_1 = I_1 (R_1 + R_1')$$
$$U_{AB} = I_1 (R_1 + R_1') = 10\ A(10\,\Omega + 5\,\Omega) =$$
$$= 10\ A(15\,\Omega) = 150\ V$$

Maglia II

$$U_{AB} = R_2 I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{U_{AB}}{R_2} = \frac{150\ V}{30\,\Omega} = 5\ A$$

$$U_{AB} + U_{AP} + U_{PB} = 0$$
$$R_2 I_2 + R_3 I_3 - E = 0$$
$$E = R_2 I_2 + R_3 I_3 = 30\,\Omega(5\ A) + 4\,\Omega(15\ A) = 210\ V$$

nodo B:

$$I_3 - I_2 - I_1 = 0$$
$$I_3 = I_1 + I_2 = 10\ A + 5\ A = 15\ A$$

RESISTENZE

Se sono date due reti resistive, identificate da due coppie di morsetti AB e CD, si dice che esse sono EQUIVALENTI se ai morsetti si stabilisce una uguale relazione tensione-corrente.
Si considerino n resistori IN SERIE (attraversati dalla stessa corrente I); la tensione ai morsetti AB sarà pari alla somma delle tensioni sui resistori:

$$U_{AB} = R_1 I + R_2 I + \dots + R_n I = I \cdot \left(\sum_i^n R_i \right) = I \, R_{eq}$$

Se, invece, i resistori sono IN PARALLELO (sottoposti alla stessa tensione), allora per la LKC la corrente complessiva I sarà:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n =$$

$$= \frac{U_{AB}}{R_1} + \frac{U_{AB}}{R_2} + \frac{U_{AB}}{R_3} + \dots + \frac{U_{AB}}{R_n} =$$

$$= U_{AB} \sum_i \left(\frac{1}{R_i} \right) = U_{AB} \sum_i G_i = U_{AB} \, G_{eq}$$

dove G è la conduttanza.

Quindi per due soli resistori, avremo:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 \quad \text{IN SERIE}$$

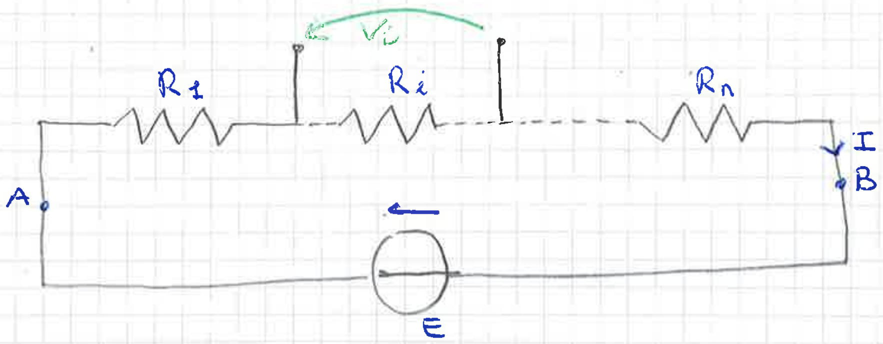
$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{o} \quad G_{eq} = G_1 + G_2 \quad \text{IN PARALLELO}$$

STELLE E TRIANGOLI

Tra i vari tipi di connessione dei bipoli, importanti sono quelli connessi a triangolo o a stella.
Per i due casi è possibile fornire relazioni che consenta di passare, semplicemente, dall'una all'altra.

PARTITORI

PARTITORE DI TENSIONE



Si consideri il circuito in esame; La tensione Vi sul resistore è data da:

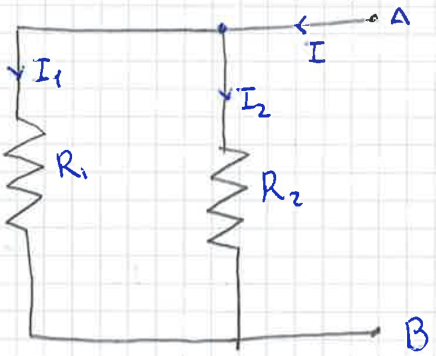
$$V_i = R_i I = \frac{E}{\sum R_i} R_i = E \cdot \frac{R_i}{\sum R_i}$$

$$V_i = E \cdot k_r$$

dove k_r è il rapporto di ripartizione.

PARTITORE DI CORRENTE

Si considerino due resistori in parallelo:



$$\begin{cases} I = I_1 + I_2 \\ E_1 = E_2 \quad \text{(definizione di parallelo)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I = I_1 + I_2 \\ R_1 I_1 = R_2 I_2 \end{cases}$$

$$\cancel{I_1} = \cancel{\frac{R_2 I_2}{R_1}}$$

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad ; \quad I_2 = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Si ha pertanto:

$$I_1 = I_{1E} + I_{1J} = \frac{E}{R_1 + R_2} + \left(-J \, \frac{R_2}{R_1 + R_2}\right) =$$

$$= \frac{100\,V}{10\,\Omega} - 20\left(\frac{6}{10}\right) = -2\,A$$

$$I_2 = I_{2E} + I_{2J} = \frac{E}{R_1 + R_2} + J + I_{1J} =$$

$$= 10\,A + 20\,A - 12\,A = 18\,A$$

Calcolo delle varie potenze:

$$P_{gJ} = U_{AB}\,J = (R_2 I_2)\,J = 6 \cdot 18 \cdot 20 = 2160\,W$$

$$P_{gE} = E \cdot I_1 = 100\,V \cdot (-2) = -200\,W$$

$$P_{gR1} = -(\cancel{U_{AB}}\,R_1 \cdot I_1)\,I_1 = -R_1 I_1^2 = -4 \cdot (-2)^2 = -16\,W$$ convenzione utilizz.

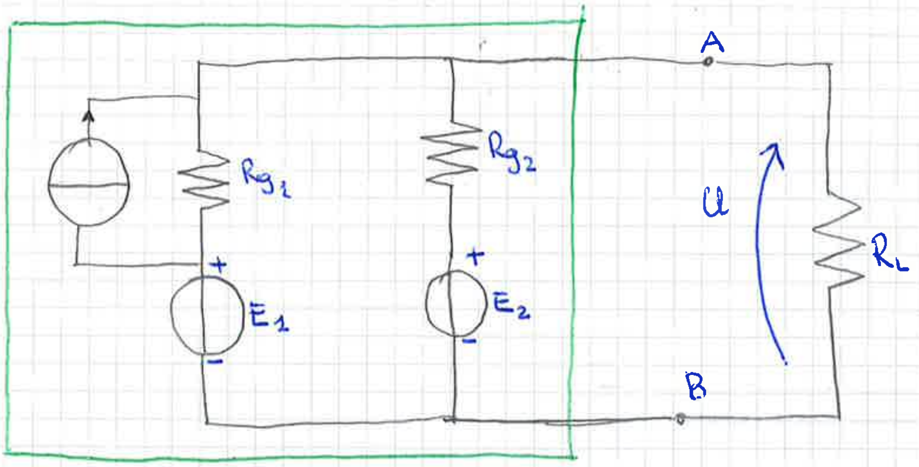
$$P_{gR2} = U_{AB}\,I_2 = (-R_2 I_2)\,I_2 = -R_2 I_2^2 = -6\,(18)^2 = -1944\,W$$

$$P_{TOT} = P_{gJ} + P_{gE} + P_{gR1} + P_{gR2} =$$

$$= 2160 + (-200) + (-16) + (-1944) = 0$$

TEOREMA DI THÉVENIN

Consideriamo una rete lineare complessa contenente resistori e generatori sia di corrente che di tensione;



La tensione U è effetto sia della tensione interna sia di quelle esterna: $U = U' + U''$.

$U' = E_{eq}$ è la tensione ai morsetti AB dovuta ai generatori.

$U'' = -R_{eq} I$ è la tensione calcolata quando vengono spenti i generatori (rete resa passiva)

Il Teorema di Thevenin dice che una rete lineare comunque complessa, vista da una coppia di morsetti AB, può essere considerata equivalente ad un circuito semplice costituito da un generatore ideale di f.e.m., di valore pari alla tensione a vuoto (E_{eq}) ai morsetti AB, in serie con la resistenza equivalente della rete (resa passiva) ai morsetti AB aperti (R_{eq}).

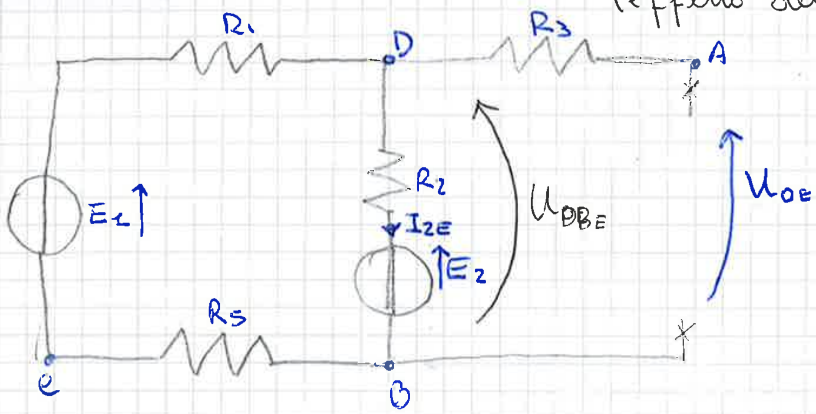
TEOREMA DI NORTON

Secondo un criterio di perfetta dualità, sussiste un teorema di equivalenza che fa riferimento ad un generatore ideale di corrente:

Una rete lineare, comunque complessa, vista da una coppia di morsetti AB, può essere considerata equivalente ad un circuito semplice costituito da un generatore ideale di corrente, di valore I_{cc} pari alla corrente di corto-circuito tra AB, in parallelo con la resistenza equivalente della rete (R_{eq}).

$$I = I' + I'' = I_{cc} - \frac{U}{R_{eq}}$$

(effetto dei soli generatori)

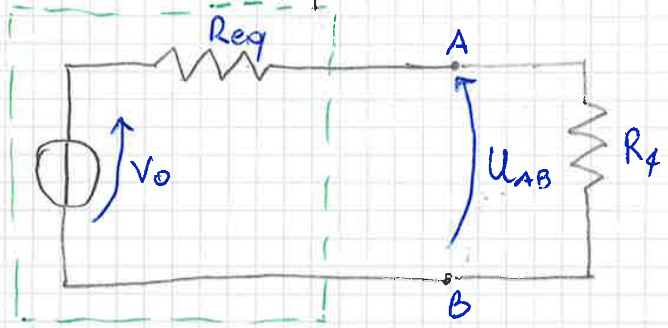


A vuoto $R_3 I = 0$

$$U_{OE} = U_{DBE} = E_2 + I_{2E} R_2 = E_2 + \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2 + R_5} \cdot R_2 = 150\,V$$

NODO D $\quad I_{2E} = \frac{E_{tot}}{R_{tot}} = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2 + R_5}$

La rete si risolve, quindi, a:



$$U_{AB} = V_0 \cdot \frac{R_4}{R_4 + R_{eq}}$$ P.D.T

$$V_0 = U_{OE} + U_{OJ} = 150\,V + 350\,V = 500\,V$$

$$R_{eq} = R_3 + \frac{R_{15} R_2}{R_{15} + R_2} = R_3 + \frac{(R_1 + R_5) R_2}{R_1 + R_2 + R_5} = 10\,\Omega$$

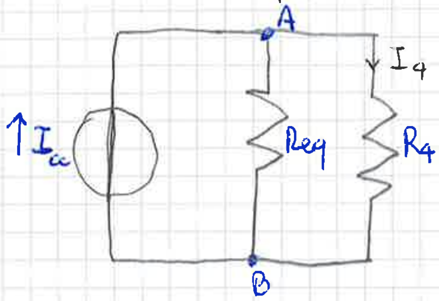
$$U_{AB} = U_0 \cdot \frac{R_4}{R_{eq} + R_4} = 500\,V \cdot \frac{10\,\Omega}{(10+10)\,\Omega} = 250\,V$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 210

La I_{cc} totale risulta quindi:

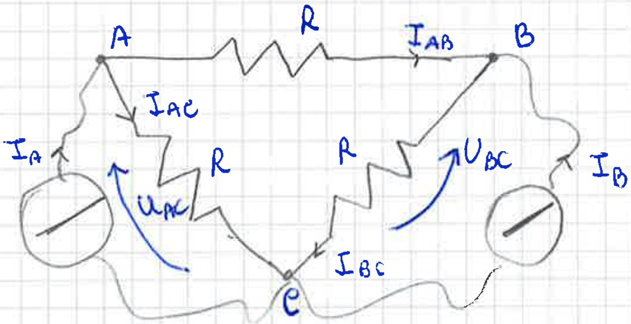
$$I_{cc} = I_{ccE} + I_{ccJ} = (15 + 8)A = 23\ A$$

La rete si riduce quindi a:



$$I_4 = I_{cc} \cdot \frac{R_{eq}}{R_{eq} + R_4} = 23\ A \cdot \frac{5\ \Omega}{(5+5)\ \Omega} = 11{,}5\ A$$

ESERCIZIO LEZIONE 1



DATI:

$I_A = 60\ A$

$I_B = -30\ A$

$R = 3\ \Omega$

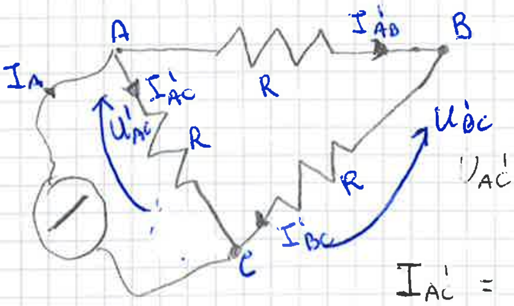
Calcolare la potenza assorbita:

Si possono seguire due strade per il calcolo di Pa:

1. $P_a = U_{AC}\, I_A + U_{BC} \cdot I_B$

2. $P_a = R\, I_{AB}^2 + R\, I_{BC}^2 + R I_{CA}^2$

Applichiamo il teorema di sovrapposizione degli effetti:



$R = R_1 = R_2 = R_3$

$$R_{eq} = \frac{R_{12}\, R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{2R\,\cancel{R}}{3\,\cancel{R}} = \frac{2}{3} R = 2\ \Omega$$

$$U'_{AC} = I_A \cdot R_{eq} = I_A \cdot \frac{2}{3} R = I_A \cdot 2 = 2\, I_A = 2 \cdot 60 = 120\ V$$

$$I'_{AC} = I_A \cdot \frac{2\,\cancel{R}}{3\,\cancel{R}} = \frac{2}{3} I_A = \frac{2}{3}\, 60\ A = 40\ A$$

