NUMERO: 1930A - ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Pinto Cora

MATERIA: Metodi numerici e statistici per l'ingegneria - Prof Gasparini, Grillo, Falletta

20.09.15

METODI NUMERICI e STATISTICI

PROBABILITÁ

↓

MATEMATICA dell'INCERTEZZA
utilizzata quando si ha a che fare con
FENOMENI ALEATORI
→ privi di certezza ←

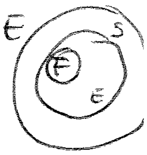
ESPERIMENTI ALEATORI

operazioni che non possono essere previsti con certezza.

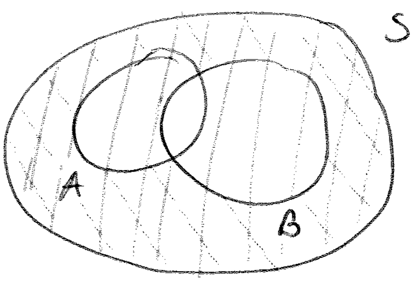
↓

Risulta necessario individuare
l'INSIEME degli ESITI/RISULTATI

S = insieme dei possibili esiti dell'esperimento

Esperimento	S	Esempi di EVENTI
lancio di un dado	$\{1,2,3,4,5,6\}$	$\{2,4,6\}$ = "Esce un n° pari"
lancio di una moneta	$\{T, C\}$	$\emptyset$, $\{T\}$, $\{C\}$, S
lancio due tetraedri	$\{(1,1),(1,2),(1,3)\ldots \ldots(4,4)\}$ (16 coppie)	"la somma è superiore a 6" = $\{(4,3),(3,4),(4,4)\}$ ↑(o 7 o 8, non 6, altrimenti sarebbe strettamente superiore)
Corsa di 7 cavalli	$\{(1,2,3,4,5,6,7),(1,2,3,4,5,\cancel{7},6)\ldots\}$ 7!	"Il 5 arriva tra i primi 3" = E "Il 5 arriva primo" = F $F \subseteq E$ = F implica E →  $F \cap E = F$ $F \cup E = E$
Misuro una resistenza elettrica	$[0, \infty)$ o $\mathbb{R}^+$	
ECG	Insieme di funzioni	

LEGGI di DE MORGAN



$$\boxed{(A \cup B)^c = A^c \cap B^c}$$

$$\boxed{(A \cap B)^c = A^c \cup B^c}$$

Esempio:

Lancio di 2 tetraedri.

A = "La somma è pari"

B = "Entrambi i punteggi minori di 3"

$C = \{(1,4), (2,3)\}$

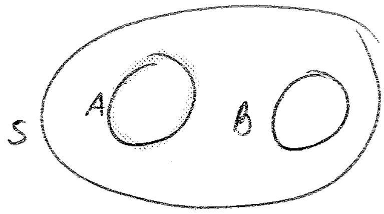
$A \cap B = \{(1,1), (2,2)\}$

	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

$A \cup B = \{(1,1), (2,1), (3,1), (1,2), (2,2), (4,2), (1,3), (3,3), (2,4), (4,4)\}$

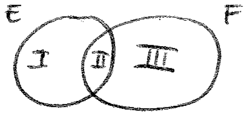
Definizione: A e B si dicono DISGIUNTI / INCOMPATIBILI / MUTUAMENTE ESCLUSIVI se

$$\boxed{A \cap B = \emptyset}$$



↓

Seconda conseguenza:



$$\boxed{\underline{P}(A \cup B) = \underline{P}(A) + \underline{P}(B) - \underline{P}(A \cap B)}$$

Dim:

$P(E \cup F) = P(I) + P(II) + P(III)$

$P(E) = P(I) + P(II)$

$P(F) = P(II) + P(III)$

$\Rightarrow P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(II)$

NB: Quando $A \cap B = \emptyset \rightarrow$ assioma (3)

Esempio:

Tetraedro equo (= bilanciato) $\Rightarrow$ $P(\text{"esce } i\text{"}) = \frac{1}{4} \quad \forall i$

$A =$ "Esce un numero pari" $= \{2, 4\} = \{2\} \cup \{4\}$

$\underline{P}(A) = \underline{P}(\text{"2"} \cup \text{"4"}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

NB: Si effettua la somma poiché gli eventi sono DISGIUNTI! Non si verificano CONTEMPORANEAMENTE

Esempio:

Tetraedro NON equo (= sbilanciato)

$\underline{P}(\text{"1"}) = \frac{2}{5}$

$\underline{P}(\text{"2"}) = \underline{P}(\text{"3"}) = \underline{P}(\text{"4"}) = \frac{1}{5}$

$\underline{P}(A) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

Esempio:

Corsa di cavalli $\rightarrow$ non tutte le 7! classifiche hanno la stessa prob.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 270

Esempio:

Tetraedro equo

$$\underline{P}(A) = \underline{P}(\{2,4\}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Esempio:

2 Tetraedri equi lanciati a caso

$$\underline{P}(\text{"}i, j\text{"}) = \frac{1}{16} = \text{probabilità di ogni esito}$$

A = "La somma è pari"

B = "Entrambi minori di 3"

⚠ Meglio partire col contare il DENOMINATORE!

$$\underline{P}(A) = \frac{\# CF}{\# CP} = \frac{8}{16}$$

$$\underline{P}(B) = \frac{4}{16}$$

↓

Necessità di avere tecniche di conteggio

→ CALCOLO COMBINATORIO ←

DISPOSIZIONI SENZA RIPETIZIONE

Dato un insieme A di n elementi, le DISPOSIZIONI SENZA RIPETIZIONE di n elementi presi r alla volta sono:

$$\boxed{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}$$

NB: tenuto conto dell'ordine.

PERMUTAZIONI

Dato un insieme A di n elementi, le DISPOSIZIONI SENZA RIPETIZIONE di n elementi presi n alla volta sono:

$$\boxed{n!}$$

Esempio:

Permutazione delle cifre 0, .., 9 sono 10!

Esempio:

Numero di modi in cui 6 tra 120 studenti si possono sedere in prima fila (6 posti!) è:

$$120 \cdot 119 \cdot 118 \cdot 117 \cdot 116 \cdot 115$$

Numero di modi in cui tutti i 120 posti possono essere occupati

$$120!$$

⚠ Quanti sotto-insiemi (commissioni) di 6 persone si possono fare con una classe di 120.

n° di disposizioni di 120, 6 alla volta $= 120 \cdot \ldots \cdot 115$

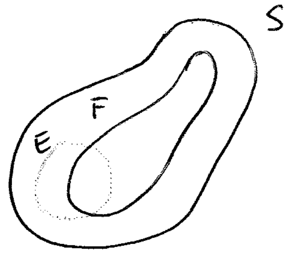
n° di commissioni $= \dfrac{120 \cdot 119 \cdot \ldots \cdot 115}{6!}$

Per ogni commissione vi sono 6!. Il numero delle disposizioni è > delle commissioni

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 270

29.09.15

PROBABILITÀ CONDIZIONATA



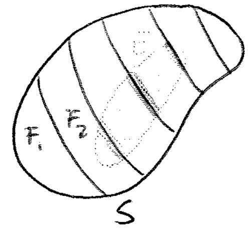
→ Nuovo stato di informazione → cambia la probabilità!
Immagino che l'evento F si verifichi!
Si cerca ora la probabilità di un evento E sapendo che (DATO CHE) F si verifica!

Def: si definisce PROBABILITÀ CONDIZIONATA di E dato F

$$\boxed{P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}} \qquad P(F) > 0$$

NB: può essere vista come una ri-proporzione! Visto che osservo la probabilità di E successivamente all'info. che F si è verificato ⇒ osservo la $P(E \cap F)$ e poi la confronto con quella di F! F rappresenta il nuovo spazio degli esiti

Def: Si dice PARTIZIONE dell'evento certo S una famiglia di sottoinsiemi $F_1, F_2, \ldots$ se



(i) Due a due DISGIUNTI : $F_i \cap F_j = \emptyset \quad \forall\, i \neq j$

(ii) Che ricoprono S : $\bigcup F_i = S$

Dato un qualunque evento E, possiamo scrivere:

$$E = \bigcup_i (E \cap F_i)$$

$$\Downarrow$$

FORMULA DELLE PARTIZIONI

$$\boxed{P(E) = P\left(\bigcup_i E \cap F_i\right) = \sum P(E \cap F_i)}$$

↳ Si fissa ora l'attenzione su un singolo membro F_j della partizione e calcoliamo:

$$\underline{P}(F_j | E) = \frac{\underline{P}(F_j \cap E)}{\underline{P}(E)} \text{ = def. di prob. condizionata}$$

$$= \frac{\underline{P}(E | F_j) \cdot P(F_j)}{\underline{P}(F)}$$

FORMULA di BAYES

$$\boxed{\underline{P}(F_j | E) = \frac{P(F_j) \cdot \underline{P}(E | F_j)}{\sum_i \underline{P}(F_i) \cdot \underline{P}(E | F_i)}}$$

Esempio: Cattolici, Valdesi e Agnostici

$$P(C | sì) = \frac{200}{1130} = \frac{\underline{P}(C \cap sì)}{\underline{P}(sì)} = \frac{\underline{P}(C) \cdot P(sì | C)}{\underline{P}(sì)}$$

Esempio: TEST DIAGNOSTICO / SCREENING

$+$ = "il test è positivo"

M = "la persona è malata"

$$\underline{P}(+ | M) = \text{SENSITIVITÀ}$$

$$\underline{P}(- | M^c) = \text{SPECIFICITÀ}$$

Esperimento: screening, scegliamo "a caso" una persona da una popolazione e facciamo il test

↓ prob. uniforme

$$\underline{P}(M) = \text{proporzione di malati nella popolazione}$$

NB: le probabilità condizionate sono dati originari del problema!

L'assunzione di indipendenza semplifica i calcoli di sistemi di componenti.

Esempio: ELEMENI IN SERIE (funzionano solo se funzionano tutti)

A, B, C indipendenti

A = "La componente A funziona"
B = " " B " "
C = " " C " "
S = "Il sistema funziona"

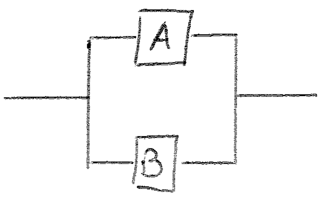
$$\underline{P}(S) = \underline{P}(A \cap B \cap C) = \underline{P}(A \cap B) \cdot \underline{P}(C) = \underline{P}(A) \cdot \underline{P}(B) \cdot \underline{P}(C)$$

$$\boxed{P(S) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)}$$

A, B, C in SERIE INDIPENDENTI

Esempio: ELEMENTI in PARALLELO (non funziona se non funziona nessuno)

A, B indipendenti

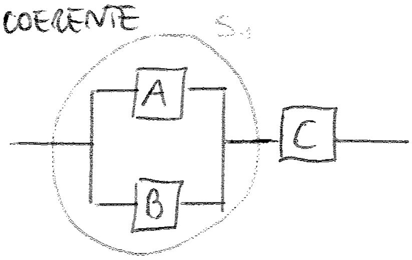


$$\boxed{\underline{P}(S) = 1 - \underline{P}(S^c) = 1 - \underline{P}(A^c \cap B^c) = 1 - \underline{P}(A^c) \cdot \underline{P}(B^c)}$$

$$P(S) = \underline{P}(A \cup B) = 1 - (1 - \underline{P}(A))(1 - \underline{P}(B)) = \underline{P}(A) + \underline{P}(B) - \underline{P}(A)\underline{P}(B)$$

Esempio: SISTEMA COERENTE

A, B, C indipendenti



Composizioni di serie e parallelo

$$\underline{P}(S) = \underline{P}(S_1 \cap C) = \underline{P}(S_1)\,\underline{P}(C) =$$
$$= [1 - (1 - \underline{P}(A))(1 - \underline{P}(B))]\,\underline{P}(C)$$

1ª ESERCITAZIONE (2 ottobre 2015)

(1) Targhe con 5 caratteri

- Cifra da $0 \to 9$ (10)
- lettera (20)

|_|_|_|_|_| 30 caratteri in totale

(a) Calcolare il numero di targhe distinte che si possono creare

|_|_|_|_|_|

$\uparrow \; \uparrow \; \uparrow \; \uparrow \; \uparrow$

30 30 30 30 30 $\Rightarrow$ 30^5

(b) Scelta una targa a caso $\to$ probabilità che NON ci siano ripetizione

$\downarrow$

Esperimento aleatorio! Ogni targa ha la stessa probabilità di uscire $\Rightarrow$ PROBABILITÀ UNIFORME

$$P(B) = \frac{\#CF}{\#CP} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26}{30^5} = 0{,}7037 = 70{,}37\%$$

(c) Scelta una targa a caso $\to$ calcolare la probabilità che le prime due posizioni della targa siano cifre e le rimanenti siano lettere.

↳ Evento (C)

$$P(C) = \frac{\#CF}{\#CP}$$

| # | # | a | a | a |

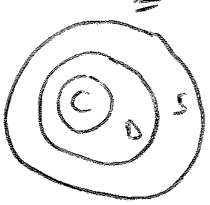
$\uparrow \; \uparrow \; \uparrow \; \uparrow \; \uparrow$

10 10 20 20 20

$$P(C) = \frac{10 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20}{30^5} = 0{,}0329 = 3{,}29\%$$

(d) Scelta una targa a caso $\to$ calcolare la probabilità che siano presenti 2 cifre e tre lettere

NB: C implica D



$$P(D) = \frac{\#CF}{\#CP} = \frac{?}{30^5} \longrightarrow$$

|C|C|L|L|L| $10^2 \cdot 20^3$

|C|L|C|L|L| $10^2 \cdot 20^3$

|_|_|_|_|_|

⋮

Come si calcolano i modi?

(2) 15 pulci partecipano ad una corsa. Tutte hanno la stessa possibilità di vincere. Siamo interessati al TERZETTO delle vincitrici.

(a) costruire lo spazio degli esiti

$$S = \{(i, j, k);\ i = 1, \dots, 15,\ j = 1, \dots, 15,\ k = 1, \dots, 15,\ i \neq j \neq k\}$$

L'importante é conoscere la CARDINALITÁ di S:

$$\#S = 15 \cdot 14 \cdot 13$$, ciascun esito é EQUIPROBABILE

(b) Calcolare la PROBABILITÁ che:

(a) $\underline{P}(\text{"1, 2, 3 nell'ordine"}) = \dfrac{\# CF}{\# CP} = \dfrac{1}{15 \cdot 14 \cdot 13}$ ∃ solo una combinazione per la quale 1, 2, 3 siano in testa!

