



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 1943A -

ANNO: 2016

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Samake Martin

MATERIA: Metodi numerici e calcolo scientifico - prof.  
Pieraccini - Berrone

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Introduzione al Calcolo Numerico  
Rappresentazione dei numeri sul calcolatore  
Stabilità e condizionamento

## Introduzione. Rappresentazione di numeri in macchina, condizionamento e stabilità

Stefano Berrone  
Sandra Pieraccini

Politecnico di Torino, Dipartimento di Scienze Matematiche  
stefano.berrone@polito.it  
sandra.pieraccini@polito.it  
<http://calvino.polito.it/~sberrone>,  
<http://calvino.polito.it/~pieraccini>

Metodi Numerici e Calcolo Scientifico

Ultimo aggiornamento: 28 settembre 2015



Stefano Berrone Sandra Pieraccini Introduzione. Rappresentazione di numeri in macchina, condizion

Introduzione al Calcolo Numerico  
Rappresentazione dei numeri sul calcolatore  
Stabilità e condizionamento

### Prerequisiti

È necessario ripassare (almeno) i seguenti argomenti:

- ① Analisi
  - ① Sviluppo di Taylor per funzioni di una variabile
  - ② (utile come complemento) Sviluppo di Taylor per funzioni in più variabili
- ② Geometria
  - ① Algebra lineare
  - ② autovalori



Stefano Berrone Sandra Pieraccini Introduzione. Rappresentazione di numeri in macchina, condizion

Introduzione al Calcolo Numerico  
Rappresentazione dei numeri sul calcolatore  
Stabilità e condizionamento

## Come ottenere MATLAB



<http://www.areait.polito.it>. Clic sul logo MathWorks o su  
"Software per l'Ateno" e seguire le istruzioni per THE MathWorks  
- Total Academic Headcount



Stefano Berrone Sandra Pieraccini

Introduzione. Rappresentazione di numeri in macchina, condizion

Introduzione al Calcolo Numerico  
Rappresentazione dei numeri sul calcolatore  
Stabilità e condizionamento

## Modalità d'esame

L'esame consiste in due prove.

• **Prova scritta:**

- Darà diritto ad un punteggio fino a 25 punti
- Non è possibile consultare alcun tipo di materiale (libri, appunti, tavole...)
- È consentito l'uso di una semplice calcolatrice
- I quesiti possono essere sia esercizi pratici che domande di carattere teorico sull'intero programma svolto

• **Test informatizzato in laboratorio:**

- Darà diritto ad un punteggio fino a 7 punti
- La prova è costituita da un quiz con domande a risposta multipla a cui rispondere con l'uso di MATLAB/OCTAVE, che potrà essere utilizzato durante il test
- Non è possibile consultare alcun tipo di materiale (libri, appunti, tavole...)



Stefano Berrone Sandra Pieraccini

Introduzione. Rappresentazione di numeri in macchina, condizion

## Organizzazione del corso (MNCS)

- 1 Rappresentazione numeri in macchina e conseguenze. Stabilità e condizionamento (capitolo 1).
- 2 Sistemi lineari (capitolo 2, capitolo 3 tranne 3.2.4, 3.2.5, 3.2.6, 3.3.3, 3.3.4)
- 3 Interpolazione (capitolo 5 tranne 5.2.2, 5.4, 5.5, 5.6, 5.8, 5.9, 5.10)
- 4 Quadratura numerica (capitolo 7 paragrafi 7.1, 7.2, 7.7)
- 5 Equazioni non lineari (capitolo 6 tranne 6.2.5, 6.3, 6.4, 6.5)
- 6 Equazioni differenziali ordinarie (capitolo 8 paragrafi 8.1, 8.2)



Il calcolatore rappresenta i numeri in **Floating Point Normalizzata**. Imposto una base di numerazione ( $\beta=10$ ) e scrivo ogni numero reale in modo unico tale da avere né parte intera né zeri dopo la virgola. Metto tutto dopo la  $\odot$

## Il sistema floating point

Per saper interpretare i risultati restituiti da un calcolatore, dobbiamo innanzitutto capire come opera il calcolatore stesso.

Fissiamo la base  $\beta$  di un sistema di numerazione, la rappresentazione floating point (virgola mobile) normalizzata di un numero reale consiste nell'usare una opportuna potenza di  $\beta$  in modo da non avere né parte intera e né zeri dopo la virgola.

### Esempio

Base  $\beta = 10$ :

$$123.4567 \Rightarrow 0. \underbrace{1234567}_{\text{mantissa}} \cdot 10^3 \sim \text{caratteristica}$$

$$0.00789 \Rightarrow 0.789 \cdot 10^{-2}$$

$$0.6 \Rightarrow 0.6 \cdot 10^0$$



**Mantissa**: parte dopo la virgola  
**Caratteristica**: esponente della base

Formalmente,

$$\mathbb{F}(\beta, t, L, U) = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x = \pm 0.d_1 d_2 \dots d_t \cdot \beta^e\}$$

Equivalentemente,

$$\mathbb{F}(\beta, t, L, U) = \{0\} \cup \left\{ x \in \mathbb{R} : x = (-1)^s \sum_{i=1}^t d_i \beta^{-i} \cdot \beta^e \right\}$$

→ somma delle  $d_i$  per la potenza negativa della base

dove  $s$  è un numero intero che rappresenta convenzionalmente il segno ( $s = 0$  per +,  $s = 1$  per -).

↳ così rappresento il segno con un solo bit

Limiti di macchina?  
La mantissa di macchina è compresa tra un max pari a  $t$  cifre tutte uguali a  $\beta - 1$  mentre il minimo è  $0,1$  perché non posso avere  $0$  dopo la virgola

### I limiti della macchina

Iniziamo ad analizzare la mantissa:

$$\beta^{-1} = m_{min} \leq m \leq m_{max} = 1 - \beta^{-t}$$

$$m_{min} = 0.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \dots \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ t-1 & t \end{matrix} = \beta^{-1}$$

$$m_{max} = 0.\begin{matrix} \beta-1 & \beta-1 & \beta-1 & \beta-1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \dots \begin{matrix} \beta-1 & \beta-1 & \beta-1 & \beta-1 \\ t-1 & t \end{matrix} = 1 - \beta^{-t}$$

$m_{min} = \beta^{-1}$        $m_{max} = 1 - \beta^{-t}$

Devo poter approssimare

Introduzione al Calcolo Numerico  
 Rappresentazione dei numeri sul calcolatore  
 Stabilità e condizionamento

**Errori commessi**

Botto via ciò che eccede,  
 tolgo tutte le mantisse  
 fra  $m_1$  e  $m_1 + \beta^{-t}$  e  
 le approssimo a  $\bar{m}_1$ .  
 Così l'errore  $< \beta^{-t}$

• **Troncamento:** tutte le mantisse  $m \in [m_1, m_1 + \beta^{-t})$  vengono approssimate con  $\bar{m} = m_1$ . L'errore commesso è quindi

$$|m - m_1| < \beta^{-t}$$

sempre positivo.

Approssimo a  $m_1$  tutte  
 le mantisse che vedono  
 $m_1$  come la più vicina  
 quindi la metà sx e  
 la metà dx.

• **Arrotondamento:** tutte le mantisse che cadono in  $(m_1 - \frac{1}{2}\beta^{-t}, m_1 + \frac{1}{2}\beta^{-t})$  vengono approssimate con  $m_1$ . In questo modo l'errore sulla mantissa risulta

$$|m - m_1| \leq \frac{1}{2}\beta^{-t}$$

e può essere sia positivo che negativo.

L'errore può essere negativo

Stefano Berrone Sandra Pieraccini | Introduzione. Rappresentazione di numeri in macchina, condizion

Pagina al Contrario

Introduzione al Calcolo Numerico  
 Rappresentazione dei numeri sul calcolatore  
 Stabilità e condizionamento

Tra questi metodi l'**arrotondamento** è sicuramente **più oneroso** dal punto di vista di istruzioni del microprocessore, ma provoca un'errore metà degli altri ed è sicuramente **più conveniente** dal punto di vista dell'accuratezza.

Riassumendo gli errori di approssimazione sulle mantisse risultano:

$$\left\| \begin{array}{l} |\bar{m} - m| < \beta^{-t}, \text{ troncamento,} \\ |\bar{m} - m| \leq \frac{1}{2}\beta^{-t}, \text{ arrotondamento} \end{array} \right\|$$

Stefano Berrone Sandra Pieraccini | Introduzione. Rappresentazione di numeri in macchina, condizion

Arrotondamento  $\begin{cases} + \text{Costoso} \\ + \text{Accurato} \end{cases}$

$$\text{Err}(tronc) = \frac{1}{2} \text{Err}(Arrot)$$

Inserendo la caratteristica si ha che l'errore assoluto di mantissa sarà moltiplicato per  $(\beta^e)$  e maggiorato con  $\beta^e$ . Per l'errore relativo invece devo dividere per  $|x|$  e continuare la maggiorazione  $\Rightarrow$  quindi devo minorare  $|x|$  a denominatore e per farlo faccio

Introduzione al Calcolo Numerico  
Rappresentazione dei numeri sul calcolatore  
Stabilità e condizionamento

Maggiore: trovare una stima per eccesso della quantità.

$$|x| = m\beta^e \geq \beta^{-1}\beta^e$$

L'errore assoluto associato all'approssimazione  $\bar{x}$  vale:

$$|\bar{x} - x| = |\bar{m} - m|\beta^e < \beta^{e-t}, \text{ troncamento,}$$

$$|\bar{x} - x| = |\bar{m} - m|\beta^e \leq \frac{1}{2}\beta^{e-t}, \text{ arrotondamento,}$$

Una volta minorato  $|x|$  posso fare l'errore

relativo maggiorato dove non ho più la caratteristica.

Poiché  $m \geq 0.1000\dots = \beta^{-1}$ , si ha

$$|x| = m\beta^e \geq \beta^{-1}\beta^e$$

e quindi per l'errore relativo

$$\frac{|\bar{x} - x|}{|x|} \leq \frac{\beta^{e-t}}{\beta^{e-1}} < \epsilon_m \equiv \beta^{1-t}, \text{ troncamento,}$$

$$\frac{|\bar{x} - x|}{|x|} \leq \frac{\frac{1}{2}\beta^{e-t}}{\beta^{e-1}} \leq \epsilon_m \equiv \frac{1}{2}\beta^{1-t}, \text{ arrotondamento.}$$

$a \leq b$ : a è maggiorato da b

$a \geq b$ : a è minorato da b

Stefano Berrone Sandra Pieraccini

Introduzione. Rappresentazione di numeri in macchina, condizion

È quindi importante conoscere l'errore del calcolatore.