$I_A = I'_{AB} + I'_{BC}$

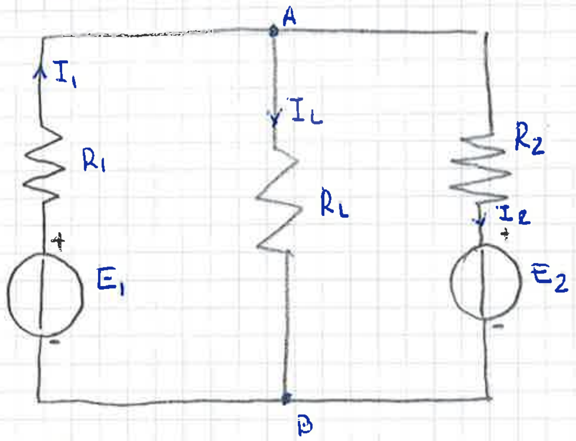
$I'_{BC} = I_A - I'_{AC}$

$$I'_{AB} = I'_{BC} = I_A - I'_{AC} = (60 - 40)\ A = 20\ A$$

$$U'_{BC} = I'_{BC} \cdot R = 20\ A \cdot 3\ \Omega = 60\ V$$

ESERCIZIO 2

$I_1 - I_2 = I_L$



DATI:

$E_1 = 780\ V$

$E_2 = 820\ V$

$R_1 = 0{,}2\ \Omega$

$R_2 = 0{,}1\ \Omega$

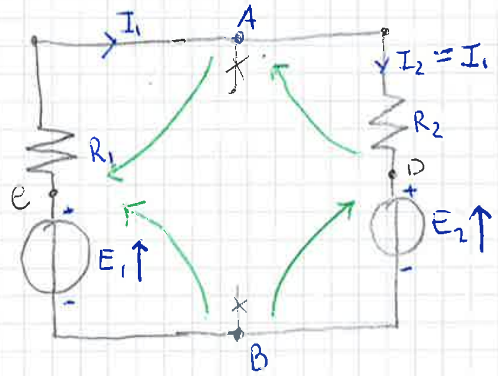
$R_L = 8\ \Omega$

Calcolare la potenza generata ai capi del generatore AB

$P_{g_1} = U_L I_1$

$P_{g_2} = U_L I_2$

1. Non si considera R_L



Per la legge delle tensioni:

$$U_{AD} + U_{DB} + U_{Be} + U_{eA} = 0$$

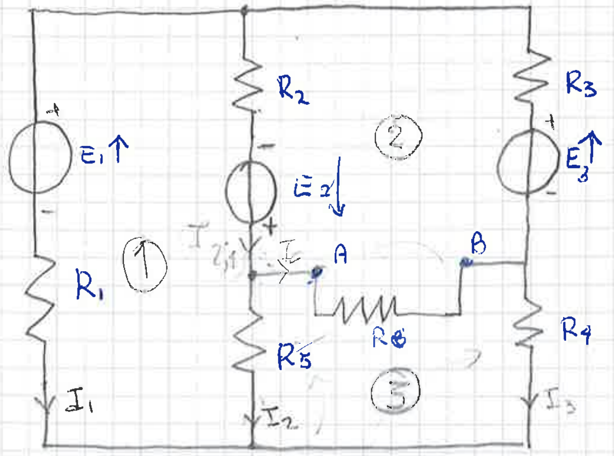
$$E_2 - E_1 + R_2 I_2 + R_1 I_1 = 0$$

$$E_2 - E_1 + R_2 I_1 + R_1 I_1 = 0$$

$$E_2 - E_1 + (R_2 + R_1) I_1 = 0$$

$$I_1 = \frac{E_1 - E_2}{R_2 + R_1} = \frac{(780 - 820)\ V}{(0{,}2 + 0{,}1)\ \Omega} = -133{,}3\ A$$

ESERCIZIO 3



DATI

$E_1 = 6\,V$

$E_2 = 12\,V$

$E_3 = 18\,V$

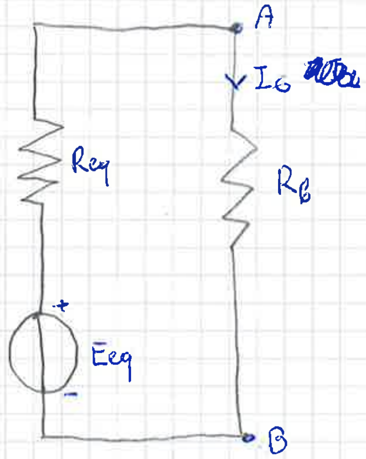
$R_1 = R_2 = R_3 = 2\,\Omega$

$R_4 = R_5 = R_6 = 6\,\Omega$

$R_{25} = R_2 + R_5$

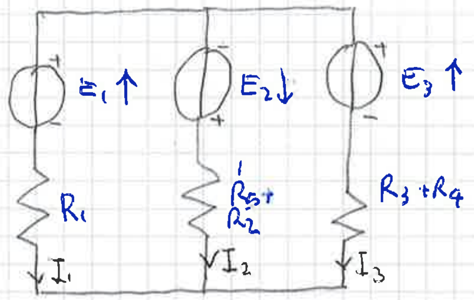
$R_{34} = R_3 + R_4$

Il circuito è equivalente a: R_2 in serie con R_5, R_3 in serie con R_4



$$R_{eq} = \frac{R_{25}\, R_{34}\, R_1}{R_{25} + R_{34} + R_1} = \frac{(R_2 + R_5)(R_3 + R_4) R_1}{R_2 + R_5 + R_3 + R_4 + R_1} = \frac{(8)(8)\cdot 2}{(18)} = 7{,}1\,\Omega$$

Il circuito può essere anche visto come:



Per la legge delle correnti:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

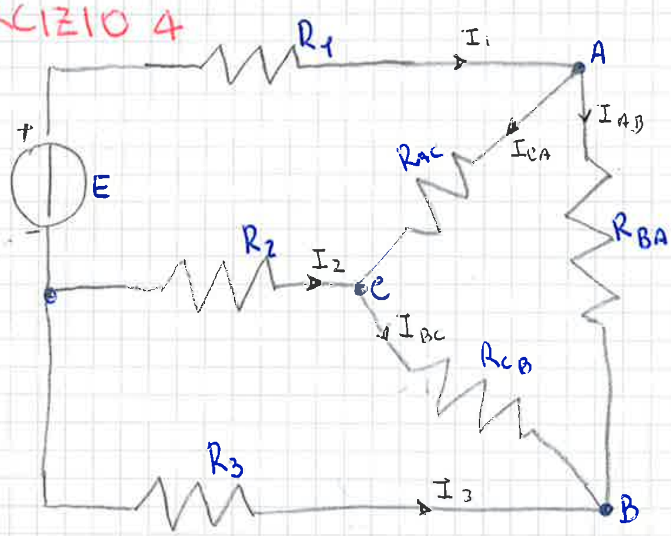
$$I_1 = \frac{U - E_1}{R_1} = \frac{8 - 6}{2} = 1\ V$$

$$I_2 = \frac{U - E_2}{R_2 + R_5} = \frac{8 - 12}{8} = -0{,}5\ V$$

$$I_3 = \frac{U - E_3}{R_3 + R_4} = \frac{8 - 18}{8} = -1{,}25\ V$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 210

ESERCIZIO 4



DATI:

$E = 100\,V$

$R_{AB} = 3\,\Omega$

$R_{BC} = 6\,\Omega$

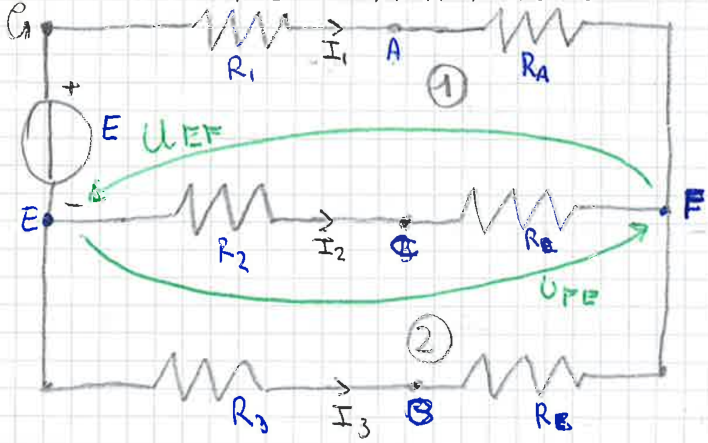
$R_{CA} = 9\,\Omega$

$R_1 = 6,5\,\Omega$

$R_2 = 1\,\Omega$

$R_3 = 3\,\Omega$

TRASFORMAZIONE TRIANGOLO → STELLA



$R_A, R_B, R_C = ?$

$$R_A = \frac{R_{AC}\, R_{AB}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} = \frac{9\,\Omega \cdot 3\,\cancel{\Omega}}{(3+6+9)\,\cancel{\Omega}} = \frac{27}{18}\,\Omega = 1,5\,\Omega$$

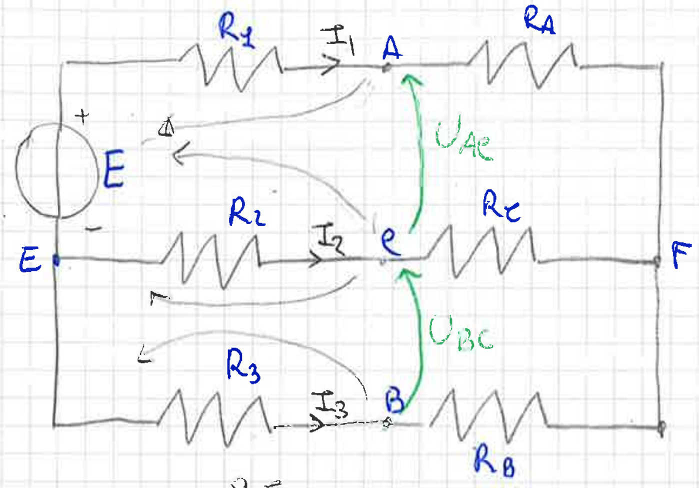
$$R_B = \frac{R_{BC} \cdot R_{BA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} = \frac{6\,\Omega \cdot 3\,\cancel{\Omega}}{(3+6+9)\,\cancel{\Omega}} = \frac{18}{18}\,\Omega = 1\,\Omega$$

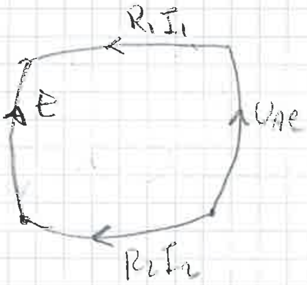
$$R_C = \frac{R_{CA} \cdot R_{CB}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} = \frac{9\,\Omega \cdot 6\,\cancel{\Omega}}{(3+6+9)\,\cancel{\Omega}} = \frac{54}{18}\,\Omega = 3\,\Omega$$

NODO F

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$I_3 = -I_1 - I_2 = -9{,}76 - (-5{,}48) = -4{,}28\ A$$



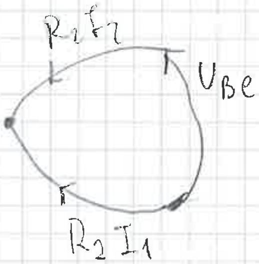


$$U_{AC} + R_1 I_1 + E - R_2 I_2 = 0$$

$$U_{AC} = R_2 I_2 - R_1 I_1 + E =$$

$$= 1(-5{,}48) - 6{,}5(9{,}76) + 100 =$$

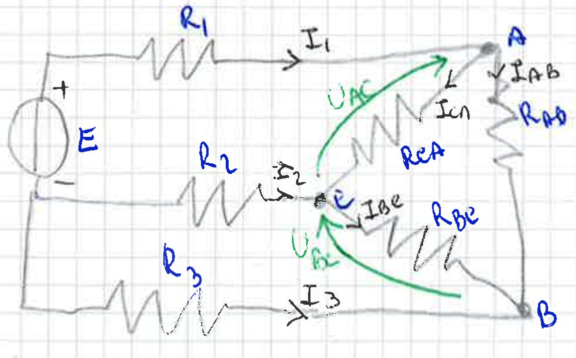
$$= 31{,}08\ V$$



$$U_{BC} + R_2 I_2 - R_1 I_1 = 0$$

$$U_{BC} = R_1 I_1 - R_2 I_2 = 6{,}5(9{,}76) - 1(-5{,}48) =$$

$$= 68{,}92\ V$$



$$U_{AC} = 31{,}08\ V$$
$$U_{BC} = 68{,}92\ V$$

$$U = RI$$

$$I_{AC} = \frac{U_{AC}}{R_{AC}} = \frac{31{,}08\ V}{9\ \Omega} = 3{,}45\ A$$

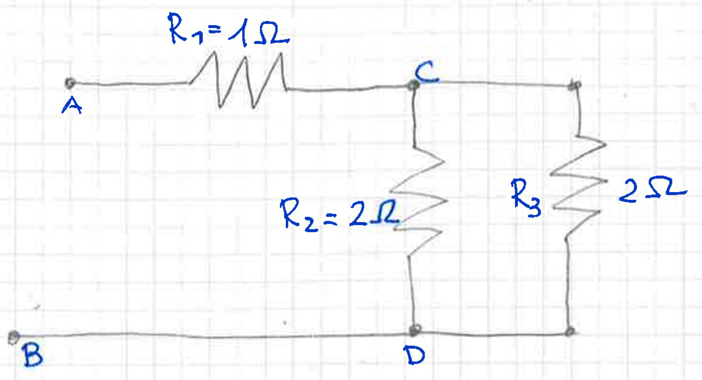
$$I_{BC} = \frac{U_{BC}}{R_{BC}} = \frac{68{,}92\ V}{6\ \Omega} = 11{,}49\ A$$

$$I_1 = I_{CA} + I_{AB} \Rightarrow I_{AB} = I_1 - I_{AC} = (9{,}76 - 3{,}45)A = 6{,}31 A$$

$$U_{AB} = R_{AB} \cdot I_{AB} = 3\ \Omega \cdot 6{,}31\ A = 18{,}93\ V$$

RESISTENZE EQUIVALENTI

1)