(b) $\underline{P}(\text{"vincono 7, 11, 15"}) = \dfrac{\# CF}{\# CP} = \dfrac{3!}{15 \cdot 14 \cdot 13}$

(c) $\underline{P}(\text{"5 arriva nel terzetto"}) = \dfrac{\# CF}{\# CP} = \dfrac{\#(5\,\_\,\_) + \#(\_\,5\,\_) + \#(\_\,\_\,5)}{15 \cdot 14 \cdot 13} =$

In tutti i casi al numeratore vi é il conteggio delle triplette.

$$= \frac{14 \cdot 13 + 14 \cdot 13 + 14 \cdot 13}{15 \cdot 14 \cdot 13} = \frac{3(14 \cdot 13)}{15 \cdot 14 \cdot 13} = \frac{1}{5}$$

(d) $\underline{P}(\text{"5 vince dato che arriva tra le prime 3"}) = \underline{P}(\text{"5 vince"} \mid \text{"5 nel terzetto"}) =$

$$= \frac{\underline{P}(\text{"5 vince"})}{\underline{P}(\text{"Nelle prime 3"})} = \frac{\frac{14 \cdot 13}{15 \cdot 14 \cdot 13}}{\frac{1}{5}}$$

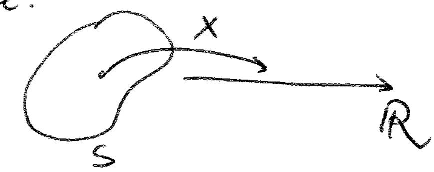
$$= \frac{\underline{P}(\text{"5 vince"} \cap \cancel{\text{"5 nelle prime 3"}})}{\underline{P}(\text{"5 nelle prime 3"})}$$

L'intersezione di questi 2 eventi é il primo evento stesso

VARIABILI ALEATORIE

Def: una variabile aleatoria (casuale, random) è una funzione da S a $\mathbb{R}$, cioè un aspetto numerico dell'esperimento di particolare interesse.

$$X : S \to \mathbb{R}$$



Esempio:

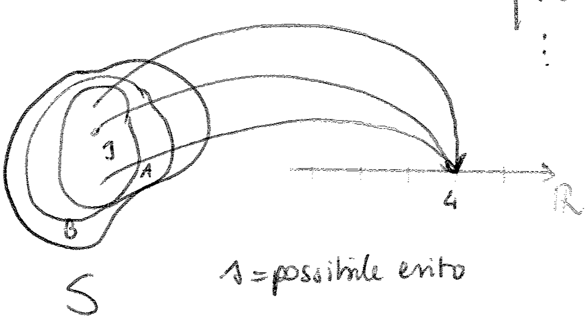
lancio a caso 10 dadi equi. Possibili variabili aleatorie (v.a):

X = n° di 6

Y = somma dei punteggi

Z = minimo punteggio

Spesso interessano eventi del tipo $\begin{cases} X = C \\ X \le C \\ \vdots \end{cases}$ con C = costante.



s = possibile esito

↳ **Esempio Dadi**:

$A = \text{"}X = 4\text{"} = \{ s : X(s) = 4 \}$ cioè l'antimmagine del numero 4

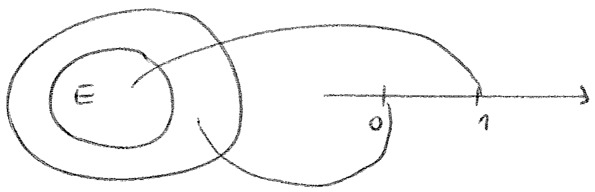
$B = \text{"}X \le 4\text{"} = \{ s : X(s) \le 4 \}$

VARIABILI ALEATORIE NOTEVOLI

V. A di BERNOULLI

Dato un evento fissato E, consideriamo la variabile

$$X(s) = \begin{cases} 1 & \text{se } s \in E \\ 0 & \text{se } s \notin E \end{cases}$$



<u>Esempio</u>:

lancio un dado equo. E = "Esce il 6"

$$X \begin{cases} 1 & \text{se esce } 6 \\ 0 & \text{se non esce } 6 \end{cases}$$

Scriveremo

$$\underline{P}(X=1) = \underline{P}(E) = \frac{1}{6} \qquad \leftarrow p = \frac{1}{6}$$

$$\underline{P}(X=0) = \frac{5}{6}$$

↳ X si dice v.a. di Bernoulli con parametro $p = \underline{P}(E)$.

V. A. BINOMIALI

Consideriamo n prove Bernoulliane, cioè ogni prova può essere $\begin{cases} \text{successo (E verificato)} \\ \text{insuccesso (E non verif.)} \end{cases}$

Una variabile aleatoria di interesse è

$$X = \#\text{ successi sulle } n \text{ prove}$$

<u>Def</u>: Supponiamo di realizzare n ripetizioni indipendenti di un esperimento, ciascuna delle quali può concludersi in un "SUCCESSO" con probabilità p o in un "FALLIMENTO" con probabilità $1-p$. Se X denota il numero totale di SUCCESSI =>

X è detta VARIABILE ALEATORIA BINOMIALE

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 270

- Probabilità che su 4 lanci esca una sola volta 6

$$\underbrace{\text{"}X=1\text{"}}_{\text{EVENTO}} = \underbrace{\text{"}1000\text{"} \cup \text{"}0100\text{"} \cup \text{"}0010\text{"} \cup \text{"}0001\text{"}}_{\text{Unione di ESITI}}$$

$$P(X=1) = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3 + \left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\frac{1}{6} = 4\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^3 \qquad \binom{4}{1}$$

- Probabilità che su 4 lanci esca 2 volte 6

$$P(X=2) = 6\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2 \qquad \binom{4}{2}$$

$$P(X=3) = 4\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\frac{5}{6} \qquad \binom{4}{3} = \binom{4}{1}$$

$$P(X=4) = 1\left(\frac{1}{6}\right)^4 \qquad \binom{4}{4}$$

↳ È possibile generalizzare: $\boxed{a(*)\cdot e(**)}$

Nel caso più generale X può ammettere i valori: $0, 1, \ldots, n$

$$\Downarrow$$

$$P(X=K) = ?$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix}\text{n° di stringhe} \\ \text{con esattamente} \\ K \text{ successi}\end{pmatrix}}_{\substack{\text{COEFFICIENTE} \\ \text{BINOMIALE!}}}\cdot p^K\cdot(1-p)^{n-K}$$

$$\Downarrow$$

X è detta
V.A BINOMIALE
con parametri n e p

$$\boxed{P(X=K) = \binom{n}{K}\cdot p^K\cdot(1-p)^{n-K}}$$

$$\underline{P}(S=0) = 0$$

2 tetraedri INDIPENDENTI

$$\underline{P}(S=2) = \underline{P}(X=1 \cap Y=1) = \underline{P}(X=1) \cdot \underline{P}(Y=1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5}$$

$$\underline{P}(S=3) = \underline{P}(\text{"}X=1 \cap Y=2\text{"} \cup \text{"}X=2 \cap Y=1\text{"}) = P(X=1 \cap Y=2) + P(X=2 \cap Y=1)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{20} + \frac{2}{20} = \frac{3}{20}$$

$$\underline{P}(S=4) = \frac{4}{20}$$

$$\underline{P}(S=5) = \frac{5}{20}$$

$$\underline{P}(S=6) = \frac{3}{20}$$

$$\underline{P}(S=7) = \frac{2}{20}$$

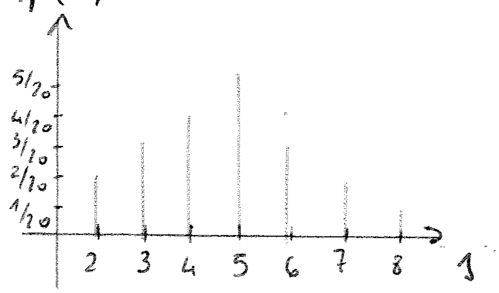
$$\underline{P}(S=8) = \frac{1}{20}$$

Unisco tutti i risultati in TABELLA

s	$\underline{P}(S=s)$	$p(x) = \underline{P}(S \le s)$
2	$2/20$	$2/20$
3	$3/20$	$5/20$
4	$4/20$	$9/20$
5	$5/20$	$14/20$
6	$3/20$	$17/20$
7	$2/20$	$19/20$
8	$1/20$	$20/20 = 1$

Possibile anche farne il GRAFICO

$p(s)$ = f.m.p di S



Descrizione del comportamento PROBABILISTICO della x.

Esempio (2 tetraedri):

$$\underline{P}(S \leq 3) = \underline{P}(S = 2 \cup S = 3) = \underline{P}(S=2) + \underline{P}(S=3) = p(2) + p(3) = \frac{5}{20}$$

$$\underline{P}(S > 5) = \frac{3}{20} + \frac{2}{20} + \frac{1}{20} = \frac{6}{20}$$

Def: la funzione: $x \longrightarrow \boxed{p(x) = \underline{P}(X = x)}$ è detta f.m.p

invece la funzione: $x \longrightarrow \boxed{F(x) = \underline{P}(X \leq x)}$ è detta FUNZIONE di RIPARTIZIONE ($F(s)$)

Entrambe descrivono la LEGGE di PROBABILITÀ di X.

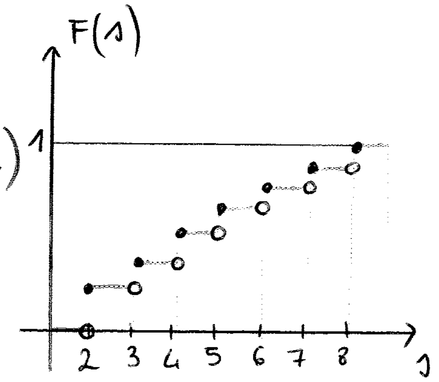
Esempio

$$P(S \leq 3) = F\left(\frac{5}{20}\right) = \frac{5}{20}$$

$$\underline{P}(S = 2,5) = 0$$

$$\underline{P}(S \leq 2,5) = \underline{P}(S = 2) = F(2)$$

$$\underline{P}(S \leq 4,7) = F(4) = \frac{9}{20}$$



Si tratta di una FUNZIONE a GRADINI (continua a DX)

La funzione presenta dei SALTI corrispondenti a $p(x)$.

In generale

la f.m.p è più utile rispetto a quella di ripartizione

Ora ci si concentra non più su S (spazio degli eventi) ma su $\mathbb{R}$, si lavora con le variabili aleatorie.

Data la DISTRIBUZIONE → sarà possibile individuarne un CENTRO →

Esempio NOTEVOLE

$X \sim \text{Bernoulli}\left(p = \frac{1}{3}\right) \qquad X = \begin{cases} 0 & \text{con } p = \frac{2}{3} \\ 1 & \text{con } p = \frac{1}{3} \end{cases}$

x	$p(x)$
0	$2/3$
1	$1/3$

Se X rappresenta una scommessa, considero:

$$g(x) = \begin{cases} 10\,€ & \text{se } x = 1 \quad \leftarrow g(1) \\ -10\,€ & \text{se } x = 0 \quad \leftarrow g(0) \end{cases}$$

Calcolo del valore atteso:

$$E(g(x)) = g(0)\cdot p(0) + g(1)\cdot p(1) = -10\cdot\frac{2}{3} + 10\cdot\frac{1}{3} = -\frac{10}{3}$$

È più facile avere un insuccesso vista $p(0)$ e $p(1)$ quindi ci sta come "valore medio".

Se volessimo una $g^*(\cdot)$ "equa" dovremmo scegliere:

$$E(g^*(x)) = 0 = g^*(0)\cdot\frac{2}{3} + g^*(1)\frac{1}{3}$$

$$g^*(0)\frac{2}{3} = -g^*(1)\cdot\frac{1}{3}$$

cioè

$$g^*(0) = -\frac{g^*(1)}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} g^*(1) = 10\,€ \\ g^*(0) = -5\,€ \end{cases}$$

$\boxed{\text{PROPRIETÀ DEL VALORE ATTESO}}$

(i) $E(X)$ è un OPERATORE LINEARE

se $g(x) = a + bx$ allora:

$$E(g(X)) = \sum g(x)\cdot p(x) = \sum (a+bx)\cdot p(x) = a + b\sum x\,p(x) = a + b\,E(X)$$

Similmente:

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

NB: si tratta di una funzione di 2 v.a! Allora dovrei conoscere le leggi delle 2!
↓
VETTORE ALEATORIO

Per comprendere al meglio $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$, occorre definire un

VETTORE ALEATORIO → (X, Y)

la nozione generalizza quella di v.a: un VETTORE ALEATORIO (X, Y) è una funzione

$$\boxed{(X, Y) : S \longrightarrow \mathbb{R}^2}$$

Esempio: lancio dei 2 tetraedri. Ad ogni esito era associata una coppia di valori.

$X, Y \to$ v.a

$(X, Y) \to$ vettore aleatorio

$S = X + Y \to$ v.a.

Bisogna verificare che: $E(S) = E(X+Y) = \frac{94}{20} = E(X) + E(Y)$

$E(X) = 2{,}5$

$E(Y) = \frac{2}{5} \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 3 + \frac{1}{5} \cdot 4 = \frac{11}{5}$

$\Rightarrow E(X) + E(Y) = \frac{25}{10} + \frac{11}{5} = \frac{25+22}{10} = \frac{47}{10} = \frac{94}{20}$ ✓

Def: si definisce la f.m.p di un vettore aleatorio (X, Y) la funzione

$$p(x, y) = P(X = x \cap Y = y)$$

Se $p(x, y) = P(X = x \cap Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y) \quad \forall x, y$

Prodotto delle f.mp. MARGINALI

↓ FUNZ. di PROB. CONGIUNTA

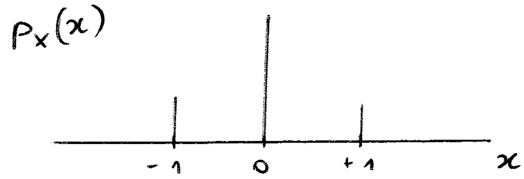
⇓ X e Y si dicono V.A INDIPENDENTI

Ipotizzo di avere 2 v.a. X e X' con lo stesso valore atteso

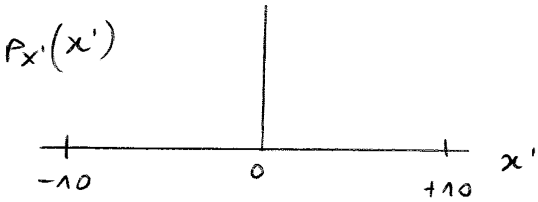
$$E(X) = E(X')$$

Esempio:

$E(X) = E(X') = 0$



→ X e X' sono guadagni aleatori da giochi equi



Che differenza c'è tra i 2 giochi?

La seconda legge risulta più dispersa.

Vogliamo quantificare l'incertezza:

$$\boxed{X - E(X) = \text{SCARTO}}$$

$$E(X - E(X)) = E(X) - E(E(X)) = E(X) - E(X) = 0$$

$$\boxed{(X - E(X))^2 = \text{SCARTO al QUADRATO}}$$

↓

VARIANZA di X

$$E\left((X - E(X))^2\right) = \text{VALORE ATTESO dello SCARTO QUADRATICO di } X$$

$$Var(X) = \sigma^2$$

DEVIAZIONE STANDARD

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

PROPRIETÀ VARIANZA

NB: la varianza può essere riscritta nel seguente modo

$$Var(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = E\left((X-\mu)^2\right) = \sum_i (x_i - \mu)^2 \cdot p(x_i)$$

$\mu = E(X)$

(i)

$$Var(X) = E\left(\underbrace{X^2 + \mu^2 - 2\mu X}_{\text{quadrato di binomio}}\right) = E(X^2) + E(\mu^2) + E(-2\mu X) =$$

$$\underset{\text{per la LINEARITÀ di } E}{=} E(X^2) + \mu^2 - 2\mu \underbrace{E(X)}_{\mu} = E(X^2) - \mu^2$$

$$\boxed{Var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2}$$

(ii)

$$Var(aX+b) = E\left(\left(aX+b-E(aX+b)\right)^2\right) = E\left(\left(aX+b-aE(X)-b\right)^2\right) =$$

$$= E\left(\left(aX+b-aE(X)-b\right)^2\right) = E\left(a^2 \cdot \left(X - E(X)\right)^2\right) =$$

$$= a^2 E\left(\left(X-E(X)\right)^2\right)$$

$$\boxed{Var(aX+b) = a^2 \cdot Var(X)}$$

$$Var(X+Y) = E\left((X+Y)^2\right) - \left(E(X+Y)\right)^2 = E\left(X^2+Y^2+2XY\right) -$$

$$- \left(E(X)\right)^2 - \left(E(Y)\right)^2 - 2E(X)\cdot E(Y) = E(X^2) + E(Y^2) +$$

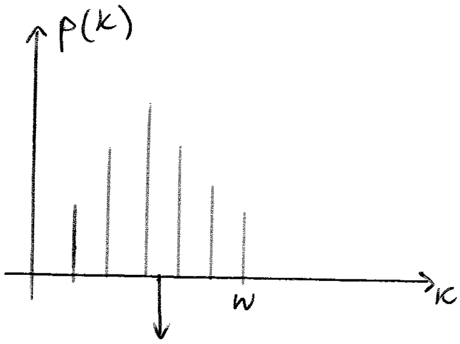
$$+ 2E(XY) - \left(E(X)\right)^2 - \left(E(Y)\right)^2 - 2E(X)E(Y) =$$

Esercizio:

$$Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2\,Cov(X,Y)$$

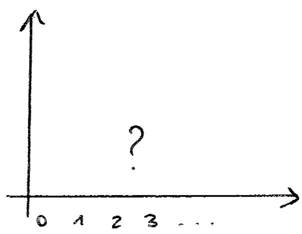
$X \sim$ Binomiale (n, p)

la sua f.m.p è: $p(k) = \underline{P}(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$



$E(x) = np$

⚠ In alcuni casi n non è definito!
Es: terremoti, graffi su una carrozzeria ...



