



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1942A -

ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Samake Martin

MATERIA: Gasdinamica - prof. IUSO

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

= Gasdinamica =

Esame: 2h → 20 domande scritte
→ 3 domande orali
2h → 2 CS con Binario

130-09

● Strutture e Proprietà dei Gas

Struttura dei Gas

Un gas può essere caratterizzato da

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2} = \text{cost} \quad \text{con} \quad h = e + \frac{p}{\rho}$$

Queste sono energie riferite all'unità di massa.

In problemi ad alta velocità e le due oscillano per mantenere $h_0 = \text{cost}$.

$$h \sim \frac{V^2}{2}$$

● In problemi di bassa velocità invece $h_0 \sim V$ piccolo, quindi ancora più piccolo e quindi entalpia statica e entalpia totale sono pressoché simili.

Ma allora se l'Entalpia Totale h_0 deve rimanere costante, in un flusso ad alta velocità si avranno, per compensare le forti variazioni di V , forti variazioni di ρ e T .

Come è fatto un Gas?

● È fatto di elementi costituenti ovvero **Molecole** e **Atomi** che sono in continua agitazione molecolare, collidono fra di loro e sono libere di muoversi.

I gas non hanno né forma né volume proprio e sono più o meno compressibili.

Bisogna descrivere un Modello di Gas che permetta di assegnare delle proprietà al gas e di lavorare con queste proprietà per descrivere altre cose.

● Si parla di **Particella Fluida** ovvero un insieme di elementi (atomi o molecole) racchiusi in un volume di riferimento le cui dimensioni devono essere sufficientemente grandi da contenere un numero elevato di molecole in modo da poter descrivere il comportamento delle

Da questo concetto posso definire il Modello del Continuo quindi se le condizioni del problema (no di molecole nel volume) sono tali da poter descrivere le proprietà in modo continuo e si possono sviluppare i Modelli Matematici (come Navier-Stokes) validi solo se il modello è continuo.

Ora per definire in modo rigoroso il concetto di continuo si definisce un parametro adimensionale ovvero il Numero di Knudsen che confronta il Libero Cammino Medio Collisionale, ovvero la distanza media fra due urti successivi ℓ , e la Dimensione Caratteristica del corpo immerso nella corrente.

$$Kn = \frac{\ell}{L}$$

→ $Kn \sim 10^{-2} \Rightarrow$ Continuo ☺

→ $Kn \in 10^{-4} \div 10^{-1} \Rightarrow$ Flusso Leggermente Rarefatto o Slip Flow

→ $Kn \in 10^{-1} \div 10 \Rightarrow$ Flusso Moderatamente Rarefatto o Transition

→ $Kn > 10 \Rightarrow$ Flusso Altamente Rarefatto o Free Molecular Flow

Quindi durante il rientro in atmosfera si passa dalle condizioni di Free Molecular Flow alle condizioni di Continuo, passando per ogni fase.

In altri campi ℓ è molto piccolo \Rightarrow nanotech.

Aria in condizioni standard $\Rightarrow \ell = 6,35 \times 10^{-5}$ mm

Ma allora considerando un cubo di lato ℓ R_0 che al suo interno sono contenute 7000 molecole che sono moltissime, quindi è possibile considerare il modello come continuo.

Ora secondo la meccanica statistica è possibile valutare la velocità media di insieme delle molecole che caratterizza sia il tutto macroscopicamente che quella della singola molecola all'interno del volume.

Bisogna quindi valutare la Velocità di Agitazione Termica.

Qual'è l' E_k Media Traslationale Globale?

Descrive quanta energia contiene la molecola di massa m che si muove lungo le tre direzioni.

$$\boxed{E = \frac{1}{2} m (\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2})}$$

dove il simbolo \bar{u} sta per media di insieme ovvero il valor medio della velocità di tutte le particelle -

Ora sostituendo alla velocità istantanea la sua decomposizione si ottiene (scrivo solo u , stessa cosa per v e w):

$$E = \frac{1}{2} m (\overline{(u+u')^2}) = \frac{1}{2} m (\overline{u^2} + \overline{u'^2} + \overline{u u'} + \overline{u' u})$$

dove però il valor medio di un valor medio non varia mentre il valor medio dell'oscillazione è nullo: $\overline{u u'} + \overline{u' u} = 0$

$$\overline{u u} = \overline{u^2} \quad \text{e} \quad \overline{u'} = 0 \Rightarrow \overline{u u'} = \overline{u' u} = 0$$

facendo lo stesso ragionamento per v e w e raccogliendo i medi e gli oscillatori si ottiene:

$$\boxed{E = E_k + E_t = \frac{1}{2} m (\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2}) + \frac{1}{2} m (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})}$$

dove

E_k : Energia Media di Tutte Le Particelle

E_t : Energia Interna Cinetica Caotica Traslationale

E_k è anche la velocità di insieme del baricentro ovvero la velocità macroscopica mentre E_t è un pezzo dell'energia interna e della termodinamica -

Posso scrivere E_t come

$$\boxed{E_t = \frac{1}{2} m V_{at}^2}$$

dove

V_{at} : Velocità di Agitazione termica

$$\boxed{V_{at} = \sqrt{\frac{2 E_t}{m}} = \sqrt{\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}}$$

Allora
$$v_{at} = \sqrt{3 \frac{RT}{M}}$$

Si può osservare che la forma della velocità di agitazione termica ha la stessa forma della velocità del suono

Velocità del suono
$$v_s = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}$$

La differenza sta solo nel coefficiente: 3 (o $\frac{8}{\pi}$ in teorie più raffinate) per la velocità di agitazione termica e γ per la velocità del suono.

Queste due hanno la stessa struttura perché il fenomeno fisico alla base delle due velocità è lo stesso ovvero la propagazione di collisioni molecolari a seguito di un impulso.

Per esempio, considerando l'aria a Tamb, essa è una miscela di $\sim 80\%$ N_2 e $\sim 20\%$ O_2 (c'è altra roba ma la trascuro) le cui masse molecolari sono

$$M(N_2) = 28 \frac{\text{kg}}{\text{mole}}$$

$$M(O_2) = 32 \frac{\text{kg}}{\text{mole}}$$

quindi la massa molare dell'aria sarà compresa tra 32 e 28:

$$M(\text{Aria}) \approx 29 \frac{\text{kg}}{\text{mole}}$$

$$\gamma(\text{Aria}) = 1,4$$

ma allora

$$v_{at} = \sqrt{\frac{8}{\pi} \cdot \frac{RT}{M}} = 498 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_s = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}} = 340,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La Velocità di Agitazione Termica è maggiore, ma le due sono comunque simili perché sono governate dallo stesso meccanismo.

Qual'è la conseguenza delle collisioni molecolari?

Considerando un gas in quiete in un serbatoio, non c'è moto macroscopico $\Rightarrow \vec{V} = 0$, $v = v' \neq 0$.

Allora le particelle per agitazione termica collidono fra di loro e con la parete del serbatoio. Quindi, se la temperatura non è nulla, avvengono le collisioni e nasce la **Pressione** che è proporzionale a (ρv_{at}^2) al livello microscopico.

Quindi anche lo strato limite è un effetto del flusso disuniforme. Se il flusso è laminare allora ho effetti viscosi mentre se è turbolento si hanno sforzi viscosi e sforzi di Reynolds.

È poi possibile che il flusso stacchi o separi o nascano scie.

La viscosità c'è ovunque ma gli effetti sono rilevanti solo nello strato limite.

Gradi di Libertà Energetici

Indico con L il grado di libertà energetico che è un numero che descrive la capacità della molecola di incamerare energia.

A L sono legati C_p, C_v, γ, R .

Abbiamo già introdotto l'energia $E = \frac{1}{2} m (\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'})$ ma questa è un'energia che fa riferimento unicamente alle fluttuazioni lungo le tre direzioni.

Esistono però altre forme di energia: per esempio quella rotazionale o vibrazionale.

Allora il numero di gradi di libertà indipendenti necessari per descrivere la molecola è proprio L .

Quindi come una molecola può incamerare energia? Può farlo per effetto di **Traslazione**, ovvero $u'u'$ ecc.

Poi la molecola può ruotare, quindi incamerare energia per effetto di **Rotazione**.

Questi effetti esistono già alle basse temperature dove le molecole si comportano come corpo rigido. Se poi la temperatura aumenta, allora entra in gioco l'energia **Vibrazionale** e per temperature ancora maggiori, quella **Elettronica**.

Quindi, qualunque sia la complessità della molecola i g.d.L. **traslazionali** sono 3

$$\text{G.d.L. Traslazionali} = 3 = L_t$$

$$L_v = L - L_t - L_r = 3 \cdot n - L_t - L_r$$

Ma devo considerare il meccanismo nella sua attività:

il legame vibra perché aumenta la temperatura e cambiamo le distanze. Allora le forme per incamerare energia per effetto della vibrazione e quindi della modifica della distanza di legame, sono due:

1. Energia Elastica $\frac{1}{2} k x^2$

2. Energia Cinetica

Questa è legata alla velocità $v = \dot{s} = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \Rightarrow \frac{1}{2} m \dot{s}^2$

Quindi ad ogni GDL Vibrazionale bisogna associare due forme di energia \Rightarrow devo moltiplicare L_v per 2 perché due sono le forme di energia.

Allora

$$L = L_t + L_r + 2L_v = L_t + L_r + 2(3n - L_t - L_r)$$

$$\boxed{L = 6n - L_t - L_r}$$

Quanto vale L per l'aria in Condizioni Ambiente?

L'aria è costituita da N₂ e O₂ biatomici $\Rightarrow L_r = 2$

$$L(\text{Aria}) = 5$$

A cosa serve L?

Ad L sono legati i Calori Specifici che posso calcolare grazie ad L sia per miscele semplici che più complesse.

Avevamo visto che $E = \frac{1}{2} k_B \cdot T$ che rappresenta l'energia di una molecola per effetto delle sue traslazioni. Ma esistendo tre possibilità di traslazioni avevamo che l'energia dovuta alle sole traslazioni era $\frac{3}{2} k_B \cdot T$.

Ora se uno vuole generalizzare E₀ che per L gradi di libertà, la molecola avrà energia

$$\boxed{E = L \cdot \frac{1}{2} k_B T} \left[\frac{J}{\text{molecola}} \right]$$

Allora

$$C_v = \frac{L}{2} \frac{R}{M} \left[\frac{J}{kg \cdot K} \right]$$

e fisicamente rappresenta il calore da fornire a un di gas a volume costante per aumentare la sua Temperatura di 1 grado.

Analogamente

$$C_p = \left. \frac{dQ}{dT} \right|_{p=const} = \frac{L+2}{2} \frac{R}{M} \left[\frac{J}{kg \cdot K} \right]$$

Ora se volessi calcolare i calori specifici molari faccio lo stesso ragionamento ma uso E e H, ottenendo

$$C_v = \left. \frac{dE}{dT} \right|_{V=const} = \frac{L}{2} R \quad C_p = \left. \frac{dH}{dT} \right|_{p=const} = \frac{L+2}{2} R \left[\frac{J}{Mol \cdot K} \right]$$

La dipendenza dei Calori specifici dalla temperatura entra in gioco solo oltre i 400° ÷ 500°.