$R_1 = 1\Omega$
$R_2 = 2\Omega$
$R_3 = 2\Omega$

R_2 e R_3 sono in PARALLELO

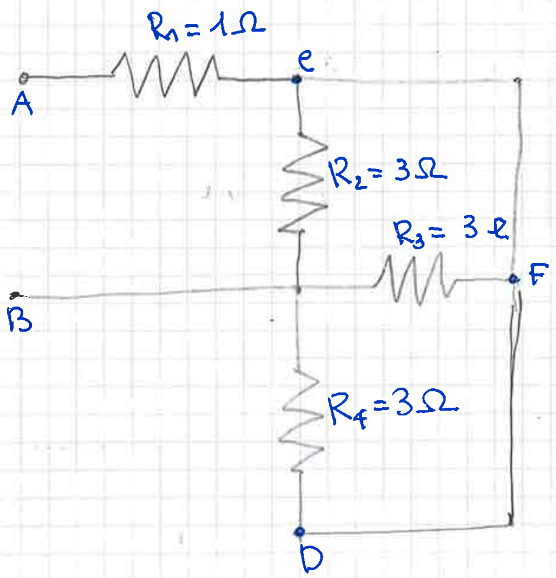
$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

R_{23} è in SERIE con R_1

$$R_{eq} = R_1 + R_{23} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 1 + \frac{2 \cdot 2}{2 + 2} =$$

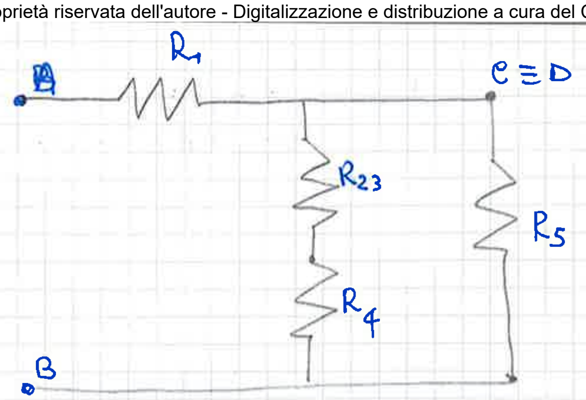
$$= 1 + \frac{4}{4} = 1 + 1 = 2\,\Omega$$

2)



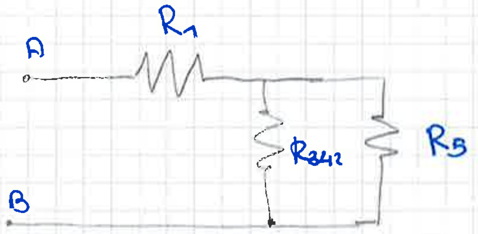
I morsetti C D e F sono coincidenti $\Rightarrow$ $C \equiv D \equiv F$

Quindi il circuito può essere ri-disegnato:



R_{23} e R_4 sono in serie

$R_{1234} = R_4 + R_{23} =$
$= 2 + 2 = 4\,\Omega$



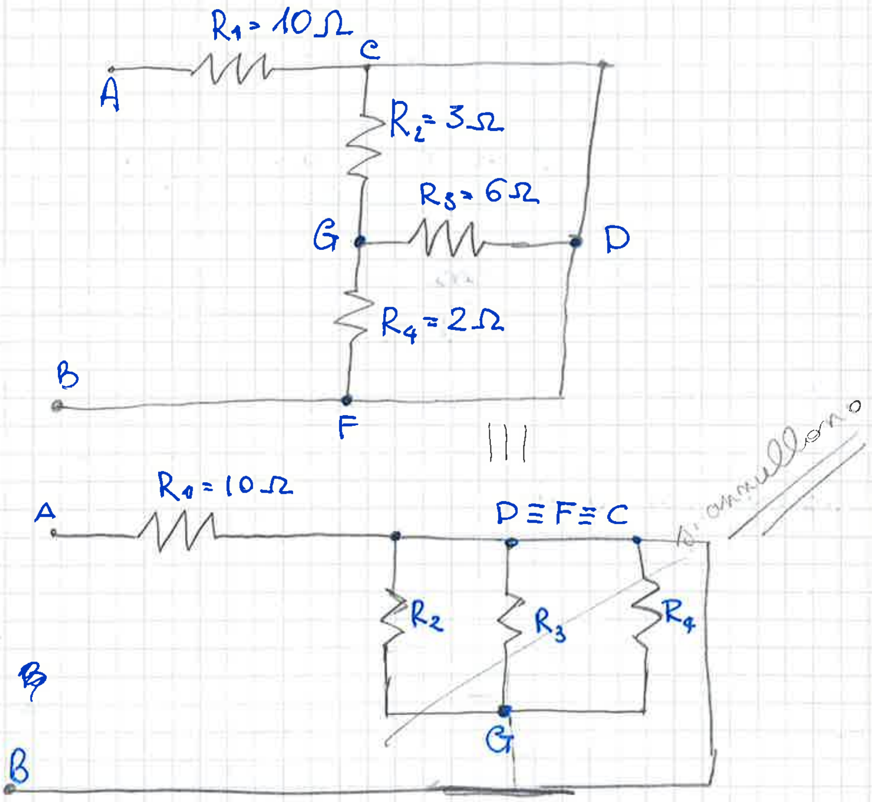
R_{234} e R_5 sono in parallelo

$$R_{2345} = \frac{R_5\, R_{2345}}{R_5 + R_{2345}} = \frac{4 \cdot 4}{4+4} = \frac{16}{8}\,\Omega =$$
$$= 2\,\Omega$$

R_{2345} è in serie con R_1

$$R_{eq} = R_1 + R_{2345} = 2\,\Omega + 2\,\Omega = 4\,\Omega$$

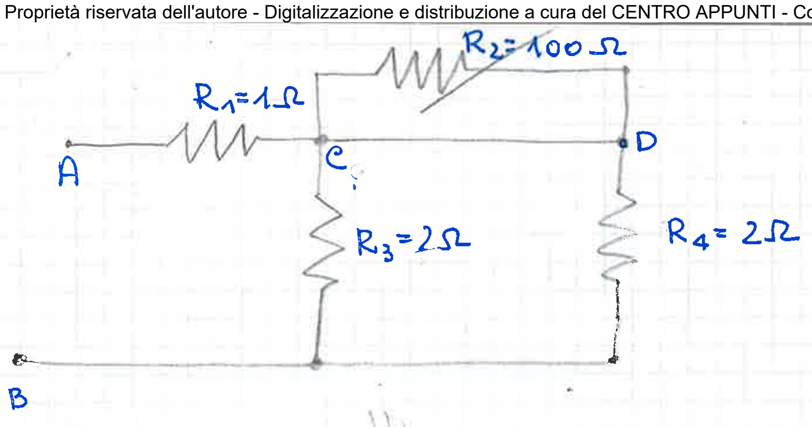
4)



$R_1 = 10\,\Omega$
$R_2 = 3\,\Omega$
$R_3 = 6\,\Omega$
$R_4 = 2\,\Omega$

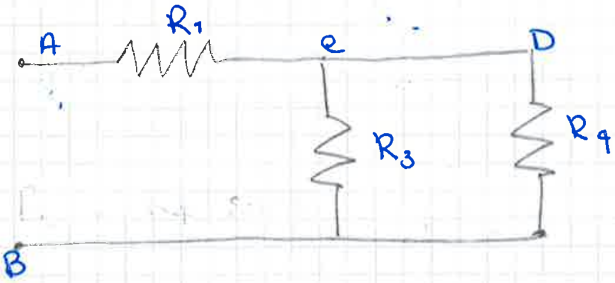
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 210

6)



$R_1 = 1\,\Omega$
$R_2 = 100\,\Omega$
$R_3 = 2\,\Omega$
$R_4 = 2\,\Omega$

Quando una resistenza è in parallelo con un corto-circuito la resistenza si elimina!

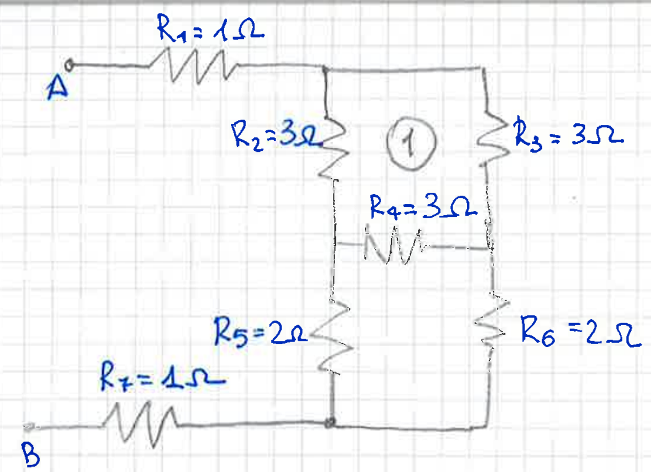


R_3 ed R_4 sono in parallelo

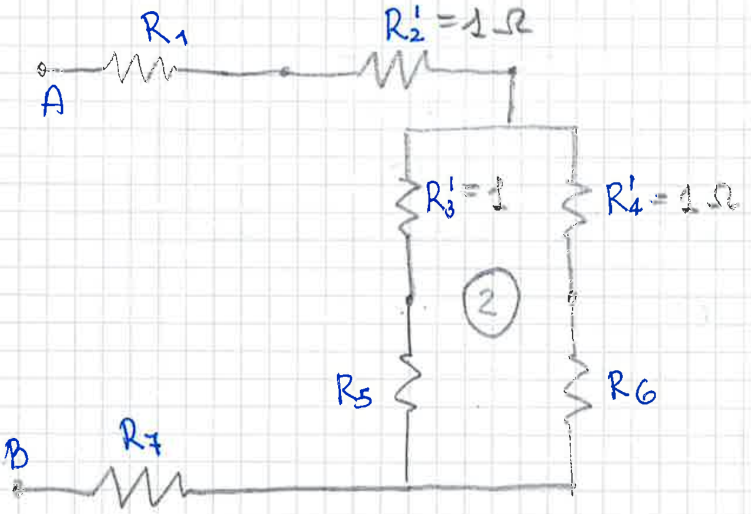
$$R_{34} = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = \frac{2 \cdot 2}{2 + 2} = 1\,\Omega$$

$$R_{eq} = R_1 + R_{34} = (1 + 1)\,\Omega = 2\,\Omega$$

9)



La cosa più conveniente è trasformare 1 in stella



$R_\Delta = 3 R_Y$

$R_Y = \frac{R_\Delta}{3}$

$R'_2 = \frac{R_2}{3} = \frac{3}{3} = 1\Omega$

$R'_3 = \frac{R_3}{3} = \frac{3}{3} = 1\Omega$

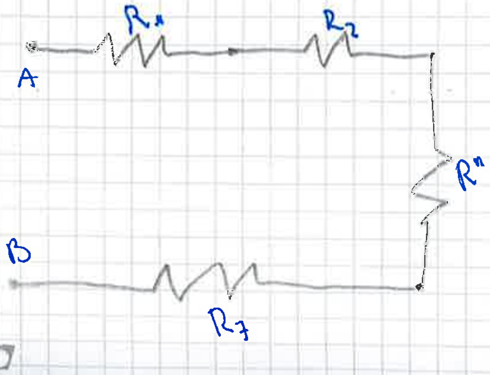
$R'_4 = \frac{R_4}{3} = \frac{3}{3}\Omega = 1\Omega$

R_{eq} della maglia 2 $\Rightarrow R''$

$R'_{35} = R'_3 + R_5 = 1 + 2 = 3\Omega$

$R'_{45} = R'_4 + R_6 = 1 + 2 = 3\Omega$

$$R'' = \frac{R'_{35} \cdot R'_{45}}{R'_{35} + R'_{45}} = \frac{3 \cdot 3}{3 + 3} = \frac{9}{6}\Omega = \frac{3}{2}\Omega$$

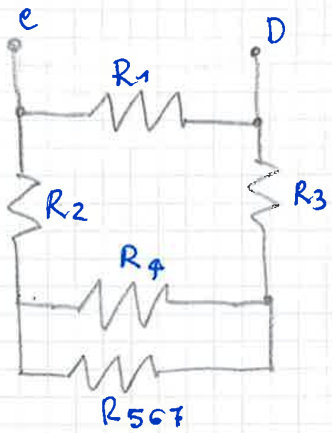


$$R_{eq} = R_1 + R'_2 + R'' + R_7 =$$
$$= 1\Omega + 1\Omega + \frac{3}{2}\Omega + 1\Omega = 3 + \frac{3}{2} =$$
$$= \frac{9}{2} = 4,5\Omega$$

Resistenza vista da CD

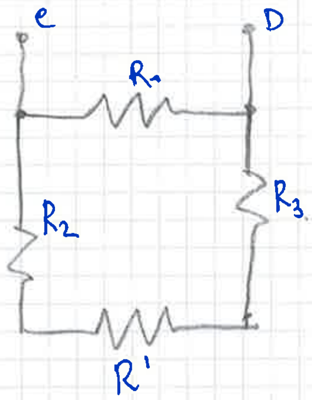
R_5, R_6, R_7 sono in serie

$$R_{567} = R_5 + R_6 + R_7 = 1 + 1 + 1 = 3\,\Omega$$



R_4 e R_{567} sono in parallelo

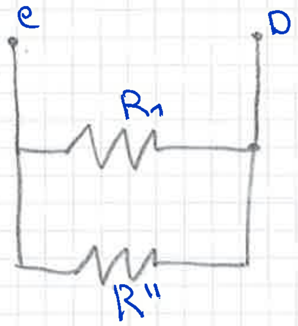
$$R' = \frac{R_4 \cdot R_{567}}{R_4 + R_{567}} = \frac{1 \cdot 3}{1 + 3} = \frac{3}{4}\,\Omega$$



R_2, R_3, R' sono in serie

$$R'' = R_2 + R_3 + R' =$$

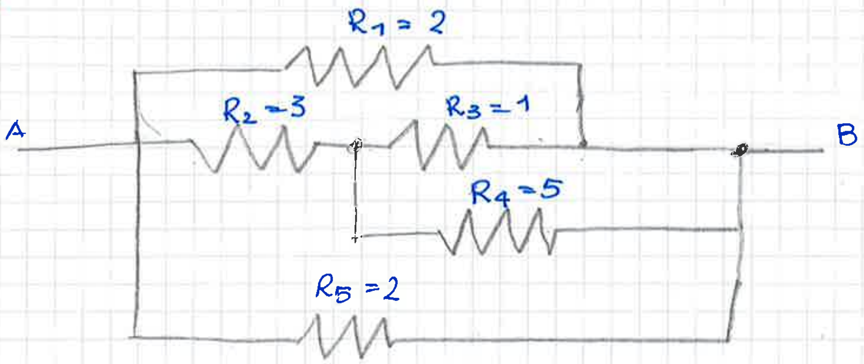
$$= 1 + 1 + \frac{3}{4} = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}\,\Omega$$



$$R_{eq} = \frac{R_1 R''}{R_1 + R''} = \frac{1 \cdot \frac{11}{4}}{1 + \frac{11}{4}} = \frac{\frac{11}{\cancel{4}}}{\frac{15}{\cancel{4}}} = \frac{11}{15}\,\Omega$$