↓

Matematicamente è possibile passare al limite, n (*), per $n \to \infty$

$$p = \frac{\lambda}{n} \to 0 \quad \text{con } \lambda > 0$$

$$\underline{P}(X=k) = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k} \cdot \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k} =$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdots n}_{k \text{ volte}}} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k} \quad \text{per } n \to \infty$$

con $n \to \infty$ converge a $e^{-\lambda}$

⇓

$$\frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \qquad k = 0, 1, 2 \ldots$$

Esempio:

$\lambda = 1,2$ = numero medio di richieste in un'ora

Calcoliamo la PROBABILITÀ di avere almeno una chiamata.

$$P(X \geq 1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}}{k!} \cdot \lambda^k$$ → NON così furbo! Difficile calcolare la somma di queste serie.

↓

É più semplice calcolare:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = 1 - e^{-1,2}$$

Si dimostra che la varianza di una X di Poisson vale:

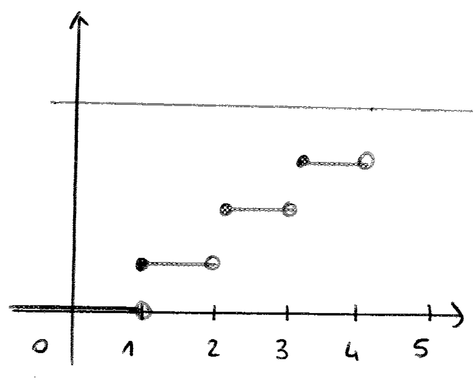
$$\boxed{Var(X) = \sum_{k=0}^{\infty} (k-\lambda)^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}}{k!} \cdot \lambda^k = \ldots = \lambda}$$

Allo stesso modo:

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - P(X=4) - P(X=3) - P(X=2) - P(X=1) + \\ - P(X=0)$$

⚠ Ricorda la f.d.r (FUNZIONE di RIPARTIZIONE)

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum \frac{e^{-\lambda}}{k!} \cdot \lambda^k$$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 270

4. Un'urna contiene 30 palle rosse e 20 palle non rosse. Vengono campionate a caso 8 palle; calcolare la probabilità di osservare 5 rosse tra quelle 8 se il campionamento è fatto:
   - con reimmissione;
   - senza reimmissione.

5. Due variabili binarie X e Y sono Bernoulliane di parametro $1/2$ e tali che la probabilità che siano entrambi nulle è 0.4.
   (a) dimostrare che X e Y non sono indipendenti;
   (b) calcolare la legge di probabilità della somma $X + Y$;
   (c) calcolare la legge di probabilità del prodotto XY;
   (d) calcolare $\text{Var}(X + Y)$.

6. Un caffè costa 0.9 euro, un cappuccino 1.20 e un marocchino 1.50. Invito un amico al bar e offro io; sia lui che io, in maniera indipendente, ordiniamo il caffè con probabilitá 0.5 e o cappuccino o marocchino con uguale probabilitá. Calcolare la legge di probabilità della mia spesa totale.

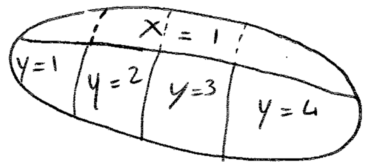
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 270

$p_X(x)$ = f.m.p della v.a X calcolata nel punto x =

$$= \underline{P}(X = x) = \sum_y \underline{P}(X = x \cap Y = y) = \sum_j p(x,y)$$

(a) <u>Calcolare le f.m.p marginali di X e Y</u>

$p_X(1) = 0{,}20 + 0{,}03 + 0{,}02 + 0{,}00 = 0{,}25$



<u>NB</u>: le due marginali - probabilità - f.m.p sono uguali (ciò non significa che siano indipendenti)

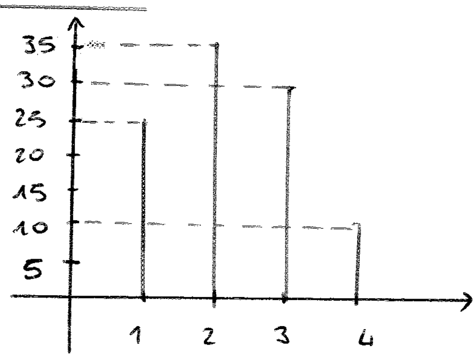
$$p_X(x) = p_Y(y)$$

(c) <u>X e Y sono INDIPENDENTI ?</u>

$p(x,y) \neq p_X(x) \cdot p_Y(y)$ → NON SONO INDIPENDENTI

<u>NB</u>: Per di più gli elementi sulla diagonale sono ben maggiori dei prodotti.

(b) <u>Calcolare il VALORE ATTESO</u>



$\boxed{E(X) = E(Y)}$ → poiché hanno la stessa legge marginale

$$E(X) = \sum x \, p_X(x) = E(Y) = \sum y \, p_Y(y) = 1 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}35 + 3 \cdot 0{,}30 + 4 \cdot 0{,}10$$

$$= 2{,}25$$

ESERCIZIO 2

Un barbaro viene dall'EST, dal NORD o dall'OVEST con probabilità 0,5, 0,3 e 0,2. Se viene dall'EST usa il trapano e la ruota del vasaio in maniera INDIPENDENTE con probabilità 0,9 e 0,8 rispettivamente; i numeri cambiano in 0,8 e 0,7 e 0,6 e 0,6 per il NORD e OVEST.

Un manufatto barbaro dimostra che l'artefice ha usato sia ruota del vasaio che trapano => probabilità che il manufatto provenga dall'est?

$P(E) = 0{,}5 \qquad P(T \cap R \mid E) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 = P(T \mid E)\, P(R \mid E)$

$P(N) = 0{,}3 \qquad P(T \cap R \mid N) = 0{,}8 \cdot 0{,}7$

$P(O) = 0{,}2 \qquad P(T \cap R \mid O) = 0{,}6 \cdot 0{,}6$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{P(E \mid T \cap R) = ?}$$

Grazie alle formule di Bayes è possibile scrivere:

$$P(E \mid T \cap R) = \frac{P(E) \cdot P(T \cap R \mid E)}{P(E) \cdot P(T \cap R \mid E) + P(N)\, P(T \cap R \mid N) + P(O)\, P(T \cap R \mid O)} =$$

$$= \frac{0{,}5 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8}{0{,}5 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6} = 0{,}6$$

NB: le ipotesi hanno probabilità a priori. Dopo l'evidenza l'ipotesi ha probabilità a posteriori (data l'evidenza). Questo aggiornamento è detto

AGGIORNAMENTO BAYESIANO

$$P(S) = 1 - P(S^c) = 1 - P(S_1^c \cap S_2^c) = 1 - P(S_1^c) \cdot P(S_2^c) =$$

$$= 1 - P(S_3^c \cap C_3^c)(1 - P(S_2)) =$$

$$= 1 - P(S_3^c) \cdot P(C_3^c)(1 - P(C_4 \cap C_5 \cap C_6)) =$$

$$= 1 - (1 - P(S_3))(1 - P(C_3)) = (1 - P(C_4) P(C_5 | C_4) P(C_6 | C_5 \cap C_4))$$

$$= 1 - (1 - 0{,}6 \cdot 0{,}6)(1 - 0{,}6)(1 - 0{,}9 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8) = 0{,}873$$

Esercizio 4

Urna con 30 palle rosse e 20 palle non rosse.

Vengono campionate a caso 8 palle.

Probabilità di osservare 5 rosse tra quelle 8 se il campionamento è fatto:

(i) Con reimmissione

(ii) Senza reimmissione

(i) $P(\text{"5 rosse su 8 campionate"}) = ?$

Si tratta di 8 prove indipendenti binarie

- binarie perché possono essere rosse o non rosse;
- indipendenti perché c'è la reintroduzione

Hanno tutti la stessa probabilità di successo: $p = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$

$n = 8$

X = n° di successi $\rightarrow$ $X \sim \text{Binomiale}(\underset{n}{8}, \underset{p}{\tfrac{3}{5}})$

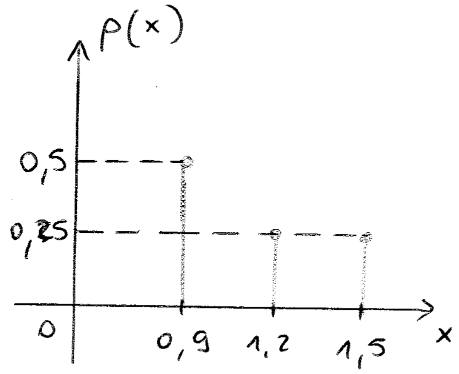
$$\Rightarrow P(X = 5) = \frac{\#CF}{\#CP} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \binom{8}{5}}{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43}$$

Esercizio 6

X_i = spesa di i $\qquad i = \begin{cases} 1 & \text{io} \\ 2 & \text{amico} \end{cases} \quad \Rightarrow (X_1 + X_2) \sim ?$

Legge di X_1

x	$p(x)$
0,9	0,5
1,20	0,25
1,50	0,25



Legge di $X_2 = X_1$

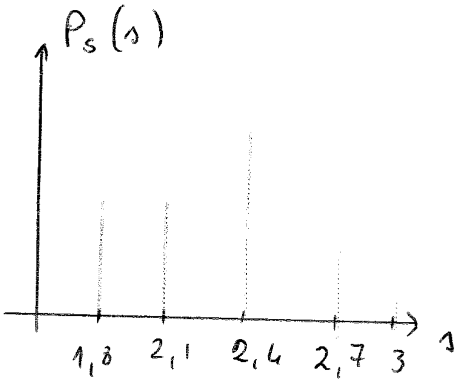
$p(x_1+x_2)$ / x_1+x_2	0,9	1,2	1,5	
0,9	0,25 / 1,8	0,125 / 2,1	0,125 / 2,4	0,5
1,2	0,125 / 2,1	0,0625 / 2,4	0,0625 / 2,7	0,25
1,5	0,125 / 2,4	0,0625 / 2,7	0,0625 / 3	0,25
	0,5	0,25	0,25	1

$0,5 \cdot 0,5 = 0,25$

$0,5 \cdot 0,25 = 0,125$

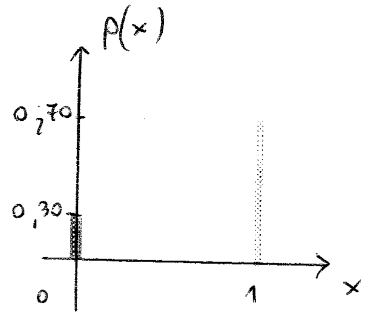
$0,25 \cdot 0,25 = 0,0625$

$S = X_1 + X_2$



s	$P_s(s)$
1,8	0,25
2,1	(0,125 + 0,125) = 0,25
2,4	(0,3125)
2,7	0,125
3	0,0625

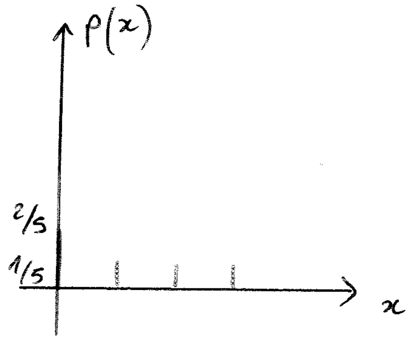
Esempio: moneta truccata



$$X = \begin{cases} 0 & \text{se } Y < 0,30 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

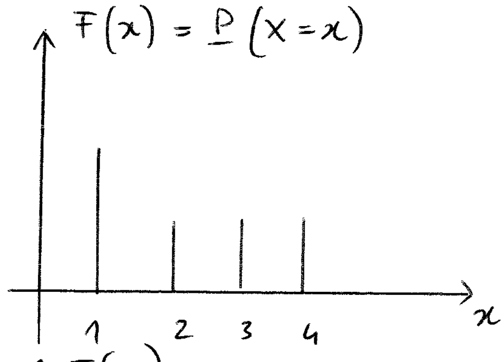
Esempio: TETRAEDRO TRUCCATO

x	
1	$2/5$
2	$1/5$
3	$1/5$
4	$1/5$



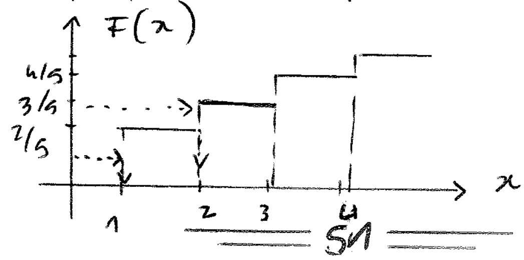
Se:

$RND < 400$	$X \leftarrow 1$
$400 < RND < 600$	$X \leftarrow 2$
$600 < RND < 800$	$X \leftarrow 3$
altrimenti	$X \leftarrow 4$



RND si inverisce nelle ordinate

RND →



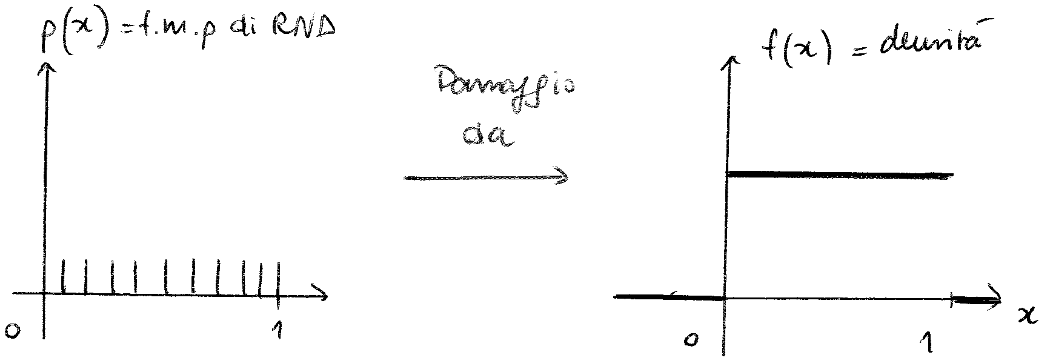
Es. $RND = 0,639$
$X \leftarrow 3$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 270

Esempio: X uniforme tra 0 e 1

Sappiamo che RND è uniforme, discreto su $\frac{1}{1000}, \frac{2}{1000}, \dots, \frac{1000}{1000}$

↳ Si può pensare a RND nella sua versione continua $\Rightarrow$ X è uniforme tra 0 e 1



La densità sarà

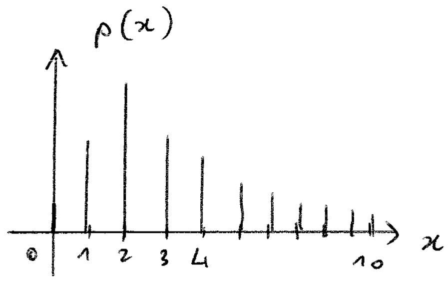
$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

→ La f.m.p. di una v.a. discreta serve per calcolare ≠ probabilità!

Esempio:

$X \sim \text{Binomiale}(10, \frac{1}{3})$

$$P(X \leq 3) = \sum_{x \leq 3} p(x)$$



→ In generale per una v.a discreta X con f.m.p $p(x)$,

$$P(X \in A) = \sum_{x \in A} p(x)$$

VALORE ATTESO di V.A. X CONTINUA

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx \qquad \text{se } \exists$$

VALORE ATTESO di una funzione $g(x)$ di V.a X

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f(x)\, dx$$

NB: Valgono le stesse regole dell'algebra dei valori attesi!

Esempio: $g(x) = (X - E(x))^2$

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x))^2 f(x)\, dx = Var(X) \leftarrow \text{è la VARIANZA}$$

Esempio:

$X \sim \text{Uniforme}(a,b)$

$$E(X) = \int_a^b x \frac{1}{(b-a)}\, dx = \frac{1}{(b-a)}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} - \frac{(a+b)^2}{4} =$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} = \dots = \frac{(b-a)^2}{12}$$

VARIABILI ALEATORIE GAUSSIANE (O NORMALI)

Si dice che X ha legge NORMALE con parametri μ e σ^2, cioè:

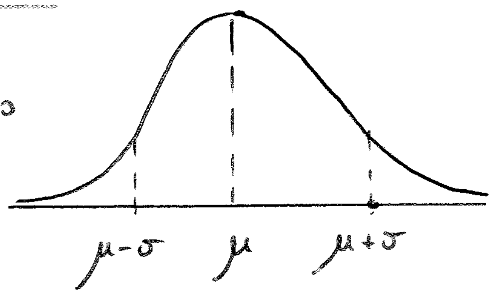
$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

se la sua densità è:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2 \right\}}$$

CURVA GAUSSIANA

I punti in cui cambia concavità la curva distano σ da μ.