Si definisce Precisione di Macchina ( $\epsilon_m$ ) e Epsilon di Macchina ( $\epsilon_{ps}$ ).

$$\epsilon_m = \epsilon_{ps}(\text{tronc}) = \frac{1}{2}\epsilon_{ps}(\text{arrotond})$$

$$\epsilon_{ps} = \beta^{1-t}$$

Introduzione al Calcolo Numerico  
Rappresentazione dei numeri sul calcolatore  
Stabilità e condizionamento

La quantità  $\epsilon_{ps} \equiv \beta^{1-t}$  verrà chiamata **epsilon di macchina**.

Con il simbolo  $\epsilon_m$  (o  $\epsilon_{mm}$ ) si indicherà invece la **precisione di macchina**.

La Precisione di Macchina dà la capacità di calcolare e massimare i numeri.

- $\epsilon_m$  è una costante caratteristica dell'aritmetica di macchina in considerazione e rappresenta **la massima precisione relativa di calcolo raggiungibile sul calcolatore** e con il tipo di dati che la implementano.
- Due quantità la cui differenza **relativa** sia minore della **precisione di macchina** sono da considerarsi **indistinguibili** per il calcolatore.
- Non ha senso cercare di determinare approssimazioni con **precisione relativa inferiore alla quantità  $\epsilon_m$** .

Stefano Berrone Sandra Pieraccini

Introduzione. Rappresentazione di numeri in macchina, condizion

x Matlab  $\epsilon_{ps}$  per arrotond =  $\epsilon_m$



**Osservazione (Hidden bit)**

Se  $\beta = 2$  in un'aritmetica floating point normalizzata la prima cifra della mantissa diversa da zero è necessariamente  $d_1 = 1$ . Quindi la cifra non viene memorizzata e viene "guadagnato" un bit. Ne segue che il valore di  $\epsilon_p$  e  $\epsilon_m$  corrisponde ad avere un numero di cifre di mantissa pari a  $t + 1$ .

Limiti per la rappresentazione: L lower Upper

- 1 **Single precision:**  $L = -126, U = 127,$   
 $\epsilon_p = 2^{1-(23+1)} = 2^{-23} \approx 10^{-7};$
- 2 **Double precision:**  $L = -1022, U = 1023,$   
 $\epsilon_p = 2^{1-(52+1)} = 2^{-52} \approx 10^{-16};$   
 $x_{min,denorm} = 2^{-1074} = 2^{-1022-52}, x_{min,norm} = 2^{-1022},$   
 $x_{max,norm} = (1 + (1 - 2^{-52})) \cdot 2^{1023};$
- 3 **Quadruple precision:**  $L = -16382, U = 16383,$   
 $\epsilon_p = 2^{1-(112+1)} = 2^{-112} \approx 10^{-34};$

L ≠ U perché ho un bit in meno che uso per il segno

Se per es ho 8 bit  $\Rightarrow$  la caratteristica  $q^* \in [0+255]$  mentre la caratteristica vera è  $q = q^* - 127 \Rightarrow \underline{-127 < q < 128}$

**Overflow e Underflow**

- 1 **Overflow**: errore dovuto al tentativo di rappresentare numeri con  $e > U$
- 2 **Underflow**: errore dovuto al tentativo di rappresentare numeri con  $e < L$

Esempio

Macchina in base 10, 4 cifre significative, numeri compresi tra L e U.

$$F = \{10, 4, L, U\}$$

$$a = 0,976543 \times 10^3$$

$$b = 0,867421 \times 10^3$$

Lavoro in troncamento

$$fl(a) = 0,9654 \times 10^3$$

$$fl(b) = 0,8674 \times 10^3$$

Ora li sommo

$$fl(a) + fl(b) = 1,7439 \times 10^3 = 0,17439 \times 10^4$$

E rappresento il risultato in macchina

$$fl(fl(a) + fl(b)) = 0,1743 \times 10^4$$

**Osservazione**

Non tutte le proprietà delle operazioni aritmetiche si conservano per le operazioni di macchina. La proprietà commutativa per somma e prodotto si conserva anche per le operazioni di macchina:

$$a \oplus b = b \oplus a, \quad a \otimes b = b \otimes a,$$

Ma non valgono più le seguenti proprietà:

$$a \oplus (b \oplus c) \neq (a \oplus b) \oplus c,$$

$$a \otimes (b \otimes c) \neq (a \otimes b) \otimes c,$$

$$a \otimes (b \oplus c) \neq (a \otimes b) \oplus (a \otimes c),$$

$$(a \otimes b) \oslash b \neq a,$$

$$(a \oslash b) \otimes b \neq a,$$

$$(a \otimes b) \oslash c \neq (a \oslash c) \otimes b.$$



**Osservazione**

Inoltre per le operazioni di macchina può accadere che valga la relazione

$$a \oplus b = fl(a), \quad 0 < |fl(b)| \ll |fl(a)|.$$



**Esempio (Cancellazione 1)**

Si considerino i seguenti numeri:

$$x_1 = 0.19101972 \cdot 10^3, \quad x_2 = 0.19101708 \cdot 10^3$$

e si voglia eseguire l'operazione  $x_1 \ominus x_2$  in un'aritmetica in base  $\beta = 10$ , 6 cifre di mantissa, operante con troncamento ( $\epsilon_m = 10^{-5}$ )

$$fl(x_1) = 0.191019 \cdot 10^3, \quad fl(x_2) = 0.191017 \cdot 10^3.$$

Che errore abbiamo commesso per ora?

$$|fl(x_1) - x_1| = 0.720000 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{|fl(x_1) - x_1|}{|x_1|} = \frac{0.720000 \cdot 10^{-3}}{0.19101972 \cdot 10^3} \approx 0.37692 \cdot 10^{-5} < \epsilon_m$$

Sono numeri molto vicini fra loro  
Hanno stessa covaria e simile mantissa

Errore Relativo per i due  $\Rightarrow$   $\begin{cases} x_1 \Rightarrow 0,37692 \times 10^{-5} < \epsilon_m \\ x_2 = 0,41881 \times 10^{-6} < \epsilon_m \end{cases}$

**Esempio (segue)**

$$\frac{|fl(x_2) - x_2|}{|x_2|} = \frac{0.800000 \cdot 10^{-4}}{0.19101708 \cdot 10^3} \approx 0.41881 \cdot 10^{-6} < \epsilon_m$$

Calcoliamo la differenza in macchina:

$$x_1 \ominus x_2 = 0.000002 \cdot 10^3 = 0.200000 \cdot 10^{-2}$$

Errore commesso? Differenza esatta:

$$x_1 - x_2 = 0.264000 \cdot 10^{-2}$$

Errore relativo:

$$\frac{|(x_1 \ominus x_2) - (x_1 - x_2)|}{|(x_1 - x_2)|} = 0.2424,$$

Per fare errore relativo serve la differenza esatta.

L'errore relativo sulla differenza è del 25%  $\frac{1}{4}$



Introduzione al Calcolo Numerico  
Rappresentazione dei numeri sul calcolatore  
Stabilità e condizionamento

**Osservazione**

Nell'esempio precedente la sottrazione di macchina non introduce alcun errore di approssimazione, ma fornisce il risultato esatto. Quindi la sottrazione non genera problemi in sé, ma amplifica errori di approssimazione già esistenti sugli operandi.

La sottrazione non genera problemi: amplifica errori preesistenti!

Stefano Berrone Sandra Pieraccini Introduzione. Rappresentazione di numeri in macchina, condizionamento

Se possibile evito la cancellazione numerica...

Introduzione al Calcolo Numerico  
Rappresentazione dei numeri sul calcolatore  
Stabilità e condizionamento

Si può evitare la cancellazione numerica? Usare (quando possibile) forme alternative per il calcolo di una espressione.

**Esempio (Cancellazione 2)**

$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad h \text{ piccolo}$$

Sia  $f(x) = \sin(x)$

$$\underbrace{\frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h}}_{\text{Algoritmol}} = \underbrace{\frac{2}{h} \cos \frac{2x_0 + h}{2} \sin \frac{h}{2}}_{\text{Algoritmoll}}$$

**Esempio (Cancellazione: calcolo della varianza)**

$$\text{var}(X) = \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}_{\text{Algoritmol}} = \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}_{\text{Algoritmoll}}$$

Stefano Berrone Sandra Pieraccini Introduzione. Rappresentazione di numeri in macchina, condizionamento

Devo individuare condizionamento e stabilità per controllare l'errore.

Introduzione al Calcolo Numerico  
Rappresentazione dei numeri sul calcolatore  
Stabilità e condizionamento

Condizionamento  
Stabilità

Già solo rappe  
sentate in macchin  
china da errore

Generico problema: assegnato il dato  $d$ , trovare  $x$  tale che

$$x = f(d) \tag{1}$$

Siano:

- $\delta d$  una perturbazione del dato  $d \rightarrow$  dato  $d + \delta d$
- $\bar{x} = f(d + \delta d)$  la soluzione esatta del problema con dato  $d + \delta d$
- $\tilde{x}$  la risposta dell'algoritmo al dato  $d + \delta d$ .

$\bar{x}$ : soluzione esatta per turbata

$\tilde{x}$ : soluzione approssimata per turbata

NB: generalmente  $\bar{x} \neq \tilde{x}$

Stefano Berrone Sandra Pieraccini

Introduzione. Rappresentazione di numeri in macchina, condizion

Condizionamento: quanto  $x \approx \bar{x}$  in  $f(\delta d)$

Stabilità: quanto  $\bar{x}$  è vicino a  $\tilde{x}$

Introduzione al Calcolo Numerico  
Rappresentazione dei numeri sul calcolatore  
Stabilità e condizionamento

Condizionamento  
Stabilità

**Esempio**

Si consideri il problema di trovare la radice quadrata di un numero  $d$  assegnato:

$$x = \sqrt{d}$$

Si consideri il seguente algoritmo molto rudimentale:

$$x = \sqrt{d} \approx \frac{d+1}{2}$$

Sia  $d = 1000$  e  $\delta d = 1$ . Si ha:

- $x = \sqrt{1000}$
- $\bar{x} = \sqrt{d + \delta d} = \sqrt{1001}$
- $\tilde{x} = \frac{d + \delta d + 1}{2} = \frac{1002}{2}$

Stefano Berrone Sandra Pieraccini

Introduzione. Rappresentazione di numeri in macchina, condizion

Condizionamento  $\sqrt{1000} \approx \sqrt{1001}$

Stabilità  $\sqrt{1001} \approx \frac{1002}{2}$

K Numero di Condizionamento

K Piccolo: Bencondizionato

K Grande: Malcondizionato

Introduzione al Calcolo Numerico  
Rappresentazione dei numeri sul calcolatore  
Stabilità e condizionamento

Condizionamento  
Stabilità

**Definizione (Numero di condizionamento)**

Se si ha una relazione del tipo

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq K \frac{\|\delta d\|}{\|d\|}$$

o

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \approx K \frac{\|\delta d\|}{\|d\|}$$

per una qualche costante  $K = K(d)$ , il fattore  $K(d)$  si definisce numero di condizionamento del problema.