Posso quindi scrivere

$$C_p = \frac{C_p}{M} \quad C_v = \frac{C_v}{M}$$

Posso poi calcolare l'Esponente dell'Isoentropica γ

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_p}{C_v} = \frac{L+2}{L}$$

Ma allora una volta noto L e R le caratteristiche del gas.

Posso poi scrivere

$$C_p - C_v = \frac{R}{M} \Rightarrow \frac{1}{C_p} \Rightarrow 1 - \frac{C_v}{C_p} = \frac{R}{M C_p} = 1 - \frac{1}{\gamma}$$

da cui

$$C_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{R}{M}$$

$$C_v = \frac{1}{\gamma-1} \frac{R}{M}$$

Aria

80% N₂, 20% O₂. L=5 M=29 $\frac{kg}{Mol}$ R=8314 $\frac{J}{Mol \cdot K}$

$$C_v = \frac{L}{2} \frac{R}{M} = \frac{5R}{2M} = 717 \frac{J}{kg \cdot K} \Rightarrow C_v = 20793 \frac{J}{Mol \cdot K}$$

$$C_p = \frac{L+2}{2} \frac{R}{M} = \frac{7R}{2M} = 1003 \frac{J}{kg \cdot K} \Rightarrow C_p = 29087 \frac{J}{Mol \cdot K}$$

$$\gamma = \frac{7}{5} = 1.4$$

$$C = \sqrt{\gamma \frac{R}{M}} = 340 \frac{m/s}{T=298K}$$

I liquidi vengono quindi considerati incompressibili mentre per i gas dipende dalla pressione applicata.

Ora se si volesse svincolare la relazione dal volume e legarla alla **Densità** è possibile moltiplicare e dividere per la massa del gas, ottenendo

In questo caso si ha il \oplus $\beta \cdot \frac{m}{m} \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp}}$

perché all'aumentare della pressione, la densità aumenta. Si può quindi scrivere

$$\boxed{\frac{\Delta \rho}{\rho} = \beta \Delta p}$$

Quindi l'essere o meno compressibile è legato alle pressioni che però sono a loro volta legate alle velocità: per basse velocità si può considerare il gas incompressibile mentre non si può per velocità elevate.

Per valutare la pressione nei due casi si può fare:

incompr: $p = p_0 + \frac{1}{2} \rho v^2$ compr: $p_0 = p \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

Allora considerando una linea di corrente lungo la quale la pressione è costante se questa incontra un corpo a bassa velocità la variazione di pressione che ne consegue è

trascurabile e la pressione può essere considerata costante; se invece la velocità è elevata allora anche per piccole deflessioni della linea di corrente a causa della presenza del corpo, le variazioni di pressione che ne conseguono sono notevoli e nascono gli urti con resistenza d'onda.

Per legare la compressibilità alla velocità parto dalla Legge di **Eulero**

$$dp = -\rho v dv$$

dividendo per $d\rho$ si ha $\frac{dp}{d\rho} = -\frac{1}{d\rho} \rho v dv$

Ma se l'entropia è costante $\Rightarrow \frac{dp}{d\rho} = a^2 = (Vel suono)^2$

Proprietà di Trasporto

Abbiamo visto che le particelle collidono fra di loro ed esse sono caratterizzate da una certa massa, una quantità di moto ed un'energia: queste tre, con gli urti, vengono trasportate tra le varie particelle.

Le proprietà che definiscono questo fenomeno sono le **Proprietà di Trasporto** ovvero: **Flusso di Massa**, **Flusso di Quantità di Moto**, **Flusso di Energia**.

A causa di queste fenomenologie possono nascere rispettivamente **Diffusione di massa**, **Sforzi Viscosi** e **Flussi di Calore**.

Come è definito il **Flusso**?

"Valore di una grandezza riferita alla superficie e al tempo"

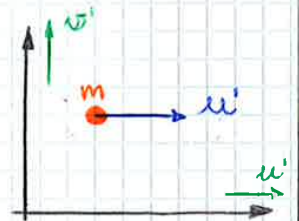
Le tre proprietà di trasporto sono definite da

- **Coefficiente di Diffusione** D
- **Viscosità Dinamica** μ
- **Conduttività Termica** λ

Viscosità Dinamica

Legge le fluttuazioni caotiche v' con la viscosità μ .

Supponendo di essere su un piano xy dove le velocità di fluttuazione sono u' e v' e considerando una particella di massa m che si muove di velocità u' , allora la particella è soggetta a quantità di moto $(m \cdot u')$ trasportata da v' per la lunghezza del libero cammino medio.



Quindi la quantità di moto trasportata su y è $(m u') \cdot v'$.

Questo vale per una molecola, allora per studiare l'effetto globale di tutte le molecole introduco n ovvero le molecole contenute in un volume, che si muovono su y con quantità di moto $(m u')$.

$$\int (m u') v' dn$$

Si ha quindi

$$\rho \bar{u} \bar{v} = -m \frac{d\bar{u}}{dy} \text{ e } n \text{ Vat} = -\rho \frac{d\bar{u}}{dy} \text{ e } \text{Vat} = \mu \frac{du}{dy}$$

Ma allora si può definire

$$\mu = \rho \cdot \text{Vat} \cdot e$$

Secondo Maxwell si scrive $\mu = \frac{1}{3} \rho \text{Vat} e$

Si osserva quindi che gli sforzi viscosi nascono solo se sono presenti gradienti di velocità, infatti $\mu \neq 0$ sempre ma il gradiente di velocità può essere o meno nullo: ho sforzi viscosi SOLO se ho gradienti di velocità.

Se queste condizioni si verificano allora alla nascita degli sforzi viscosi seguono dissipazioni, aumenti di entropia, perdite ecc.

Il flusso è diretto dalla velocità maggiore a quella minore, quindi il corretto segno sarebbe negativo, tuttavia per convenzione si omette:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

I flussi viscosi fanno nascere lo Strato Viscoso poiché vi è un gradiente di velocità tra la velocità del flusso e quella a parete che è nulla, nasce quindi dove $du/dy = \text{tangente del profilo di velocità}$.

$$\tau_{xy} = \mu \frac{du}{dy}$$

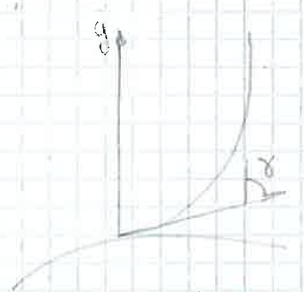
Si può calcolare lo sforzo a parete come

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$$

mentre integrando lo sforzo si può ottenere la resistenza da forma ed integrando la pressione sulla superficie si ottiene D_p .

Quindi la viscosità fa nascere la resistenza a parete.

Fluidi Newtoniani $\mu = f(\text{fluid})$ Non Newtoniani $\mu = f(\rho, \frac{\partial u}{\partial y})$



da cui si ha

$$\lambda = m \cdot c_v \cdot n \cdot V_0 + e = \mu \cdot c_v$$

- Abbiamo così caratterizzato gli sforzi viscosi ed i flussi di calore.

Ora a causa di questi sforzi nasce un strato limite che è sia cinematico che termico, caratterizzati dalle rispettive altezze di strato limite con campo di velocità e temperatura interna e velocità e temperatura esterne.

A queste fenomenologie sono associati dei numeri adimensionali:

Reynolds
$$Re = \frac{V L \rho}{\mu} = \frac{\text{Forze d'Inerzia}}{\text{Forze viscosi}}$$

Prandtl
$$Pr = \frac{\mu \cdot c_p}{\lambda} = \frac{\nu}{k} = \frac{\text{Viscosità cinematica}}{\text{Diffusività Termica}}$$

Il numero di Prandtl tiene conto sia degli effetti viscosi che della conducibilità termica e li mette a confronto rapportando il trasporto di quantità di moto ed il trasporto di energia: se $Pr \sim 1$ la diffusione di q.d.m. è dello stesso ordine di quello di energia.

Quindi il Prandtl rappresenta i limiti dello strato limite cinetico e termico ma quindi il $Pr = 1$ implica che lo strato limite cinetico e termico sono dello stesso ordine di grandezza.

Per l'aria $Pr(\text{Aria}) = 0,71$, $Pr(\text{gas}) < 1$ ma allora per un gas in genere $\delta_{\text{cinematico}} < \delta_{\text{termico}}$ (se lo spessore dello strato limite).

Grazie alla forma di Eucken che lega il Prandtl con i gradi di libertà energetici L

$$Pr = \frac{2L+4}{2L+9} = \frac{48}{98-5} \text{ per l'aria } \textcircled{=} 0,74 \sim 0,71$$

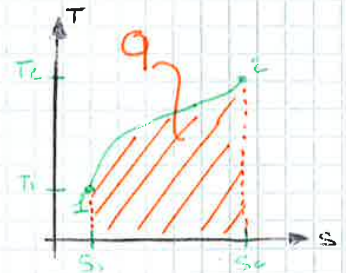
processo irreversibile.

Ma allora, considerando un processo Reversibile si ha $ds_{irr} = 0$ ma questo non significa che $ds = 0$ perché ho ancora Sq : solo se $Sq = 0 \Rightarrow ds = 0$ (isoentropico)
 Allora per un ciclo reversibile

$$ds = \frac{Sq}{T}$$

Considerando un processo che dalla condizione 1 alla condizione 2, si ha

$$q = \int_{s_1}^{s_2} T ds$$



Se il processo è Reversibile, ovvero in un processo da 1 a 2 posso tornare indietro con un processo identico e opposto (mentre con Irreversibile torno a 1 con $s_1 > s_1$) e Adiabatico, allora il processo si dice Isoentropico.

È possibile scrivere il secondo principio in una forma più generale

$$ds \geq \frac{Sq}{T}$$

dove con $=$ si intendono i processi reversibili mentre con $>$ quelli irreversibili.

Lo studio della variazione di entropia è utile per studiare gli urti dove si hanno dissipazioni per viscosità e conducibilità: allora tra monte e valle dell'urto, che sono due condizioni isoentropiche uniformi, ma con grandezze diverse, nasce una variazione di entropia Δs calcolata sfruttando il IPT ed il IIPT, esplicitando il SL ed arrivando a scrivere $\Delta s = f(p, T) = f(\rho, T)$:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - \frac{R}{M} \ln \frac{p_2}{p_1} = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} - \frac{R}{M} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Si dimostra quindi che s è effettivamente una funzione di stato legata a T e ρ .

La variazione di entropia è sempre positiva se il processo è irreversibile ed un processo, avviene nella

Il degrado della dissipazione è valutato con il Δs e si avrà $P_B > P_0$.

Anche nel punto A si ha un gradiente di velocità ma è un du/dx trascurabile rispetto al du/dy del punto B.

Se anziché una sfera, avessi un profilo alare, il punto di arresto si sposta con il variare dell'incidenza.

Supponendo di seguire un'altra linea di corrente, l'entalpia totale H è ancora quella di serbatoio poiché tutte le particelle fluide provengono da lì definendo quindi un **Flusso Omotetico e Omotropico** essendo anche adiabatico e isoentropico.