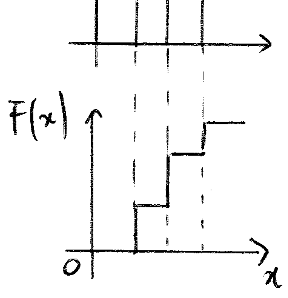
$\downarrow$

In base al tipo di v.a. si definisce f.d.r.

$$F(x) = \underline{P}(X \leq x)$$

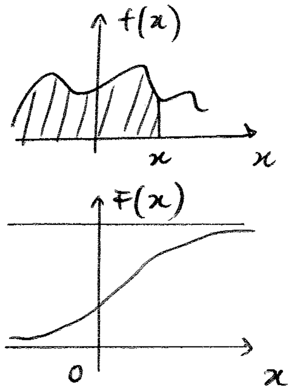
DISCRETE

$$\sum_{x_1 \leq x} p(x_1)$$



CONTINUE

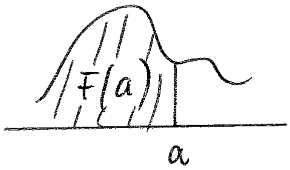
$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$



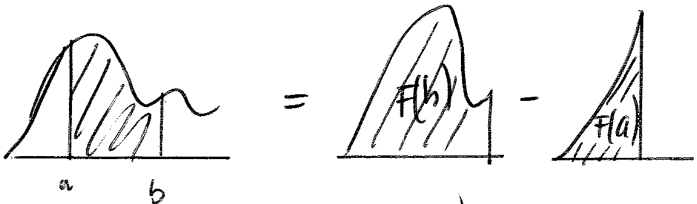
→ Per cosa si usa F?

Es. Se X ha densità $f(x)$:

$$P(X \leq a) = F(a)$$



$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$$



$$= F(b) - F(a)$$

↓

CASO PARTICOLARE

$$\begin{cases} \mu = 0 \\ \sigma^2 = 1 \end{cases}$$

⇓

NORMALE STANDARD ⟶ $Z \sim \text{Normale}(0,1)$

con densità

$$f(z) = \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

Per calcolare la f.d.r di una v.a. normale generica $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$F(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) =$$

Trasformazione lineare di X è proprio Z!

$$= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \phi(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\,dz$$

16.10.15

CAMPIONAMENTO

↓

Richiesta più di una singola osservazione

Un insieme ordinato (sequenza finita o n-pla) $X_1, \dots, X_n$ di v.a, si dice **CAMPIONE CASUALE** se:

(i) le v.a sono INDIPENDENTI
$\Rightarrow X_1 \dots X_n$ si dicono i.i.d secondo f.
(ii) Hanno la stessa distribuzione di probabilità (stessa DENSITÀ $f(x)$, stesso valore atteso ecc..)

i.i.d : i = indipendenti, i.d = identicamente distribuiti

Esempio FUSIBILI:

$n = 100$

$X_1, \dots, X_{100}$ i.id secondo $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

NB: $E(X_i) = \frac{1}{\lambda}$

X_i = tempo di durata dell'i-esimo fusibile

Se $\lambda = \frac{1}{100} \Rightarrow E(X_i) = 100$

Se si adotta un nuovo metodo di produzione ⇒ non si sa bene il nuovo "λ". Si può solo sperimentare!

⇓

Questa è la STATISTICA → Utilizzo dei metodi probabilistici per conoscere elementi

Con un nuovo metodo di produzione posso sperare che:

$$\lambda_{nuovo} < \lambda = \frac{1}{100}$$

cioè spero in un MIGLIORAMENTO della QUALITÀ

Definiamo:

Y_{50} = n° di fusibili che durano più di 50 h.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 270

$$= P(X < \mu_0 + 2) - P(X < \mu_0 - 2) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{\mu_0 + 2 - \mu}{\sigma}\right) +$$

$$- P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{\mu_0 - 2 - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\mu_0 + 2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu_0 - 2 - \mu}{\sigma}\right)$$

fdr della normale std tabulata

(il numero di tubi entro specs. è binomiale)

Consideriamo la media campionaria: $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum X_i$

↓

→ Qual è la sua legge? ←

Per un teorema generale:

<u>COMBINAZIONI LINEARI di NORMALI SONO NORMALI</u>

Nel caso di $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum X_i$ è normale (?)

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} \sum X_i\right) = \frac{1}{n} \sum E(X_i) = \frac{1}{n} \cdot \sum \mu = \frac{\mu n}{n} = \mu = E(X_i)$$

$$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{1}{n} \sum X_i\right) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum Var(X_i) =$$

$$= \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$SD(\bar{X}) = \sqrt{Var(\bar{X})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

TEOREMA LIMITE CENTRALE

Se $X_1, \dots, X_n$ i.id secondo la legge con valore atteso $E(X_i) = \mu$ $(\forall i)$ e varianza $Var(X_i) = \sigma^2$ $(\forall i)$ allora, approssimativamente per $n \to \infty$ (in pratica per n grande)

$$\bar{X} \sim NORMALE\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\text{oppure } n\bar{X} = \sum X_i \sim NORMALE(n\mu, n\sigma^2)$$

Grazie a questo teorema è possibile approssimare la distribuzione campionaria di $\bar{X}$ non solo per campioni normali ma per qualsiasi siano i campioni. L'importante è che varianza e valore atteso siano finiti!

Esempio:

$X_1, \dots, X_n$ iid Bernoulli (p)

$$\sum x_i \sim Binomiale\ (n, p) \text{ esattamente}$$

Per il TLC $\Rightarrow \sum x_i \sim Normale(?)$

Dato che:

$$\mu = E(x_i) = p$$
$$\sigma^2 = Var(x_i) = p(1-p)$$
$$\Downarrow$$
$$\sum x_i \sim N(np, np(1-p))$$

ESERCITAZIONE 3 (12/10/15)

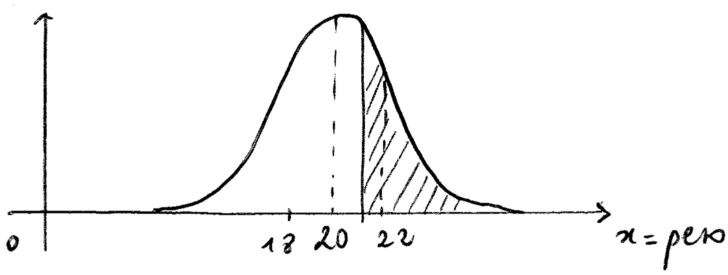
(1)

NB: Si dimostra che se $X \sim \text{Normale}(\mu, \sigma^2)$ allora:

$$E(X) = \mu$$

$$Var(X) = \sigma^2$$

$$sd(X) = \sqrt{Var(x)} = \sigma$$



1. $P(X > 21) = \text{area tratteggiata} = 1 - P(X \leq 21) = 1 - F(21) = 1 - P(X \leq 21) =$

$$= 1 - P\left(\frac{X-20}{2} \leq \frac{21-20}{2}\right) = 1 - P\left(\frac{X-20}{2} \leq \frac{21-20}{2}\right) =$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \tfrac{1}{2}\right) = 1 - P\left(\frac{X-20}{2} \leq \frac{21-20}{2}\right) =$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \tfrac{1}{2}\right) = 1 - \Phi\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1 - 0{,}691 = 0{,}309 \approx 31\%$$

Prof. Mauro Gasparini - Politecnico di Torino

METODI NUMERICI E STATISTICI

Nelle 20 ore dedicate a Probabilità e Statistica abbiamo coperto il capitolo 1, il capitolo 2 (esclusi 2.4, 2.5 e 2.6), il capitolo 3, il capitolo 4 (esclusi 4.3.5 e 4.8) il capitolo 5 (escluso 5.3 e da 5.6.1 in poi) e il capitolo 6 (escluso da 6.5.2 in poi) di *Probabilità e Statistica per l'ingegneria e le scienze*, di Sheldon Ross, Apogeo, seconda edizione 2008.

Esercizi del 16 Ottobre 2015, seconda parte

1. In una popolazione molto grande la frequenza delle persone con il lobo attaccato sia 0.15=15%.

   (a) Si campionino 10 persone a caso e si calcoli la probabilità che almeno 2 di esse abbiano il lobo attaccato (nota: usare l'approssimazione binomiale invece dell'ipergeometrica perché la popolazione è molto più grande di 10).

   (b) Si campionino 1000 persone a caso e si calcoli la probabilità che almeno 160 di esse abbiano il lobo attaccato (nota: usare l'approssimazione normale perché 1000 è grande).

   (c) Si campionino 1000 persone a caso e si calcoli la probabilità che almeno 200 di esse abbiano il lobo attaccato.

2. (esempio 6.3.2 dal Ross) Gli ingegneri responsabili valutano che il peso W (in tonnellate) che una singola campata di un ponte può sostenere senza subire danni strutturali sia approssimativamente una variabile aleatoria normale con valore atteso $\mu_W = 200$ e deviazione standard $\sigma_W = 20$. Supponiamo che il peso degli autoveicoli che passano sul ponte sia una variabile aleatoria con valore atteso $\mu_X = 1.5$ e deviazione standard $\sigma_X = 0.15$. Quante automobili dovrebbero trovarsi contemporaneamente sulla campata, affinché la probabilità di danno strutturale superi il 10%?

3. Nel Balubistan e nel Kalocistan gli esami di maturità si valutano su una scala da 0 a 1000. Nel Balubistan, la distribuzione dei voti è approssimativamente normale con valore atteso 600 e deviazione standard 40; Nel Kalocistan, la distribuzione dei voti è approssimativamente normale con valore atteso 620 e deviazione standard 22; Il punteggio di 650 vale più in Balubistan o in Kalocistan?

4. Un componente con tempo di vita esponenziale di parametro λ è collegato in serie a un sistema di tre componenti in parallelo, ciascuno con tempo di vita esponenziale di parametro 2λ. Supponiamo che tutti i componenti siano mutuamente indipendenti. Calcolare la probabilità che l'intero sistema duri più di un tempo x.

5. Un certo segnale di allarme viene lanciato se e solo se una variabile aleatoria X è superiore a 10. In condizioni normali, X è distribuito normalmente con media 8 e deviazione standard 2. In condizioni critiche, X è distribuito normalmente con media 12 e deviazione standard 3. Calcolare il tasso di falsi positivi (cioè la probabilitá che sia lanciato un allarme in condizioni normali) e il tasso di falsi negativi (cioè la probabilitá che non sia lanciato un allarme in condizioni critiche).

6. Consideriamo una variabile aleatoria X con la seguente distribuzione:

x	-2	0	2
$p(x)$	0.5	0.3	0.2

VALORE ATTESO

$\sum x \cdot p(x) = (-2)(0,5) + 0 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,2 = 0,$

VARIANZA

$((-2-(-0,6))^2 \cdot 0,5 + (0+0,6)^2 \cdot 0,3 +$
$+ (2+0,6)^2 \cdot 0,2 = 2,44$

SCARTO $= \sqrt{2,44} = 1,56$

   (a) Calcolare il valore atteso di X

   (b) Calcolare la distribuzione di probabilitá di X^2

0^2 $(-2)^2 / 2^2$ 0 4

0,3 0,7 0,3 0,7

ESERCITAZIONE 4 (16.10.15)

(1)

$$\sum_{i=1}^{10} X_i \sim \text{Binomiale}(10,\ 0.15)$$

(a)

$$\underline{P}(S \geq 2) = 1 - \underline{P}(S=0) - \underline{P}(S=1) - \underline{P}(S=2) =$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{1} \binom{10}{k} \cdot 0{,}15^k (1-0{,}15)^{10-k} = 0{,}4557$$

(b)

$$S = \sum_{i=1}^{1000} X_i \sim \text{Binomiale}(1000,\ 0.15)$$

$$\underline{P}(S \geq 160) = \sum_{k=160}^{1000} \binom{1000}{k} (0{,}15)^k (1-0{,}15)^{1000-k} =$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{159} \binom{1000}{k} (0{,}15)^k (1-0{,}15)^{1000-k}$$

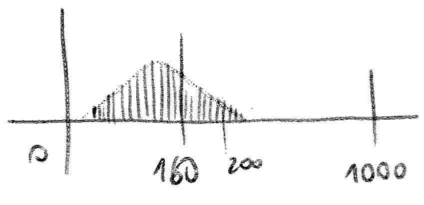
Approssimativamente

$$S \sim \text{Normale}\left(np = 1000 \cdot 0{,}15 = 150,\ np(1-p) = 150 \cdot 0{,}85 = 127{,}5\right)$$

$$\underline{P}(S \geq 160) = \underline{P}\left(\frac{S-150}{\sqrt{127{,}5}} > \frac{160-150}{\sqrt{127{,}5}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{127{,}5}}\right) =$$

$$= 0{,}1879$$

Concetto:



APPROSSIMAZIONE dei vari "segmenti" con un'area ben definita!

(c) Per 200 si hanno valori praticamente nulli!

$$\underline{P}(S > 200) \simeq \underline{P}\left(Z > \frac{200-150}{\sqrt{127{,}5}}\right) = \underline{P}(Z > 4{,}42) \cong 0$$

Non c'è nemmeno il n° sulla tavola poiché la prob a dx di 4 è 0!

EQUAZIONI DIFFERENZIALI alle DERIVATE PARZIALI

19.10.15

↓

Nel corso si studieranno 3 tipi di eq. riguardanti 3 fenomeni fisici diversi:

(i) TRASMISSIONE del CALORE

(ii) TRASMISSIONE delle ONDE

(iii) ELASTICITÁ dei MEZZI

ESEMPI GENERICI

① EQUAZIONE di POISSON

$\mathbb{R}^2$

In $\mathbb{R}^2$ considero un insieme Ω con le seguenti proprietà:

$\Omega \in \mathbb{R}^2$

- APERTO = ogni suo punto è interno (visto come un insieme privo di bord
- CONNESSO = cmq io prenda 2 punti $\in \Omega$ $\exists$ una curva che li collega e tutti i punti della curva $\in \Omega$
- LIMITATO = la sua estensione è finita

EQ. di POISSON →

$$\boxed{\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = u_B \end{cases}}$$

← MODELLO MATEMATICO

← VALORI definiti sul BORDO

Il valore di $\in$ alla frontiera/bordo$^\Delta$ è pari ad un valore specifico (u_B)

⚠ Richiama PROBLEMA di CAUCHY : eq. diff + condizioni al contorno.
Ora le variabili indipendenti sono punti dello spazio $\Rightarrow$ oltre il modello matematico necessito di prescrivere valori sul bordo.

↓

vincoli sugli spostamenti/forze

Ricorda: LAPLACIANO / OPERATORE di LAPLACE applicato u

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

NB:
Δu = laplaciano di u
∇u = Gradiente di u

n = dimensione spazio

Quindi se scelgo le coordinate cartesiane, l'operatore si trasforma come segue:

$$\mathcal{L}[u] = -\Delta u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

→ cosa bisogna richiedere a u ed f?

$$\boxed{\begin{matrix} u \in C^2(\Omega) \\ f \in C^0(\Omega) \end{matrix}}$$

Condizioni che devono valere sia per Laplace che Poisson!

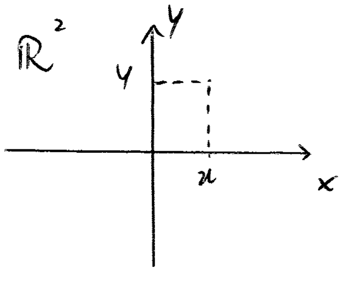
Osservo l'operatore di Laplace:

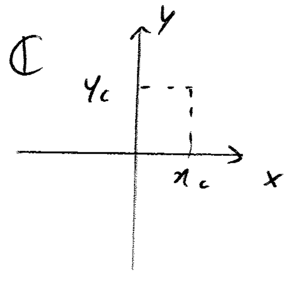
$$\boxed{\mathcal{L} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)}$$

Cambio i segni e definisco: $-\mathcal{L} = +\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) = A$

$$A_+ = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$$

$$A_- = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}$$





$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}$$

Con y:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = i \frac{\partial v}{\partial \xi} - i \frac{\partial v}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \left(i \frac{\partial}{\partial \xi} - i \frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(i \frac{\partial v}{\partial \xi} - i \frac{\partial v}{\partial \eta}\right) =$$

$$= -\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}}$$

← Si è partiti da un operatore di Laplace applicato ad una funt → trasf. variabili → si ottiene una sola derivata parziale mista!