Non considero cosa fa la macchina

Più  $K$  è piccolo meglio è perché l'impatto sul risultato è minore

**Definizione (Numero di condizionamento)**

Un problema si dice ben condizionato se  $K(d)$  è piccolo, sarà mal condizionato se  $K(d)$  è grande.

Stefano Berrone Sandra Pieraccini

Introduzione. Rappresentazione di numeri in macchina, condizion

Al meglio  $K \geq 1$  mai  $K < 1$

Quanto è gravoso il condizionamento dipende anche da come valuti i dati: un errore di  $10^{-3}$  in single point ( $10^{-7}$ ) è tante maglie in double point ( $10^{-16}$ ) è meno gravoso

Dipende da Precisione di Macchina, e Bontà dell'Algoritmo

Introduzione al Calcolo Numerico  
Rappresentazione dei numeri sul calcolatore  
Stabilità e condizionamento

Condizionamento  
Stabilità

**Esempio (Condizionamento della somma fra due numeri)**

Consideriamo il problema di calcolare la somma di due numeri

$$x = a + b$$

(i dati sono  $d_1 = a$  e  $d_2 = b$ , la soluzione del problema  $x = a + b$ ).

Ci domandiamo se è un problema ben condizionato.

Siano  $x$  la soluzione esatta,  $\bar{a} = a + \delta a$ ,  $\bar{b} = b + \delta b$ . Quindi

$$x + \delta x = a + \delta a + b + \delta b$$

da cui si ottiene

$$\delta x = \delta a + \delta b$$

Stima assoluta del problema!

Stefano Berrone Sandra Pieraccini

Introduzione. Rappresentazione di numeri in macchina, condizion

Mi chiedo se il problema è ben condizionato e per verificarlo quantifico il condizionamento inserendo una perturbazione ottenendo

$$\delta x = \delta a + \delta b$$



Stabilità: come l'algoritmo è responsabile della propagazione perturbazioni sul risultato.

Introduzione al Calcolo Numerico  
Rappresentazione dei numeri sul calcolatore  
Stabilità e condizionamento

Condizionamento  
Stabilità

Stabilità (ovvero: ruolo dell'algoritmo nella propagazione degli errori)

Il risultato finale di un algoritmo **dipende in maniera fondamentale** da come le perturbazioni, cioè i successivi errori compiuti ad ogni passo, si amplificano o si smorzano durante la risoluzione dei singoli problemi elementari.

**Definizione (intuitiva)**  
Un algoritmo si dice **numericamente stabile** se la successione delle operazioni di macchina non amplifica eccessivamente gli errori di arrotondamento.  
In pratica, tutte le operazioni intermedie e il risultato finale dell'algoritmo devono presentare un **errore relativo controllabile con la precisione di macchina**.

$$\frac{\|\tilde{x} - \bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} \sim \epsilon_m$$

Stefano Berrone Sandra Pieraccini

Introduzione. Rappresentazione di numeri in macchina, condizionamento

L'algoritmo non deve propagare troppo gli errori, se non lo fa allora è Numericamente Stabile!

È stabile se l'errore relativo è confrontabile con  $\epsilon_m$ .

Introduzione al Calcolo Numerico  
Rappresentazione dei numeri sul calcolatore  
Stabilità e condizionamento

Condizionamento  
Stabilità

**Definizione (quantitativa)**  
Se 
$$\frac{\|\tilde{x} - \bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} \simeq \epsilon_m$$
 l'algoritmo si dice stabile

Posso avere algoritmi più o meno stabili.

Partendo dagli stessi dati si possono avere algoritmi in cui l'errore finale è dell'ordine della precisione di macchina (stabili), altri in cui ciò non avviene (instabili).

L'algoritmo I dell'esempio Cancellazione 2 è **instabile** perché l'errore finale non è controllabile in termini della sola precisione di macchina, mentre l'algoritmo II genera un'errore controllabile con  $\epsilon_m$ , quindi è **stabile**.

Stefano Berrone Sandra Pieraccini

Introduzione. Rappresentazione di numeri in macchina, condizionamento

Studio prima il condizionamento, poi la stabilità e spero che sia ben condizionato e numericamente stabile

= Sistemi Lineari =

Richiami di algebra lineare  
 Condizionamento di un sistema lineare  
 Metodi diretti  
 Metodi iterativi

### Matrici con strutture particolari

Matrice diagonale:  $a_{ij} = 0$  se  $i \neq j$

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

Matrice triangolare:  $a_{ij} = 0$  se  $i > j$  (superiore) o  $a_{ij} = 0$  se  $i < j$  (inferiore)

$$A = \begin{pmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 \\ x & x & x & x \end{pmatrix}$$

Stefano Berrone Sandra Pieraccini Metodi numerici per la risoluzione di Sistemi Lineari

*D* diagonale è invertibile se  $d_{ii} \neq 0, \forall i$

Richiami di algebra lineare  
 Condizionamento di un sistema lineare  
 Metodi diretti  
 Metodi iterativi

### Alcune proprietà utili delle matrici diagonali

D diagonale invertibile se  $d_{ij} \neq 0 \forall i$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{d_{nn}} \end{pmatrix}$$

A qualsiasi, D diagonale: moltiplicazione di A a sinistra per D riscalda le righe; a destra riscalda le colonne:

$$DA = \begin{pmatrix} d_{11}a_{11} & d_{11}a_{12} & \dots & d_{11}a_{1n} \\ d_{22}a_{21} & d_{22}a_{22} & \dots & d_{22}a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{nn}a_{n1} & d_{nn}a_{n2} & \dots & d_{nn}a_{nn} \end{pmatrix} \quad AD = \begin{pmatrix} d_{11}a_{11} & d_{22}a_{12} & \dots & d_{nn}a_{1n} \\ d_{11}a_{21} & d_{22}a_{22} & \dots & d_{nn}a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{11}a_{n1} & d_{22}a_{n2} & \dots & d_{nn}a_{nn} \end{pmatrix}$$

Stefano Berrone Sandra Pieraccini Metodi numerici per la risoluzione di Sistemi Lineari

Devo poter misurare quantità tra vettori o matrici.

Richiami di algebra lineare  
Condizionamento di un sistema lineare  
Metodi diretti  
Metodi iterativi

**Misurare gli errori: norme di vettori e matrici**

**Definizione**  
Norma di vettore (matrice) è una funzione  $\|\cdot\| : V \mapsto \mathbb{R}$  ( $V = \mathbb{R}^n$  per vettori,  $V = \mathbb{R}^{n \times n}$  per matrici) tale che

- 1  $\|x\| \geq 0 \forall x \in V; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- 2  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- 3  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \forall x, y \in V$  (dis. triangolare)

**Osservazione**  
Per le norme di matrice si chiede anche

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

(submoltiplicatività)

Proprietà Norme di Vettori e Matrici

$\|x\| > 0$

$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Inoltre solo per le Matrici vale

$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Per un vettore ho diversi modi per calcolare la norma

Norme di Vettore

Norme di vettore più usate:

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$  (norma 1)
- $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$  (norma euclidea)
- $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$  (norma del massimo)

Sono diverse ma cmq stesso ordine di grand.

**Esempio**  
 $x = (-3, 4, -5)^T$

$$\|x\|_1 = 12, \quad \|x\|_2 = \sqrt{50}, \quad \|x\|_\infty = 5$$

"Cambiando il modo di misurare cambio la misura dell'oggetto"

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$

$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$

Norma di Vettore e norma di Matrice si dicono  
Compatibili se  $\|Ax\|_v \leq \|A\|_M \|x\|_v$

Uso la stessa norma x vettore e matrice

Richiami di algebra lineare  
Condizionamento di un sistema lineare  
Metodi diretti  
Metodi iterativi

**Proprietà (compatibilità)**  
 $\|\cdot\|_M$  e  $\|\cdot\|_v$  sono dette compatibili se  
$$\|Ax\|_v \leq \|A\|_M \|x\|_v \quad \forall A, x$$

Simile a  
submoltiplica-  
tività

**Osservazione**  
Una norma naturale è sempre compatibile per costruzione con la norma di vettore che l'ha indotta:  
$$\frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} \leq \sup \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} \|A\|_M \Rightarrow \|Ax\|_v \leq \|A\|_M \|x\|_v$$

Stefano Berrone Sandra Pieraccini      Metodi numerici per la risoluzione di Sistemi Lineari

Studio il Condizionamento di Sistemi Lineari, noti A e b, per tur-  
bando il vettore b (si ottiene lo stesso risultato perturbando A  
ma è più complesso). Si ha quindi  $b + \delta b$  con relativa  
soluzione  $\bar{x}$  e  $\delta x = \bar{x} - x$ .  
Devo quindi stimare l'errore relativo in f (per turbazione).

Richiami di algebra lineare  
Condizionamento di un sistema lineare  
Metodi diretti  
Metodi iterativi

**Numero di condizionamento**

Perturbiamo  $b \rightarrow b + \delta b$  (per semplicità no  $\delta A$ )

$Ax = b \rightarrow A\bar{x} = b + \delta b$

Sia  $\delta x = \bar{x} - x$

$A(x + \delta x) = b + \delta b$

$Ax + A\delta x = b + \delta b$

$A\delta x = \delta b \Rightarrow \delta x = A^{-1}\delta b$

(formalmente!)

Stefano Berrone Sandra Pieraccini      Metodi numerici per la risoluzione di Sistemi Lineari

Esplicito  $\delta x = A^{-1}\delta b$  facendo formalmente  $A^{-1}$ : non la faccio  
veramente perché trovare  $A^{-1}$  costa molto. Posso farlo sempre  
xk ho supposto problema ben posto  $\Rightarrow A$  non singolare  $\Rightarrow \exists A^{-1}$

Posso scrivere la soluzione in forma di sistema lineare e osservare la procedura in cascata.

Richiami di algebra lineare Condizionamento di un sistema lineare Metodi diretti Metodi Iterativi	Problemi triangolari Eliminazione Gaussiana Fattorizzazione LU Pivoting
--	--

Esplicitando le equazioni:

$$\begin{cases} l_{11}y_1 & = b_1, \\ l_{21}y_1 + l_{22}y_2 & = b_2, \\ \vdots & \\ l_{n1}y_1 + l_{n2}y_2 + \dots + l_{nn}y_n & = b_n. \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_1 = b_1/l_{11}$$

$$\Rightarrow y_2 = (b_2 - l_{21}y_1)/l_{22}$$

$$\Rightarrow y_i = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}y_j)/l_{ii}$$

ecco perché  $l_{ii} \neq 0$

Stefano Berrone Sandra Pieraccini	Metodi numerici per la risoluzione di Sistemi Lineari
-----------------------------------	---

### Forma Compatta per la i-esima Soluzione

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j}{l_{ii}}$$

Richiami di algebra lineare Condizionamento di un sistema lineare Metodi diretti Metodi Iterativi	Problemi triangolari Eliminazione Gaussiana Fattorizzazione LU Pivoting
--	--

Metodo di sostituzione in avanti (o forward substitution):

```

for i=1:n
    y(i)=b(i);
    for j=1:i-1
        y(i)=y(i)-L(i,j)*y(j);
    end
    y(i)=y(i)/L(i,i);
end
    
```

Implemento la forma con un ciclo for per  $\Sigma$

Un'alternativa che sfrutta la capacità di MATLAB di operare direttamente sui vettori è la seguente:

```

y(1) =b(1)/L(1,1);
for i=2:n
    y(i)=(b(i)-L(i,1:i-1)*y(1:i-1))/L(i,i);
end
    
```

Alternativa più efficiente sfruttando le operazioni sui vettori

Stefano Berrone Sandra Pieraccini	Metodi numerici per la risoluzione di Sistemi Lineari
-----------------------------------	---

Si osserva che  $\sum l_{ij} y_j$  è un prodotto scalare  $\Rightarrow$  prodotto righe della matrice per colonna del vettore  $y$ .