Per i Processi Isoentropici valgono le seguenti relazioni:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^\gamma$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Queste possono essere sfruttate per legare grandezze statiche e totali.

Si può osservare che

$$\begin{aligned} \frac{P}{\rho^\gamma} = \text{cost} &\Rightarrow \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{s=\text{cost}} = \text{cost} \cdot \gamma \rho^{\gamma-1} = \text{cost} \cdot \gamma \frac{\rho^\gamma}{\rho} \left(\frac{P}{\rho} \right) = \\ &= \text{cost} \cdot \frac{\rho^\gamma}{\rho} \cdot \gamma \frac{P}{\rho} = a^2 \end{aligned}$$

Quindi per un processo isoentropico

$$a = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{R}{M T}}$$

A questo punto si scrivono le leggi di conservazione e per farlo si possono applicare metodi differenti: è possibile studiare un volume di controllo **Finito** ottenendo le equazioni in forma **Integrale**, oppure un volume di controllo **Infinitesimo** ottenendo equazioni **Differenziali**. La forma integrale dà il tutto mentre quella differenziale definisce le condizioni punto-punto ed è usata in CFD.

Definito il volume di controllo Ω ancora due modi di scrivere le equazioni a seconda di come osservo questo volume: **Formulazione Euliana** considera il volume, finito o infinitesimo, fisso nello spazio, quindi blocco il volume e studio cosa succede alle particelle che lo attraversano; **Formulazione Lagrangiana** a volume finito o infinitesimo osserva cosa succede alla particella con osservatore sulla particella che ne studia l'evoluzione in (x, y, z, t) .

Le due scritture sono differenti ma è possibile passare da una all'altra poiché alla base descrivono lo stesso fenomeno.

Per la forma Lagrangiana si fa riferimento alla **Derivata Sostanziale**

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla(\dots)$$

dove $\frac{\partial}{\partial t}$ è valutata a posizione fissa mentre le derivate su x, y e z all'istante t fisso.

Ne consegue che se il flusso è stazionario, la risultante delle forze sarà pari al flusso di quantità di moto, questo viene sfruttato per il calcolo della Drag in galleria del vento.

Si avrà quindi la variazione della Q.d.M. nel tempo $\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{v} dV$ e il flusso $-\int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS$ considerato positivo uscente e negativo entrante.

Per quanto riguarda le forze queste possono essere

→ F. di Superficie → Pressione

→ Viscosità

→ F di Massa → di Campo Magn., Grav., Elettr.

Per le Forze di Pressione queste dipendono da p che è uno scalare, che diventa una forza se moltiplicata per S e ha direzione la normale alla superficie con verso entrante \Rightarrow Ha valore negativo

$$\boxed{\vec{F}_p = - \int_S (p \cdot \vec{n}) dS}$$

Per le Forze di Campo queste vengono riferite all'unità di massa e indicate in modo generico con \vec{F} la quale può essere forza peso, gravità, elettrica o magnetica, allora

$$\vec{F} \left[\frac{N}{kg} \right] \Rightarrow \boxed{F_{m.c} = \int_{Vol} \rho \vec{F} dVol}$$

Per ora trascuro le forze viscosi.

Si ottiene quindi:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{v} dVol = - \int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS - \int_S (p \cdot \vec{n}) dS + \int_{Vol} \rho \vec{F} dVol}$$

Questa è un'equazione vettoriale quindi può essere scomposta lungo le tre direzioni.

Quindi se il flusso è incompressibile con queste quattro equazioni ho risolto il sistema ma se è compressibile mi serve l'energia e l'equazione di stato.

Per le lavoro da Campo invece si ha

$$dF_c = \rho \bar{F} dVol \Rightarrow \boxed{L_c = \int_V \rho (\bar{F} \cdot \bar{v}) dVol}$$

Si avrà infine il contributo degli effetti viscosi e conduttivi che dà contributo W_{visc}

Sommando i vari contributi si ottiene:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \left(E + \frac{v^2}{2} \right) dV = - \int_S \rho \left(E + \frac{v^2}{2} \right) (\bar{v} \cdot \bar{n}) ds + \int_V \dot{q} \rho dV + \dot{Q}_{vis} - \int_S p (\bar{v} \cdot \bar{n}) ds + \int_V \rho (\bar{F} \cdot \bar{v}) dV + W_{visc} + W_{kraft}}$$

Questa è un'equazione scalare.

Si hanno quindi complessivamente cinque equazioni di equilibrio a cui può essere aggiunta l'equazione di Stato per risolvere problemi compressibili e trovare u, v, w, p, ρ e T del fluido in qualunque punto.

La forma integrale è usata per calcolare le forze globali agenti sul sistema, vengono quindi sfruttate in galleria del vento per valutare la resistenza dei profili esposti alla corrente essendo noti i flussi di QdM entranti ed

uscanti dalla galleria si avrà quindi, in condizioni stazionarie, la forza risultante agente sul corpo.

Vengono anche sfruttate per studiare flussi 2D con vortici contenuti nel volume di controllo.

Se si volesse fare uno studio Lagrangiano bisogna seguire la particella.

Passare da uno all'altro è sempre possibile ma è complesso, è sempre possibile perché si descrive lo stesso fenomeno. Per passare da Euleroiano a Lagrangiano basta sviluppare le derivate, per la massa è semplice ma per le altre diventa più complesso.

Per la massa si ha

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = - \left(\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right)$$

dove il termine a sinistra dell'uguale rappresenta la Derivata Sostanziale della densità nel tempo $\Rightarrow \rho$ varia a punto fisso in funzione del tempo mentre a istante fisso in funzione della posizione:

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\nabla \cdot \vec{v})} \quad \text{Forma Lagrangiana}$$

Questa è la forma Lagrangiana perché è presente la derivata sostanziale. Si definisce quindi l'Equazione Non Conservativa in Forma Lagrangiana sfruttata per i flussi compressibili dove $D\rho/Dt \neq 0$. In condizioni di flusso compressibile infatti si ha

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0}$$

Conservazione della Quantità di Moto

Devo trasformare due integrali di superficie in volume. Per il contributo delle forze di pressione si ha

$$-\int_S (p \cdot \vec{n}) dS = -\int_V \nabla p dV$$

mentre per il flusso conviene prima proiettarlo lungo le tre direzioni e poi trasformarlo.

EsPLICITANDO le derivate della forma Euleriana, ottengo accelerazioni locali ed accelerazioni convettive. Si ottiene il termine non lineare $u \frac{\partial u}{\partial x}$ che porta a notevoli difficoltà nella risoluzione - È possibile che la soluzione dell'equazione non sia unica -

Nella forma Euleriana è più semplice -

In Bibliografia si definisce **Forma Euleriana** la forma semplificata senza contributi viscosi -

Quando poi inserisco i termini viscosi ho ancora più complesso ma il peggio è la non linearità -

Nel caso in cui considero un fluido in quiete $\Rightarrow \frac{Dv}{Dt} = 0$ allora ottengo la **Legge di Stevino** che lega pressioni e altezze manometriche:

$$\Delta p = \rho g \Delta y = \gamma \Delta y$$

Conservazione dell'Energia

Trasformo due integrali di superficie

$$\int_S \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \int_V \nabla \cdot \left(\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \vec{v} \right) dV$$

$$\int_S p (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \int_V \nabla \cdot (p \vec{v}) dV$$

Sostituendo, raggruppando e considerando un volume arbitrario non nullo si ottiene

Forma Euleriana

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \right) + \nabla \cdot \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \vec{v} \right] = - \frac{\partial p u}{\partial x} - \frac{\partial p v}{\partial y} - \frac{\partial p w}{\partial z} + \rho \dot{q} + \rho (\vec{f} \cdot \vec{v}) \right]$$

Forma Lagrangiana

$$\left[\rho \frac{D \left(e + \frac{v^2}{2} \right)}{Dt} = - \frac{\partial p u}{\partial x} - \frac{\partial p v}{\partial y} - \frac{\partial p w}{\partial z} + \rho \dot{q} + \rho (\vec{f} \cdot \vec{v}) \right]$$

Allora nel caso in cui ρ flusso stationario nei confronti della pressione, $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$, si ha $\rho \frac{DH}{Dt} = 0$ quindi

$$H = \text{cost} = R + \frac{V^2}{2} = \text{cost} \Rightarrow R \uparrow \Rightarrow V^2 \downarrow$$

devo però calcolare quanto vale questa costante e la valuto in un punto dove ho le grandezze necessarie per il calcolo della costante.

Posso quindi avere diversi casi per il calcolo di $H = \text{cost}$.

→ Posso calcolare la costante basandomi sulle grandezze di una corrente uniforme caratterizzata da V_0, T_0, ρ_0 da cui

$$H_0 = R_0 + \frac{V_0^2}{2} = c_p T_0 + \frac{V_0^2}{2} = c_p T_{0\infty} = \text{cost}$$

e posso ricavare la relazione tra grandezze totali e statiche

$$T_{0\infty} = T_0 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 \right)$$

Lungo la linea di corrente H è costante.

→ posso anche calcolarlo note le Condizioni di Serbatoio ovvero T_s e p_s e tenendo conto del fatto lungo una linea di corrente H è costante allora $H = H_{\text{serb}} = \text{cost}$ Non si hanno effetti dissipativi.

Vi possono poi essere altre forme per descrivere la soluzione $H = \text{costante}$ elaborando la forma

$$R + \frac{V^2}{2} = c_p T + \frac{V^2}{2} = c_p T_0 = \text{cost}$$

→ Posso moltiplicare e dividere per $\gamma \frac{R}{M}$ ottenendo

$$c_p T \frac{\gamma R/M}{\gamma R/M} + \frac{V^2}{2} = c_p T_0 \frac{\gamma R/M}{\gamma R/M}$$

dove

$$c_p = \frac{\gamma R}{\gamma-1 M} \Rightarrow \frac{c_p}{\gamma R/M} = \frac{1}{\gamma-1} \quad a^2 = \gamma \frac{R}{M T}$$

si ottiene

$$\boxed{a^2 \frac{1}{\gamma-1} + \frac{V^2}{2} = a_0^2 \frac{1}{\gamma-1}}$$

dove a_0 è vel del suono a $T = T_0$

Abbiamo quindi visto diverse forme per valutare $H = \text{cost}$.
 Ora, quando si rappresentano le grandezze sull'odografa può talvolta essere utile, per Mach molto elevati, non fare riferimento ad un Mach effettivo ma ad un M^* legato a quello effettivo e che in condizioni critiche $M=1$ assume anch'esso $M^*=1$ mentre se $M > 1$ $M^* > 1$ e $M < 1$, $M^* < 1$.