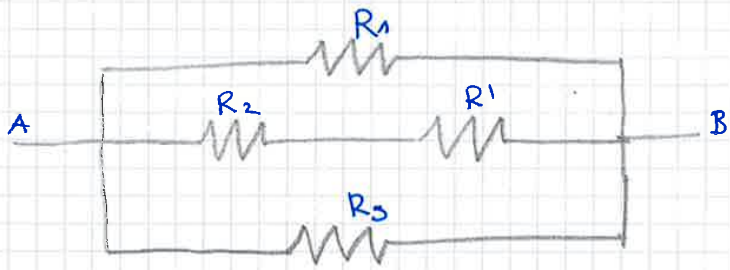
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 210

E 1.2



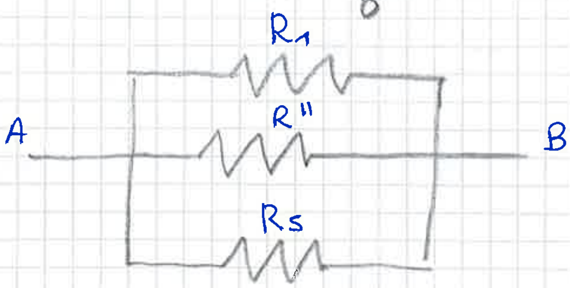
R_3 e R_4 sono in parallelo

$$R' = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = \frac{1 \cdot 5}{6} = \frac{5}{6}\,\Omega$$



R_2 ed R' sono in serie

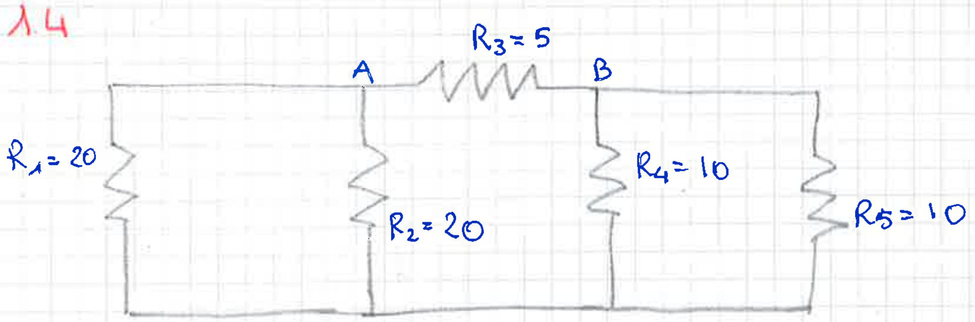
$$R'' = R' + R_2 = \frac{5}{6}\,\Omega + 3\,\Omega = \frac{5+18}{6} = \frac{23}{6}\,\Omega$$



$$G_{eq} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R''} + \frac{1}{R_5} = \frac{1}{2} + \frac{6}{23} + \frac{1}{2} = 1{,}2609\,\Omega^{-1}$$

$$R_{eq} = \frac{1}{G_{eq}} = \frac{1}{1{,}2609\,\Omega^{-1}} = 0{,}793\,\Omega$$

E 1.4

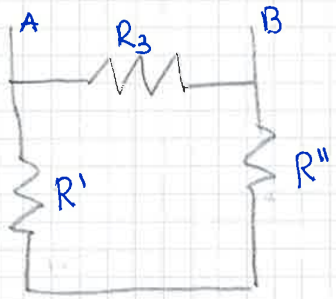


R_1 ed R_2 sono in parallelo

R_4 ed R_5 anche sono in parallelo

$$R' = \frac{R_1 \, R_2}{R_2 + R_1} = \frac{20 \cdot 20}{40} = \frac{40\cancel{0}}{4\cancel{0}} = 10\,\Omega$$

$$R'' = \frac{R_4 \, R_5}{R_4 + R_5} = \frac{10 \cdot 10}{20} = \frac{10\cancel{0}}{2\cancel{0}} = 5\,\Omega$$

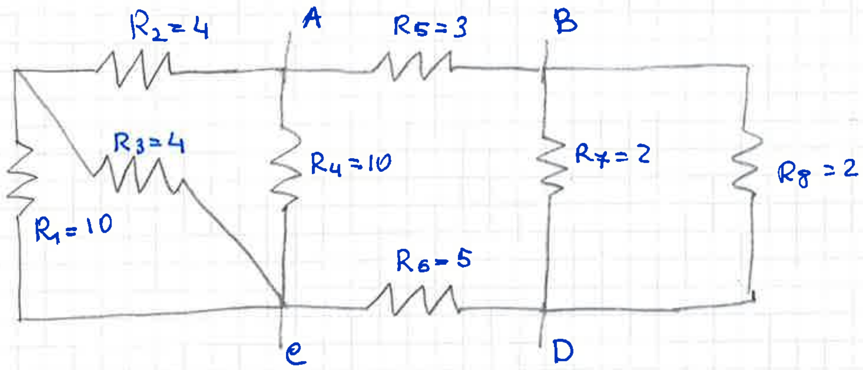


Questo circuito semplificato è assimilabile ad una stella

$$R''' = R' + R'' = 10 + 5 = 15\,\Omega$$

$$R_{eq} = \frac{R_3 \, R'''}{R_3 + R'''} = \frac{5 \cdot 15}{20} = \frac{75}{20} = 3{,}75\,\Omega$$

E 1.6



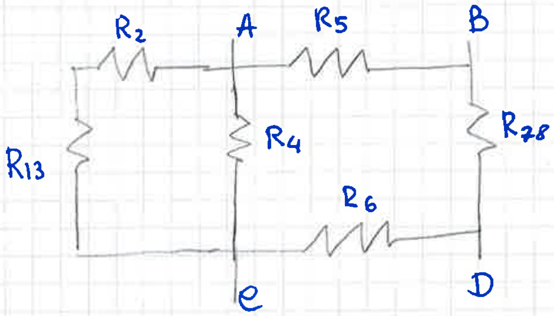
R_{eq} vista da AB:

R_7 ed R_8 sono in parallelo

$$R_{78} = \frac{R_7 \cdot R_8}{R_7 + R_8} = \frac{2 \cdot 2}{4} = 1\ \Omega$$

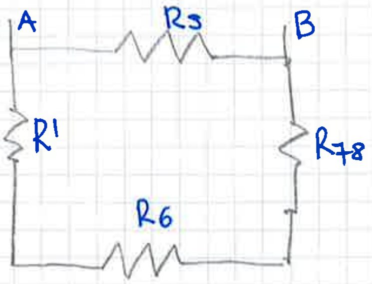
R_1 ed R_3 sono in parallelo

$$R_{13} = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} = \frac{10 \cdot 4}{14} = 2{,}86\ \Omega$$



(R_2 ed R_{13} sono in serie) // R_4

$$R' = \frac{R_4 \cdot R_{213}}{R_4 + R_{123}} = \frac{R_4 (R_2 + R_{13})}{R_4 + R_2 + R_{13}} = \frac{10 (4 + 2{,}86)}{10 + 4 + 2{,}86} = 4{,}07\ \Omega$$



R', R_6, R_{78} sono in serie

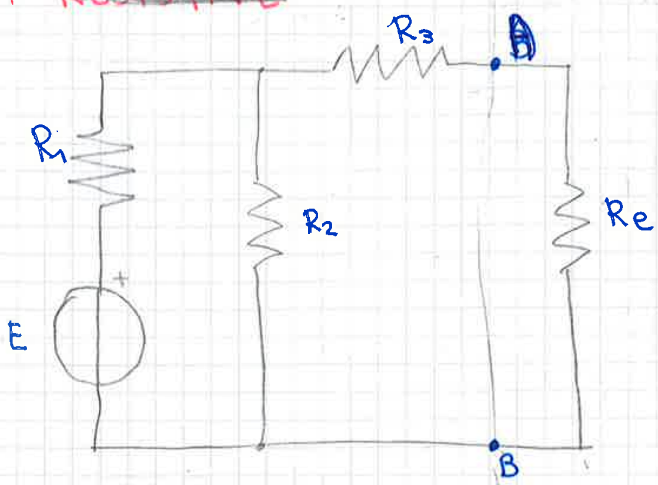
$$R'' = R' + R_6 + R_{78} = 4{,}07 + 5 + 1 = 10{,}07\ \Omega$$

R'' ed R_5 sono in parallelo.

$$R_{eq} = \frac{R'' \cdot R_5}{R'' + R_5} = \frac{10{,}07 \cdot 3}{13{,}07} = 2{,}3\ \Omega$$

RETI ~~RESISTIVE~~

1.



$E = 10V$

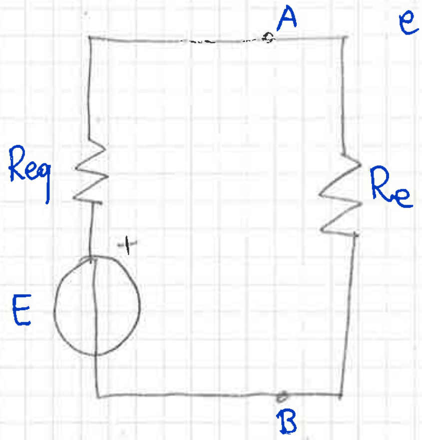
$R_1 = 4\Omega$

$R_2 = 6\Omega$

$R_3 = 2\Omega$

$R_e = 5\Omega$

|||



CIRCUITO EQUIVALENTE DI THEVENIN

$$R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 + R_1} + R_3 = \frac{4 \cdot 6}{10} + 2 = 4{,}4\Omega$$

Eeq si può calcolare considerando i morsetti A B aperti, quindi R_3 non è percorsa da corrente:

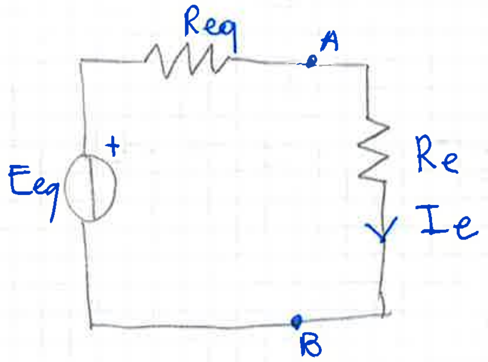
TEOREMA DEL PARTITORE DI TENSIONE

$$E_{eq} = \frac{E \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\cancel{10}V \cdot 6\cancel{\Omega}}{\cancel{10\Omega}} = 6V$$

Si calcola Ie

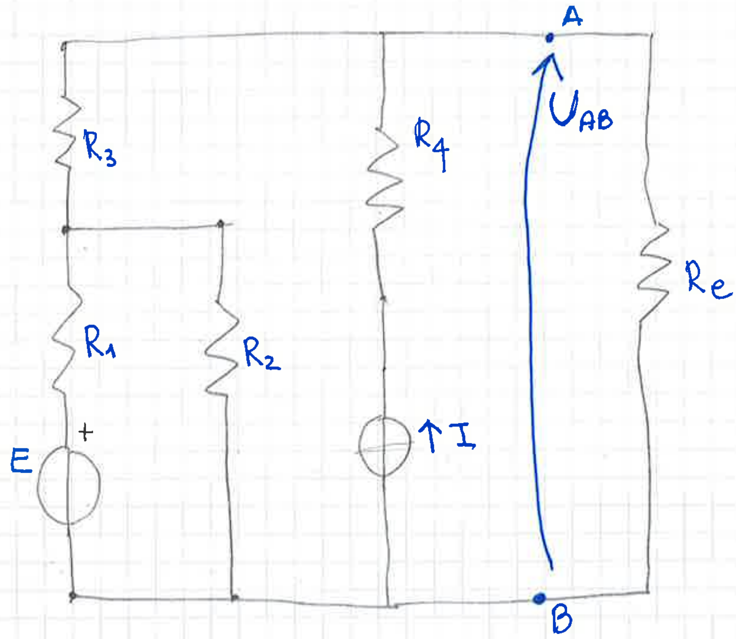
$$I_e = \frac{E_{eq}}{R_{eq} + R_e} = \frac{6V}{(4{,}4 + 5)\Omega} = 0{,}638A$$

$$E_q = E_q' + E_q'' = 5 + 50 = 55\,V$$



$$I_e = \frac{E_q}{R_{eq} + R_e} = \frac{55\,V}{10\,\Omega} = 5{,}5\,A$$

3.



$E = 10\,V$

$I = 2\,A$

$R_1 = R_2 = 4\,\Omega$

$R_3 = 2\,\Omega$

$R_4 = 5\,\Omega$

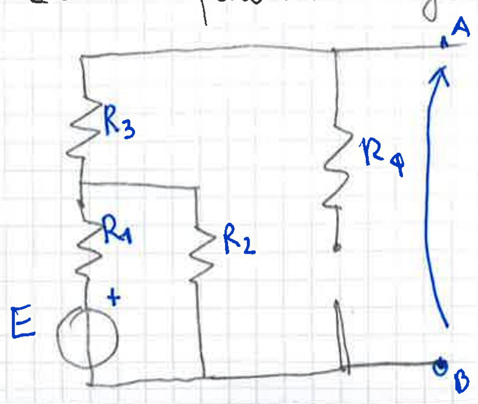
$R_e = 5\,\Omega$

Calcolare:

a) eq. di Thevenin in AB

b) corrente in Re

a) 1. Si passiva il generatore di corrente

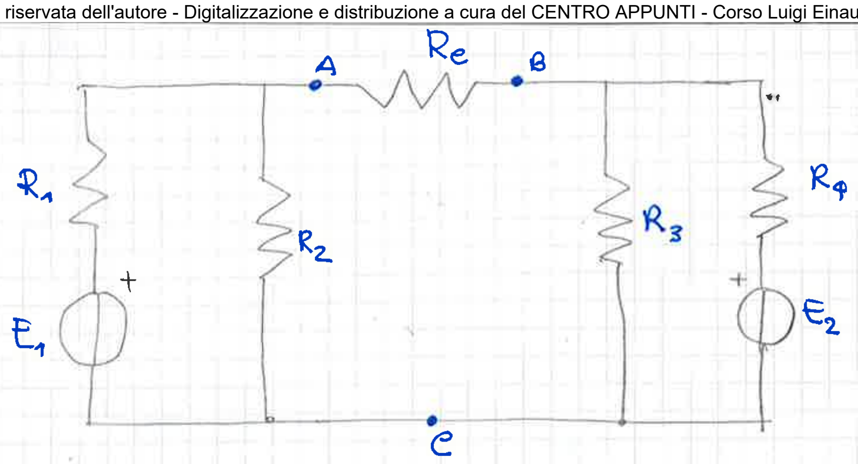


$E_{eq}' = ?$

$U_{AB} = ?$

R_e

4.