Come prima ho due codici possibili, uno più efficace

Richiami di algebra lineare Condizionamento di un sistema lineare <b>Metodi diretti</b> Metodi iterativi	Problemi triangolari Eliminazione Gaussiana Fattorizzazione LU Pivoting
---	--

Metodo di sostituzione all'indietro (o backward substitution):

```

for i=n:-1:1
    x(i)=y(i);
    for j=i+1:n
        x(i)=x(i)-U(i,j)*x(j);
    end
    x(i)=x(i)/U(i,i);
end
    
```

Sfruttando le funzioni ottimizzate della libreria BLAS:

```

x(n)=y(n)/U(n,n);
for i=n-1:-1:1
    x(i)=(y(i)-U(i,i+1:n)*x(i+1:n))/U(i,i);
end
    
```

Stefano Berrone Sandra Pieraccini	Metodi numerici per la risoluzione di Sistemi Lineari
-----------------------------------	---

## Eliminazione Gaussiana

Come risolvo un sistema qualunque? Posso trasformarlo in uno equivalente a struttura triangolare con l'Eliminazione Gaussiana.

Richiami di algebra lineare Condizionamento di un sistema lineare Metodi diretti Metodi iterativi	Problemi triangolari <b>Eliminazione Gaussiana</b> Fattorizzazione LU Pivoting
--	---

### Eliminazione Gaussiana

Effettuo un certo numero di operazioni per trasformare un sistema arbitrario, in uno equivalente (stessa soluzione) che è triangolare.

La risoluzione di sistemi triangolari è quindi un problema particolarmente semplice da trattare.

**Idea:** Nel caso di sistemi non triangolari, cercare di ricondursi ad uno o più sistemi **equivalenti** di forma triangolare.

Dato un sistema lineare  $Ax = b$  le seguenti operazioni conducono ad un sistema equivalente (ovvero con la stessa soluzione):

- 1 scambiare due equazioni;
- 2 moltiplicare un'equazione per uno scalare;
- 3 sostituire un'equazione con una combinazione lineare della stessa e di un'altra equazione.

Stefano Berrone Sandra Pieraccini	Metodi numerici per la risoluzione di Sistemi Lineari
-----------------------------------	---

Posso fare, per creare quello equivalente tre cose:

- scambio le equazioni (le righe)
- moltiplico l'equazione per uno scalare
- sostituisco un'equazione con una combinazione lineare di un'altra ⊕ se stessa non modifichata

Faccio i calcoli e ho che non ho più il termine  $x_1$  mentre tutti gli altri coefficienti e i termini noti sono stati modificati  $\Rightarrow$  metto un apice per ricordarlo: ogni modifica che faccio incremento l'apice.

Richiami di algebra lineare Condizionamento di un sistema lineare Metodi diretti Metodi iterativi	Problemi triangolari Eliminazione Gaussiana Fattorizzazione LU Pivoting
--	--

$$a_{21}^{(1)}x_1 + a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} +$$

$$\frac{-a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \left( a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \right)$$


---


$$0x_1 + a_{22}^{(2)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)}$$

- Nella seconda equazione non compare più la prima incognita.
- Tutti i coefficienti delle altre incognite sono stati potenzialmente modificati (es.:  $a_{22}^{(2)} = a_{22}^{(1)} - \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}a_{12}^{(1)}$ )
- Per comodità, etichettiamo con apice (1) la matrice  $A$  e il vettore  $b$  originali

Stefano Berrone Sandra Pieraccini	Metodi numerici per la risoluzione di Sistemi Lineari
-----------------------------------	---

Ri faccio quanto fatto alla seconda riga, a tutte le successive sostituendo con il generico

$$r_i \leftarrow r_i + m_{i1} \cdot r_1$$

$$m_{i1} = -\frac{a_{i1}}{a_{11}}$$

Richiami di algebra lineare Condizionamento di un sistema lineare Metodi diretti Metodi iterativi	Problemi triangolari Eliminazione Gaussiana Fattorizzazione LU Pivoting
--	--

Procediamo allo stesso modo con tutte le altre equazioni:

$$m_{i1} = -\frac{a_{i1}}{a_{11}}, \quad r_i \leftarrow r_i + m_{i1} \cdot r_1, \quad i = 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ 0 + a_{22}^{(2)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ 0 + a_{32}^{(2)}x_2 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \vdots \\ 0 + a_{n2}^{(2)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)} \end{cases}$$

Osserviamo che:

- La prima riga non viene mai modificata
- Le operazioni sulle varie righe sono indipendenti l'una dall'altra

Stefano Berrone Sandra Pieraccini	Metodi numerici per la risoluzione di Sistemi Lineari
-----------------------------------	---

Modifico le righe in modo indipendente l'una dall'altra.



Ho quindi trasformato  $Ax=b \Rightarrow A^{(n)}x=b^{(n)}$  dove  $A^{(n)}$ : matrice triangolare superiore. Definisco i coefficienti trasformati  $a^{(n)}$ : Pivot e quelli usati per annullare i coefficienti  $Moltiplicatori$

Richiami di algebra lineare Condizionamento di un sistema lineare Metodi diretti Metodi iterativi	Problemi triangolari Eliminazione Gaussiana Fattorizzazione LU Pivoting
--	--

Siamo quindi passati da

$$Ax = b \Rightarrow A^{(n)}x = b^{(n)}$$

con  $A^{(n)}$  triangolare superiore

**Definizione (pivot e moltiplicatori)**  
L'elemento  $a_{11}$  e i successivi elementi  $a_{ii}^{(i)}$  sono detti **elementi pivot**. I coefficienti  $m_{ij}$  sono detti **moltiplicatori**.

$a^{(n)} \Rightarrow$  Pivot       $m_{ij} =$  Moltiplicatori

Stefano Berrone Sandra Pieraccini	Metodi numerici per la risoluzione di Sistemi Lineari
-----------------------------------	---

È possibile reinterpretare l'eliminazione Gaussiana in forma matriciale dove per il  $k$ -esimo passo di eliminazione gaussiana, ovvero il passo che azzerava la sotto colonna  $k$ , può essere rappresentato come

$$A^{(k+1)} = M_k A^{(k)}$$

Richiami di algebra lineare Condizionamento di un sistema lineare Metodi diretti Metodi iterativi	Problemi triangolari Eliminazione Gaussiana Fattorizzazione LU Pivoting
<b>Metodo di eliminazione di Gauss e fattorizzazione LU</b>	

In notazione matriciale, il  $k$ -esimo passo di eliminazione Gaussiana può essere rappresentato come segue:

$$A^{(k+1)} = M_k A^{(k)}$$

con

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & m_{k+1,k} & 1 & & \\ & \vdots & & \ddots & \\ & m_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix}$$

Stefano Berrone Sandra Pieraccini	Metodi numerici per la risoluzione di Sistemi Lineari
-----------------------------------	---

$M_k$  è una matrice identità con sotto 1 della colonna  $k$  e i vari moltiplicatori.

Quindi partendo da  $A^{(1)}$  costruisco  $M_1$  che azzerava tutta la prima sottocolonna ottenendo  $A^{(2)}$ .

Poi moltiplico  $A^{(2)}$  per  $M_2$  e ottengo  $A^{(3)}$  ma posso anche vedere  $A^{(3)}$  come  $M_2 \cdot M_1 \cdot A^{(1)}$  allora

dopo  $n-1$  passi ho

$$A^{(n)} = M_{n-1} \cdot M_{n-2} \cdot \dots \cdot M_2 \cdot M_1 \cdot A = M \cdot A$$

$$M = M_{n-1} \cdot M_{n-2} \cdot \dots \cdot M_2 \cdot M_1$$

Questi sono passaggi reinterpretati in forma astratta per spiegare la fattorizzazione LU. In realtà non si fa tutto questo.

Applico le operazioni anche al vettore dei termini noti ottenendo  $Mb \Rightarrow MAx = Mb$

Ma  $MA$  è triangolare superiore: la chiamo  $U$

$$MA = U \Rightarrow Ux = Mb$$

### Esempio

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 8 & 12 \\ 2 & 8 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 6 & 7 \end{array} \right) \rightarrow r_2 \rightarrow r_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} r_1 = r_2 - \frac{2}{4} r_1$$

$$\rightarrow r_3 \rightarrow r_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} r_1 = r_3 - \frac{1}{4} r_1$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 8 & 12 \\ 0 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow r_3 \rightarrow r_3 - \frac{2}{6} r_2$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$\left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 8 & 12 \\ 0 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{array} \right)$  Risolvibile con sostituzione all'indietro

$$M_2 M_1 (A|b) = U|b^{(3)}$$

**Esempio**

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$M_2 M_1 * (A|b) = \left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 8 & 12 \\ 0 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right) = (U|b^{(3)}).$$

Con sostituzione all'indietro:

- $x_3 = 1$
- $x_2 = (3 - 3 * 1)/6 = 0$
- $x_1 = (12 - 4 * 0 - 8 * 1)/4 = 1$

Com'è fatta  $M$ ?  
 - triangolare inferiore, ma

$$M \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Poniamo  $L = M^{-1}$

$$U = MA \implies LU = LMA = A$$

Quindi il sistema di partenza equivale a

$$LUx = b.$$

Com'è fatta  $L$ ? Suo ruolo?

Se con l'eliminazione Gaussiana portavo  $Ax=b$  a  $A^n x=b^n$  ovvero  $Ux=b^n$  e ora ho  $Ux=y$  allora  $y=b^{(n)}$ . Quindi fare un metodo o l'altro è equivalente.

Richiami di algebra lineare Condizionamento di un sistema lineare Metodi diretti Metodi iterativi	Problemi triangolari Eliminazione Gaussiana Fattorizzazione LU Pivoting
--	--

Il problema di partenza può essere affrontato in due fasi, risolvendo due sistemi a matrice triangolare:

- 1) prima determiniamo  $y$  risolvendo  $Ly = b$ ;
- 2) una volta noto  $y$ , determiniamo  $x$  risolvendo  $Ux = y$ .