Per ricavare la relazione fra i due si ha

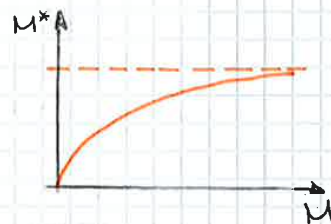
$$\left(\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{V^2}{2} = \frac{a^{*2}}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) / V^2 \Rightarrow \frac{a^2}{V^2} \frac{1}{\gamma-1} + \frac{1}{2} = \frac{a^{*2}}{V^2} \frac{1}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

$$\frac{1}{M^2} \frac{1}{\gamma-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{M^{*2}} \frac{1}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \quad \text{da cui}$$

$$M^2 = \frac{2}{\left(\frac{\gamma+1}{M^{*2}} \right) - (\gamma-1)}$$

$$M^{*2} = \frac{M^2(\gamma+1)}{2 + M^2(\gamma-1)}$$

È quindi possibile fare il grafico $M^* = f(M)$ ed osservare che anche se $M \rightarrow \infty$, M^* è limitata e quindi sarà più facile rappresentarlo sull'odografa. Il valore limite è



$$M_{\text{lim}}^* = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

Ora studiando il problema in condizioni critiche, $M = M^* = 1$ è possibile definire le grandezze corrispondenti alle condizioni di $M^* = 1$ da $T_0 = T \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) = T^* \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} (M=1)^2 \right)$ e dalle relazioni dell'isentrofica si ha

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\gamma+1}$$

$$\frac{P^*}{P_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Anche qui è solo $f(\gamma)$.

Quindi per l'aria

$$\frac{T^*}{T_0} = 0,833$$

$$\frac{P^*}{P_0} = 0,528$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = 0,634$$

Osseervazioni

Caso A

Se si suppone di analizzare un flusso stazionario a punto fisso allora il contributo $\frac{\partial V}{\partial t}$ è nullo e si ha

$$T \nabla s = \nabla H - \bar{V} \times \nabla \times \bar{V}$$

quindi cinematicamente se si ha un campo irrotazionale con $\nabla \times \bar{V} = 0$ allora

$$\nabla \times \bar{V} = 0 \Rightarrow \boxed{T \nabla s = \nabla H}$$

ovvero le sorgenti di entropia sono i gradienti di entalpia. Termodinamicamente si osserva invece che, se nel campo di moto $\nabla H \neq 0$ e $\nabla s \neq 0$ allora il campo è irrotazionale. Inoltre un campo irrotazionale a monte dell'urto può, a causa delle dissipazioni di quest'ultimo, diventare a valle.

Caso B

Se invece si ha un flusso non stazionario si ha la forma base del teorema di Crocco con il contributo $\frac{\partial \bar{V}}{\partial t}$.

Allora se il flusso è omoentalpico $\nabla H = 0$ e irrotazionale $\nabla \times \bar{V} = 0$, allora ha comunque incremento di entropia per effetto del campo non stazionario

$$\left. \begin{array}{l} \nabla H = 0 \\ \nabla \times \bar{V} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{T \nabla s = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t}}$$

Caso C

Per un campo di moto omoentalpico $\nabla H = 0$ e omoentropico $\nabla s = 0$ allora gli aspetti non stazionari del flusso lo rendono rotazionale

$$\boxed{\bar{V} \times \nabla \times \bar{V} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t}} \quad \leftarrow \begin{cases} \nabla H = 0 \\ \nabla s = 0 \end{cases}$$

Si può quindi osservare che se la velocità cresce allora la pressione diminuisce e viceversa -

Se la densità ρ è costante, si può integrare e ottenere

$$\left| p + \frac{1}{2} \rho V^2 = \text{cost} \right| \quad ? \quad ? \quad ?$$

e la costante è la stessa su tutte le linee di corrente e vale anche

$$\left| p_0 = p \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right|$$

Prima di scrivere l'equazione del potenziale della velocità si fa una breve premessa di Algebra Vettoriale.

Si indica con \vec{A} il generico vettore - Se $\nabla \times \vec{A} = 0$ allora è sempre possibile scrivere $\vec{A} = \nabla \phi$ dove ϕ è uno scalare -

Allora nel nostro caso, dato il campo di moto \vec{V} irrotazionale per le ipotesi allora $\vec{V} = \nabla \phi$ dove ϕ è uno scalare e prende il nome di Velocità Potenziale -

Allora

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{k} \quad e$$

$$\vec{V} = u \hat{i} + v \hat{j} + w \hat{k} \quad \text{allora}$$

$$\underline{u = \phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}} \quad \underline{v = \phi_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}} \quad \underline{w = \phi_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}}$$

A questo punto è possibile scrivere l'equazione:

Passo 1

Si parte dall'Equazione della Continuità, studiando un flusso stazionario e compressibile

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0$$

e sostituendo le ϕ_i a u, v, w

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho \phi_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \phi_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \phi_z) = 0$$

Passo 4

Sostituendo le derivate della densità nell'equazione ricavata al passo 1 si ottiene:

$$\rho(\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz}) + \phi_x \left[-\frac{\rho}{a^2} (\phi_x \phi_{xx} + \phi_y \phi_{yx} + \phi_z \phi_{zx}) \right] + \phi_y \left[-\frac{\rho}{a^2} (\phi_x \phi_{xy} + \phi_y \phi_{yy} + \phi_z \phi_{zy}) \right] + \phi_z \left[-\frac{\rho}{a^2} (\phi_x \phi_{xz} + \phi_y \phi_{yz} + \phi_z \phi_{zz}) \right] = 0$$

Passo 5

Ora si divide tutto per ρ , si mettono in evidenza le derivate seconde e riordinando i fattori si ottiene:

$$\left(1 - \frac{\phi_x^2}{a^2} \right) \phi_{xx} + \left(1 - \frac{\phi_y^2}{a^2} \right) \phi_{yy} + \left(1 - \frac{\phi_z^2}{a^2} \right) \phi_{zz} - 2 \frac{\phi_x \phi_y}{a^2} \phi_{xy} + - 2 \frac{\phi_x \phi_z}{a^2} \phi_{xz} - 2 \frac{\phi_y \phi_z}{a^2} \phi_{yz} = 0$$

Passo 6

A questo punto è opportuno scrivere $a = f(\phi)$ e per farlo si può sfruttare la conservazione dell'Energia $H = \text{cost}$,

$$\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{v^2}{2} = \frac{a_0^2}{\gamma-1}$$

tenendo conto del fatto che a_0 è costante lungo il campo di moto, note le condizioni iniziali e v può essere espressa in funzione di ϕ . È quindi possibile riscrivere a e sostituirlo inserendo nell'equazione del potenziale della velocità anche aspetti energetici.

Si scrive quindi

$$a^2 = a_0^2 - \frac{\gamma-1}{2} v^2 = a_0^2 - \frac{\gamma-1}{2} (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2)$$

e sostituendo si ricava un'unica equazione in cui l'unica incognita è lo scalare $\phi = \phi(x, y, z)$.

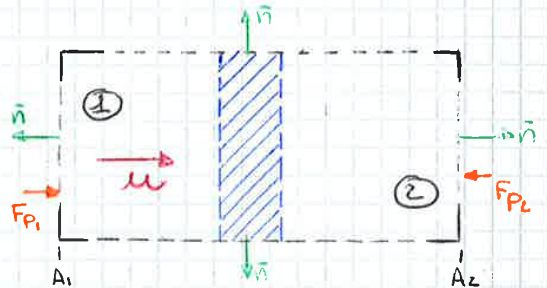
Leggi di Conservazione 1D

Scrivo le equazioni in forma integrale Euleroiana ovvero considerando un volume di controllo finito e fisso. Schematizzo il volume di controllo con sezione A costante.

All'interno del volume può avvenire un urto, si può fornire calore e si può avere attrito.

I campi ρ e z sono uniformi: al loro interno u, T, p e ρ sono costanti sia lungo x che su A .

Si introducono le convenzioni per i versori normali positivi, si assumono forze viscosse nulle, flusso stazionario e forze di campo \vec{F} nulle.



Conservazione della Massa 1D

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_S \rho(\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = 0$$

Il primo fattore è nullo per l'ipotesi di stazionarietà. Per il secondo, si devono considerare i contributi di flusso attraverso tutte le superfici ma quelli normali sono nulli, quindi

$$\int_S \rho(\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \rho_1(-u)A_1 + \rho_2(u)A_2 = -\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2 = 0 \quad A_1 = A_2 = A$$

si ottiene

Equazione di Continuità 1D

$$\boxed{\rho \cdot u = \text{cost}}$$

Conservazione della Quantità di Moto 1D

In condizioni stazionarie con forze di campo \vec{F} nulle si ha:

$$\int_S \rho \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = - \int_S p \cdot \vec{n} dS$$

Allora come per la massa i contributi sulle facce orizzontali sono nulli mentre non lo sono sulle facce verticali, allora

$$- \int_S p \cdot \vec{n} dS = - \int_{A_1} - \int_{A_2} = -[-p_1 A_1] - [+p_2 A_2] = p_1 A_1 - p_2 A_2$$

Ora divido tutto per l'equazione della continuità $\pm D$, dividendo per $\rho_1 u_1$ a sinistra e per $\rho_2 u_2$ a destra, ottenendo

$$q \left[\frac{\dot{Q}}{A \rho_1 u_1} + \frac{p_1}{\rho_1} + e_1 + \frac{u_1^2}{2} \right] = \frac{p_2}{\rho_2} + e_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

H_1 H_2

Conservazione dell'Energia $\pm D$

$$q + H_1 = H_2$$

Allora per un flusso Adiabatico $q=0 \Rightarrow H = \text{cost} = c_p T_0$ quindi la $T_0^{(1)} = T_0^{(2)} \Rightarrow$ con un urto, che è un fenomeno adiabatico, la temperatura totale e l'entalpia totale rimangono costanti, si ha dissipazione di Energia cinetica ma non si sta fornendo calore.

-16/10/15-

Piccole Perturbazioni

Le **Perturbazioni**, grandi o piccole, sono riferite a variazioni di pressione che avvengono all'interno del campo.

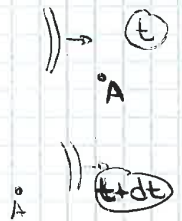
Se piccole perturbazioni saranno quindi generate da sorgenti che perturbano poco il campo di moto \Rightarrow Suono!

Ma come propaga il suono?

È descritto dalla collisione molecolare. Una sorgente sonora in aria in quiete emette un suono che propaga perché le molecole urtano fra loro con fronte d'onda sferico. Quindi se la velocità della sorgente è nulla l'onda si propaga con sfere concentriche.

La propagazione si dice quindi di debole entità perché un osservatore in A che misura una grandezza in t e la rimisura in $t+dt$ dopo che l'onda è passata rileverà circa lo stesso valore.

La propagazione avviene inoltre in condizioni adiabatiche e reversibili, quindi isoentropiche.



Ma allora se la sorgente è sonica $\mu = 90^\circ$ mentre se per esempio $M = 2 \Rightarrow \mu = 30^\circ$.

● Si può scrivere un "rapporto" fra energia cinetica $v^2/2$ e energia interna legata all'agitazione molecolare:

$$\frac{v^2/2}{e} = \frac{v^2/2}{c_v T} = \frac{v^2/2}{\left(\frac{1}{\gamma-1} \frac{R}{M}\right) T} \cdot \frac{\gamma}{\gamma} = \frac{\gamma v^2/2}{a^2 \frac{1}{\gamma-1}} = \frac{v^2}{a^2} \frac{\gamma(\gamma-1)}{2}$$

$$\boxed{\frac{v^2/2}{e} = \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} M^2}$$

Quindi il rapporto tra energia cinetica e energia interna è funzione del solo M e del tipo di fluido.