$E_1 = 10V$

$E_2 = 10V$

$R_1 = R_2 = 10\Omega$

$R_3 = 2\Omega$

$R_4 = 8\Omega$

$R_e = 5\Omega$

Determinare:

a) eq. Thevenin in AC

b) = = in BC

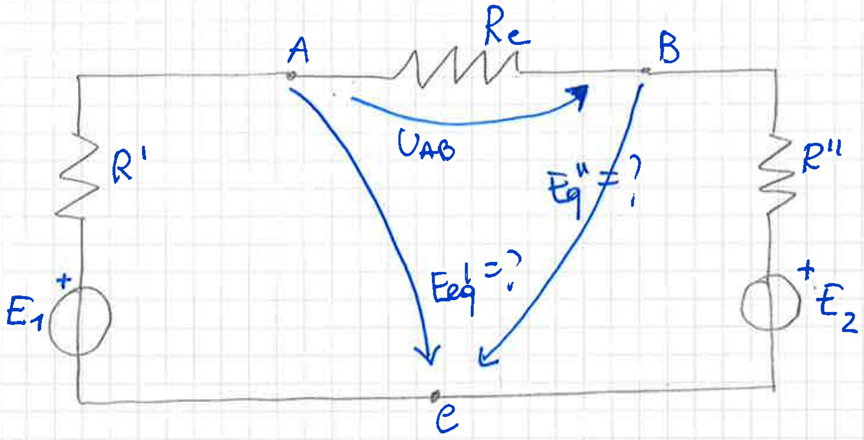
c) corrente in Re

R_1 ed R_2 sono in parallelo

$$R' = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10 \cdot 10\,\Omega}{20\,\Omega} = 5\,\Omega$$

R_3 ed R_4 sono in parallelo

$$R'' = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = \frac{2 \cdot 8}{10} = 1{,}6\,\Omega$$



a) $$E_{eq}' = \frac{E_1\ R_2}{R_2 + R_1} = \frac{10\ V \cdot 10\,\Omega}{20\,\Omega} = 5V$$

b) $$E_{eq}'' = \frac{E_2\ R_3}{R_3 + R_4} = \frac{10V \cdot 2\,\Omega}{10\,\Omega} = 2V$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 210

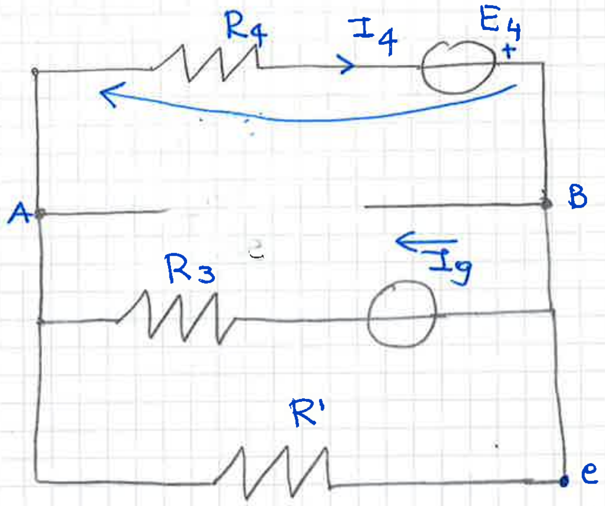
R_1 ed R_2 sono in serie

$$R' = R_1 + R_2 = 1 + 1 = 2\,\Omega$$

In questo caso si può usare il teorema di Millman.

$$\boxed{V_{AB} = \frac{\sum \frac{E_i}{R_i} + \sum I_{Aj}}{\sum \frac{1}{R_k}}}$$

si escludono le R in serie con i generatori di corrente!



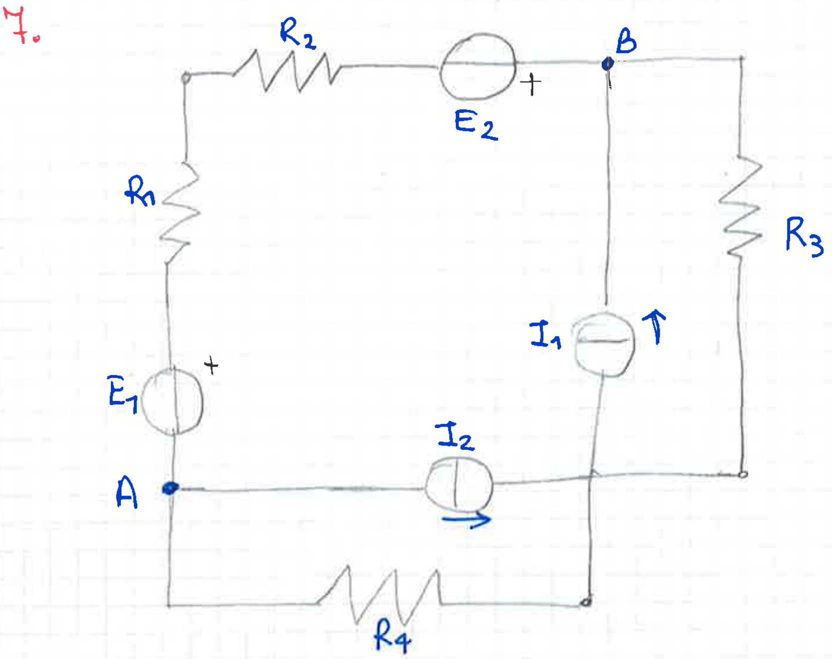
$$V_{AB} = \frac{I_g - I_4}{\frac{1}{R'} + \frac{1}{R_4}} = \frac{I_g - \frac{E_4}{R_4}}{\frac{1}{R'} + \frac{1}{R_4}} = \frac{2 - \frac{1}{8}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{8}} = 3\text{ V}$$

$$I_e = \frac{V_{AB}}{R_{eq} + R_e} = \frac{3\text{ V}}{1{,}6 + 0{,}6} = 1{,}36\text{ A}$$

R_4 ed R' sono in parallelo

$$R_{eq} = \frac{R' R_4}{R' + R_4} = \frac{2 \cdot 8}{10} = 1{,}6\,\Omega$$

7.



$E_1 = 1V$
$E_2 = 1V$
$I_1 = 2A$
$I_2 = 2A$
$R_1 = 1\Omega$
$R_2 = 1\Omega$
$R_3 = 2\Omega$
$R_4 = 2\Omega$

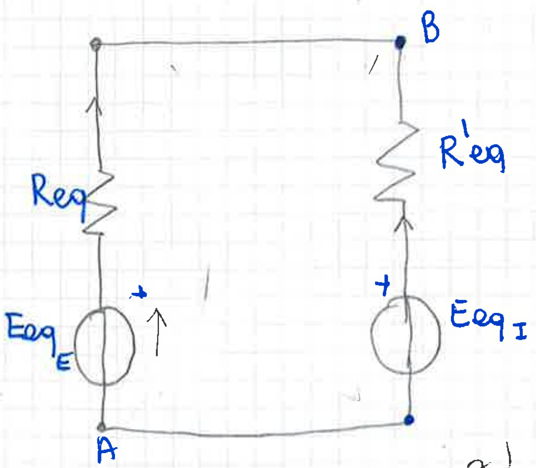
Determinare

a) eq. thevenin in AB

$$E_{eq_E} = E_1 + E_2 = 1 + 1 = 2V$$
$$R_{eq} = R_1 + R_2 = 2 + 2 = 4V$$

$$E_{eq_{I_1}} = I_1 \cdot R_3 = 2 \cdot 2 = 4V$$
$$E_{eq_{I_2}} = I_2 R_4 = 2 \cdot 2 = 4V$$

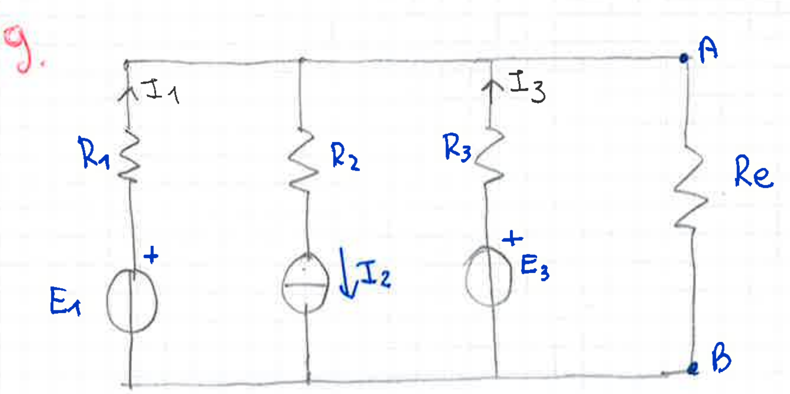
$$E_{eq_I} = E_{eq_{I_1}} + E_{eq_{I_2}} = 8V$$
$$R_{eq}' = R_3 + R_4 = 4V$$



$$R_{eq_T} = \frac{R_{eq} \cdot R_{eq}'}{R_{eq} + R_{eq}'} = \frac{4 \cdot 4}{8} = 2\Omega$$

$$V_{AB} = \frac{-\frac{E_{eq_E}}{R_{eq}} - \frac{E_{eq_I}}{R_{eq}'}}{\frac{1}{R_{eq}} + \frac{1}{R_{eq}'}} = \frac{-\frac{2}{4} - \frac{8}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{-\frac{1}{2} - 2}{\frac{2}{4}} = \frac{\frac{-2-2}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{4}{2}}{\frac{1}{2}} = -4V$$

9.



$E_1 = 1V$
$E_3 = 3V$
$I_2 = 1\,A$
$R_1 = 1\Omega$
$R_2 = 10\Omega$
$R_3 = 3\Omega$
$Re = 2\Omega$

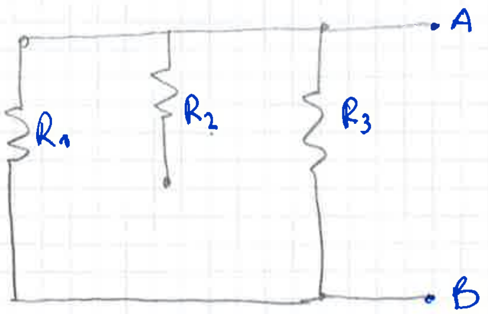
Determinare:
a) eq. thevenin in AB.
b) corrente in Re

R_2 non si considera

$$V_{AB} = \frac{I_1 - I_2 + I_3}{\frac{1}{R_1} + \cancel{\frac{1}{R_2}} + \frac{1}{R_3}} = \frac{\frac{E_1}{R_1} - I_2 + \frac{E_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \cancel{\frac{1}{R_2}} + \frac{1}{R_3}} =$$

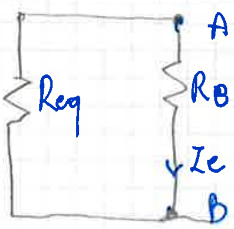
$$= \frac{\cancel{\frac{1V}{1\Omega}} - \cancel{1A} + \frac{3V}{3\Omega}}{\frac{1}{1\Omega} + \cancel{\frac{1}{10\Omega}} + \frac{1}{3\Omega}} = \frac{1\,A}{1{,}33\,\Omega^{-1}} = 0{,}75\,V$$

Passiviamo i generatori per calcolare Req



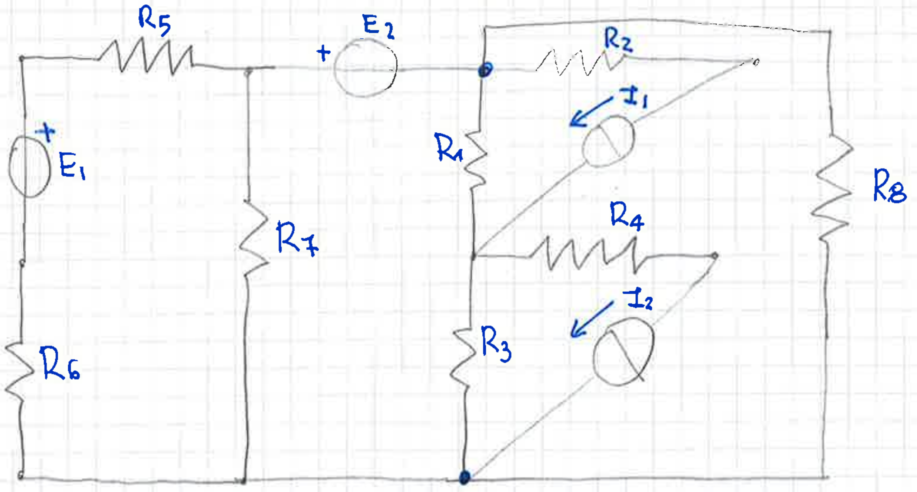
Passivando i generatori di E diventano c-c.
Passivando i generatori di I diventano morsetti aperti.

$$Req = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} = \frac{3}{4} = 0{,}75\,\Omega$$



$$Ie = \frac{V_{AB}}{Re + Req} = \frac{0{,}75}{2{,}75} \approx 0{,}27\,A$$

11.