**Osservazione**

La risoluzione del sistema lineare  $Ly = b$  è del tutto equivalente ad effettuare sul vettore  $b$  le trasformazioni dell'eliminazione gaussiana. Quindi il vettore  $y$  calcolato come soluzione del sistema lineare  $Ly = b$  coincide con  $b^{(n)}$ !

Stefano Berrone Sandra Pieraccini	Metodi numerici per la risoluzione di Sistemi Lineari
-----------------------------------	---

Bisogna però valutare quale tra i due conviene in costo. Supponendo di aver risolto  $Ax=b$  e voler risolvere  $Ax=c$ .  
 Con Eliminazione gaussiana  $\Rightarrow$  Ripare tutta l'eliminazione  
 Con Fattorizzazione  $L$  e  $U$  sono già calcolate e non cambiano

Richiami di algebra lineare Condizionamento di un sistema lineare Metodi diretti Metodi iterativi	Problemi triangolari Eliminazione Gaussiana Fattorizzazione LU Pivoting
--	--

Meglio fattorizzazione LU + 2 sistemi lineari triangolari, o eliminazione gaussiana senza costruire esplicitamente  $L$ ?  
 Con l'eliminazione Gaussiana,  $b$  subisce le stesse trasformazioni di  $A$ . Su un solo sistema sono **equivalenti**. Se devo risolvere un secondo sistema lineare

$$Ax = c$$

- con eliminazione gaussiana devo rieseguire tutto il procedimento per effettuare le trasformazioni su  $c$  e ottenere  $c^{(n)}$ ;
- con fattorizzazione  $LU$  già calcolata devo solo risolvere i sistemi  $Ly = c$  e  $Ux = y$ .

È veramente più conveniente fare così piuttosto che rieffettuare ex-novo l'eliminazione gaussiana sul sistema  $Ax = c$ ?

Stefano Berrone Sandra Pieraccini	Metodi numerici per la risoluzione di Sistemi Lineari
-----------------------------------	---

La Fattorizzazione può essere utile per calcolare il determinante, sfruttando la regola di Binet

$$\det(A) = \det(L \cdot U) = \det(L) \det(U) = 1 \cdot \det(U)$$

Richiami di algebra lineare Condizionamento di un sistema lineare <b>Metodi diretti</b> Metodi Iterativi	Problemi triangolari Eliminazione Gaussiana Fattorizzazione LU Pivoting
---	--

**Esempio**

Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 \\ 2 & 8 & 7 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

calcolarne la fattorizzazione LU.  
 Basta recuperare i moltiplicatori:

$$U = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Osservazione:  $\det(A) = \det(L) \cdot \det(U) = 1 \cdot \prod_{i=1}^n u_{ii} = 48$ .

Stefano Berrone Sandra Pieraccini	Metodi numerici per la risoluzione di Sistemi Lineari
-----------------------------------	---

Anziché memorizzare due matrici posso creare un'unica matrice partendo da U e al posto degli zeri metto i moltiplicatori cambiati di segno.

Richiami di algebra lineare Condizionamento di un sistema lineare <b>Metodi diretti</b> Metodi Iterativi	Problemi triangolari Eliminazione Gaussiana Fattorizzazione LU Pivoting
---	--

**Osservazione**

L può essere memorizzata nella stessa matrice A via via che in questa vengono azzerati gli elementi sotto la diagonale.

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 \\ 2 & 8 & 7 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 \\ \frac{1}{2} & 6 & 3 \\ \frac{1}{4} & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 \\ \frac{1}{2} & 6 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix}$$

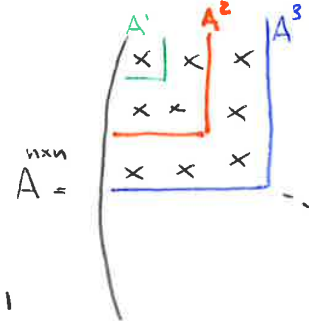
Stefano Berrone Sandra Pieraccini	Metodi numerici per la risoluzione di Sistemi Lineari
-----------------------------------	---

"Questo risulterà utile quando poi faccio pivoting"

Il metodo funziona sempre?

Funziona solo se tutti i pivot sono  $\neq 0$ .

Considero una matrice quadrata  $A$  e indico  $A_k$  le sotto matrici di testa di ordine  $k$ .  
Sono le sottomatrici nell'angolo in alto a sinistra.



### Teorema

Per  $A$  matrice di ordine  $n$ .

Se  $A_k$  non è singolare per  $k=1, \dots, n-1$

allora esiste ed è unica la

fattorizzazione LU di  $A$ .

Quindi so che esistono matrici per cui LU esiste ed è unica. Ma verificare la condizione delle sotto matrici è un casino, devo fare moltissimi conti.

Ma per alcune classi di matrici è dimostrabile che vale il teorema: queste sono le matrici a Diagonale dominante (per righe o per colonne è uguale) e le Matrici Simmetriche definite

Positive.

È dimostrabile che per queste matrici la fattorizzazione LU esiste ed è unica.

Non è richiesta la nonsingolarità di  $A_k$  con  $k=n$  ma è garantito dal fatto che il problema ben posto  $\Rightarrow A_{k=n} = A$  non singolare.

Se  $A$  singolare ma  $A_k, k < n-1$  posso fare fatt LU ma avrò  $U$  singolare con soluzione non unica.

Richiami di algebra lineare  
 Condizionamento di un sistema lineare  
**Metodi diretti**  
 Metodi Iterativi

Problemi triangolari  
 Eliminazione Gaussiana  
 Fattorizzazione LU  
 Pivoting

## La Strategia del Pivoting

### Esempio

Che succede se voglio applicare eliminazione gaussiana a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}?$$

Occorre ricorrere alle matrici di permutazione.

Stefano Berrone Sandra Pieraccini

Metodi numerici per la risoluzione di Sistemi Lineari

Richiami di algebra lineare  
 Condizionamento di un sistema lineare  
**Metodi diretti**  
 Metodi Iterativi

Problemi triangolari  
 Eliminazione Gaussiana  
 Fattorizzazione LU  
 Pivoting

### Definizione

Sia  $P_{ij}$  la matrice ottenuta dalla matrice identità permutando la  $i$ -esima e la  $j$ -esima riga:

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ i & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ j & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Le matrici  $P_{ij}$  sono dette matrici di permutazione semplice.

Stefano Berrone Sandra Pieraccini

Metodi numerici per la risoluzione di Sistemi Lineari

# Pivoting Parziale

Richiami di algebra lineare Condizionamento di un sistema lineare <b>Metodi diretti</b> Metodi Iterativi	Problemi triangolari Eliminazione Gaussiana Fattorizzazione LU Pivoting
---	--

**Pivoting Parziale**

Se durante l'eliminazione di Gauss al passo  $k$ -esimo risulta  $a_{kk}^{(k)} = 0$ , scambiamo due equazioni in modo che il nuovo elemento pivot  $a_{kk}^{(k)} = 0$  sia diverso da zero.  
La scelta è sempre tra le equazioni che seguono la  $k$ -esima.

Stefano Berrone Sandra Pieraccini      Metodi numerici per la risoluzione di Sistemi Lineari

Faccio eliminazione di Gauss e se ho Pivot = 0 allora scambio la riga in modo da averlo  $\neq 0$  e riprendo con l'eliminazione. Scambio solo con righe sotto quelle sopra sono già nulle.

È dimostrabile che, per  $A$  non singolare, posso sempre trovare un pivot  $\neq 0$

Richiami di algebra lineare Condizionamento di un sistema lineare <b>Metodi diretti</b> Metodi Iterativi	Problemi triangolari Eliminazione Gaussiana Fattorizzazione LU Pivoting
---	--

**Esempio**

Consideriamo il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Eliminazione gaussiana:  $m_{21} = -1$  e  $m_{31} = -1 \implies$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 0 + 0 + x_3 = 1 \\ 0 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$a_{22}^{(2)} = 0!$

Stefano Berrone Sandra Pieraccini      Metodi numerici per la risoluzione di Sistemi Lineari



Avevamo visto

$$\det(A) = \pm \det(U)$$

ora con il pivoting avremo

$$\underline{\det(P) \cdot \det(A) = \pm \det(U)}$$

Ma dato che  $P$  è l'insieme delle permutazioni applicato alla matrice delle Identità si ha

$$\det(P) = (-1)^n \quad n: \text{n}^\circ \text{ di permutazioni}$$

## Fattorizzazione PA=LU

Il procedimento corretto è permutato-elimino-permutato-elimino ecc. Non si fa tutto in blocco: prima tutto permutato poi tutto eliminato.

Per ottenere la matrice che rappresenta tutte le permutazioni è possibile invertire la matrice di eliminazione e permutarla con opportuni passaggi:

$$P_{n-1} \cdot M_{n-2} = X P_{n-1} \Rightarrow X = P_{n-1} M_{n-2} P_{n-1}^{-1}$$

per lematrice a permutazione semplice

$$P_{n-1} = P_{n-1}^{-1} \Rightarrow X = P_{n-1} M_{n-2} P_{n-1} = \bar{M}_{n-2}$$

Faccio questo a ogni passo e raggruppo tutte le  $M$  e tutte le  $P$ . In pratica ho fattorizzato (con  $M$ ) una permutazione di  $A$  ( $PA$ )

$$\text{NO LU?} \rightarrow U = MPA$$

Richiami di algebra lineare Condizionamento di un sistema lineare Metodi diretti Metodi iterativi	Problemi triangolari Eliminazione Gaussiana Fattorizzazione LU Pivoting
--	--

$$U = MPA$$

$$M^{-1}U = PA$$

Posto  $L = M^{-1}$  abbiamo determinato fattorizzazione  $LU$  di  $PA$ , i.e. fattorizzazione  $PA = LU$ .

Fattorizzazione  $PA = LU$  per risolvere un sistema lineare:

- $Ly = Pb$
- $Ux = y$

Richiami di algebra lineare Condizionamento di un sistema lineare Metodi diretti Metodi iterativi	Problemi triangolari Eliminazione Gaussiana Fattorizzazione LU Pivoting
--	--

In generale la strategia di permutare equazioni/righe viene usata anche se si incontrano elementi pivot diversi da zero per **aumentare la stabilità dell'eliminazione gaussiana**. Si può infatti dimostrare che per aumentare la stabilità è opportuno **evitare moltiplicatori troppo grandi**, poiché amplificano gli errori di arrotondamento, con conseguente instabilità dell'algoritmo. Per prevenire la crescita dei moltiplicatori è necessario **prevenire elementi pivot troppo piccoli**. Per raggiungere questo obiettivo possiamo applicare la strategia del **pivoting parziale** ammettendo scambi di righe anche se al passo  $k$  l'elemento pivot  $a_{kk}^{(k)}$  non è nullo. Più precisamente, al passo  $k$  si determina **l'elemento di modulo massimo fra tutti gli elementi  $a_{rk}^{(k)}$ , con  $r \geq k$** ; una volta individuato l'indice  $r$  corrispondente all'elemento di modulo massimo si scambiano fra loro la riga  $k$ -esima e  $r$ -esima.