● Per l'aria ($\gamma = 1,4$) si ha:

→ $M = 0,2 \Rightarrow 0,0112$, sono prevalenti gli effetti termici

→ $M = 1 \Rightarrow v^2/2/e = 0,28$

→ $M = 2 \Rightarrow v^2/2/e = 1,12$, sono comparabili

→ $M = 4 \Rightarrow v^2/2/e = 4,48$, prevalenza cinetica -

Grandi Perturbazioni

Le grandi perturbazioni sono caratterizzate da forti variazioni di pressione.

● La perturbazione è indotta dal corpo stesso in funzione della Forma, dell'Incidenza e del Mach.

Tutto questo porta a generare vortici che comportano una Resistenza d'Onda dovuta alla pressione, non all'attrito.

In fatti le equazioni che regolano l'urto sono scritte supponendo flusso inviscido,

Le grandi perturbazioni, a differenza delle piccole, sono caratterizzate da processi irreversibili in fatti tra le condizioni a monte dell'urto e quelle a valle vi è molta differenza.

● La Resistenza d'Onda nasce quindi dal fatto che l'urto è adiabatico ma non reversibile.

Grazie al processo isoentropico per cui $p/\rho^\gamma = \text{cost}$ allora è possibile ricavare

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \gamma \frac{R}{M} T = \gamma \frac{p}{\rho} \Rightarrow \boxed{a^2 = \gamma \frac{R}{M} T = \gamma \frac{p}{\rho}}$$

Il legame fra $a^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{s=\text{cost}}$ definisce anche che quanto varia p in relazione a quanto varia ρ è indice della Compressibilità del Gas.

Infatti se $a \rightarrow \infty \Rightarrow M \rightarrow 0 \Rightarrow T \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial p} \rightarrow 0 \Rightarrow$ Incompressibile.

Meccanismo dell'Urto

Come si genera un urto?

Tubo d'Urto

Impianto aerodinamico usato per esperimenti supersonici costituito da un cilindro con all'interno un pistone inizialmente fermo. All'istante t il pistone genera un impulso spostandosi di $d\ell p$.



In conseguenza allo spostamento le molecole a destra del pistone vengono spinte e spingono quelle adiacenti dando vita ad un Onda di Compressione Semplice che si muove con velocità del suono a_i legata alla temperatura del fluido. Le particelle a sinistra del pistone vengono invece tirate e generano un fronte d'onda che propaga a monte con un Onda di Espansione Semplice.

Entrambe le onde sono isoentropiche elementari.

Allora, a valle dell'onda isoentropica il gas è compresso quindi si avranno Temperature, pressioni maggiori. Viceversa a sinistra si avranno Temperature e pressione minori.

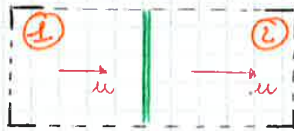
In conseguenza si avranno anche velocità del suono maggiori a destra e minori a sinistra.

Se ora il pistone fornisce un secondo impulso l'onda di compressione vede un gas più caldo a causa della prima

Urto Retto

Si considera una corrente perpendicolare al piano dell'Urto.

Si scrivono le equazioni considerando un volume di controllo al cui interno avviene l'urto retto.



Il flusso è unidimensionale e sono note le grandezze in ① mentre sono incognite quelle in ②.

Si effettuano alcune Ipotesi:

→ Onda Stazionaria, ferma nel volume di controllo

→ Flusso Adiabatico, non si fornisce o sottrae calore.

Allora assegnate le grandezze nel campo ① da cui calcolare i valori nel campo ② e per farlo esprimiamo tutto come rapporti dove f_i è la generica grandezza.

$$\frac{f_2}{f_1} = f(M_1)$$

Svolgimento

Parto dall'Equazione dell'Energia, tenendo conto dell'ipotesi di flusso adiabatico, $q=0$, si ha

$$H_1 = H_2 \Rightarrow h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} \Rightarrow c_p T_{01} = c_p T_{02} \Rightarrow$$

$$\boxed{T_{01} = T_{02}}$$

Quindi se il flusso è adiabatico la Temperatura Totale è costante. È l'unica che si conserva.

Ora si divide l'equazione della QdM per la Continuità:

$$\frac{QdM}{\text{Continuità}} \Rightarrow \frac{p_1 + \rho_1 u_1^2}{\rho_1 u_1} = \frac{p_2 + \rho_2 u_2^2}{\rho_2 u_2} \Rightarrow \frac{p_1}{\rho_1 u_1} + u_1 = \frac{p_2}{\rho_2 u_2} + u_2$$

A questa relazione si possono trovare, matematicamente, due soluzioni delle quali però solo una è fisicamente corretta.

→ $u_1 < a^*$, $u_2 > a^*$, corrente a monte subsonica

In questo caso la corrente a valle dell'urto aumenta in velocità con un'onda di espansione e $S_2 < S_1$.

Questa soluzione non ha senso fisicamente.

→ $u_1 > a^*$, $u_2 < a^*$ corrente a monte supersonica

In questo caso la corrente a valle dell'urto rallenta diventando subsonica e aumentando in entropia quindi la soluzione ha senso sia matematicamente che fisicamente.

Quindi l'urto è più veloce del fronte di propagazione delle piccole perturbazioni. La velocità dell'urto è supersonica o meglio, "perché vi sia un urto, la corrente a monte deve essere supersonica", è la stessa cosa cambia solo sistemi di riferimento.

La relazione di Prandtl è il primo risultato della trattazione.

Ora proseguendo con il modello ricavare le condizioni a valle.

Parto dalla relazione di Prandtl dividendo tutto per a^{*2}

$$a^{*2} = u_1 \cdot u_2 \Rightarrow 1 = \frac{u_1}{a^*} \cdot \frac{u_2}{a^*} = M_1^* \cdot M_2^* \Rightarrow M_2^* = \frac{1}{M_1^*}$$

Ma il generico M^* è legato al corrispondente M con la relazione

$$(M^*)^2 = \frac{(\gamma+1) M^2}{2 + (\gamma-1) M^2}$$

Sostituendo si ottiene

$$\frac{(\gamma+1) M_2^2}{2 + (\gamma-1) M_2^2} = \frac{2 + (\gamma-1) M_1^2}{(\gamma+1) M_1^2}$$

Ora considerando la conservazione dell'Energia in forma

$$\rho_p T + \frac{u^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{R}{M} T + \frac{u^2}{2} = \text{cost}$$

ma

$$\frac{R}{M} T = \frac{p}{\rho} \Rightarrow \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{cost}$$

Allora scrivendo la conservazione tra le zone 1 e 2 si ricava

$$u_1^2 - u_2^2 = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{p_2}{\rho_2} - \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right)$$

Allora uguagliando le due forme per $u_1^2 - u_2^2$ si ottiene

$$\left[\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) = (p_2 - p_1) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \right] \times \frac{\rho_2}{p_1}$$

$$\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{p_2}{p_1} - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) = \left(\frac{p_2 - p_1}{p_1} \right) \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} + 1 \right)$$

da cui è possibile scrivere $p = f(\rho)$ o $\rho = f(p)$.
Storicamente si ottiene

Equazione di Rankine - Hugoniot

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}}$$

Ricavo $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ dall'equazione di continuità:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} \times \frac{u_1}{u_1} = \frac{u_1^2}{u_1 u_2} = \frac{u_1^2}{a^{*2}} = M_1^{*2} = f(M_1)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1) M_1^{*2}}{2 + (\gamma-1) M_1^{*2}}$$

Per valutare il salto di entropia si applica la formula

$$S_2 - S_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - \frac{R}{M} \ln \frac{P_2}{P_1}$$

- sostituendo i rapporti trovati ed ottenendo una relazione che è solo funzione del Mach.

$$S_2 - S_1 = c_p \ln \left\{ \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} (M_1^2 - 1) \right] \left[\frac{2 + (\gamma-1) M_1^2}{(\gamma+1) M_1^2} \right] \right\} - \frac{R}{M} \ln \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right]$$

$$\boxed{S_2 - S_1 = c_v \ln \left\{ \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} (M_1^2 - 1) \right] \left[\frac{2 + (\gamma-1) M_1^2}{(\gamma+1) M_1^2} \right]^\gamma \right\}}$$

- Allora se il $M_1 > 1 \Rightarrow S_2 - S_1 > 0$ quindi l'entropia aumenta passando da monte a valle dell'urto.

Oltre alle grandezze statiche è possibile ricavare quelle totali.

$$S_2 - S_1 = c_p \ln \frac{T_{02}}{T_{01}} - \frac{R}{M} \ln \frac{P_{02}}{P_{01}} = S_{02} - S_{01}$$

Ma abbiamo già ricavato che $T_{01} = T_{02} \Rightarrow \ln 1 = 0$ allora

$$\boxed{S_{02} - S_{01} = - \frac{R}{M} \ln \frac{P_{02}}{P_{01}}}$$

- dove grazie al flusso isoentropico si può scrivere

$$P_0 = p \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

allora

$$\boxed{\frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{P_2}{P_1} \left[\frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \right]}$$

A questo punto si può ricavare il rapporto che lega la pressione dalla legge della Quantità di Moto

$$P_1 + \rho_1 u_1^2 = P_2 + \rho_2 u_2^2$$

ma $\rho u^2 = \rho a^2 M^2 = \rho \left(\gamma \frac{P}{\rho} \right) M^2 \Rightarrow \rho u^2 = \gamma P M^2$

sostituendo

$$P_1 + \gamma P_1 M_1^2 = P_2 + \gamma P_2 M_2^2$$

$$\left[P_2 - P_1 = \gamma P_1 M_1^2 - \gamma P_2 M_2^2 \right] / P_1$$

$$\left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right) = \gamma M_1^2 - \gamma \frac{P_2}{P_1} M_2^2 \quad \text{da cui}$$

$$\boxed{\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}}$$

Per la temperatura si parte invece dall'equazione di stato e dalla continuità

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad \oplus \quad \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad \oplus \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{u_2}{u_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} \frac{u_2}{u_1} \quad \text{con} \quad \frac{u_2}{u_1} = \frac{M_2 a_2}{M_1 a_1} = \frac{M_2}{M_1} \cdot \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1} \frac{M_2}{M_1} \right)^2 \Rightarrow \boxed{\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{(1 + \gamma M_1^2) M_2}{(1 + \gamma M_2^2) M_1} \right)^2}$$

Con l'equazione di stato ricavo poi le densità

$$\boxed{\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{T_1}{T_2} = \frac{(1 + \gamma M_2^2)}{(1 + \gamma M_1^2)} \cdot \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^2}$$

Passando alle grandezze totali valgono sempre le condizioni di isoentropicità per cui

$$P_0 = P \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad T_0 = T \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)$$

Partendo dall'equazione della Q.d.M., dall'equazione di stato e dalla legge per il salto di entropia in forma statica si ricava

$$\frac{dT}{ds} = \frac{T}{c_p} \frac{\gamma M^2 - 1}{M^2 - 1}$$

$$\frac{du}{ds} = -\frac{u}{c_v} \frac{1}{\gamma(M^2 - 1)}$$

Ora supponendo di studiare un condotto con $M_1 > 1$ e calore fornito al flusso $q > 0$ come sarà M_2 ?