$R_1 = 2\,\Omega$
$R_2 = 3\,\Omega$
$R_3 = 4\,\Omega$
$R_4 = 2\,\Omega$
$R_5 = 1\,\Omega$
$R_6 = 8\,\Omega$
$R_7 = 2{,}25\,\Omega$
$R_8 = 5\,\Omega$
$E_1 = 10\,V$
$E_2 = 5\,V$
$I_1 = 2\,A$
$I_2 = 1\,A$

Determinare I_{R7}?

$$I_4 = \frac{V_4}{R_4} = \frac{10\,V}{2\,\Omega} = 5\,A$$

$$I_4 + I_5 - I_3 = 0$$

$$I_3 = I_4 + I_5 = 5\,A + 2\,A = 7\,A$$

$$V_3 = R_3 I_3 = 1\,\Omega \cdot 7\,A = 7\,V$$

$$V_3 + E_2 + V_4 = V_2$$

$$V_2 = V_3 + E_2 + V_4 = 7\,V + 10\,V + 10\,V = 27\,V$$

$$I_2 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{27\,V}{10\,\Omega} = 2{,}7\,A$$

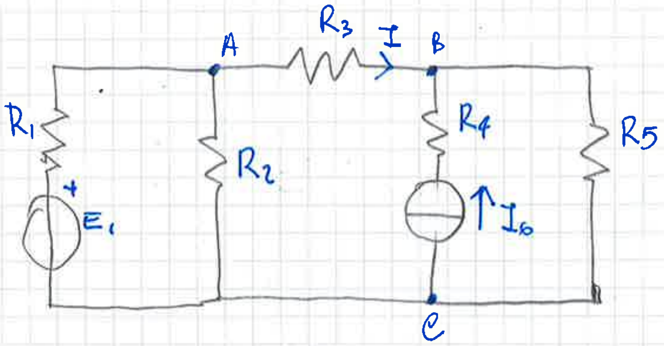
$$I_1 = I_2 + I_4 + I_5 = 2{,}7\,A + 5\,A + 2\,A = 9{,}7\,A$$

$$V_1 = R_1 I_1 = 2\,\Omega \cdot 9{,}7\,A = 19{,}4\,V$$

$$V_2 + V_1 - E_1 = 0$$

$$E_1 = V_2 + V_1 = 27 + 19{,}4 = 46{,}4\,V$$

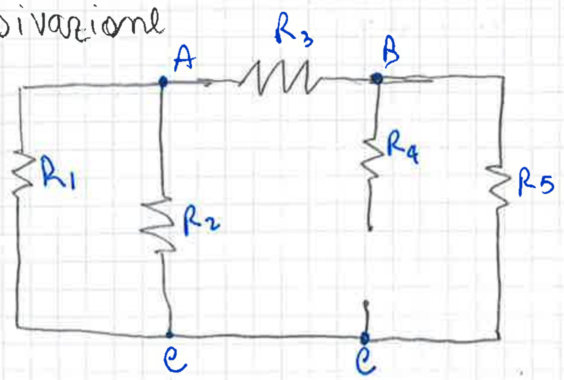
1.9



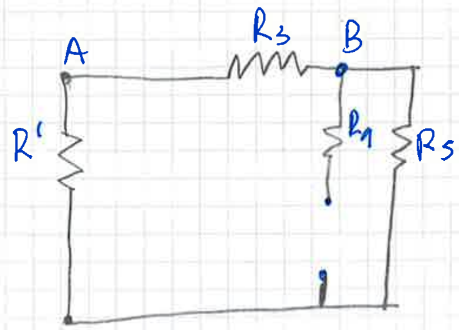
$R_1 = 20\,\Omega$
$R_2 = 20\,\Omega$
$R_3 = 5\,\Omega$
$R_4 = 1\,\Omega$
$R_5 = 10\,\Omega$

$E = 20\,V$
$I = ?$

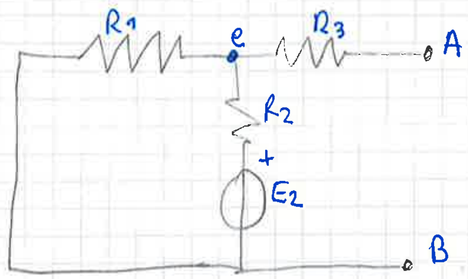
Passivazione



=



1.10



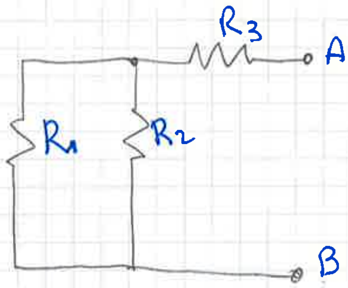
$R_1 = 2\,\Omega$

$R_2 = 1\,\Omega$

$R_3 = 4\,\Omega$

$E_2 = 15\,V$

Calcolare V_{AB}

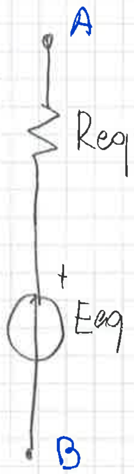


$$R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_3 =$$

$$= \frac{2 \cdot 1}{3} + 4 = \frac{2}{3} + 4 = \frac{14}{3}\,\Omega = 4{,}67\,\Omega$$

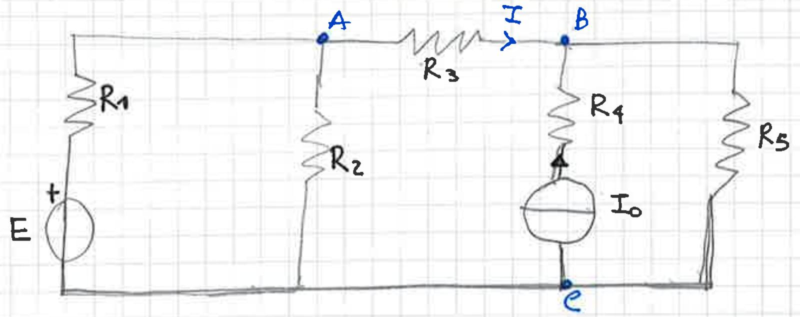
Calcolo ~~con~~ la tensione a vuoto E_{eq}

$$E_{eq} = E \frac{R_1}{R_2 + R_1} = \cancel{15}^{5} \cdot \frac{2}{\cancel{3}} = 10\,V$$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 210

1.9



$R_1 = 20\,\Omega$

$R_2 = 20\,\Omega$

$R_3 = 5\,\Omega$

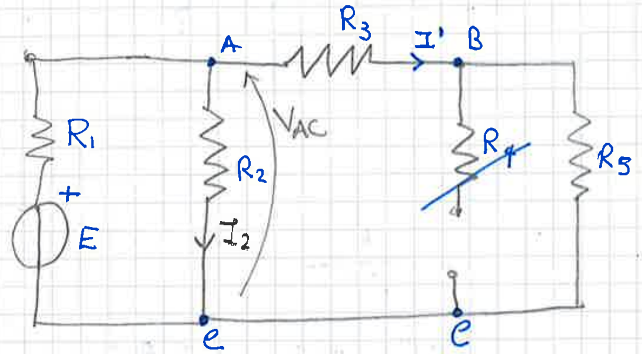
$R_4 = 1\,\Omega$

$R_5 = 10\,\Omega$

$E = 20\,V$

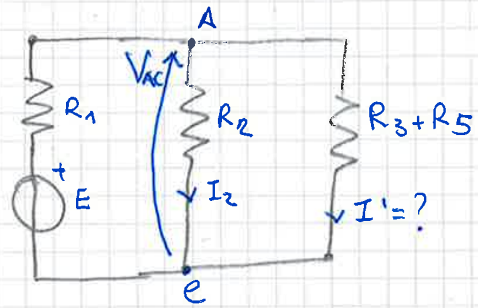
$I_o = 2\,A$

Calcolare la I



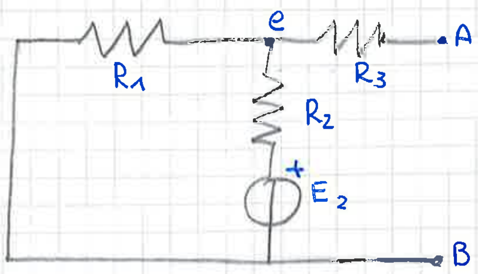
$$V_{AC} = \frac{\frac{E}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3+R_5}} = \frac{\frac{20\,V}{20\,\Omega}}{\frac{1}{20\,\Omega} + \frac{1}{20\,\Omega} + \frac{1}{15\,\Omega}} = \frac{1\,A}{0{,}1667\,\Omega^{-1}} = 6\,V$$

$$I_2 = \frac{V_{AC}}{R_2} = \frac{6\,V}{20\,\Omega} = 0{,}3\,A$$



$$\boxed{I' = \frac{V_{AC}}{R_3+R_5} = \frac{6\,V}{15\,\Omega} = 0{,}4\,A}$$

1.10



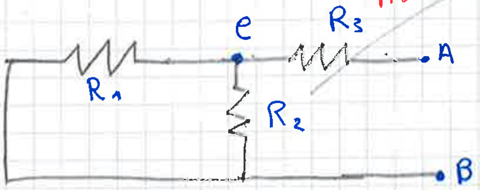
$R_1 = 2\Omega$

$R_2 = 1\Omega$

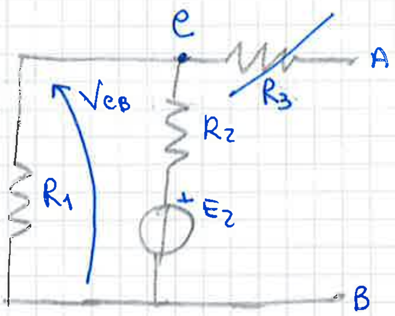
$R_3 = 4\Omega$

$E_2 = 15V$

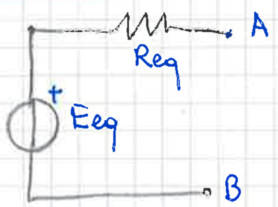
non è attraversata da corrente (non si considera)



$$R_{eq} = R_3 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 4\Omega + \frac{2 \cdot 1}{3} = 4,7\Omega$$



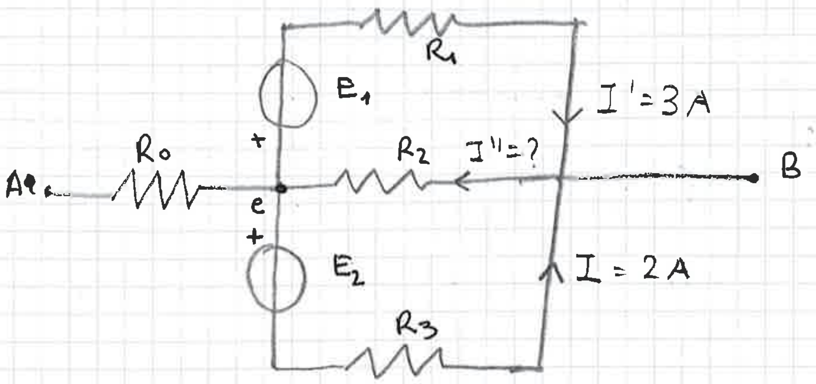
$$V_{CB} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot E_2 = \frac{2}{\cancel{3}} \cdot \cancel{15}^{5} V = 10V$$



$R_{eq} = 4,7\Omega$

$E_{eq} = 10V$

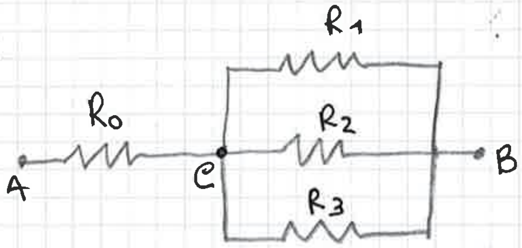
1.12



$R_1 = 2\,\Omega$
$R_2 = 3\,\Omega$
$R_3 = 4\,\Omega$
$E_1 = 6\,V$
$E_2 = 8\,V$
$R_0 = 2\,\Omega$

a) fem equivalente
b) Req

(b) Req:



$$R_{eq} = R_0 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = 2\,\Omega + \frac{1}{\frac{1}{2\,\Omega} + \frac{1}{3\,\Omega} + \frac{1}{4\,\Omega}} = 2{,}92\,\Omega$$

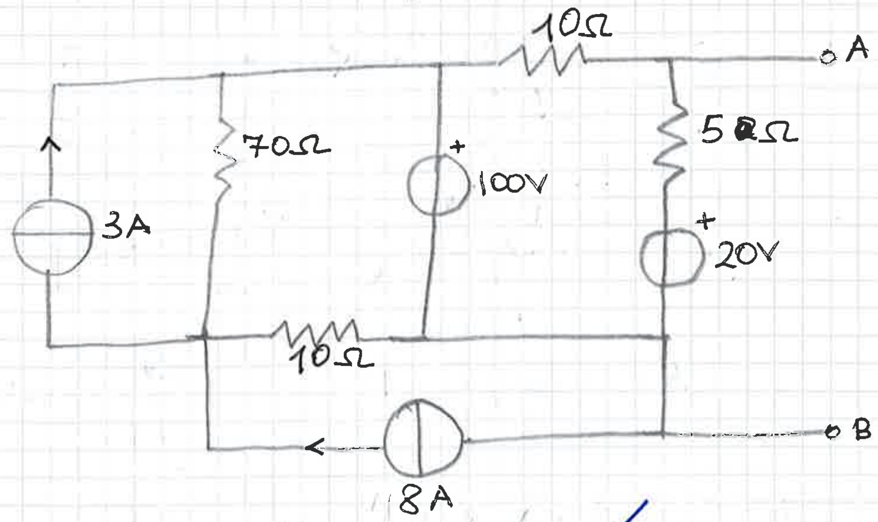
(a)