## Esercizio di Riepilogo

Risolvere  $Ax=b$  con fattorizzazione  $PA=LU$ .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$P_{14} \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$  Ora a zero l'ultima riga xk le altre sono già nulle

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

$P_{23} A^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{11}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} r_3 - \frac{3}{5}r_2 \\ r_4 + \frac{1}{10}r_2 \end{matrix} \Rightarrow A^{(3)} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 1 & 7 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{2} & \frac{11}{2} \end{pmatrix}$

$1 > -\frac{1}{2}$  quindi non scambio

$r_4 + \frac{1}{2}r_3 \Rightarrow A^{(4)} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 1 & 7 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{2} & 9 \end{pmatrix}$

quindi si ha

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & \frac{3}{5} & 1 & & \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{2} & 1 & \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ & 5 & 0 & 0 \\ & & 1 & 7 \\ & & & 9 \end{pmatrix}$$

$$P = P_{23} \cdot P_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### Esempio

Voglio aumentare la stabilità - Sostituisco 1-3, usando  $P_{13}$  che non costruisco.

Richiami di algebra lineare Condizionamento di un sistema lineare Metodi diretti Metodi Iterativi	Problemi triangolari Eliminazione Gaussiana Fattorizzazione LU Pivoting
--	--

**Esempio**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 2 & 0 & 7 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$P_1 = P_{13}$ :

$$P_{13}A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 7 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ \frac{1}{4} & -1 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{2} & \frac{13}{2} \end{pmatrix}$$

Stefano Berrone Sandra Pieraccini	Metodi numerici per la risoluzione di Sistemi Lineari
-----------------------------------	---

Calcolo i moltiplicatori e li scrivo cambiati di segno. Quindi quando scambio, scambio anche i moltiplicatori, nel passo  $A^{(2)} \rightarrow P_{23}A^{(2)}$ .

Trovo quindi  $L$  e  $U$  e applico  $P = P_{23}P_{13}$  alla matrice Identità.

Richiami di algebra lineare Condizionamento di un sistema lineare Metodi diretti Metodi Iterativi	Problemi triangolari Eliminazione Gaussiana Fattorizzazione LU Pivoting
--	--

**Esempio (segue...)**

$P_2 = P_{23}$ :

$$P_{23}A^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{2} & \frac{13}{2} \\ \frac{1}{4} & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{2} & \frac{13}{2} \\ \frac{1}{4} & -2 & \frac{41}{7} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{7} & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & \frac{41}{7} \end{pmatrix} \quad P = P_{23}P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Stefano Berrone Sandra Pieraccini	Metodi numerici per la risoluzione di Sistemi Lineari
-----------------------------------	---

# Metodi Iterativi

-12/10/15-

Con i metodi diretti, come eliminazione Gaussiana si arriva alla soluzione con  $n$  passi finiti. È però sconsigliato farlo con problemi di grandi dimensioni e matrici sparse

Richiami di algebra lineare Condizionamento di un sistema lineare Metodi diretti Metodi Iterativi	Generalità Metodi di Jacobi e Gauss-Seidel Test di arresto Condizioni di convergenza per Jacobi e Gauss-Seidel
--	---

Metodi iterativi

Matrici grandi e dense sono impossibili da trovare perché ho tante incognite tutte dipendenti tra loro

Elim Gauss

I metodi diretti consentono la costruzione della soluzione esatta, a meno degli errori di arrotondamento, in un numero finito di passi.

Per sistemi con matrici **dense** i metodi diretti sono generalmente preferibili.

Per sistemi con matrici **sparse** e di **ordine elevato**, i metodi diretti diventano impraticabili a causa del **fill in** ⇒ non può essere sfruttata la sparsità della matrice.

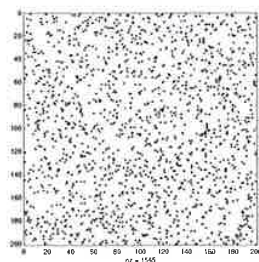
Mat. Sparsa  
Ha tanti elementi nulli!

Per le matrici sparse sono meglio gli iterativi perché i diretti soffrono di Riempimento.

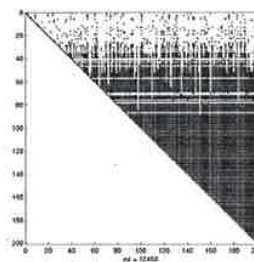
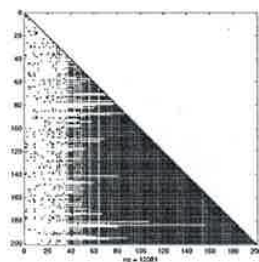
Stefano Berrone Sandra Pieraccini Metodi numerici per la risoluzione di Sistemi Lineari

Questo fenomeno è osservabile con il comando spy che mette un puntino per ogni  $a_{ij} \neq 0$  e niente per i nulli. Allora fattorizzando con LU una matrice sparsa  $200 \times 200$  ho problemi perché ho più zeri e il riempimento peggiora. Se ho  $200k \times 200k$  ancora peggio. Si usano quindi **Metodi Iterativi!**

Richiami di algebra lineare Condizionamento di un sistema lineare Metodi diretti Metodi Iterativi	Generalità Metodi di Jacobi e Gauss-Seidel Test di arresto Condizioni di convergenza per Jacobi e Gauss-Seidel
--	---



Con i metodi Iterativi costruisco una successione di approssimazioni che convergono alla soluzione esatta.



Stefano Berrone Sandra Pieraccini Metodi numerici per la risoluzione di Sistemi Lineari

In Matlab le matrici sparse conservano solo gli elementi  $\neq 0$ .

In modo analogo si definisce la convergenza di una successione di matrici la quale converge alla matrice nulla se  $\rho$ : raggio spettrale  $< 1$

Richiami di algebra lineare Condizionamento di un sistema lineare Metodi diretti Metodi iterativi	Generalità Metodi di Jacobi e Gauss-Seidel Test di arresto Condizioni di convergenza per Jacobi e Gauss-Seidel
--	---

**Osservazione**  
 La condizione di convergenza in una qualunque norma di  $\mathbb{R}^n$  si traduce in una condizione di convergenza per componenti:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x \iff \left[ \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i, \forall i = 1, \dots, n. \right]$$

Simili argomenti valgono anche per **successioni di matrici**  $\{A^{(k)}\}_{k \geq 0}$ . Inoltre vale il seguente teorema:

**Teorema**  
 Sia  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Allora indicando con  $\rho(A)$  il raggio spettrale di  $A$

$$\left[ \lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0 \iff \rho(A) < 1 \right]$$

Ricordiamo che per ogni norma di matrice compatibile con una norma di vettore si ha  $\rho(A) \leq \|A\|$ .

Stefano Berrone Sandra Pieraccini	Metodi numerici per la risoluzione di Sistemi Lineari
-----------------------------------	---

$$\left[ \lim_{k \rightarrow \infty} A^k = [0] \iff \rho(A) = \max |\lambda_i(A)| < 1 \right]$$

Ho infiniti modi per costruire i metodi iterativi. Studio quelli base.

Richiami di algebra lineare Condizionamento di un sistema lineare Metodi diretti Metodi iterativi	Generalità Metodi di Jacobi e Gauss-Seidel Test di arresto Condizioni di convergenza per Jacobi e Gauss-Seidel
--	---

**Generalità sui metodi iterativi**

Idea base: data una stima iniziale  $x^{(0)}$  della soluzione del sistema lineare  $Ax = b$ , con  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\det(A) \neq 0$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ , si costruisce una successione di vettori  $\{x^{(k)}\}_{k \geq 0}$  che converga (si spera) ad  $x$ , risolvendo ad ogni iterazione dei sistemi lineari molto più semplici di quello di partenza.

Come?  
 Consideriamo uno **splitting** della matrice  $A$  del tipo

$$A = M + N, \quad \det(M) \neq 0$$

Allora si ha

$$Ax = (M + N)x = b \iff Mx = -Nx + b.$$

Considero lo **splitting** di  $A$ :  
 Scrivo  $A$  come somma di due matrici con la condizione che  $M$  sia <sup>NON</sup> singolare.  
 Ho  $\infty$  combinazioni possibili.

Stefano Berrone Sandra Pieraccini	Metodi numerici per la risoluzione di Sistemi Lineari
-----------------------------------	---

$$Ax = b \oplus A = M + N \implies Mx = -Nx + b$$

base di partenza per l'iterazione

Definito  $\textcircled{1} Mx = -Nx + b$  immagino di partire con l'iterazione a partire da un vettore  $x^{(0)}$  assegnato arbitrario che fa da innesco per la successione. Allora come costruisco  $x^{(1)}$ ?

Dalla relazione  $\textcircled{1}$  valuto a sinistra in  $x^{(0)}$  ottenendo un qualcosa di noto, mentre a destra valuto in  $x^{(1)}$ , avrò quindi:

$$Mx^{(1)} = -Nx^{(0)} + b$$

Trovo quindi  $x^{(1)}$  come soluzione di un sistema lineare dove  $M$  è la matrice dei coefficienti e  $-Nx^{(0)} + b$  è un vettore noto.

Avendo imposto  $M$  non singolare il problema è ben posto.

Ora noto  $x^{(1)}$  rifaccio il calcolo per ottenere  $x^{(2)}$

$$Mx^{(2)} = -Nx^{(1)} - b$$

Così facendo ottengo una successione infinita di vettori

$$Mx^{(k+1)} = -Nx^{(k)} - b \quad n \rightarrow \infty$$

È conveniente che  $M$  abbia una forma semplice: potrebbe essere diagonale o triangolare.

La soluzione della successione sarà

$$x^{(k+1)} = -M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b = Bx^{(k)} + C$$

$$B = -M^{-1}N \quad C = M^{-1}b$$

In questo modo  $B$  e  $C$  sono costanti e invarian-  
ti con l'iterata.

B: Matrice di Iterazione: definisce se il metodo è convergente e con che velocità.

Quindi la scelta di opportuni  $M$  e  $N$  è fondamentale.

### Consistenza

Per sistemi di equazioni lineari, se converge, allora converge alla soluzione del sistema.

Richiami di algebra lineare  
 Condizionamento di un sistema lineare  
 Metodi diretti  
 Metodi Iterativi

Generalità  
 Metodi di Jacobi e Gauss-Seidel  
 Test di arresto  
 Condizioni di convergenza per Jacobi e Gauss-Seidel

## Studio della convergenza dei metodi iterativi

Sotto quali condizioni la successione  $\{x^{(k)}\}_{k \geq 0}$  generata da un metodo iterativo converge?

Se la successione converge ad un vettore  $x$ , questo è senz'altro soluzione del sistema lineare. Definiamo l'errore  $e^{(k)}$  commesso al passo  $k$  come la differenza fra l'approssimazione corrente e la soluzione:

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x.$$

Chiaramente,  $x^{(k)} \rightarrow x \iff e^{(k)} \rightarrow 0$ .