Se $M_1 > 1 \Rightarrow M_2 > 1 \Rightarrow M^2 - 1 > 0$
allora

$$\frac{dT}{ds} > 0 \Leftrightarrow M > \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$$



Se avessi $\frac{dT}{ds} < 0 \Rightarrow M < \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ quindi $M < 1$ ma questo va contro l'ipotesi di partenza --

Per la velocità si ha $M_1 > 1 \Rightarrow M^2 - 1 > 0 \quad M > 1$

$$\frac{du}{ds} < 0$$

Quindi il flusso rallenta in velocità e il Mach diminuisce mentre si porta in con condizioni tali da avere $dT/ds \rightarrow \infty$ ovvero per $M = 1$.

Ora se sulla generica sezione individuo $M = 1$ allora il calore fornito farà diventare la corrente al massimo sonica, ma non subsonica ovvero la porta in **Condizioni di Choking** $\Rightarrow M = 1$ per $q = q_{max} = q^*$.

Riportando sul piano T/s l'evoluzione che si ha per $M_1 > 1$ si ha che aumentando il calore fornito a pari condizioni iniziali si arriva a un $M_2' > 1$ ma minore del precedente ottenuto con un calore minore, infatti $du/ds < 0$.

Continuando ad aumentare la quantità di calore fornito si ottiene una curva a pendenza positiva, quindi crescente.

L'aumento di calore è fornito sempre dallo stato iniziale non da punto precedente, ovvero



Sovrapponendo le curve ricavate dalle due condizioni della corrente in ingresso si ottiene

Curva di Rayleigh



Integrando tra due entropie P_{R0} il calore fornito.

Ora supponendo di partire dal ramo subsonico fornisco calore q^* che porta $M_c = 1$ e se poi sottraigo calore allora potrei, tecnicamente, continuare ad accelerare. Analogamente potrei farlo partendo da $M > 1$ e decelerando in modo continuo sottraendo calore dopo il punto $M = 1$.

Cosa succede se fornisco $q > q^*$?

Se P_{R0} $M_1 > 1$ allora nasce un'onda d'urto con Mach a valle dell'urto subsonico in modo da riuscire ad elaborare il calore fornito. Può essere un urto retto con $M_{valle} < 1$ o un urto obliquo con $M_{valle} < M_{monte}$ ma non necessariamente subsonico.

Se invece si ha $M_1 < 1$ allora nascono delle onde dissipative.

Per come sono definite, qualunque sia il M_1 in ingresso, con relativo q^* , le grandezze critiche sono tutte uguali.

Ora per definire le grandezze in ② si calcola il M_c con il processo iterativo analogo a quello usato per le relazioni esplicite, quindi, con il Mach ricavato, si entra in tabella A3 e si ricavano i rapporti critici noti i quali è possibile valutare:

$$P_1 = \frac{P_c}{P^*} \cdot \frac{P^*}{P_1} \cdot P_1$$

dove sono tutti noti.

In modo analogo si valutano le altre grandezze.

La tabella A3 può anche essere usata in senso opposto, noto T_{0c}/T_{0c}^* ricavando il M_c .

Quanto vale q^* ?

È possibile calcolare q da $T_{0c} = T_{01} + \frac{q}{c_p} \Rightarrow q = c_p (T_{0c} - T_{01})$

che in condizioni critiche è

$$q^* = c_p (T_{0c}^* - T_{01})$$

dove T_{0c} in condizioni critiche è T_{0c}^* .

Si ha quindi che q^* dipende da M_1 come anche T_{01} mentre T_{0c}^* è costante. Il valore T_{01}/T_{0c}^* è ricavato da tabella entrando con M_1 . Noto il rapporto si ha

$$T_{0c}^* = \frac{T_{01}}{T_{01}/T_{0c}^*} = \dots [K]$$

Si hanno quindi tutte le grandezze.

Dalla conservazione dell'Energia ± 0 si ha

$$q=0 \Rightarrow H_1 = H_2 \Rightarrow h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} \Rightarrow c_p T_{01} = c_p T_{02}$$

$$\boxed{T_{01} = T_{02}}$$

È vero che gli sforzi viscosi generano calore ma questo è contenuto nel volume di controllo e non fa flusso

Dalla Continuità si può scrivere

$$\rho u = \text{cost} \Rightarrow \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \Rightarrow \boxed{\frac{u_2}{u_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}}$$

Dall'equazione di bilancio della quantità di moto, scritta in forma integrale si ha che entrano in gioco le τ_w a parete

dove $\tau_w = \mu \left. \frac{du}{dr} \right|_{r=R}$

Lo sforzo viscoso è quindi valutato all'estremità della condotta e genera una resistenza da attrito costante lungo il condotto se $\rho = \text{cost}$. Ma in questo studio $\mu = \mu(x)$ quindi anche $\tau_w = \tau_w(x)$. Si ha quindi:

$$\int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds = - \int_S p \vec{n} ds - \int_S \tau_w ds$$

Sviluppando i termini come per il flusso di Rayleigh si ha

$$-\rho_1 u_1^2 A + \rho_2 u_2^2 A = (p_1 A - p_2 A) - \int_S \tau_w ds$$

Si ha quindi il problema che τ_w è sia incognita che integranda

Senza allora $ds = 2\pi R dx$ e $A = \frac{\pi D^2}{4}$

Sostituendo e riordinando si ha

Equazione del Moto per il Flusso di Fanno

$$\boxed{(p_2 - p_1) + (\rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2) = - \frac{4}{D} \int_0^L \tau_w dx}$$

Elaborando la (*) con queste quattro si ottiene

$$\frac{\gamma}{D} C_p dx = \frac{z}{\gamma M^2} (1 - M^2) \left[1 + \frac{(\gamma - 1) M^2}{2} \right]^{-1} \frac{dM}{M}$$

dove $C_p = C_p(x)$ e $M = M(x)$.

Allora integrando

$$\left| \frac{\gamma}{D} \int_0^L C_p dx = \left[-\frac{1}{\gamma M^2} - \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left[M^2 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right] \right]_{M_1}^{M_2} \right|$$

Così facendo ho una $C_p = f(M_1, M_2)$

Ora per ricavare le altre grandezze esprimiamo i rapporti P_2/P_1 .

Abbiamo già visto

$$\underline{T_{01} = T_{02} = T_0}$$

Poi ho

$$\left| \frac{T_2}{T_1} \times \frac{T_0}{T_0} = \frac{T_0/T_1}{T_0/T_2} = \frac{(2 + (\gamma - 1) M_1^2)}{(2 + (\gamma - 1) M_2^2)} \right|$$

Per il rapporto tra le pressioni parto dalla velocità del suono

$$a^2 = \gamma \frac{P}{\rho} \times \frac{\mu}{\mu} = \frac{\gamma P \mu}{\rho \mu} \Rightarrow \frac{\gamma P \mu}{a^2} = \text{cost}$$

$$\frac{\gamma P_1 \mu_1}{a_1^2} = \frac{\gamma P_2 \mu_2}{a_2^2} \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{a_1^2}{a_2^2} \cdot \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{a_1 a_2 \mu_1}{a_2 a_1 \mu_2} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

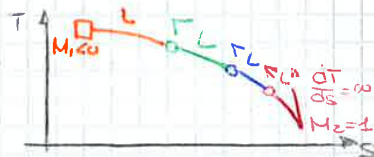
$$\left| \frac{P_2}{P_1} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_2^2}} \right|$$

Per le densità si ha, dall'equazione di stato

$$\left| \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{P_2}{P_1} \frac{T_1}{T_2} = \frac{M_1}{M_2} \cdot \left[\frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_2^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \right|$$

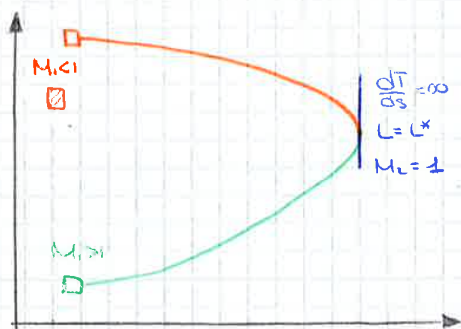
► Se $M_1 < 1 \Rightarrow M < 1 \Rightarrow M^2 - 1 < 0$ $\frac{dT}{ds} < 0$ $\frac{dM}{ds} > 0$

Quindi in questo caso all'aumentare della lunghezza, il flusso accelera e raffredda fino alle condizioni limite dove $L=L_{max}$ e $M_c=1$.



Sovrapponendo le due curve si ottiene

Curva di Fanno



Quindi in questo flusso $L^* = f(M_1)$ e qualunque sia M_1 , se $L=L^*$ per quel M_1 , allora all'uscita si hanno le condizioni critiche che sono costanti.

-29/10/15-

Calcolo delle Grandezze

Abbiamo già visto le relazioni che legano le condizioni a monte e valle della dissipazione per attrito, ottenendo delle

$$\frac{P_c}{P_1} = f(M_1, M_c)$$

È anche possibile scrivere le grandezze come **Rapporti Critici** ponendo le condizioni 1 come soniche, $M_1=1$ e $P_1=P^*$ mentre le condizioni due come grandezze e incognite $M_c=M$ $P_c=P$.
Si ottiene

$$\frac{P}{P^*} = \frac{1}{M} \left(\frac{\gamma+1}{2+(\gamma-1)M^2} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

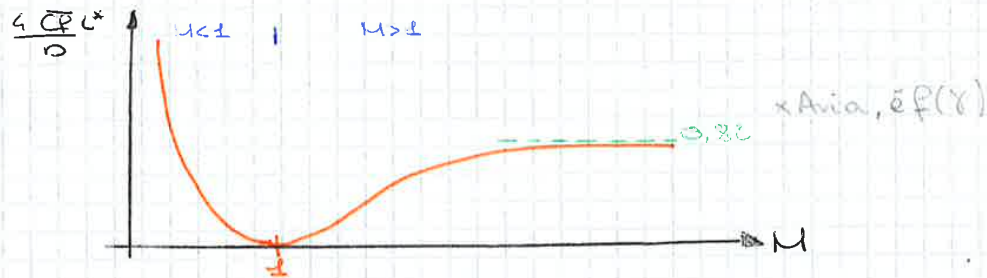
$$\frac{T}{T^*} = \frac{\gamma+1}{2+(\gamma-1)M^2}$$

Si ottiene quindi sostituendo l'integrale e gli estremi a dx:

$$\frac{4L^* \bar{C}_F}{D} = \left[\frac{1-M^2}{\gamma M^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln \left(\frac{(\gamma+1)M^2}{2+(\gamma-1)M^2} \right) \right]$$

È questo è l'ultimo elemento della tabella A3.

Quindi ho ottenuto solo quantità adimensionali $f(M)$ a sinistra mentre a destra ho le condizioni critiche. Allora il valore del gruppo adimensionale è solo funzione del Mach. Posso quindi fare un grafico



Ma non conosco ancora M_c per calcolare f_c/p_c .