Osservo che la somma di queste due derivate è il laplaciano:

$$0 = -\Delta v = -\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = -4 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0 = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)$$ ← indipendente da η

$$\Downarrow$$

Risolvere questa funzione significa dire → $\frac{\partial v}{\partial \xi} = f(\xi)$

$$v(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

$$v(z, \bar{z}) = F(z) + G(\bar{z})$$

$$= -\frac{1}{2}\int_\Omega \left\{ \underline{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} + 2\varepsilon\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \varepsilon^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2} + 2\varepsilon\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} + \varepsilon^2\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\},$$

Possiamo riscrivere il tutto come segue:

$$= \underline{\mathcal{E}(v)} - \varepsilon\int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\right)d\mu - \frac{1}{2}\varepsilon^2\int_\Omega\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]d\mu$$

$\Downarrow$

L'energia è:

$$\mathcal{E}(v+\varepsilon w) = \mathcal{E}(v) - \varepsilon\int_\Omega\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]d\mu + \varepsilon^2\cdot\mathcal{E}(w) = \tilde{\mathcal{E}}(\varepsilon)$$

Se la derivata 1ª è zero => punto di estremo => calcolo la derivata:

$$\boxed{\frac{d\tilde{\mathcal{E}}}{d\varepsilon}(0) = -\int_\Omega\left\{\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\right\}d\mu = 0}$$

FORMA DEBOLE

Utilizzo la regola di Leibnitz e rielaboro le derivate parziali.

Prima però osservo che:

$$\nabla v = \frac{\partial v}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\vec{e}_y$$

$$\nabla w = \frac{\partial w}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial w}{\partial y}\vec{e}_y$$

$$\frac{d\tilde{\mathcal{E}}}{d\varepsilon}(0) = -\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla w = 0$$

Introduco l'IDENTITÀ VETTORIALE seguente: $\mathrm{div}(w\nabla v) = \nabla v\cdot\nabla w + w\,\mathrm{div}(\nabla v)$

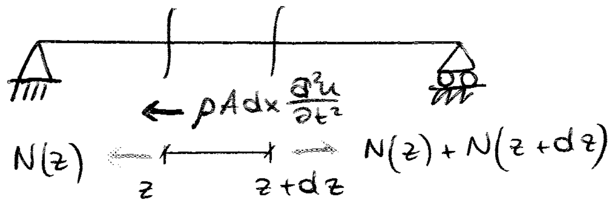
$$\nabla v\cdot\nabla w = \mathrm{div}(w\nabla v) - w\,\mathrm{div}(\nabla v)$$

$\uparrow$

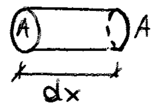
?

③ EQUAZIONI DELLE ONDE

Equilibrio dinamico.



Considero un concio di trave infinitesimo.



$$\begin{cases} \rho A dx = m \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a \end{cases}$$

Bilancio di forze:

$$-\cancel{N(z)} - \rho A dz \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \cancel{N(z)} + dN(z) = 0$$

$$-\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dz + \frac{\partial N}{\partial z} dz = 0$$

$$-\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0$$

Essendo: $N = \sigma A$

$$\begin{cases} N = [N] \\ \sigma = [N][L]^{-2} \\ A = [L]^2 \end{cases}$$

Tensione media: $\sigma = \dfrac{N}{A}$

Per la legge di Hooke: $\sigma = E\varepsilon$ con $\varepsilon = \dfrac{\partial u}{\partial z}$

$$\downarrow$$

$$N = EA \cdot \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\downarrow$$

$$-\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial z}\left(EA \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0$$

Se la trave é OMOGENEA + la sez. é COSTANTE => il prodotto é COSTANTE!

(4) EQUAZIONE del CALORE

Definisco un'energia interna pari a:

Variazione dell'en. interna rispetto al tempo → $$\boxed{\frac{\partial e}{\partial t} = -\,\mathrm{div}(q) + Q}$$ ← sorgente di calore

Flusso termico (q)

Essendo calore specifico (c) funzione di T:

$$e = e(T)$$

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} = \rho \overbrace{\left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)}^{c} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \rho\, c\, \frac{\partial T}{\partial t}$$

UNITÀ di MISURA

$$c = \frac{J}{kg \cdot K}$$

$$K = \frac{W}{m \cdot K}$$

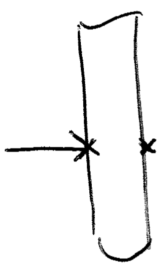
Essendo: $q = -K \Delta T$ K = conducibilità termica

Sostituisco:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{div}(K \nabla T) + Q$$

$\mathrm{div}(K\nabla T) = K \Delta T$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = K \Delta T + Q$$



$$\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Q}$$

Se $Q = 0$

$$\hookrightarrow \boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0}$$

PARABOLICHE

- derivata rispetto a t 1° ordine
- derivata rispetto x 2° ordine

⇓

cosa si associa? PARABOLA

(termine noto $= f(x)$)

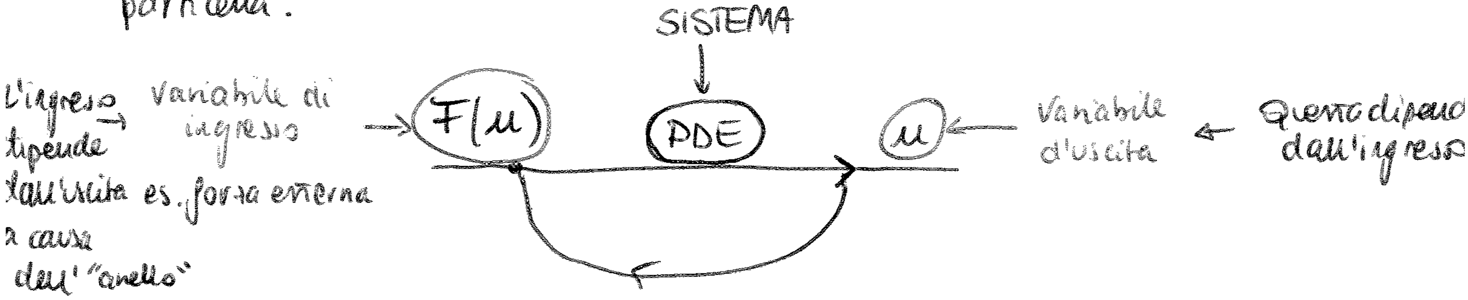
NB: è sbagliato dire che la costante non dipenda dalla variabile in gioco!

Es. particella immersa in un campo gravitazionale con una certa massa.

la forza di gravità agisce sulla particella. Questa dipende dal punto in cui è?

$$G = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$ ← POTENZIALE GRAVITAZIONALE

Essendo questo il potenziale, la forza è la sua derivata ⇒ la forza dipende da r e quindi dalla (coordinata) posizione della particella. Essendo la costante dipendente dalla forza ⇒ anche questa dipende dalla posizione della particella.



⚠ Il segno ⊖ è dovuto all'operatore di Laplace nella PDE. Si scrive $-\Delta u$ poiché conviene nella ricerca dei minimi.

Se $a_{ik}(x) \equiv a_{ik}$ $\forall\ i, k = 1, \dots, n$
$b_i(x) \equiv b_i$ $\forall\ i = 1, \dots, n$
$c(x) = c$
⇒ la PDE si dice a COEFFICIENTI COSTANTI

Se $f = 0$ ⇒ la PDE è OMOGENEA

NB: è sempre LINEARE (in entrambi i casi)

Il problema più difficile è quando la PDE non è a coeff. costanti. 2 casi:

- Coeff. dipende dallo spazio e non dal tempo → risolvibile in forma chiusa
- " " " " e dal tempo → difficile

Parte ANTISIMMET. $\rightarrow$ $Skew(A)^T = \frac{A^T - A}{2} = -\frac{A - A^T}{2} = -Skew(A)$

$$Skew(A) = \frac{A - A^T}{2}$$

$\begin{cases} A \in M_o \text{ (= insieme matrici quad.)} \\ H \in Sym(M) \quad (\Rightarrow H = H^T) \end{cases}$ Considero 2 matrici A, H

(= insieme matrici simmetriche)

Se calcolo la traccia:

$$tr(AH) = tr\left[\left(Sym(A) + Skew(A)\right) H\right] = tr\left[Sym(A)H\right] + tr\left[Skew(A)H\right]$$

A → scompongo in parte SIMM + ANTISIM.

$$tr\left[Skew(A)H\right] = tr\left[\frac{A - A^T}{2} H\right] = \frac{1}{2} tr\left[AH - A^T H\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(tr(AH) - tr(A^T H)\right)$$

$$tr(AH) = A_{ik} \cdot H_{ki} = (A^T)_{ki} \cdot (H^T)_{ik} = (A^T)_{ki} \cdot H_{ik} = tr(A^T H)$$

Dato che gli indici sono risommati

H è simmetrica

$$\Downarrow$$

$\boxed{tr\left[Skew(A)H\right] = 0}$ $\Rightarrow$ TUTTE le matrici SIMMETRICHE sono ORTOGONALI a quelle ANTISIMMETRICHE

$$\Downarrow$$

$$\boxed{tr(AH) = tr\left[sym(A)H\right]}$$

$\Rightarrow$ Potrò sempre supporre che la matrice $A(x)$ è simmetrica poiché anche se non lo fosse la parte ANTI si annulla!

Calcolo i prodotti riga per colonna:

$$= -\left(\lambda_1 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2}\right)$$

Scelgo arbitrariamente un autovalore positivo e uno negativo $\begin{cases} \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow$ AUTOVAL DISCORD

$$= -\left(-|\lambda_1| \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2}\right)$$

Ipotizzando $\begin{cases} y_1 = ct \\ y_2 = z \end{cases} \Rightarrow$ posso riscrivere quella parte come:

$$= |\lambda_1| \cdot \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \lambda_2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Sia λ_1 che $\lambda_2 \neq 0 \Rightarrow$ metto λ_1 a fattore e risulta

$$= |\lambda_1| \left[\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\lambda_2}{|\lambda_1|} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] = \frac{|\lambda_1|}{c^2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\lambda_2}{|\lambda_1|} c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]$$

<u>Caso particolare</u>: $\lambda_2 = |\lambda_1| \Rightarrow$ ritorno all'eq. di D'Alambert.

- Gli $(n-1)$ autovalori positivi generano un operatore di Laplace (ELLITTICO) in uno spazio $(n-1)$
- l'autovalore negativo è collegato al tempo.

È un blocco positivo!

Dopo aver diagonalizzato:

$$\underset{\substack{<0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}}{} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & \\ \vdots & & \lambda_3 \; \ddots \; \lambda_n \end{bmatrix} \underset{\substack{>0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z}}}{}$$

nel caso di $n=2 \to$ ho un autovalore >0 e uno <0.

Se a^2 dipendesse da x → si potrebbe ancora risolvere. Se invece dipendesse anche dal tempo, sarebbe poco risolvibile.

↓

23.10.15

METODO di SEPARAZIONE delle VARIABILI

Pongo $a^2 = \frac{\lambda}{\rho c} > 0$ → Se fosse $= 0$ ⇒ l'equazione DEGENEREREBBE

↓

COEFFICIENTE di DIFFUSIVITÀ TERMICA

$$\boxed{[a^2] = \frac{L^2}{T}}$$

$$\boxed{u_t = a^2 u_{xx}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

⇓

È possibile usare il METODO di FOURIER (separazione delle variabili)

NB: questo metodo **non** si può utilizzare se i coefficienti dipendono dal TEMPO! Nel caso di dipendenza dallo spazio invece si può usare!

In questo caso vi sono solo coeff. costanti ⇒ ok!

Applicazione del metodo

Si inizia risolvendo il PROBLEMA agli AUTOVALORI associato all'equazione data. Questo si ottiene risolvendo l'equazione nella forma di Sturm - Liouville.

Selezioniamo la parte ELLITTICA dell'operatore:

$$\boxed{\mathcal{K} = -a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}}$$

questa è la parte che voglio DIAGONALIZZARE

Ricorda:

ALGEBRA LINEARE

$$Mv = \lambda v$$

autovettore, autovalore

Problema lineare facilmente risolvibile.

PDE

$$K\phi = \lambda\phi$$

autofunzione, autovalore

Il nostro caso!

Sostituendo $\mathcal{K}$ nella PDE:

$$-a^2 \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \lambda \phi$$

l'autovalore deve essere POSITIVO per la definizione di operatore ellittico

EQ dell'OSCILLATORE ARMONICO nella variabile SPAZIO

$$\boxed{\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\lambda}{a^2}\phi = 0}$$

↳ La soluzione è un insieme di SENI e COSENI

$$\boxed{\phi(x) = A\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a}x\right)}$$

- Verifichiamo se le autofunzioni formano davvero una base.

Per farlo è sufficiente verificare che siano ORTOGONALI.

Def: Se $\forall\, n,m \in \mathbb{N}$, $n,m \geq 1 \ \wedge \ n \neq m$

$$\boxed{\phi_n \cdot \phi_n = 0}$$

$$\Downarrow$$

$$\left\{ \phi_n(x) \right\}_{n=1}^{\infty} \text{ è ORTOGONALE}$$

Posso esprimere il PRODOTTO SCALARE tramite un INTEGRALE.

$$\boxed{f \cdot g = \int_0^{l} f(x) \cdot g(x)\, dx}$$

Nel nostro caso:

$$\int_0^{l} \phi_n(x) \cdot \phi_m(x)\, dx = 0$$

$$\downarrow$$

(se $n \neq m$) $\qquad B_n \cdot B_m \cdot \int_0^{l} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) dx = 0$

$$\Downarrow$$

$$\phi_n \perp \phi_n \text{ se } n,m \geq 1 \ \wedge \ n \neq m \ \wedge \ n,m \in \mathbb{N}$$

$\frac{n\pi}{l} = K_n \rightarrow$ NUMERO D'ONDA = reciproco della lunghezza d'onda.

$\frac{1}{K_n} = \frac{l}{n\pi} \rightarrow$ LUNGHEZZA D'ONDA = distanza tra due picchi consecutivi omologhi

Adesso bisogna calcolare i coeff. di $u_n(t)$.

Se $u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) \cdot \phi_n(x)$ è SOLUZIONE $\Rightarrow$ deve soddisfare la PDE di partenza.

Si ripetono le condizioni di CONVERGENZA PUNTUALE e UNIFORME della serie di Fourier.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dot{u}_n(t) \cdot \phi_n(x) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) \cdot \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial x^2}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) \cdot \left(-\frac{n^2\pi^2}{l^2} \phi_n(x)\right) \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \dot{u}_n(t) \cdot \phi_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) \cdot \left(-\frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2} \phi_n(x)\right)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left\{ \dot{u}_n(t) + \frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2} u_n(t) \right\}}_{\text{Questa parte si deve annullare affinché sia tutto = 0}} \phi_n(x) = 0$$

$\forall\, n \geq 1,\ n \in \mathbb{N}$:

$$\dot{u}_n(t) + \frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2} u_n(t) = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{n0} \cdot \delta_{nm} = u_{m0}$$

$$u_{m0} = \int_0^l f(x) \cdot \phi_m(x)\,dx = \int_0^l f(x) \cdot \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{m\pi}{l} x\right) dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f(x) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{l} x\right) dx$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{n0}\, e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t} \cdot \phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l f(y) \cdot \phi_n(y)\,dy\right] e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t} \phi_n(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^l f(y) \cdot \phi_n(y) \cdot \phi_n(x)\,dy \cdot e^{\frac{-n^2\pi^2a^2}{l^2}t} =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^l \left[e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t} \phi_n(x) \cdot \phi_n(y)\right] f(y)\,dy$$

Dato che la serie converge uniformemente $\Rightarrow$ è possibile scrivere:

$$\boxed{u(x,t) = \int_0^l \left[\sum_{n=1}^{+\infty} e^{\frac{-n^2\pi^2a^2}{l^2}t} \cdot \phi_n(x) \cdot \phi_n(y)\right] f(y)\,dy}$$

<u>Def</u>: si definisce FUNZIONE di GREEN del problema ai valori iniziali e al bordo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \\ u(0,t) = 0 & x \in (0,l) \\ u(l,t) = 0 & t \in (0+\infty) \\ u(x,0) = f(x) & \end{cases}$$

Esempio

NB: condizioni al bordo NON omogenee.
Si hanno 3 ingressi:
- 1 condiz. iniziale
- 2 condiz. al bordo

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & x \in (0,l) \\ u(x,0) = f(x) \\ u(0,t) = u_1 \\ u(l,t) = u_2 \end{cases}$$

Grazie ai calcoli svolti prima si ha che:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \cdot \Phi_n(x)$$

Nel problema di Sturm-Liouville le condizioni al contorno erano OMOGENEE. Qui NO! ⇒ la sol trovata prima non va bene in questo caso.