Studiamo l'errore:

$$\begin{aligned} e^{(k)} &= x^{(k)} - x = Bx^{(k-1)} + c - x \\ &= Bx^{(k-1)} + c - (Bx + c) = B(x^{(k-1)} - x) = Be^{(k-1)}. \end{aligned}$$

Allora

$$e^{(k)} = Be^{(k-1)} = B(Be^{(k-2)}) = B^2e^{(k-2)} = \dots = B^k e^{(1)} = B^k e^{(0)}.$$

Stefano Berrone Sandra Pieraccini Metodi numerici per la risoluzione di Sistemi Lineari

Richiami di algebra lineare  
 Condizionamento di un sistema lineare  
 Metodi diretti  
 Metodi Iterativi

Generalità  
 Metodi di Jacobi e Gauss-Seidel  
 Test di arresto  
 Condizioni di convergenza per Jacobi e Gauss-Seidel

Poiché

$$e^{(k)} = B^k e^{(0)}$$

abbiamo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x \iff \lim_{k \rightarrow \infty} e^{(k)} = 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} B^k e^{(0)} = 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} B^k = 0$$

Quindi c'è convergenza se e solo se  $\rho(B) < 1$ .

Stefano Berrone Sandra Pieraccini Metodi numerici per la risoluzione di Sistemi Lineari



# Metodo di Jacobi

È un metodo adattato alla soluzione ovvero di **Precondizionamento**: si crea un sistema equivalente con condizioni migliori

Richiami di algebra lineare Condizionamento di un sistema lineare Metodi diretti Metodi Iterativi	Generalità Metodi di Jacobi e Gauss-Seidel Test di arresto Condizioni di convergenza per Jacobi e Gauss-Seidel
--	---

## Metodo di Jacobi

Consideriamo il seguente splitting di A:

Devi essere facilmente invertibile  
↓  
deve avere  $d_{ii} \neq 0$

$$A = E + D + F, \quad A = \begin{pmatrix} & & F \\ & D & \\ E & & \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} M = D \\ N = E + F \\ \Downarrow \end{matrix}$$

- 1  $E$  è la parte di A sotto la diagonale,
- 2  $D$  è la diagonale di A,
- 3  $F$  è la parte di A sopra la diagonale

$$B_J = -D^{-1} \cdot (E + F)$$

Prendiamo  $M = D, N = E + F$ . Matrice d'iterazione  $B_J$ : L'iterazione è

$$B_J = -D^{-1}(E + F)$$

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(b - Ex^{(k)} - Fx^{(k)})$$

Metodo di Jacobi in forma compatta:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(b - Ex^{(k)} - Fx^{(k)})$$

Stefano Berrone Sandra Pieraccini	Metodi numerici per la risoluzione di Sistemi Lineari
-----------------------------------	---

La soluzione  $x^{(k+1)}$  sarà economica per D dove per avere  $D^{-1}$  facciamo solo n divisioni. Risulta però più complesso fare  $E \cdot x$  e  $F \cdot x$  dove ho  $n^2$  operazioni riga per colonna. È anche vero però che E e F arrivano da A sparsa  $\Rightarrow$  ho molti 0. Si faranno quindi solo le operazioni con numeri  $\neq 0$ .

Richiami di algebra lineare Condizionamento di un sistema lineare Metodi diretti Metodi Iterativi	Generalità Metodi di Jacobi e Gauss-Seidel Test di arresto Condizioni di convergenza per Jacobi e Gauss-Seidel
--	---

$x^{(k+1)} = D^{-1}(b - Ex^{(k)} - Fx^{(k)})$  componente per componente:

```
for i = 1 : n
    x_i^{(k+1)} = (b_i - sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)}) / a_{ii}
end
```

tutto questo lo faccio con questo

### Esempio

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 15 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 6 - 2x_2 - 3x_3 \\ x_2 = (15 - 4x_1 - 6x_3)/5 \\ x_3 = (24 - 7x_1 - 8x_2)/9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 6 - 2x_2^{(k)} - 3x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = (15 - 4x_1^{(k)} - 6x_3^{(k)})/5 \\ x_3^{(k+1)} = (24 - 7x_1^{(k)} - 8x_2^{(k)})/9 \end{cases}$$

Stefano Berrone Sandra Pieraccini	Metodi numerici per la risoluzione di Sistemi Lineari
-----------------------------------	---

### Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

### Metodo di Jacobi

$$x^{(k+1)} = \begin{cases} (5 + x_4^{(k)})/6 \\ (2 + x_1^{(k)})/3 \\ (4 - x_2^{(k)})/3 \\ (3 - x_3^{(k)})/2 \end{cases} \Rightarrow x^{(1)} = \begin{cases} 5/6 \\ 2/3 \\ 4/3 \\ 3/2 \end{cases} \Rightarrow x^{(2)} = \begin{cases} 13/12 \\ 17/18 \\ 10/9 \\ 5/6 \end{cases}$$

La soluzione si avvicina a quella esatta con calma

$$\|e^{(1)}\|_{\infty} = \frac{1}{2} \quad \|e^{(2)}\|_{\infty} = \frac{1}{6}$$

Con una iterazione l'errore passa da  $\frac{1}{2}$  a  $\frac{1}{6}$  -

Si ha quindi un errore che tende a zero ma in modo non monotono: tende a zero ma nel farlo può risalire.

### Metodo di Gauss

$$x^{(k+1)} = \begin{cases} (5 + x_4^{(k)})/6 \\ (2 + x_1^{(k+1)})/3 \\ (4 - x_2^{(k+1)})/3 \\ (3 - x_3^{(k+1)})/2 \end{cases} \Rightarrow x^{(1)} = \begin{cases} 5/6 \\ 17/18 \\ 55/54 \\ 107/108 \end{cases} \quad \|e^{(1)}\|_{\infty} = \frac{1}{6}$$

Anche in questo caso la soluzione tende a quella esatta ma con un solo passo di iterazione ottengo lo stesso errore di due passi di Jacobi.

Richiami di algebra lineare Condizionamento di un sistema lineare Metodi diretti Metodi iterativi	Generalità Metodi di Jacobi e Gauss-Seidel Test di arresto Condizioni di convergenza per Jacobi e Gauss-Seidel
--	---

Versione componente per componente:

```

for i = 1 : n
    x_i^{(k+1)} = ( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} ) / a_{ii}
end
    
```

**Esempio**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 15 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 6 - 2x_2 - 3x_3 \\ x_2 = (15 - 4x_1 - 6x_3)/5 \\ x_3 = (24 - 7x_1 - 8x_2)/9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 6 - 2x_2^{(k)} - 3x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = (15 - 4x_1^{(k+1)} - 6x_3^{(k)})/5 \\ x_3^{(k+1)} = (24 - 7x_1^{(k+1)} - 8x_2^{(k+1)})/9 \end{cases}$$

Richiami di algebra lineare Condizionamento di un sistema lineare Metodi diretti Metodi iterativi	Generalità Metodi di Jacobi e Gauss-Seidel Test di arresto Condizioni di convergenza per Jacobi e Gauss-Seidel
--	---

**Test di arresto**

Un metodo iterativo fornisce una successione infinita di iterate  $x^{(k)}$ . Questo diventerà un algoritmo solo se stabiliremo in modo preciso quando interrompere il procedimento di generazione di iterate. Dobbiamo ovvero stabilire un **criterio di arresto** delle iterazioni.

- 1 si arresta il processo iterativo quando risulta

$$\left[ \frac{\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \|}{\| x^{(k+1)} \|} \leq \text{tol}, \right]$$

dove tol è una **tolleranza relativa** fissata sulla base di opportuni criteri di utilizzo della soluzione.

- 2 oppure se

$$\left[ \| x^{(k+1)} - x^{(k)} \| \leq \text{tol}, \right]$$

dove tol è questa volta una **tolleranza assoluta**.

Per matrici a predominanza diagonale stretta sia Jacobi che Gauss-Seidel convergono.  
 Gauss-Seidel anche per simmetriche definite positive

Richiami di algebra lineare Condizionamento di un sistema lineare Metodi diretti Metodi iterativi	Generalità Metodi di Jacobi e Gauss-Seidel Test di arresto Condizioni di convergenza per Jacobi e Gauss-Seidel
--	---

**Teorema (Condizioni di convergenza per il metodo di Jacobi)**  
 Per matrici a predominanza diagonale stretta (per righe o per colonne indifferentemente) il metodo di Jacobi converge.

⊗

**Teorema (Condizioni di convergenza per il metodo di Gauss-Seidel)**  
 Per matrici a predominanza diagonale stretta (per righe o per colonne) il metodo di Gauss-Seidel converge.

**Teorema (Condizioni di convergenza per il metodo di Gauss-Seidel)**  
 Per matrici simmetriche definite positive il metodo di Gauss-Seidel converge.

Stefano Berrone Sandra Pieraccini	Metodi numerici per la risoluzione di Sistemi Lineari
-----------------------------------	---

Generalmente Gauss-Seidel è più veloce di Jacobi ma non per forza. Vi sono casi in cui lo è sicuramente e questi sono definiti dal teorema di Stein-Rosenberg: si applicano per mat  $A$  dove  $a_{ii} > 0$  e  $a_{ij} \leq 0$  allora si verifica una di queste condizioni ->

Richiami di algebra lineare Condizionamento di un sistema lineare Metodi diretti Metodi iterativi	Generalità Metodi di Jacobi e Gauss-Seidel Test di arresto Condizioni di convergenza per Jacobi e Gauss-Seidel
--	---

**Confronto delle proprietà di convergenza del metodo di Jacobi e di Gauss-Seidel**

Se si verifica ⊗ sicuramente G-S è più veloce di J.  
 Inoltre se non ho cond ⊗ posso verificare il ρ(B) e B<sub>GS</sub> è complessa ma B<sub>J</sub> no allora se ho ⊗ o ⊙ sono uguali ⊕.

In generale la convergenza di uno dei metodi non implica la convergenza dell'altro e viceversa.  
 Tuttavia quando entrambi convergono la velocità di convergenza del metodo di Gauss-Seidel è **generalmente** superiore.

**Teorema (Teorema di Stein-Rosenberg)**  
 Sia  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  con  $a_{ij} \leq 0, \forall i \neq j$  e  $a_{ii} > 0$ , allora si verifica uno e uno solo dei seguenti risultati:

- 1  $0 < \rho(B_{GS}) < \rho(B_J) < 1$ ,
- 2  $1 < \rho(B_J) < \rho(B_{GS})$ ,
- 3  $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J) = 0$ ,
- 4  $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J) = 1$ .