Ma allora noto M ho $(4L^* \bar{C}_F) / D$ e dalla tab trovo M_c leggendo da destra verso sinistra.

Ora per il condotto assegnato M_c e L come trovo C_F ?

Posso vedere il condotto come un condotto con certi M_c e L a cui corrisponde un certo $\left(\frac{4L \bar{C}_F}{D} \right)_{L_c}$

Se ora suppongo che lo stesso M_c di ingresso di un condotto con $L=L^*$ allora questo definisce un $\left(\frac{4L^* \bar{C}_F}{D} \right)_{L_c}$

Posso anche pensare di avere M_c in ingresso come relativo $\left(\frac{4L_c \bar{C}_F}{D} \right)_{L_c}$

Allora vi è un legame tra questi tre dove il primo è noto perché posso calcolarlo dato che le grandezze sono tutte note mentre le grandezze critiche dell' L_c sono note dalla tab A3. Allora ricavo il terzo come differenza

$$\left(\frac{4\bar{C}_F L}{D} \right)_{L_c} = \left(\frac{4\bar{C}_F L^*}{D} \right)_{L_c} - \left(\frac{4\bar{C}_F L_c}{D} \right)_{L_c}$$

⇓

$$\left(\frac{4\bar{C}_F L_c}{D} \right)_{L_c} = \left(\frac{4\bar{C}_F L^*}{D} \right)_{L_c} - \left(\frac{4\bar{C}_F L}{D} \right)_{L_c}$$

Per il λ vale sempre la relazione

$$\lambda = 4 C_f$$

Dove però λ , e quindi C_f , dipendono da parametri differenti a seconda della tipologia del flusso:

→ In comprimibile $\Rightarrow \lambda = f(Re) \Rightarrow C_f = f(Re)$

→ Comprimibile $\Rightarrow \lambda = f(Re, M) \Rightarrow C_f = f(Re, M)$

Si ha quindi

→ Laminare $Re < Re_{cr} = 2300$

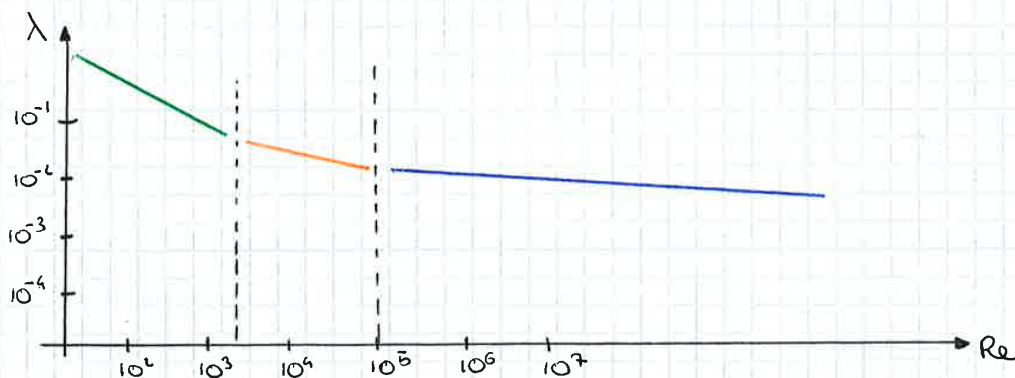
$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

→ Turbolento $Re_{cr} < Re < 10^5$

$$\lambda = \frac{0,32}{Re^{1/4}}$$

→ Turbolento $10^5 < Re < 10^8$

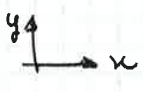
$$\lambda = \frac{0,16}{Re^{1/6}}$$



Le leggi sono del tipo $y = \frac{k}{x^m}$ che in scala logaritmica diventano delle rette con pendenza m pari all'esponente del Re

$$\log y = \log k - m \log x$$

Urto Obliquo

Effettuo uno studio sul piano fisico x, y 

Definisco:

- (1) Deflessione della parete \equiv della corrente tra la direzione di M_1 e della parete deflessa, è l'angolo tra V_1 e V_2 ;
- (2) Deflessione dell'urto definita tra la direzione della corrente a monte ed il piano che contiene l'urto.

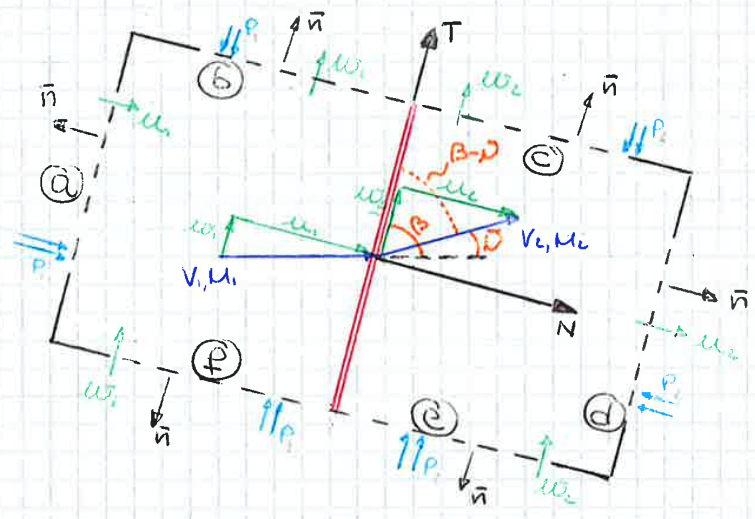
I campi (1) e (2) sono isoentropici e bidimensionali.

Le dissipazioni sono tutte contenute nell'urto e non vi sono componenti di velocità lungo z - Qualunque $\frac{\partial}{\partial z} = 0$.

Considero il flusso inviscido: $\sum \nu_{ij} = 0$.

Studio un flusso adiabatico $q = 0$ e stazionario $\frac{\partial}{\partial t} = 0$.

Ricavo le equazioni studiandole in forma integrale Euliana, con un volume di controllo fisso.



Definisco quindi V_1 velocità della corrente a monte con relativo M_1 e V_2 e M_2 condizioni di velocità e Mach a valle.

Introduco le componenti di V_1 e V_2 nelle direzioni normale e tangente all'urto: u, \hat{i} normale e w, \hat{j} tangente

$$V_1 = u_1 \hat{i} + w_1 \hat{j} \quad V_2 = u_2 \hat{i} + w_2 \hat{j}$$

Ricavo ora le leggi di conservazione per questo volume di controllo.

Si ottiene quindi anche qui una forma analoga a quella dell'urto retto dove però u è la velocità normale

$$\rho_1 + \rho_1 u_1^2 = \rho_2 + \rho_2 u_2^2$$

$$\rho + \rho u^2 = \text{cost}$$

Lungo T

$$\int_S \rho \omega (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds \Big|_T = - \int_S p \vec{n} ds \Big|_T$$

su b-f e su c-e ρ è cost quindi le forze si compensano

Ma lungo T tutti i contributi delle forze di pressione si compensano poiché le pressioni sono ugali - Si annullano anche i flussi sulle superfici b-f e su c-e, si ha quindi:

$$\textcircled{a} \rho_1 \omega_1 (-u_1) A_a + \textcircled{d} \rho_2 \omega_2 (u_2) A_d = 0$$

da cui $\rho_1 u_1 \omega_1 = \rho_2 u_2 \omega_2$ ma vale $\rho u = \text{cost}$

quindi

$$\rho_1 u_1 \omega_1 = \rho_2 u_2 \omega_2 \Rightarrow \omega_1 = \omega_2$$

Conservazione dell'Energia

Il flusso è adiabatico $q=0$, si hanno solo forze dovute alla pressione.

I contributi sulle facce b-f e c-e si annullano

$$\int_S \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds = - \int_S p (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds$$

$$\textcircled{a} \rho_1 \left(e_1 + \frac{v_1^2}{2} \right) (-u_1) A_a + \textcircled{d} \rho_2 \left(e_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) (u_2) A_d = - \left[-\rho_1 u_1 A_a + \rho_2 u_2 A_d \right]$$

Semplificando e raggruppando

$$\left[\rho_1 u_1 + \rho_1 \left(e_1 + \frac{v_1^2}{2} \right) u_1 = \rho_2 u_2 + \rho_2 \left(e_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) u_2 \right] / \rho u$$

dividendo per $\rho_1 u_1$ a sinistra e $\rho_2 u_2$ a destra, ottenendo

$$\frac{\rho_1}{\rho_1} + e_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{\rho_2}{\rho_2} + e_2 + \frac{v_2^2}{2} \Rightarrow h_1 + \frac{v_1^2}{2} = h_2 + \frac{v_2^2}{2}$$

Ma v_1^2 e v_2^2 sono i moduli delle velocità nel campo 1 e nel campo 2.

Ma ora $\frac{P_2}{P_1} = f(M_1, \nu, \beta, M_2)$ quindi devo trovare un modo per legare queste grandezze fra loro M_1, ν e β .

Guardando al grafico si può osservare



$$M_{1n} = M_1 \sin \beta = \frac{u_1}{a_1} = \frac{V_1}{a_1} \sin \beta$$

$$M_{2n} = \frac{u_2}{a_2} = \frac{V_2}{a_2} \sin(\beta - \nu) = M_2 \sin(\beta - \nu) \Rightarrow M_2 = \frac{M_{2n}}{\sin(\beta - \nu)}$$

Ma dalle relazioni per l'urto retto valeva

$$M_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \Rightarrow \text{urto obliquo} \Rightarrow M_{2n}^2 = \frac{2 + (\gamma - 1) M_{1n}^2}{2\gamma M_{1n}^2 - (\gamma - 1)}$$

Quindi

$$M_{2n}^2 = \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \beta}{2\gamma M_1^2 \sin^2 \beta - (\gamma - 1)} = M_2^2 \sin^2(\beta - \nu)$$

Questa è un'equazione di secondo grado che porta a due soluzioni entrambe fisicamente possibili

→ $M_2 < 1$ Urto forte

→ $M_2 > 1$ Urto debole

Quindi, in entrambi i casi M_2 sarà minore di M_1 ma in questo tipo di urto, è possibile che il flusso a valle dell'urto sia ancora supersonico.

Con quest'ultima relazione ho legato M_2 a ν, β e M_1 .

Ora devo trovare un modo per legare queste tre grandezze.

Guardando ancora una volta alla figura si osserva che

Amonte $\text{tg } \beta = \frac{u_1}{w_1}$

Avalle $\text{tg}(\beta - \nu) = \frac{u_2}{w_2}$

Allora fissato M_1 e l'angolo di inclinazione β della rampa si possono avere due differenti angolazioni del piano dell'urto corrispondenti ad un urto forte e un urto debole e per questi due β posso calcolare il relativo M_2 .

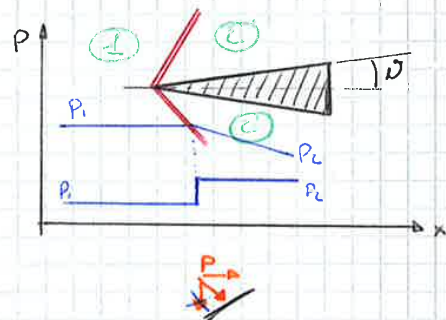
Aumentando il M_1 , l'angolo μ diminuisce, "l'urto si abbassa".
Per $M_1 \rightarrow \infty$ si ha $\mu \rightarrow 0$.