Infatti se sostituiamo:

$$u(0,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) \cdot \underbrace{\cancel{\Phi_n(0)}}_{=0} = 0 \neq u_1$$

$$u(l,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) \cdot \underbrace{\cancel{\Phi_n(l)}}_{=0} = 0 \neq u_2$$

⇒ Errore? Quando cambiamo le condizioni al bordo bisogna "prolungare" la sol anche ai punti esterni.

Visto che l'equazione è lineare ⇒ la somma di 2 funz. lineari è anch'essa lineare.

$$\boxed{u(x,t) = r(x) + w(x,t)}$$ ← Ho scomposto $u(x,t)$

↓

Studio le singole parti separatamente

26.10.15

Riassunto: problema di trasmissione del calore

Eq. da risolvere:

Problema alle condizioni iniziali e al bordo

$$\boxed{\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & , \; x \in (0,l) \\ u(x,0) = f(x) & t \in (0,+\infty) \\ \left.\begin{aligned} u(0,t) &= u_1 \\ u(l,t) &= u_2 \end{aligned}\right\} & t \in (0,+\infty) \end{cases}}$$

Questo problema può essere risolto grazie alla scomposizione di 2 parti (lineari).
Studio la funzione u nel modo seguente:

$$\boxed{u(x,t) = v(x) + w(x,t)}$$

Dipende solo dai punti

Funzione che dipende anche dal tempo

$\boxed{v(x)}$

Si calcola risolvendo il seguente problema (stazionario, in cui non si ha variazione esplicita rispetto t):

$$\begin{cases} 0 = a^2 \dfrac{d^2 v}{dx^2} \\ v(0) = u_1 \\ v(l) = u_2 \end{cases}$$

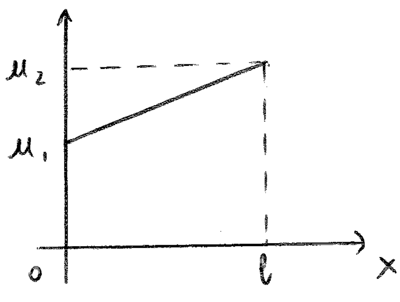
$$\Downarrow$$

$$\boxed{v(x) = \frac{u_2 - u_1}{l} x + u_1}$$

$\Rightarrow$ Il profilo di temperatura, compatibile con le condizioni al bordo è

Se $u_2 > u_1$

(tale che il coeff. della retta sia positivo)



L'altro integrale vale:

2) $\int_0^l x \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx = \rightarrow$ risolvo per parti: $\begin{cases} f(x) = x & f'(x) = 1 \\ g'(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) & g(x) = -\frac{l}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \end{cases}$

$$= \left[-\frac{lx}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right]_0^l + \underbrace{\cancel{\frac{l}{n\pi}\int_0^l \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx}}_{=0} = -\frac{l^2}{n\pi}(-1)^n$$

$$\left[\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right]_0^l = 0$$

$\Downarrow$

Posso riscrivere w_{n0} ora:

$$w_{n0} = \sqrt{\frac{2}{l}}(u_0 - u_1)\cdot\frac{l}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right] + \sqrt{\frac{2}{l}}\,\frac{u_2-u_1}{l}\cdot\frac{l^2}{n\pi}(-1)^n$$

$$w_{n0} = \sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\frac{l}{n\pi}\left\{\left[1-(-1)^n\right](u_0-u_1) + (u_2-u_1)(-1)^n\right\}$$

$\Downarrow$

Ora posso risolvere il problema:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\frac{l}{n\pi}\cdot\{\dots\}\,e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t}\cdot\sqrt{\frac{2}{l}}\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{w(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n\pi}\left\{\left[1-(-1)^n\right](u_0-u_1) + (u_2-u_1)(-1)^n\right\}\cdot e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)}$$

$\uparrow$

Come si comporta una fluttuazione di temperatura in una barra.

Queste scritture possono essere rese uguali ad altre tramite dei "trucchi".

Ad esempio:

$$(-1)^n(u_2-u_1) = -(-1)^n(u_1-u_2) = (-1)^{n+1}(u_1-u_2)$$

NB: si tratta di TEMPERATURA RELATIVA e non ASSOLUTA.

In generale:

- temperatura relativa → gradi °C
- temperatura assoluta → gradi K

ESEMPIO

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - hu & \forall x \in (0, \ell) \\ -k\sigma u_x(0,t) = q_1 & \\ k\sigma u_x(\ell, t) = q_2 & \forall t \in (0, +\infty) \\ u(x,0) = f(x) & \forall x \in (0, \ell) \end{cases}$$

Estremi sempre esclusi! Al massimo dimostro poi che si può estendere la sz su quei punti

L'equazione è:

- LINEARE → le combinazioni lineari delle sue sz possono essere usate per ottenere altre sz.
- OMOGENEA → pag. 82

Si può pensare di procedere come nel caso precedente e quindi iniziare a diagonalizzare l'operatore. Questa volta però l'operatore non è soltanto la derivata 2ª.

c'è anche h

$$-a^2 \cdot \frac{d^2\phi}{dx^2} + h\phi = \lambda\phi$$

λ "vorrei che fosse" l'autovalore dell'operatore ↪ $-a^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2} + h$

$$a^2 \frac{d^2\phi}{dx^2} + (\lambda - h)\phi = 0$$

↳ Differenza $> 0 < \emptyset$?

Questo in realtà è sbagliato! Non è uguale a prima poiché compare h!

h è sempre stato = 0 ⇒ λ è sempre stato > 0

NON si fa così!

→ le condizioni al contorno del PROBLEMA TRASFORMATO sono TEMPO - dipendenti! Ma non quelle del PROBLEMA INIZIALE. Allora mi domando se è ancora possibile riscrivere $u(x,t)$ come somma di 2 componenti.

Provo a farlo: spezzo in due parti:

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t)$$

$v(x)$
$$0 = a^2 \frac{d^2v}{dx^2} - hv$$
$$-k\sigma \frac{dv}{dx}(0) = q_1$$
$$k\sigma \frac{dv}{dx}(l) = q_2$$

$w(x,t)$
$$w_t = a^2 w_{xx} - hw$$
$$-k\sigma\, w_x(0,t) = 0$$
$$k\sigma\, w_x(l,t) = 0$$
$$w(x,0) = f(x) - v(x)$$

Solo ORA procedo col CAMBIO di VARIABILE (trasformo prima questo ↑ problema)

$$w \longmapsto \tilde{w}(x,t) = e^{ht} \cdot w(x,t)$$

ripercorro gli stessi passaggi effettuati per $\tilde{u}$:

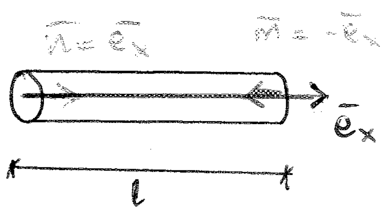
$$\boxed{\begin{aligned} &\tilde{w}_t = a^2 \tilde{w}_{xx} \\ &-k\sigma\, \tilde{w}_x(0,t) = 0 \\ &k\sigma\, \tilde{w}_x(l,t) = 0 \\ &\tilde{w}(x,0) = f(x) - v(x) \end{aligned}}$$

⇐ Opero la trasf. di variabili solo sulla parte che dipende dal tempo.

Ho eliminato h

Ora abbiamo "fissato" il flusso (ciò che immetto nella barra).

OSSERVAZIONE sulle c.b



$$\vec{q} = -k \frac{\partial u}{\partial x} \vec{e}_x$$

Sulla sup l il flusso che entra è pari a:

$$Q = (\vec{q} \cdot \vec{n})\, \sigma = k\sigma u_x(l,t)$$

$\vec{q} \to \frac{W}{m^2}$; $\sigma \to m^2 =$ (sezione superficie)

$$Q = (\vec{q} \cdot \vec{n})\, \sigma = -k\sigma\, u_x(0,t)$$

Il segno dip dalla convenzione

Prima avevo fissato u ora invece $q \Rightarrow$ ho imposto il flusso di calore.

$$\begin{cases} C_1 - C_2 = \dfrac{a}{\sqrt{h}} \cdot \underbrace{\dfrac{q_1}{K\sigma}}_{R_1} \\ -e^{\frac{\sqrt{h}}{a}\ell} C_1 + e^{\frac{\sqrt{h}}{a}\ell} C_2 = \dfrac{a}{\sqrt{h}} \cdot \underbrace{\dfrac{q_2}{K\sigma}}_{R_2} \end{cases}$$

$\Downarrow$

Utilizzando la regola di Cramer

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -e^{-\frac{\sqrt{h}}{a}\ell} & e^{\frac{\sqrt{h}}{a}\ell} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{a}{\sqrt{h}} R_1 \\ \frac{a}{\sqrt{h}} R_2 \end{Bmatrix}$$

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{a}{\sqrt{h}} R_1 & -1 \\ \frac{a}{\sqrt{h}} R_2 & e^{\frac{\sqrt{h}}{a}\ell} \end{vmatrix}}{e^{\frac{\sqrt{h}}{a}\ell} - e^{-\frac{\sqrt{h}}{a}\ell}} = \frac{\frac{a}{\sqrt{h}} R_1 e^{\frac{\sqrt{h}}{a}\ell} + \frac{a}{\sqrt{h}} R_2}{2\sinh\left(\frac{\sqrt{h}}{a}\ell\right)}$$

moltiplico e divido per 2 il denominatore

$$\boxed{\sinh(\eta) = \frac{e^{\eta} - e^{-\eta}}{2}}$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{a}{\sqrt{h}} R_1 \\ -e^{-\frac{\sqrt{h}}{a}\ell} & \frac{a}{\sqrt{h}} R_2 \end{vmatrix}}{2\sin\left(\frac{\sqrt{h}}{a}\ell\right)} = \frac{\frac{a}{\sqrt{h}} R_1 + \frac{a}{\sqrt{h}} R_1 e^{-\frac{\sqrt{h}}{a}\ell}}{2\sinh\left(\frac{\sqrt{h}}{a}\ell\right)}$$

sostituisco C_1 e C_2

$$V(x) = C_1 \cdot e^{-\frac{\sqrt{h}}{a}x} + C_2 \cdot e^{\frac{\sqrt{h}}{a}x} = \frac{\frac{a}{\sqrt{h}}}{2\sin\left(\frac{\sqrt{h}}{a}\ell\right)} \left\{ R_1 e^{-\frac{\sqrt{h}}{a}(x-\ell)} + R_2 e^{-\frac{\sqrt{h}}{a}x} + \right.$$

$$\left. + R_2 e^{\frac{\sqrt{h}}{a}x} + R_1 \cdot e^{\frac{\sqrt{h}}{a}(x-\ell)} \right\}$$

↳ Questa si riduce ad un'espressione molto più compatta ⟹

$$\Phi_n(x) = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)$$

Avendo cambiato le condizioni al bordo (ora riguardanti le derivate) => cambiano totalmente le autofunzioni!

Ai bordi queste funzioni non si annullano => per questo non si ha la stessa funz.

DEFINIZIONI

CONDIZIONI di DIRICHLET

CONDIZIONI al BORDO date alla <u>FUNZIONE INCOGNITA</u>.

(tutti gli esempi fino a quest'ultimo). Queste rappresentano VINCOLI /condiz. sugli <u>SPOSTAMENTI</u>.

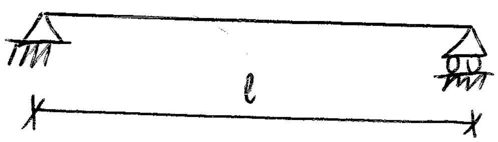
CONDIZIONI di NEUMANN

CONDIZIONI al BORDO date alle <u>DERIVATE della FUNZIONE INCOGNITE</u>

Queste rappresentano VINCOLI sugli <u>SFORZI</u>

Esempio:

Considero una trave incernierata da un lato e ha un carrello dall'altro



CONDIZIONI:

- A sinistra sia lo spostamento orizzontale che verticale non è consentito => CONDIZIONI di DIRICHLET
- A destra ho solo lo spostamento verticale impedito => nuova condizione di DIRICHLET

↳ Ritornando al nostro esempio. Ora bisogna normalizzare le autofunzioni.

Valutare A / sia ortonormale

$$\Phi_n(x) = A\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)}$$

Ricostruisco una serie di Fourier

$$\tilde{w}(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{w}_n(t)\Phi_n(x)$$

Sostituisco → devo risolvere questo sistema di equazioni:

$$\dot{\tilde{w}}_n(t) + \frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}\tilde{w}_n(t) = 0$$

$$\tilde{w}_n(t) = \tilde{w}_{n0}\, e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t}$$

SZ $\Rightarrow$ $$\boxed{\tilde{w}(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{w}_{n0}\, e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t}\sqrt{\frac{2}{l}}\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)}$$

Così ho trovato $\tilde{w}(x,t)$ ma io cerco $w(x,t)$

$$\downarrow$$

Mi ricordo che: $w(x,t) = e^{-ht}\cdot\tilde{w}(x,t)$ e quindi:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_{n0}\, e^{-\left(h+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}\right)t}\cdot\sqrt{\frac{2}{l}}\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

SPETTRO degli AUTOVALORI

L'insieme di tutti i possibili autovalori si chiama SPETTRO. Il termine "hu" introdotto a inizio problema ha provocato uno SHIFT dell'autovalore + basso. Per $n=0$ → rimane h. Quindi un termine lineare di temperatura shifta gli autovalori (trasla di h lo spettro degli autovalori).

Calcolo le autofunzioni:

$$\phi(x) = A\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a}\cdot x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a}x\right)$$

$$\phi'(x) = -A\frac{\sqrt{\lambda}}{a}\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a}x\right) + B\frac{\sqrt{\lambda}}{a}\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a}x\right)$$

$$0 = \phi(0) = \boxed{A = 0}$$

$$0 = B\frac{\sqrt{\lambda}}{a}\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a}l\right)$$

Si annulla per:

- $\lambda = 0 \longrightarrow$ Soluzione che non serve. Visto che $A = 0 \Rightarrow \phi(x) = B\sin\left(\frac{\sqrt{0}}{a}x\right) = 0$
  ϕ é sempre nulla così! Inutil
- $\frac{\sqrt{\lambda}}{a}l = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \geq 0$

le autofunzioni del problema sono:

la successione di funzioni $\rightarrow$ $$\left\{\phi_n(x)\right\}_{n=0}^{+\infty} = \left\{B_n\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right)\right\}_{n=0}^{+\infty}$$ $\leftarrow$ GENERICA AUTOFUNZ.

quando le autofunzioni dipendono da sin o cos $\Rightarrow$ so che la cost é $\frac{2}{\sqrt{l}}$

$$\boxed{\forall n \geq 0 \quad \left\{\phi_n(x)\right\}_{n=0}^{+\infty} = \left\{\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right)\right\}_{n=0}^{+\infty}}$$

(CONDIZIONI al BORDO MISTE)
DIRICHLET a SX
NEUMAN a DX

Ricorda:

CONDIZIONI al BORDO DIRICHLET	$\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{n\pi}{2l}x\right)$
CONDIZIONI al BORDO NEUMANN	$\sqrt{\frac{2}{l}}\cos\left(\frac{n\pi}{2l}x\right)$
CONDIZIONI al BORDO MISTE (DIRICHLET a SX NEUMAN a DX)	$\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right)$

$\rightarrow$ NB: solo $(2n+1)$ considero solo le dispari

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 121 di 270

Se al variare dei parametri:

DIRICHLET-NEUMANN $\longrightarrow$ punto a sx rimane fermo, la tg a Dx rimane ferma

NEUMAN - DIRICHLET $\longrightarrow$ tg ferma , punto fermo

DIRICHLET-DIRICHLET $\longrightarrow$ 2 punti fermi

NEUMANN - NEUMANN $\longrightarrow$ 2 tg ferme se siva su e giù

$$\Downarrow$$

Autovalore col sen(...)