Stefano Berrone Sandra Pieraccini	Metodi numerici per la risoluzione di Sistemi Lineari
-----------------------------------	---

- ⊙  $0 < \rho(B_{GS}) < \rho(B_J) < 1$
- ⊙  $1 < \rho(B_J) < \rho(B_{GS})$
- ⊙  $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J) = 0$
- ⊙  $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J) = 1$

## Localizzazione degli Autovalori

Studio dei teoremi per trovare gli autovalori con i quali potro poi valutare il condizionamento di una matrice

$$K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

Ma come trovo l'inversa? Devo trovare  $x$  tale che  $Ax = I$  ma questo costa molto.

Posso vedere la matrice  $x$  come composta da  $n$  vettori colonna e scomporre  $I$  in  $n$  vettori colonna della base canonica

$$X = [x_{:,1} | x_{:,2} | \dots | x_{:,n}] \quad , \quad I = [e_1 | e_2 | \dots | e_n]$$

Allora posso scomporre  $A \cdot X = I \Rightarrow A \cdot x_{:,i} = e_i$

Così ho  $n$  sistemi dai quali ricavo i vettori colonna  $x_{:,i}$  e quindi la matrice  $X = A^{-1}$ .

Quindi per calcolare l'inversa di una matrice devo calcolare  $n$ -sistemi lineari.

Se  $n$  è elevato l'operazione richiede troppi calcoli - Quindi calcolare il condizionamento diventa troppo costoso.

Sfrutto quindi i Teoremi di Localizzazione per individuare gli autovalori e calcolare il condizionamento: sfrutto la Norma 2 o spettrale per cui vale

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T \cdot A)} \quad \text{con } \rho(B) = \max |\lambda_i(B)|$$

se però  $A$  è simmetrica  $\Rightarrow \|A\|_2 = \rho(A)$

se è simmetrica e definita positiva  $\Rightarrow \|A\|_2 = \lambda_{\max}(A)$

In fatti vale  $\lambda(A^c) = \lambda^c(A)$ .

Ma allora tornando al condizionamento posso fare

$$K_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \lambda_{\max}(A) \cdot \lambda_{\max}(A^{-1}) = \lambda_{\max}(A) \cdot \frac{1}{\lambda_{\min}(A)}$$

A patto che  $A$  sia simm. def. positiva

Richiami di algebra lineare  
 Condizionamento di un sistema lineare  
 Metodi diretti  
 Metodi iterativi  
 Appendice: localizzazione degli autovalori

## I Teorema di Gershgorin

Sia  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e si definiscano i *cerchi di Gershgorin* come

$$R_i = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.c. } |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|\}, \quad i = 1, \dots, n$$

### Teorema (I Teorema di Gershgorin)

Gli autovalori di  $A$  appartengono all'unione dei cerchi di Gershgorin di  $A$ :

$$\lambda_i(A) \in \bigcup_{j=1}^n R_j =: \mathcal{R}, \quad i = 1, \dots, n$$

Stefano Berrone Sandra Pieraccini

Metodi numerici per la risoluzione di Sistemi Lineari

Richiami di algebra lineare  
 Condizionamento di un sistema lineare  
 Metodi diretti  
 Metodi iterativi  
 Appendice: localizzazione degli autovalori

### Osservazione

Poiché  $A$  e  $A^T$  hanno lo stesso spettro, il teorema si può applicare anche ad  $A^T$ . i.e. usando i cerchi costruiti per colonne: siano

$$C_i = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.c. } |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ji}|\}, \quad i = 1, \dots, n$$

### Corollario

Gli autovalori di  $A$  appartengono all'unione dei cerchi di  $G$ . per colonne:

$$\lambda_i(A) \in \bigcup_{j=1}^n C_j =: \mathcal{C}, \quad i = 1, \dots, n$$

e quindi appartengono all'insieme  $\mathcal{R} \cap \mathcal{C}$

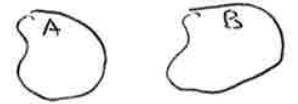
Stefano Berrone Sandra Pieraccini

Metodi numerici per la risoluzione di Sistemi Lineari

## II° Teorema di Gershgorin

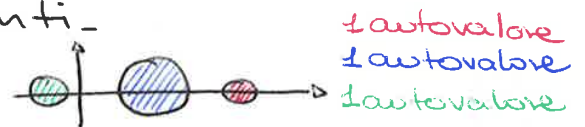
- Ogni componente connessa di  $R$ , contiene tanti  $\lambda$  quanti sono i cerchi che la compongono.

Se considero  $C = A \cup B$  allora  $C$  è costituito da due componenti connessi ovvero da sottoinsiemi tali che, presa una coppia  $\forall$  di punti esiste sempre una linea che li connette. Le due componenti sono dette connesse.



- Posso anche dire che  $R$  (per righe) è dato da l'unione di  $n$ -cerchi e l'unione di  $n$ -cerchi è disgiunta da  $n-r$  cerchi allora posso dire qualcosa sugli autovalori.

- Questo, applicato al nostro studio, significa che ogni componente connessa contiene tanti autovalori quanti sono i componenti.



Nel caso di tre autovalori distinti si può anche concludere che la matrice  $A$  è NON singolare perché non posso avere nessun  $\lambda = 0$  perché nessun cerchio interseca lo zero.

- Inoltre guardando agli autovalori se ho autovalori complessi allora devo avere la coppia coniugata di autovalori quindi devo avere due autovalori nello stesso cerchio ma nel caso di autovalori complessi non posso averli quindi gli autovalori, in quel caso, sono tutti reali.

Nel caso di  $R$  a sinistra  $\lambda \in \mathbb{R}$  a destra  $R$  due  $\lambda$  che possono essere  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ .

Faccio tutto questo per righe e poi per colonna.

### Definizione

Una matrice è detta Riducibile se esiste una matrice di permutazione tale che  $PA P^T$  è triangolare

- a blocchi.

In questo modo posso semplificare il sistema lineare.

-19/10/15-

Richiami di algebra lineare  
 Condizionamento di un sistema lineare  
 Metodi diretti  
 Metodi iterativi  
 Appendice: localizzazione degli autovalori

## Matrici irriducibili - grafo associato

Data la matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , si costruisca un grafo nel seguente modo:

- Si considerino  $n$  nodi  $N_i, i = 1, \dots, n$
- Se  $a_{ij} \neq 0$ , si inserisca un arco orientato tra i nodi  $N_i$  e  $N_j$

Il grafo si dice fortemente connesso se per ogni coppia  $(i, j)$  posso raggiungere  $N_j$  a partire da  $N_i$ .

### Proprietà

Una matrice è irriducibile se e solo se il grafo associato è fortemente connesso.

Stefano Berrone Sandra Pieraccini

Metodi numerici per la risoluzione di Sistemi Lineari

Richiami di algebra lineare  
 Condizionamento di un sistema lineare  
 Metodi diretti  
 Metodi iterativi  
 Appendice: localizzazione degli autovalori

### Teorema (III Teorema di Gershgorin)

Se  $A$  è irriducibile ed  $\exists \lambda \in \partial R_i^a$  allora  $\lambda \in \partial R_i \forall i = 1, \dots, n$ .

<sup>a</sup>Il simbolo  $\partial$  denota il bordo di un insieme

Stefano Berrone Sandra Pieraccini

Metodi numerici per la risoluzione di Sistemi Lineari



# Approssimazioni di dati e Funzioni

Generalità  
Interpolazione polinomiale  
Interpolazione polinomiale a tratti  
Metodo dei minimi quadrati  
Derivazione numerica

## Approssimazione di dati e funzioni

Stefano Berrone  
Sandra Pieraccini

Politecnico di Torino, Dipartimento di Scienze Matematiche  
stefano.berrone@polito.it  
sandra.pieraccini@polito.it  
http://calvino.polito.it/~sberrone,  
http://calvino.polito.it/~pieraccini

Metodi Numerici e Calcolo Scientifico

Ultimo aggiornamento: 20 ottobre 2015

Stefano Berrone Sandra Pieraccini Approssimazione di dati e funzioni

Studio due tipi di problemi apparentemente diversi ma che sono riconducibili fra loro.

- 1) Posso avere coppie  $(x, y)$  di dati noti e voglio trovare una funzione passante per i punti noti in modo da poter trovare altre  $(x, y)$  inizialmente non note
- 2) Ho una funzione  $f$  che voglio approssimare con una  $g$  più semplice da studiare.

Generalità  
Interpolazione polinomiale  
Interpolazione polinomiale a tratti  
Metodo dei minimi quadrati  
Derivazione numerica

### Generalità

**Problema 1** | Dati  $(x_i, y_i)$   $i = 0, \dots, n$  (es. misurazioni) voglio approssimarli con una funzione  $g$  in modo da poter stimare l'andamento dei dati anche in punti  $x \neq x_i$ .

**Problema 2** | Data  $f$  voglio approssimarla con una  $g$  più facile da usare (ad esempio un polinomio). Es:

$$\int_a^b \exp(-x^2) dx = ?$$

Se  $\exp(-x^2) \simeq g$  e  $g$  so integrarla facilmente,

$$\int_a^b \exp(-x^2) dx \simeq \int_a^b g(x) dx$$

**NB** Problema 2 si tratta come il Problema 1 con dati  $(x_i, f(x_i))$ ,  $i = 0, \dots, n$

Stefano Berrone Sandra Pieraccini Approssimazione di dati e funzioni

I due casi sono apparentemente separati ma posso ricondurli l'uno all'altro.

Data una funzione  $f$  o delle coppie di dati voglio individuare un polinomio che la approssima.

In base al tipo di funzione o alla distribuzione di dati scelgo che polinomio o, più in generale, approssimazione.

Allora data  $f \in F$  dove  $F$  è chiuso e limitato, di ordine  $k$ , devo trovare un sottospazio di dimensione finita in cui scrivo  $f_m \in F_m$  che approssima  $f$ .

Che sottospazio scelgo:

① Polinomio algebrico di grado  $m$ ,  $\mathbb{P}_m$

$$f_m(x) = p_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$$

② Funzioni polinomiali definite a tratti  $r$ ,  $\mathbb{P}_m^T$

$$f_m|_{[x_i, x_{i+1}]} = p_r(x)^{(i)}$$

③ Funzione spline di ordine  $r$ ,  $\mathcal{S}_r$

④ Polinomio trigonometrico,  $\mathbb{T}_m$

Poi devo scegliere uno tra questi, per farlo ho due criteri:

→ Interpolazione: l'approssimante in  $x_i$  deve avere  $y_i$ .

$$f_m(x_i) = y_i$$

→ Minimi quadrati: la differenza tra le quantità sia minima possibile (ideale per sperimentali)

$$\min \sum (f_m(x_i) - y_i)^2$$

● Qual è la dimensione di uno spazio vettoriale?

Corrisponde al numero di elementi della base!

Allora per polinomio algebrico ho grado  $+1$ . Per il tratto è (grado del tratto  $+1$ ) \* (numero di tratti). Spline le fa poi.

$$\mathbb{T}_m = 2m+1$$

$$\dim(\mathbb{P}_m) = m+1 \quad \dim(\mathbb{P}_m^T) = (m+1) * (\# \text{tratti}) \quad \dim \mathcal{S} = \dots$$