Si possono tracciare curve che uniscono tutti i punti a M_{max} per il relativo M_1 e tutti i punti per $M_2 = 1$ e si nota che sono vicini ma non coincidenti.

"Facendo riferimento ad un caso fisico di un cono posto a incidenza nulla in una corrente $M_1 > 1$ si osserva che nascono due onde oblique simmetriche sopra e sotto al cono.

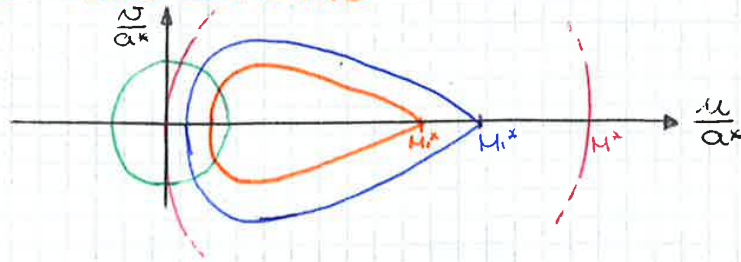
Si avranno quindi due campi: ① non sente né il corpo né il campo ② e ③ che tra su e giù non si influenzano.

Considerando un flusso inviscido si ha $p_2 > p_1$ e questo porta ad una resistenza d'onda. Allora seguendo una linea di corrente indisturbata a monte questa dopo l'urto si deflette e sulla faccia del corpo nasce una pressione p_2 normale alla superficie che scomposta fa nascere la Resistenza d'Onda."



Tornando alla trattazione di $\beta, \beta - M$ abbiamo visto come noti due dei tre posso ricavare il terzo e poi, noti i tre sarà possibile valutare M_2 ed infine f_2/p_1 .

Passando al piano a dimensionale si può tracciare la **Curva Polare dell'Urto**

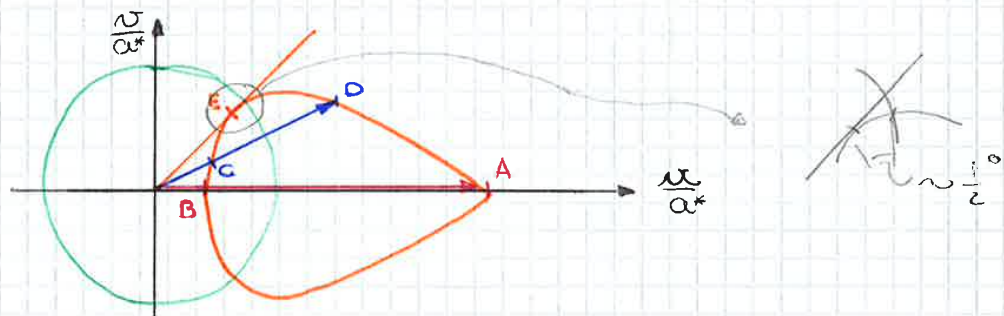


dove si può individuare un **Cerchio Sonico** luogo dei punti con $M_1^* = 1$.

Considerando un $M_1^* > 1$ si ha $M_1^* \parallel M_1$ e questo è quindi sull'asse u/a^* in corrispondenza del punto angolare. A valle dell'urto si avrà poi $M_2^* \parallel M_2$ che sarà un vettore con inclinazione ν .

La curva \circ è tracciata per un certo M_1^* con relativo M_1 , se si aumenta il M_1 allora traccio una seconda curva \circ esterna. Se ora il M_1 tende all'infinito, come abbiamo visto, M_1^* tende ad asintoto e sul piano odografico si rappresenta con un cerchio tangente nell'origine e di diametro pari a M_1^* .

Ora rappresentando la polare per il M_1 del flusso è possibile individuare alcuni punti caratteristici.



Punto **A**: $M_1^* \rightarrow M_1$

Punto **B**: Condizione di $M_2 < 1$ ovvero urto retto

Punto **C**: Essendo M_2^* interno al cerchio sonico è subsonico quindi è la condizione di Urto Forte

Punto **D**: M_2^* è > 1 quindi è urto Debole

Punto **E**: In questo punto si ha la tangenza che definisce la condizione di ν_{max} , questo non coincide con la condizione $M_2^* = 1$ ma sono molto vicini.


Urto Curvo e Staccato

● Problema: cosa succede se, a fissato M_1 , $\beta > \beta_{max}$ per quel M_1 ?
 In questo caso stiamo lavorando al di fuori della curva β - β - M e l'equazione della polare non descrive più l'urto poiché non si ha urto obliquo ma bensì un **Urto Curvo e Staccato**.



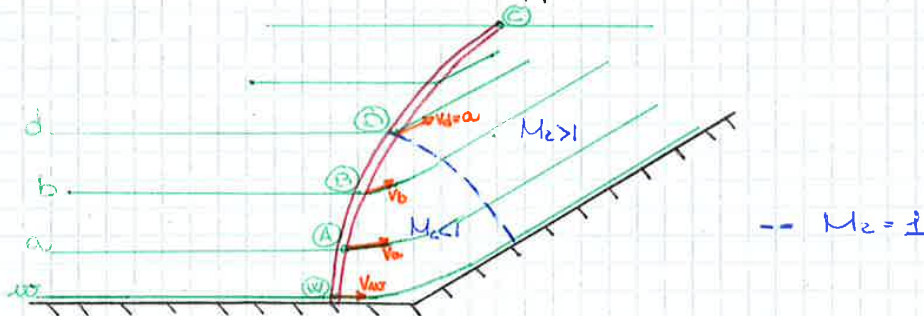
In queste condizioni: la polare è valida solo nel campo immediatamente a valle dell'urto ma successivamente perde validità.

● Tuttavia rimane in vigore la condizione di tangenza a parete. Quindi le curve inizialmente si comportano secondo la legge della polare per poi abbandonare quel comportamento evolvendo con forma curvilinea.

Questo si verifica sia su un piano con rampa che al bordo d'attacco di un cono o di un profilo aguzzo dove la forma è a cuspide  e si misura il β per tangenza al bordo d'attacco.

Per studiare questo tipo di urti vedo l'urto curvo come tanti piccoli urti obliqui pervenire la polare subito a valle.

● Effettuo uno studio sul piano fisico con un $\beta > \beta_{max}$ seguendo l'evoluzione dei filetti fluidi supponendo flusso inviscido.

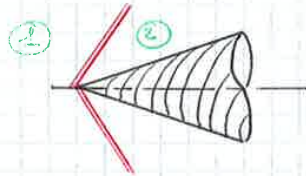


Allora il filetto a parete (A) vede un urto retto poiché a parete

la tangente dell'urto è \perp al piano. Per questo filetto si applicano quindi le leggi dell'urto retto per ricavare le grandezze dell'immediato a valle. Si ottiene quindi $M_2 < 1$. Essendo subsonico il flusso a valle sente prima l'effetto

Effetti 3D

Finora abbiamo sempre solo valutato flussi bidimensionali. Vediamo brevemente come si comporta il flusso supersonico che investe un cono tridimensionale.



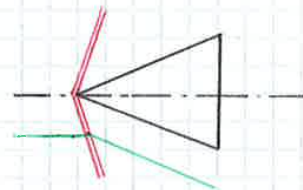
Nasce un Urto Conico con effetti tridimensionali che sarà meno intenso dell'equivalente bidimensionale.

Il campo ② a valle dell'urto è definito da β l'apertura del cono e un secondo β che individua la direttrice del cono.

La corrente intercetta quindi l'urto e a valle deve soddisfare la tangenza ma la variazione non avviene in modo brusco: la linea di corrente curva immediatamente a valle e poi evolve isoentropicamente rispettando la tangenza. Si ha curvatura delle linee di corrente e si conserva l'assialsimmetria. Lungo r e lungo φ le grandezze sono costanti.

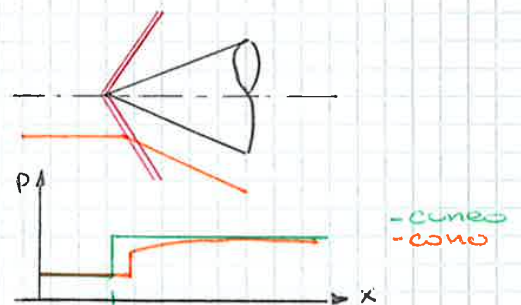
Confrontando cono e cuneo a pari M_1 e β si ottiene

$$M_1 = 2 \quad \beta = 10^\circ \Rightarrow \begin{cases} \beta_{\text{cono}} = 31^\circ \\ \beta_{\text{cuneo}} = 39^\circ \end{cases}$$



Ma allora l'onda d'urto sul cuneo è più pendente di quella sul cono.

Posso valutare la pressione nei due casi studiando una linea di corrente a pari distanza dall'asse. Allora $P_0 = P_1$ cost fino all'urto. Poi per il cono a valle $P_0 = P_w = P_c$. Sul cuneo invece la corrente che deflette per andare a tangenza quindi P_0 compressione in due tempi dove il primo è per l'urto il secondo è per uniformare in fondo e quindi la pressione finale è minore $P_{\text{cono}} = P < P_w$.



Riflessione e Intersezione di Urta

È un problema legato alle prese d'aria supersoniche e ai flussi interni.

La presa d'aria può essere schematizzata come due cunei che, investiti dalla corrente a $M_1 > 1$ generano due urti che incidono: cosa succede??

Per gli urti interni posso avere un condotto con parete superiore piana e inferiore con rampa: cosa succede se l'urto obliquo nato sotto incide la parete superiore?

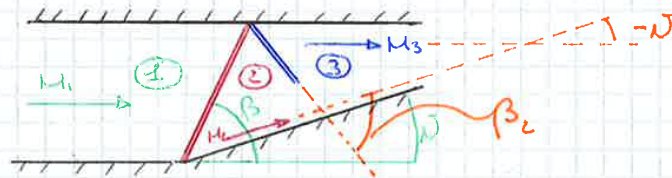
O ancora due rampe consecutive a diverso θ .



Riflessione Regolare

Studio una geometria costituita da due pareti, una piana ed una con rampa da cui in O parte un urto obliquo.

Come abbiamo già visto, noto θ e M_1 posso determinare β e le condizioni nel campo ②.



Alla riflessione, il Mach che genera l'urto è M_2 e nascono le condizioni ③.

La riflessione è detta **Regolare** perché sia in ② che in ③ deve soddisfare la condizione di tangenza a parete.

Allora nel campo 3 il flusso deve allinearsi con la parete orizzontale ovvero deve notare di $(-\theta)$ passando da ② a ③.

L'angolo di inclinazione β_2 sarà invece definito tra M_2 e il piano del secondo urto.

Inoltre è regolare perché la deflessione θ che regola la riflessione è $\theta < \theta_{max, M_1}$.

La riflessione non è speculare $\Rightarrow \beta_1 \neq \beta_2$. Infatti M_3 è minore di $M_2 < M_1$. La corrente si comprime.