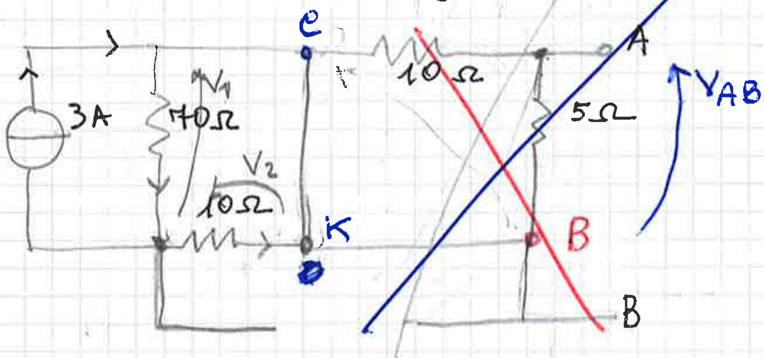
$$I'' = I' + I = 3 + 2 = 5\,A$$

$$V_{BC} = \frac{I''}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{5\,A}{1{,}083\,\Omega^{-1}} = 4{,}616\,V$$

$$V_{AB} = V_{BC} + \cancel{V_{AC}} = V_{BC} = 4{,}616\,V = E_{eq}$$

114



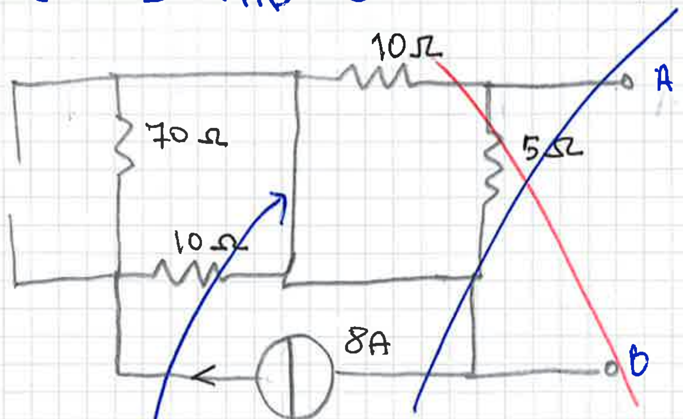


$C \equiv K$ (stesso nodo)

$$R' = \frac{70 \cdot 10}{80} = 8{,}75\ \Omega$$

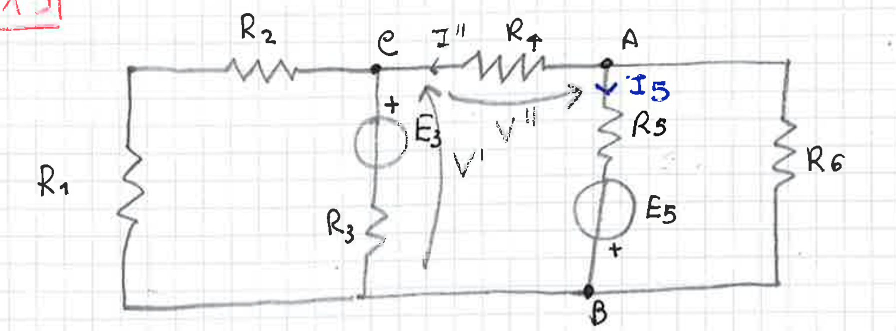
$$V_1 = R' \cdot I = 8{,}75\,\Omega \cdot 3A = 26{,}25\,V$$

Ma essendoci un cortocircuito il resto del circuito si elimina $\Rightarrow V_{AB} = 0$



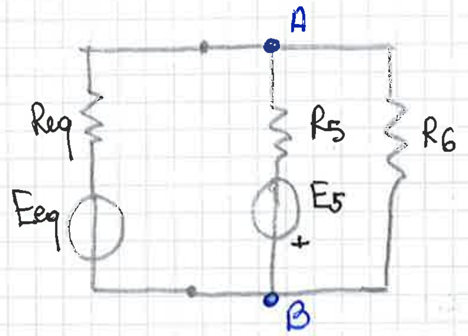
Stesso discorso

1.15



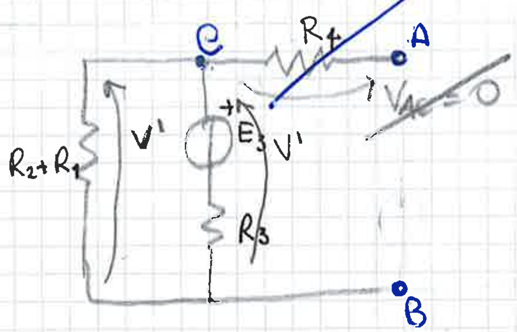
$R_1 = 12\,\Omega$
$R_2 = 3\,\Omega$
$R_3 = 3\,\Omega$
$R_4 = 4\,\Omega$
$R_5 = 2\,\Omega$
$R_6 = 6\,\Omega$
$E_3 = 15\,V$
$E_5 = 5\,V$

Calcolare I_5



$$R_{eq} = \frac{R_{12} \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_4 = \frac{15 \cdot 3}{18} + 4 = 6{,}5\,\Omega$$

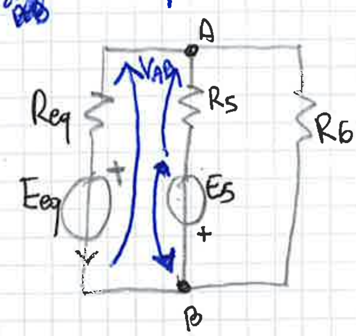
THEVENIN



$\Rightarrow$

$$V' = \frac{R_2 + R_1}{R_2 + R_1 + R_3} E_3 = \frac{15}{18} \cdot 15V = 12{,}5\,V$$

$= E_{eq} = V'' = 12{,}5\,V$



$$V_{AB} = \frac{\frac{E_{eq}}{R_{eq}} - \frac{E_5}{R_5}}{\frac{1}{R_{eq}} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}} = \frac{\frac{12{,}5}{6{,}5} - \frac{5}{2}}{\frac{1}{6{,}5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}} = \frac{-0{,}577}{0{,}8205} =$$

$$= -0{,}703\,V$$

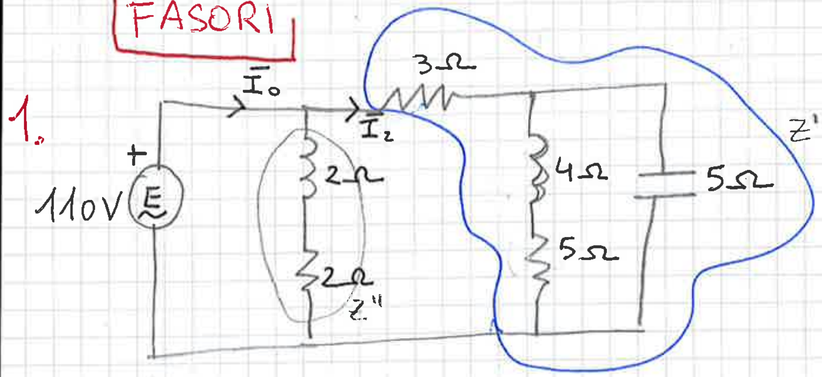
$V_{AB} + E_5 - V_5 = 0$

$V_{AB} + E_5 - R_5 I_5 = 0$

$$I_5 = \frac{V_{AB} + E_5}{R_5} = \frac{-0{,}703 + 5}{2} = 2{,}15\,A$$

FASORI

1.



• determinare $\bar{I}_0$ e $\bar{I}_2$

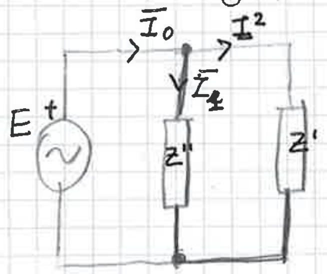
$$\bar{Z}' = \frac{(5+4j)\cdot(-5j)}{5-j} + 3 = \frac{-25j-20j^2}{5-j} + 3 = \frac{20-25j}{5-j} + 3 =$$

$$= \frac{20-25j+15-3j}{5-j} = \frac{(35-28j)}{5-j}\cdot\frac{(5+j)}{(5+j)} = \frac{175+35j-140j+28}{25-j^2} =$$

$$= \frac{203-105j}{26} = 7{,}8-4{,}04j \qquad |Z'| = 8{,}78$$

$$\bar{Z}' = 8{,}78\, e^{-27{,}38j}$$

$$\bar{Z}'' = 2+2j \qquad |Z''| = 2{,}83 \qquad \bar{Z}'' = 2{,}83\, e^{+45j}$$



$$\bar{I}_2 = \frac{E}{\bar{Z}'} = \frac{110}{8{,}78} e^{27{,}38j} = 12{,}53\, e^{27{,}38j} \quad (A)$$

$$I_1 = \frac{E}{\bar{Z}''} = \frac{110}{2{,}83} e^{-45j} = 38{,}67\, e^{-45j} \quad (A)$$

$$\bar{I}_0 = \bar{I}_2 + \bar{I}_1 = 110\,V\left(\frac{1}{7{,}8-4{,}04j} + \frac{1}{2+2j}\right) =$$

$$= 110\left(\frac{2+2j+7{,}8-4{,}04j}{15{,}6+15{,}6j-8{,}08j-8{,}08j^2}\right) = 110\left(\frac{9{,}8-2{,}02j}{23{,}68+7{,}52j}\right) =$$

$$= 110\left(\frac{(9{,}8-2{,}02j)\,(23{,}68-7{,}52j)}{23{,}68^2+7{,}52^2}\right) = 110\left(\frac{232{,}06-73{,}7j-47{,}8j+15{,}19j^2}{617{,}3}\right) =$$

$\bar{V}_1 = \bar{I}_0 \; \bar{Z}_0 = (10 + j2)(8 + 4j) = 80 + 40j + 16j + 8j^2 =$

$= 56j + 72 \quad (V)$

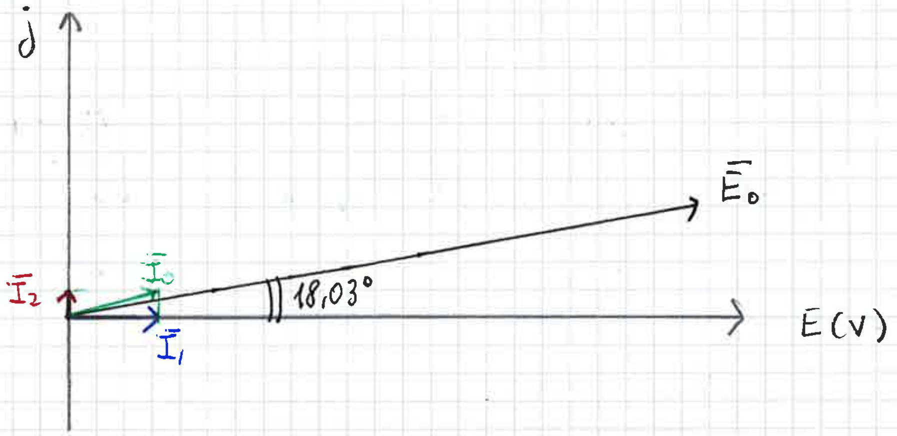
$\bar{E}_0 = V_{AB} + \bar{V}_1 = 100\,V + 56j + 72 = 172 + 56j$

$\bar{E}_0 = 180{,}9\, e^{18{,}03j}$

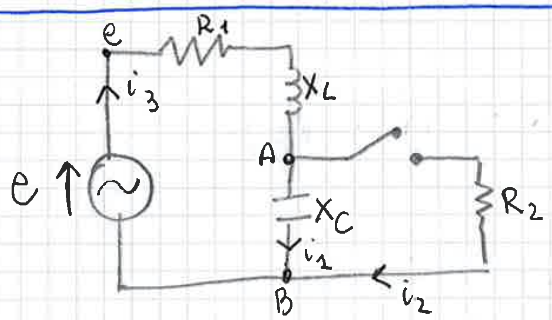
$\bar{I}_0 = 10 + 2j \qquad \bar{I}_0 = 10{,}2\, e^{11{,}3j}$

$\bar{I}_1 = 10\,A$

$\bar{I}_2 = 2j$



3.



$R_1 = 5\,\Omega$

$R_2 = 10\,\Omega$

$X_L = 5\,\Omega$

$X_C = 10\,\Omega$

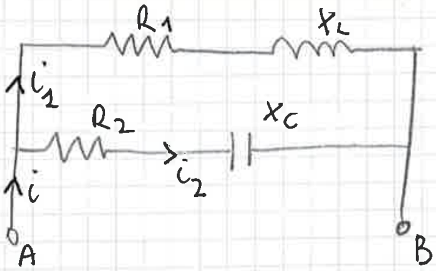
$e(t) = 200 \operatorname{sen} \omega t$

$e(t) = E_M \operatorname{sen} \omega t$

$E_M = \sqrt{2}\, E \qquad$ E: valore efficace

$E = \dfrac{E_M}{\sqrt{2}} = \dfrac{200}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{200\sqrt{2}}{2} = 100\sqrt{2}\ V$

4.



$R_1 = 3\Omega$

$R_2 = 1\Omega$

$X_C = 1\Omega$

$X_L = 4\Omega$

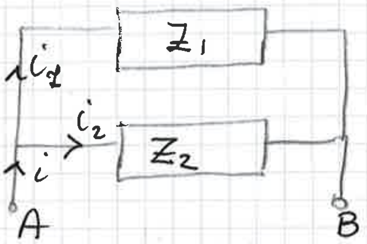
$i(t) = 10\sqrt{2}\,\sin(\omega t + \frac{\pi}{4})$

$i(t) = I_M \sin(\omega t + \frac{\pi}{4})$

• calcolare I_2

$I_M = 10\sqrt{2}$ A

$I_M = I\sqrt{2} \Rightarrow I = \frac{I_M}{\sqrt{2}} = \frac{10\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}} = 10$ A



$\overline{Z}_1 = R_1 + jX_L = 3 + j4 \quad (\Omega)$

$\overline{Z}_2 = R_2 + (-jX_C) = 1 - j1 = 1 - j \quad (\Omega)$

$16{,}26° = 0{,}28\,\text{rad}$

$\overline{I}_2 = \overline{I} \cdot \frac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2} = 10 \cdot \frac{3 + j4}{4 + 3j} =$

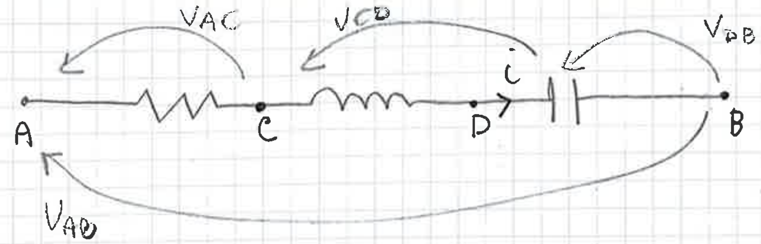
$= 10 \cdot \frac{(3 + j4)(4 - 3j)}{25} = \frac{2}{5}(12 - 9j + 16j - 12j^2) =$

$= \frac{2}{5}(24 + 7j) = 9{,}6 + 2{,}8j = 10\,e^{16{,}26} \quad (A)$

$I_2 = 10\sqrt{2}\,(\sin \omega t + 0{,}28 + \frac{\pi}{4})$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 210

5.