$\uparrow$

Ritornando al problema (condizioni di Dirichlet a sx e Neumann a Dx)

$$u(x,t) = Q_0 x + u_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} w_{n0}\, e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 a^2}{4l^2}t} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l} x\right)$$

$$w_{n0} = \int_0^l \left[f(x) - v(x)\right] \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l} x\right) dx$$

Come si ottiene?

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n(t) \cdot \phi_n(x)$$

$$w_t(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dot{w}_n(t) \cdot \phi_n(x)$$

derivata funt armonica => segno meno

$$w_{xx}(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n(t)\, \phi_n(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} w_n(t) \cdot \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2} \phi_n(x)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \dot{w}_n(t)\, \phi_n(x) = -a^2 \sum_{n=0}^{+\infty} w_n(t) \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2} \phi_n(x)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \dot{w}_n(t) + \frac{(2n+1)^2\pi^2 a^2}{4l^2} w_n(t) \right\} \phi_n(x) = 0$$

$$w_n(t) = w_{n0}\, e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 a^2}{4l^2}t}$$ $\rightarrow$ sostituisco e trovo

① TRASFORMO il PROBLEMA

$$\begin{cases} \tilde{u}_t = a^2 \tilde{u}_{xx} - h\tilde{u} \\ \tilde{u}(0,t) = u_1 - u_0 \\ \tilde{u}(l,t) = u_2 - u_0 \\ \tilde{u}(x,0) = f(x) - u_0 \end{cases}$$

← Sono anche cambiate le condizioni al bordo.

$\downarrow$

② RISOLVO il "NUOVO" PROBLEMA

$$\boxed{\tilde{u}(x,t) = v(x) + w(x,t)}$$

$$\begin{cases} 0 = a^2 v''(x) - h v(x) \\ v(0) = u_1 - u_0 \\ v(l) = u_2 - u_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx} - hw \\ w(0,t) = 0 \\ w(l,t) = 0 \\ w(x,0) = f(x) - u_0 - v(x) \end{cases}$$

$\downarrow$

Questa l'ho già vista. Posso riscriverla come:

$$\boxed{w(x,t) = \tilde{w}(x,t) \cdot e^{-ht}}$$

Questo sottoproblema risolve la stessa cosa:

$$w(x,t) = \tilde{w}(x,t) \cdot e^{-ht}$$

$$\begin{cases} \tilde{w}_t = a^2 \tilde{w}_{xx} \\ \tilde{w}(0,t) = 0 \\ \tilde{w}(l,t) = 0 \\ \tilde{w}(x,0) = f(x) - u_0 - v(x) \end{cases}$$

Parto dall'ultima.

Le condizioni sono DIRICHLET - DIRICHLET $\Rightarrow$ autofunzione col $\sin(\ldots)$

$$w(x,t) = e^{-ht} \cdot \tilde{w}(x,t) = e^{-ht} \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{w}_{n0}\, e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2} t} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \right\}$$

[So che il termine h "shifta" gli autovalori]

$$v(x) = \frac{(u_2 - u_0)\sinh(mx) - (u_1 - u_0)\sinh(m(x-\ell))}{\sinh(m\ell)}$$

$$v(0) = \frac{(u_1 - u_0)\cancel{\sinh(m\ell)}}{\cancel{\sinh(m\ell)}} = u_1 - u_0$$

$$v(\ell) = u_2 - u_0$$

Le condizioni al bordo sono rispettate

$\downarrow$

Risultato:

$$u(x,t) = u_0 + \frac{(u_2-u_0)\sinh(mx) - (u_1-u_0)\sinh(m(x-\ell))}{\sinh(m\ell)} + e^{-ht}\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\ell}}\,\tilde{w}_{n0}\, e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{\ell^2}t}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

$$\tilde{w}_{n0} = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\cdot\int_0^\ell \left[f(y) - u_0 - v(y)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}y\right)dy$$

Riscrivo il sinh in forma esponenziale

NB:
$$\sinh(my)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}y\right) = \frac{e^{my}-e^{-my}}{2}\cdot\frac{e^{i\frac{n\pi}{\ell}y}-e^{-i\frac{n\pi}{\ell}y}}{2i}$$

Calcolando l'argomento del sinh(..) con numeri complessi $\Rightarrow$ trovo sin(...)

$$\Rightarrow \int_0^\ell \sinh(m\ell)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}y\right)dy = \frac{1}{4i}\int_0^\ell e^{\overbrace{(m+i\frac{n\pi}{\ell})}^{a_1}y}dy - \frac{1}{4i}\int_0^\ell e^{-\overbrace{(m+i\frac{n\pi}{\ell})}^{a_2}y}dy +$$

$$-\frac{1}{4i}\int_0^\ell e^{-\overbrace{(m-i\frac{n\pi}{\ell})}^{a_3}y}dy + \frac{1}{4i}\int_0^\ell e^{-\overbrace{(m+i\frac{n\pi}{\ell})}^{a_4}y}dy$$

$$\int_0^\ell e^{a_1 y}dy = \frac{1}{a_1}\left[e^{a_1 y}\right]_0^\ell \leftarrow \text{significa fare 4 volte questo integrale}$$

M = matrice associata all'applicazione lineare rispetto le 2 basi.

$$M v = w$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$(\Theta u = f)$$

Un sistema lineare ammette sol se il termine noto è ORTOGONALE al nucleo dell'operatore aggiunto.

$$w \perp \ker(M^T)$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_n \Big(\underbrace{\Theta u \cdot \phi_n}_{\text{una certa autofunz.}}\Big)\phi_n = (f \cdot \phi_n)\phi_n$$

(1) Risoluzione del problema agli autovalori

$$-a^2 \phi''(x) = \lambda \phi(x)$$ → condizioni di Dirichlet, allora

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)\cdot\phi_n(x)$$

↓ Sostituisco nel probl. di partenza.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \dot{u}_n(t)\cdot\phi_n(x) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2\pi^2a^2}{\ell^2}u_n(t)\cdot\phi_n(x) = f(x,t)$$

$$\Theta u = \Theta\left(\sum_n u_n(t)\,\phi_n(x)\right)$$

u è stato scomposto: coeff + vettore di base!
→ scomposto in una base di autofunzioni ←

Ora devo scomporre il termine noto.
Sfrutto l'ortogonalità. Moltiplico per $\phi_m(t)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\dot{u}_n(t)\cdot\phi_n(t)\cdot\phi_m(t) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2\pi^2a^2}{\ell^2}u_n(t)\phi_n(x)\cdot\phi_m(x) = f(x,t)\,\phi_m(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dot{u}_n(t) + \frac{n^2\pi^2a^2}{\ell^2}u_n(t)\right)\int_0^\ell \underbrace{\phi_n(x)\cdot\phi_m(x)\,dx}_{\delta_{nm}} = \int_0^\ell \underbrace{f(x,t)\,\phi_m(x)\,dx}_{f_m(t)}$$

per l'ortogonalità delle autofunzioni

L'espressione fa 1 quando m = n o quando m ≠ n

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 129 di 270

3.11.15

Riepilogo:

Problema da cui siamo partiti:
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f \\ u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

Conosco le autofunzioni: $\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$

le quali mi permettono di costruire le sz: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\, \phi_n(x)$

le condizioni al bordo non sono $\neq$ da zero. Qualora non fossero omogenee bisognerebbe spezzare in due per avere la sz omogenea e la sz compatibile con f.

Calcolo le derivate: $u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dot{u}_n(t) \cdot \phi_n(x)$

$$a^2 u_{xx}(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2} u_n(t) \cdot \phi_n(x)$$

porto al 1° membro

Sostituendo trovo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \dot{u}_n(t)\, \phi_n(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2} u_n(t) \cdot \phi_n(x) = f(x,t)$$

Ora posso eseguire la somma termine - termine delle 2 sommatorie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dot{u}_n(t) + \frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2} u_n(t) \right) \phi_n(x) = f(x,t)$$

NB: le serie converge $\Rightarrow$ possibile fare tutti questi passaggi.

NB2: So che le autofunzioni sono a 2-a 2 ortonormali $\Rightarrow$ moltiplico tutto per ϕ_m

$$\Downarrow$$

$$u_m(t) = u_{m_h}(t) + u_{m_p}(t)$$

- $$\dot{u}_{m_h}(t) + \frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}u_{m_h}(t) = 0$$

$$u_{m_h}(t) = C_m\, e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t}$$

- $$u_{m_p}(t) = p(t)\, e^{-\frac{m^2\pi^2a^2}{l^2}t}$$

← Per la s? particolata vede al posto di C_m una funzione del tempo. Non conosco la s? ma la costruisco. $p(t)$ è da determinare. lascio invariata la forma della s? della omogenea associata

$\downarrow$

La sostituisco ora nell'eq. completa:

derivo: $$\dot{p}(t)\, e^{-\frac{m^2\pi^2a^2}{l^2}t} \cancel{- p(t)\frac{m^2\pi^2a^2}{l^2}\, e^{-\frac{m^2\pi^2a^2}{l^2}t}} + \quad \leftarrow \text{sommo } (*)$$

$$\underbrace{\cancel{+\frac{m^2\pi^2a^2}{l^2}\, e^{-\frac{m^2\pi^2a^2}{l^2}t}}}_{(*)}\, p(t) = f_m(t)$$

Questi 2 SI DEVONO ANNULLARE

$$\dot{p}(t) = f_m(t)\cdot e^{\frac{m^2\pi^2a^2}{l^2}t}$$

Ora ho trovato un'eq. differenziale per p ⇒ posso trovarne la s?.

$$p(t) = \int_0^t f_m(\tau)\cdot e^{\frac{m^2\pi^2a^2}{l^2}\tau}\, d\tau$$

<u>NB</u>: Per $m \to \infty$ se f_m non è un infinitesimo, l'integrale è enorme. Quindi l'esponente diverge.
Devo rendere mansueto l'integrale

Grazie nuovamente all'ortogonalità di Φ_n ottengo che:

$$c_n = \int_0^l g(x) \cdot \Phi_n(x)\, dx$$

NB: L'obiettivo è quello di scrivere in maniera compatta

Sostituisco a c_n l'espressione trovata.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^l g(y) \cdot \Phi_n(y) \right) \Phi_n(x) \cdot e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}(t-\tau)} \left(\int_0^l f(y,\tau) \cdot \Phi_n(y)\, dy \right) \Phi_n(x)\, d\tau$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t} \int_0^l g(y)\, \Phi_n(y) \cdot \Phi_n(x)\, dy +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}(t-\tau)} \left[\int_0^l f(y,\tau) \cdot \Phi_n(y) \cdot \Phi_n(x)\, dy \right] d\tau$$

Permutando il simbolo di sommatoria con quello di integrale si ottiene:

$$u(x,t) = \int_0^l \left[\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t} \Phi_n(x) \cdot \Phi_n(y) \right] g(y)\, dy +$$

$$+ \int_0^t \left\{ \int_0^l \left[\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}(t-\tau)} \Phi_n(x)\, \Phi_n(y) \right] \cdot f(y,\tau)\, dy \right\} d\tau$$

Definisco la funzione di Green come funzione di 4 variabili riscrivibile però come funz. di sole 3:

$$G(t,\tau,x,y) = \hat{G}(t-\tau, x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{n^2a^2\pi^2}{l^2}(t-\tau)} \cdot \Phi_n(x) \cdot \Phi_n(y)$$

CONDIZIONI di BORDO MISTE (Condizioni al bordo di ROBIN)

ROBIN
Il sistema cerca di bilanciare il flusso in entrata e in uscita. gradiente e T variano finché il bilancio permanga ⇒ trova u/il bilancio sul bordi DX e SX valga.

DIRICHLET
Impongo la TEMPERATURA (e quella rimane per sempre)

NEUMANN
Impongo il GRADIENTE (e quello rimane)

Problema di DIFFUSIONE + TRASPORTO

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & x \in (0,\ell),\ t>0 \\ u_x(0,t) - H u(0,t) = -H u_1 & t>0 \\ u_x(\ell,t) + H u(\ell,t) = H u_2 & \\ u(x,0) = f(x) & x \in (0,\ell) \end{cases}$$

SIGNIFICATO FISICO C. ROBIN

$\vec{V}$ = veloci...

Queste condizioni si osservano nel caso di trasporto CONVETTIVO. Cioè dato un campo (es. quello di temperatura) + calore ⇒ probl. di DIFFUSIONE + TRASPORTO (di tipo convettivo). Si intende FLUSSO TOTALE ($\vec{J}$)

Impongo che:

divido per $(-K)$

Ponendo

$$T = u \quad e \quad \frac{c}{K} V_x = H = \left[\frac{1}{m}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$u_x - Hu = -Hu_1$$

Risoluzione

Spezzo in una parte stazionaria e una no ($w(x,t)$). $v(x)$

$$\boxed{u(x,t) = v(x) + w(x,t)}$$

- Studio del problema stazionario $v(x)$

$$\begin{cases} 0 = a^2 v''(x) \\ v'(0) - H v(0) = -H u_1 \\ v'(\ell) + H v(\ell) = H u_2 \end{cases}$$

← Funzione affine: funzione la cui derivata II è $= 0$

$v(x) = ax + b$

$$v(x) = ax + b = c_1 x + c_2$$

$$v'(x) = c_1$$

Calcolo della sz non stazionaria

NB: $[H] = \frac{1}{m}$ → reciproco di una lunghezza caratteristica, quale? Si può pensare come una lunghezza di penetrazione del calore applicato dall'esterno con un campo di temperatura u_1.

$$\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx} \\ w_x(0,t) - H w(0,t) = 0 \\ w_x(l,t) + H w(l,t) = 0 \\ w(x,0) = f(x) - v(x) \end{cases}$$

(L'esercizio presenta la stessa struttura degli altri, da ora cambia!)