$R = 2\,\Omega$
$L = 0{,}3\,H$
$C = 40\,\mu F$
$V_{AB} = 110\,V$
$f = 50\,Hz$

$$\omega = 2\pi f = 100\pi \left[\frac{1}{s}\right] = 314{,}16\ s^{-1}$$

$$X_L = \omega L = 314{,}16\ \frac{1}{s} \cdot 0{,}3\ H = 94{,}25\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314{,}16\ \frac{1}{s} \cdot 40\ 10^{-6}\,F} = 79{,}58\ \Omega$$

$$I = \frac{V_{AB}}{R + (X_L - X_C)j} = \frac{110\ V}{2 + (94{,}25 - 79{,}58)} = \frac{110\ V}{2 + 14{,}97j} =$$

$$= \frac{110\ (2 - 14{,}97j)}{228} = 0{,}96 - 7{,}2j = 7{,}28\, e^{-82{,}4}\ (A)$$

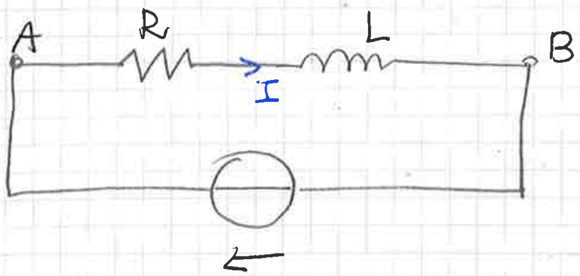
$$|I| = 7{,}28\ (A)$$

$$V_{AC} = \frac{V_{AB} \cdot R}{|Z|} = \frac{110 \cdot 2\,\Omega}{15{,}09} = 14{,}58\ (V)$$

$$V_{CD} = V_{AB} \cdot \frac{94{,}25}{15{,}09} = 110\ \frac{94{,}25}{15{,}09} = 687\ (V)$$

$$V_{DB} = V_{AB} \cdot \frac{79{,}58}{15{,}09} = 580\ (V)$$

6.



$R = 200\ \Omega$

$L = 78\ mH$

$V_{AB} = 4\ V$

$f = 2000\ Hz$

∘ φ di sfasamento di I

$$\omega = 2\pi f = 4000\,\pi\ \left[\frac{1}{s}\right]$$

$$X_L = \omega L = 4000\,\pi \cdot 78 \cdot 10^{-3} = 979{,}7\ \Omega \simeq 980\ \Omega$$

$$\bar{Z} = 200 + j\,979{,}7$$

$$I = \frac{V_{AB}}{\bar{Z}} = \frac{4\,(200 - j\,979{,}7)}{200 + j\,979{,}7} = \frac{800 - 3918{,}8\,j}{1000204} =$$

$$= 0{,}00079 - 0{,}00392\,j = 3{,}99\ 10^{-3}\, e^{-78{,}6°}$$

$$\boxed{\varphi = -78{,}6° \text{ in ritardo}}$$

∘ capacità da disporre in serie nel circuito per riportare in fase la corrente?

$$X_C = -980\ \Omega$$

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} \Rightarrow C = -\frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{4000\,\pi \cdot 980\,\Omega} =$$

$$= 8{,}1 \cdot 10^{-8}\ F$$

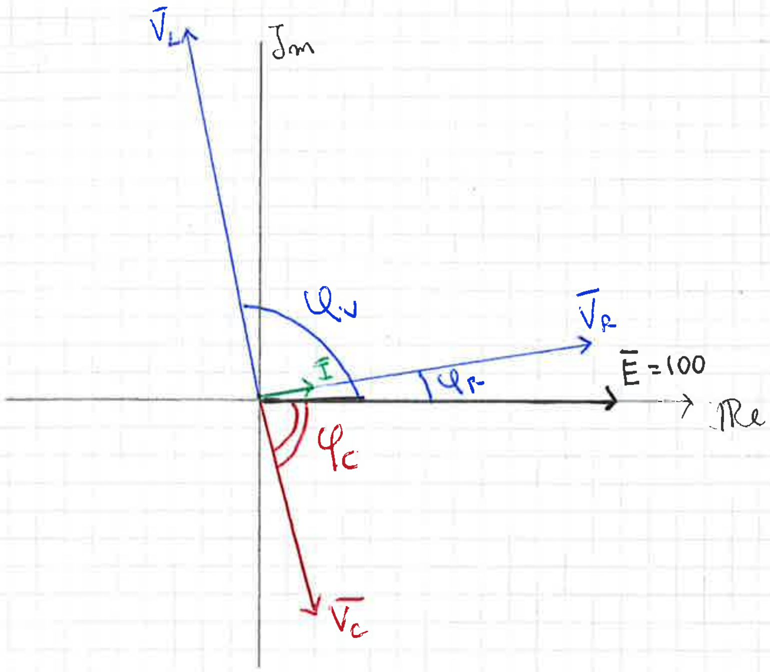
∘ capacità disposta in parallelo per portare in fase

$$\boxed{X_C = \frac{V^2}{Q_r}}$$

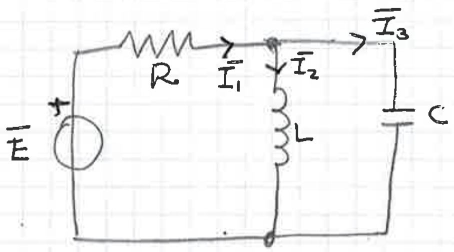
$$Q = VI\sin\varphi = -0{,}0156$$

$$-\frac{1}{\omega C} = \frac{V^2}{Q} \qquad C = -\frac{1}{\omega}\frac{Q}{V^2} = +\frac{0{,}0156}{4000\,\pi\ 16} = 77{,}6 \cdot 10^{-9}\ F =$$

$$= 77{,}6\ \mu F$$



8.



$E = 100\,V$
$R = 50\,\Omega$
$L = 0{,}05\,H$
$C = 10\,\mu F$
$f = 50\,Hz$ $\qquad \omega = 314\,s^{-1}$

$X_L = \omega L = 314\,s^{-1} \cdot 0{,}05\,H = 15{,}7\,\Omega$

$X_C = \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{314 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} = 318{,}5\,\Omega$

$$\boxed{\begin{array}{l} \bar{Z}_L = 15{,}7j = 15{,}7e^{90j} \\ \bar{Z}_C = -318{,}5j = 318{,}5e^{90j} \end{array}}$$

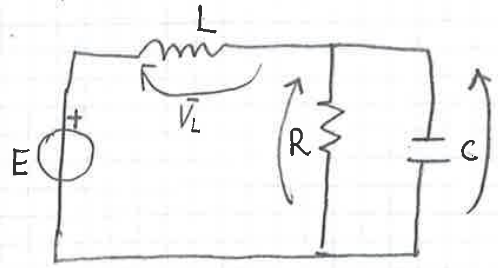
$\bar{Z}_{LC} = \dfrac{15{,}7j\,(-318{,}5j)}{15{,}7j - 318{,}5j} = \dfrac{-5000{,}45\,j^2}{-302{,}8j} = +16{,}51j$

$\bar{Z}_{eq} = R + \bar{Z}_{LC} = 50 + 16{,}5j = 52{,}6\,e^{+18{,}3}\ (\Omega) = \bar{Z}_{tot}$

$\bar{V}_R = \dfrac{E\ R}{\bar{Z}_{eq}} = \dfrac{100 \cdot 50}{50 + 16{,}5j} = \dfrac{5000\,(50 - 16{,}5j)}{2772} =$

$= 1{,}81\,(50 - 16{,}5j) = 90{,}5 - 29{,}7j = 95{,}2\,e^{-18{,}2}\ (V)$

9.

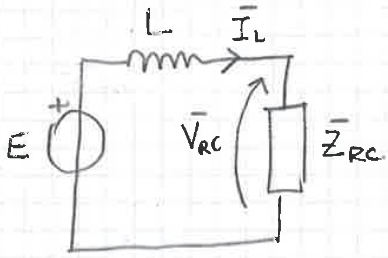


$\acute{E} = 100$ V
$R = 50\ \Omega$
$L = 0{,}1$ H
$C = 10\ \mu F$
$f = 50$ Hz

$$\omega = 2\pi f = 2\pi\, 50\left(\frac{1}{s}\right) = 100\,\pi\left(\frac{1}{s}\right) = 314\ s^{-1}$$

$$X_L = \omega L = 314\ \frac{1}{s} \cdot 0{,}1\ H = 31{,}4\ (\Omega)$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314\ \frac{1}{s} \cdot 10 \cdot 10^{-6}\ F} = 318{,}5\ (\Omega)$$



$$\bar{Z}_{RC} = \frac{R(-X_C j)}{R - X_C j} = -\frac{15925\, j}{50 - 318{,}5 j} \cdot \frac{(50 + 318{,}5 j)}{(50 + 318{,}5 j)} =$$

$$= 48{,}79 - 7{,}66 j = 49{,}39 e^{-8{,}9 j}$$

$$\bar{Z}_{TOT} = \bar{Z}_{RC} + X_L j = 48{,}79 + 23{,}74 j = 54{,}26 e^{25{,}9 j}$$

$$\bar{V}_L = \frac{E\ X_L j}{\bar{Z}_{TOT}} = \frac{100 \cdot (31{,}4\, e^{90 j})}{54{,}26\, e^{25{,}9 j}} = 57{,}87\, e^{+64{,}1 j} \quad (V)\ ✓$$

$$\bar{V}_{RC} = \frac{E \cdot \bar{Z}_{RC}}{\bar{Z}_{TOT}} = \frac{100\ (49{,}39\, e^{-8{,}9 j})}{54{,}26\, e^{25{,}9 j}} = 91{,}02\, e^{-34{,}8 j} \quad (v)\ ✓$$

$$\bar{V}_R = |\bar{V}_C| = \bar{V}_{RC}$$

$$\bar{I}_R = \frac{\bar{V}_{RC}}{R} = \frac{91{,}02\, e^{-34{,}8 j}}{50} = 1{,}82\, e^{-34{,}8 j} \quad (A)\ ✓$$

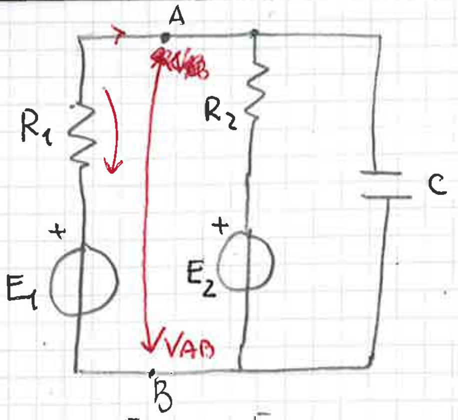
+180°C

$$\bar{I}_C = \frac{\bar{V}_{RC}}{-X_C j} = \frac{91{,}02\, e^{-34{,}8 j}}{-318{,}5\, e^{90 j}} = -0{,}29\, e^{-124{,}8 j} \simeq 0{,}29\, e^{55{,}2 j} \quad (A)\ ✓$$

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{V}_L}{X_L j} = \frac{57{,}87\, e^{64{,}1 j}}{31{,}4\, e^{90 j}} = 1{,}8\, e^{-25{,}9 j} \quad (A)\ ✓$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 210

11.



$E_1 = E_2 = 100V$

$\varphi_1 = 0 \quad \varphi_2 = 90°$

$R_1 = R_2 = 10\,\Omega$

$C = 50\,\mu F$

$f = 50\,Hz$

$\omega = 314\ s^{-1}$

$$V_{AB} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}} = \frac{\frac{100}{10}e^{0j} + \frac{100}{10}e^{90j}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{63{,}69e^{90j}}} =$$

$$= \frac{10 + 10e^{90j}}{0{,}2 - 0{,}016e^{-90j}} = \frac{10 + 10j}{0{,}2 + 0{,}016j} \cdot \frac{(0{,}2 - 0{,}016j)}{(0{,}2 - 0{,}016j)} =$$

$$= \frac{2 - 0{,}16j + 2j - 0{,}16j^2}{0{,}04} = \frac{2{,}16 + 1{,}84j}{0{,}04} = 54 + 46j =$$

$$= 70{,}9\, e^{40{,}4j} \quad (V)$$

$$\bar{V}_{AB} + \bar{V}_{R1} = \bar{E}_1$$

$$\bar{V}_{R1} = \bar{E}_1 - \bar{V}_{AB} = 100 - 54 - 46j = -56 + 46j = 72{,}3e^{-39{,}4j}$$

$$\bar{V}_{AB} + \bar{V}_{R2} = \bar{E}_2$$

$$\bar{V}_{R2} = \bar{E}_2 - \bar{V}_{AB} = 100j - 54 - 46j = -54 + 54j = 76{,}4e^{-45j}$$

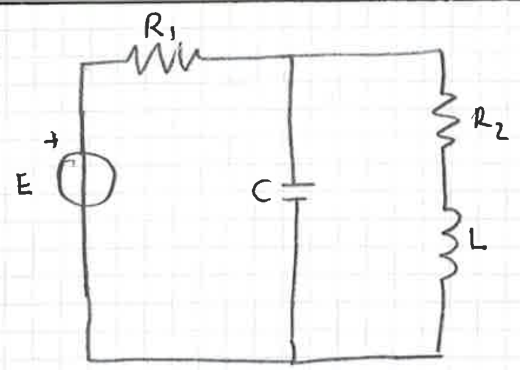
$$\bar{I}_{R1} = \frac{\bar{V}_{R1}}{R_1} = \frac{72{,}3e^{-39{,}4j}}{10} = 7{,}23e^{-39{,}4j} \quad (A)$$

$$\bar{I}_{R2} = \frac{\bar{V}_{R2}}{R_2} = \frac{76{,}4e^{-45j}}{} = 7{,}6e^{-45j} \quad (A)$$

$$\bar{I}_C = \frac{\bar{V}_{AB}}{-X_C j} = \frac{70{,}9e^{40{,}4j}}{-63{,}7e^{90j}} = -1{,}1e^{-49{,}6} = 1{,}1e^{130{,}4} \quad (A)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 210

13.



$E = 230\ V$

$R_1 = 10\ \Omega$

$R_2 = 31\ \Omega$

$L = 0{,}1\ H$

$C = 50\ \mu F$

$f = 50\ Hz \qquad \omega = 314\ s^{-1}$

$$X_L = \omega L = 314 \cdot 0{,}1 = 31{,}4 (\Omega)$$

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{50 \cdot 10^{-6} \cdot 314} = 63{,}7 (\Omega)$$

$$\overline{Z}_{RLC} = \frac{Z_{RL} \cdot (-X_C j)}{Z_{RL} - X_C j} = \frac{(31 + 31{,}4j)(-63{,}7j)}{31 - 32{,}3j} =$$

$$= \frac{44{,}12 e^{+45j} \cdot 63{,}7 e^{-90j}}{44{,}77 e^{-46{,}2}} = 62{,}77\ e^{1{,}2j} \quad (\Omega)$$

$$\overline{Z}_{eq} = \frac{-63{,}7j\ (31 + 31{,}4j)}{}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 210