Risolvo il problema agli autovalori:

Cerco di calcolare la temperatura transitoria.

$$-a^2 \phi''(x) = \lambda \phi(x)$$

$$\phi(x) = A\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a}x\right)$$

Impongo le condizioni omogenee:

$$\phi(0) = A$$

$$\phi'(x) = -A\frac{\sqrt{\lambda}}{a}\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a}x\right) + B\frac{\sqrt{\lambda}}{a}\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a}x\right)$$

$$\phi'(0) = B\frac{\sqrt{\lambda}}{a}$$

$$\begin{cases} \phi'(0) - H\phi(0) = 0 \\ \phi'(l) + H\phi(l) = 0 \end{cases}$$

Sostituisco:

$$\begin{cases} B\frac{\sqrt{\lambda}}{a} - HA = 0 \\ -A\frac{\sqrt{\lambda}}{a}\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a}l\right) + B\frac{\sqrt{\lambda}}{a}\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a}l\right) + HA\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a}l\right) + HB\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a}l\right) = 0 \end{cases}$$

Sistema di 2 eq in 2 incognite che posso riscrivere così:

$$-HA + \frac{\sqrt{\lambda}}{a}B = 0$$

$$\left[-\frac{\sqrt{\lambda}}{a}\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a}l\right) + H\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a}l\right)\right]A + \left[\frac{\sqrt{\lambda}}{a}\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a}l\right) + H\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a}l\right)\right]B = 0$$

$$w_t(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\dot{w}_n(t)\cdot\phi_n(x)$$

$$w_{xx}(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}w_n(t)(-k_n^2)\,\phi_n(x)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\dot{w}_n(t)\cdot\phi_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}-a^2k_n^2\;w_n(t)\cdot\phi_n(x)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dot{w}_n(t)+a^2k_n^2\,w_n(t)\right)\phi_n(x)=0\qquad\forall n\geq 1$$

$$\dot{w}_n(t)+a^2k_n^2\,w_n(t)=0$$

$$w_n(t)=w_{n0}\cdot e^{-a^2k_nt}\,\phi(x)$$

$$w(x,0)=f(x)-v(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}w_{n0}\cdot\phi_n(x)$$

sono ortogonali ma non normalizzate $\leftarrow\quad \phi_n(x)=\cos(k_nx)+\dfrac{H}{k_n}\sin(k_nx)\qquad n=1,2,\dots$

$$\|\phi_n(x)\|^2=\int_0^l(\phi_n(x))^2dx=\frac{(k_n^2+H^2)l+2H}{2k_n^2}$$

Sfrutto l'ortogonalità:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}w_{n0}\,\phi_n(x)\,\phi_m(x)=\left[f(x)-v(x)\right]\phi_n(x)$$

$$w_{m0}\int_0^l(\phi_m(x))^2dx=\int_0^l\left(f(x)-v(x)\right)\phi_m(x)\,dx$$

$$w_{m0}=\frac{2k_m^2}{(k_m^2+H^2)l+2H}\int_0^l\left(f(x)-v(x)\right)\phi_m(x)\,dx$$

Soluzione:

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2k_m^2}{(k_m^2+H^2)l+2H}\,e^{-a^2k_mt}\cdot\int_0^l\phi_n(z)\left(f(z)-v(z)\right)dz\;\phi_n(x)$$

$$u(x,t)=v(x)+w(x,t)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 141 di 270

• Problema <u>NON STAZIONARIO</u>

$$\begin{cases} w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0 \\ w(0,t) = 0 \\ w'(\ell,t) = 0 \\ w(x,0) = -\varphi(x) \\ w_t(x,0) = v(x) \end{cases}$$

Le autofunzioni sono:

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \cdot \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell} x\right)$$

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n(t) \cdot \phi_n(x)$$

Sostituisco nell'eq di partenza:

$$\forall n, \quad \ddot{w}_n(t) + \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4\ell^2} c^2 w_n(t) = 0$$

$$\frac{(2n+1)\pi}{2\ell} = k_n$$

$$k_n^2 c^2 = \omega_n^2$$

La sz di questa eq. è:

$$\boxed{\ddot{w}_n(t) + \omega_n^2 w_n(t) = 0} \leftarrow \text{Eq. oscillatore armonico}$$

$$w_n(t) = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)$$

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n \cdot \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)\right) \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell} x\right)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 143 di 270

$$\frac{d\hat{\mathcal{E}}}{d\varepsilon}(0) = K \cdot \int_0^\ell y''(x) \cdot \gamma''(x)\,dx \;-\; \int_0^\ell q(x) \cdot \gamma(x)\,dx$$

Applico il TEOREMA di LEIBNITZ. Prima osservo che:

$$y''\gamma'' = \frac{d}{dx}\left(y'' \cdot \gamma'\right) - y'''\gamma' = \frac{d}{dx}\left(y'' \cdot \gamma'\right) - \frac{d}{dx}\left(y''' \cdot \gamma\right) + y^{IV}\gamma$$

Posso riscrivere quindi:

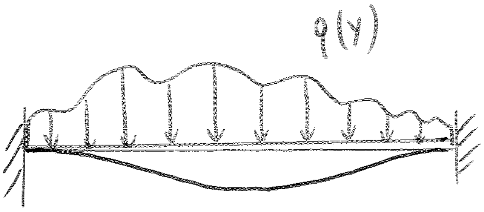
$$\frac{d\hat{\mathcal{E}}}{d\varepsilon}(0) = \int_0^\ell \frac{d}{dx}\left(K y''\gamma' - K y'''\gamma\right)dx + \int_0^\ell \left[K y^{IV}(x) - q(x)\right]\gamma(x)\,dx$$

Impongo: $\frac{d\hat{\mathcal{E}}}{d\varepsilon}(0) = 0$ $\rightarrow$ voglio che i 2 integrali si annullino simultaneamente

$$\underbrace{\boxed{K y''(\ell) \cdot \gamma'(\ell) - K y'''(\ell) \cdot \gamma(\ell) - K y''(0)\,\gamma'(0) + K y'''(0) \cdot \gamma(0)}}_{B} +$$

$$+ \int_0^\ell \left[K y^{IV}(x) - q(x)\right]\gamma(x)\,dx = 0$$

• 1° CASO



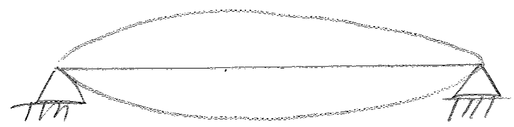
CONDIZIONI al BORDO
$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y(\ell) = 0 \\ y'(\ell) = 0 \end{cases}$$

$B = 0$ $\rightarrow$ se questo è vero $\Rightarrow$ la derivata dell'energia si annulla solo se si annulla l'integrale.

Se $B = 0 \Rightarrow \frac{d\hat{\mathcal{E}}}{d\varepsilon}(0) = 0 \iff \int_0^\ell \left[K y^{IV}(x) - q(x)\right)\gamma(x)\,dx = 0$

• 2 CASO

2 deformate compatibili



Le condizioni al bordo non sono suff. a dare informazioni su γ necessarie per annullare B.

CONDIZIONI IMPOSTE dal PROBLEMA → $\boxed{y(0)=0 \qquad y(\ell)=0}$

So che il momento in corrispondenza delle 2 cerniere devono essere nulle!

CONDIZIONI NATURALI → $\boxed{y''(0)=0 \qquad y''(\ell)=0}$

3 CASO

CONDIZIONI IMPOSTE dal PROBLEMA → $\boxed{y(0)=0 \qquad y'(0)=0}$

CONDIZIONI NATURALI → $\boxed{y''(\ell)=0 \qquad y'''(\ell)=0}$

• 4 CASO ("trave fluttuante")

v. al caso 1, gli estremi si comportano allo stesso modo.

$$\left.\begin{aligned} y''(0) &= y''(\ell) = 0 \\ y'''(0) &= y'''(\ell) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_3 = C_2 = 0$$

$$K\, y^{IV}(x) = q(x)$$

$$\left(K \frac{d^4}{dx^4}\right) y = q$$

Quando il termine noto è $\perp$ al nucleo dell'operatore → è risolvibile.

$$\mathrm{Ker}\left(K \frac{d^4}{dx^4}\right) = \left\{ u \text{ t.c. } K \frac{d^4 u}{dx^4} = 0 \right\} = \{ c_0, c_1 x \}$$

Ker = insieme s7 di un'eq. omogenea.

$$\boxed{q \perp \mathrm{Ker}\left(K \frac{d^4}{dx^4}\right)} \rightarrow$$

Condizione che posso sempre usare quando non so come imporre le condizioni al contorno.

$$0 = \int_0^l c_0\, q(x)\, dx = 0 = c_0 \int_0^l q(x)\, dx$$

$$0 = \int_0^l c_1 x\, q(x)\, dx = c_1 \int_0^l x\, q(x)\, dx$$

$$\int_0^l q(x)\, dx = 0 \qquad \int_0^l x\, q(x)\, dx = 0$$

L'eq. è di facile risoluzione:

$$\underbrace{w(t)=w_h(t)}_{\text{SOLUZIONE GENERALE dell'eq. omogenea associata}}+\underbrace{w_p(t)}_{\text{SOLUZIONE PARTICOLARE}}$$

con:

$$w_h(t)=c\,e^{+i\omega t}$$

$$w_p(t)=\rho(t)\cdot e^{i\omega t}$$

Al posto di c pongo una funzione da determinare $\rho(t)$ ed eseguo le derivate.

$$\dot{w}_p(t)=\dot{\rho}(t)\,e^{i\omega t}+i\omega\rho(t)\cdot e^{i\omega t}=\dot{\rho}(t)\,e^{i\omega t}+i\omega\,w_p(t)$$

$$\dot{\rho}(t)\cdot e^{i\omega t}+\cancel{i\omega\,w_p(t)}-\cancel{i\omega\,w_p(t)}=f(t)$$

$$\dot{\rho}(t)=f(t)\cdot e^{-\omega t}\quad[\text{lo cerco }\rho(t)]$$

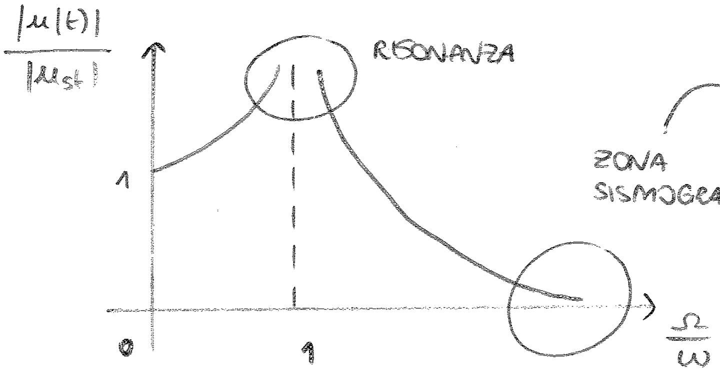
$$\rho(t)=\int_0^t e^{-\omega t}\cdot f(\tau)\,d\tau$$

Riscrivo:

$$\boxed{w(t)=c\,e^{i\omega t}+\int_0^t e^{i\omega(t-\tau)}f(\tau)\,d\tau}$$

(*) Abbiamo ottenuto la sol del nostro problema.

u_{st} = spostamento statico



($\Omega \gg \omega$) Per frequenze molto grandi lo spostamento va a Ø.

es. vento, asfalto per pneumatici

$$\frac{\Omega}{\omega}=\frac{\text{FREQ. della FORZANTE}}{\text{FREQ. del SISTEMA}}$$

Quando:

- $\Omega=\omega \rightarrow$ RISONANZA
- $\Omega \gg \omega \rightarrow$ ZONA SISMOGRAFICA

Preso un classico oscillatore (massa + molla) e supposto che qst sia in un campo gravitaz., succede che la molla si allunga perché la forza peso attira la molla (spost. statico, u_{st}). A prescindere dalla forzante (Ω) lo spostamento è statico.

Non appena la frequenza della forzante è tale da eguagliare la frequenza propria del sistema ⇒ RISONANZA! Il rapporto diverge (ASINTOTO VERTICALE).

Dato un sistema lineare, se questo viene sollecitato con una Ω $\Rightarrow$ l'uscita è ISOFREQUENZIALE all'ingresso.

TEOREMA FONDAMENTALE del REGIME SINUSOIDALE

Dato un sist. lineare con una forzante di pulsazione Ω l'uscita è isofrequenziale all'ingresso. Cioè se sollecito un sist. con una forzante pari a 50Hz la sol particolare del sist è pari a 50Hz. La frequenza è uguale a quella della forzante.

Riprendiamo l'eq. da cui siamo partiti:

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = f_0 \sin(\Omega t) \\ u_p(t) = U \sin(\Omega t + \varphi) \\ \ddot{u}_p(t) = -\Omega^2 \cdot u_p(t) \end{cases}$$

φ = fase

Ogni funz. armonica, se derivata 2 volte risulta prop. a quella di partenza.

Sostituendo:

$$-\Omega^2 U \sin(\Omega t + \varphi) + \omega^2 U \sin(\Omega t + \varphi) = f_0 \sin(\Omega t)$$

Per definire la sol particolare mi servono U e φ.

- Considero $\varphi = 0$:

$$U = \frac{f_0}{\omega^2 - \Omega^2} = \frac{f_0/\omega^2}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}$$

Per $\Omega \to \omega \Rightarrow$ l'oscillatore DIVERGE!

Il teorema dice solo che le ampiezze delle oscillazioni alla risonanza divergono. Non dà altre info. Prima invece abbiamo visto che le ampiezze divergono in maniera lineare.

Prendo un sist. fisico descritto dalla legge di D'Alembert

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = f \\ u(x,0) = u_0 \\ u_t(x,0) = v_0 \\ \left.\begin{array}{l} u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{array}\right\} D_0 \end{cases}$$

(0 = poiché nulle)

c = cellerità

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \ddot{u}_n(t)\Phi_n(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} c^2 \cdot k_n^2 u_n(t)\,\Phi_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\cdot \Phi_n(x)}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 \quad \ddot{u}_n(t) + c^2 k_n^2 u_n(t) = f_n(t)}$$

Ho ∞ oscillatori per ∞ forzanti

Determinare la risonanza è difficile

Per ogni coppia di frequenza, se Ω sta nel mezzo non succede nulla, se invece Ω becca una delle ∞ fre. del sist (ω) $\Rightarrow$ si innesca una delle risonanze. Più una struttura è complessa $\Rightarrow$ + ha pulsazioni

k_n = VETTORE D'ONDA $\left[\frac{1}{m}\right]$

$\forall n \quad \left(\frac{k_n}{2\pi}\right)^{-1} = \left(\frac{n}{2l}\right)^{-1}$ = LUNGHEZZA D'ONDA

n = seleziona il modo proprio della struttura di vibrare.

l = lunghezza della barra (ad. es)

$\Downarrow$

questo rapporto indica la lunghezza dell'o[nda]

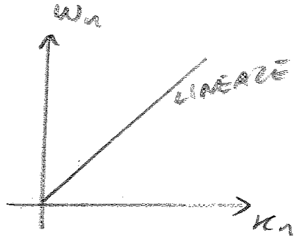
$\begin{cases} c^2 = \frac{m^2}{s^2} \\ k^2 = \frac{1}{m^2} \end{cases}$

$c^2 k_n^2 = \omega_n^2$ = PULSAZIONE

$\boxed{\omega_n = \pm c k_n} \Rightarrow$ considero quella positiva visto che tutte le quantità sono > 0.

$\forall n$ ho questo problema da risolvere

$\boxed{\omega(k_n) = c k_n} \leftarrow$ RELAZIONE di DISPERSIONE ed è lineare



Differenza tra 2 k_n consecutivi: $k_{n+1} - k_n = \frac{\pi}{l}$ $\rightarrow$ se penso a questa espressione come funzionale

$\Downarrow$

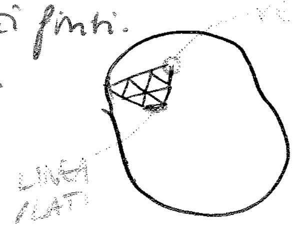
Più è lunga la barra ($\uparrow l$) $\Rightarrow$ più i vettori d'onda si addensano!

$\forall n$ corrisponde una velocità di propagazione dell'onda nel mezzo.

$\boxed{\omega = ck}$ $\rightarrow$ RELAZ. di DISPERSIONE della BANDA ACUSTICA $\rightarrow$ Descrive il modo in cui si propagano le onde nel mezzo

Il dominio viene suddiviso in una serie di elementi finiti.

Triangolazione di un dominio ($\rightarrow$ Mesh) agli elementi finiti.



$\leftarrow$ Struttura generica di cui devo studiare il modello.

$$\boxed{-u_{xx} = f}$$

Restringo così il mio problema ad ogni elemento finito.

Se ho $\boxed{u_{tt} = a^2 u_{xx}}$ allora lo posso trasformare in una sequenza di PROBLEMI STATICI:

$$\boxed{u^{n+1} - u^{n} = \left(t^{n+1} - t^{n}\right) a^2 u^{n+1}_{xx}}$$

Un problema tempo-dipendente si tratta come successione di problemi statici

Assegno al nostro problema 2 condizioni al bordo. Se voglio togliere 2 incognite metto 2 condizioni di Dirichlet, ma noi lo risolviamo così:

FORMA FORTE del PROBLEMA

$$\begin{cases} -u_{xx} = f & \\ u(l) = g & D_1(sx) \\ -u_x(0) = h & N_1(sx) \end{cases}$$

} Imposto il valore della funz. ai bordi

Prendo l'eq. e la moltiplico per una funz. arbitraria compatibile con i vincoli (w)

$$\boxed{-w u_{xx} = w f}$$

Applico Liebnitz per prodotto di funz.

$$-(u_x w) + u_x w_x = w f \leftarrow$$

L'eq. è scritta in modo tale da poter essere integrata su dominio computazionale.

Funzioni a quadrato sommabile e con derivata a quadrato sommabile.

$$\boxed{H^1 = \text{SPAZIO di SOBOLEV}}$$

f è tale che $\displaystyle \int_0^\ell |f|^2 dx < +\infty$

SPAZIO delle FUNZIONI $\boxed{S = \{ u \in H^1 \text{ t.c. } u(\ell) = g \}}$

Riscriviamo la forma debole:

$$\underbrace{\int_0^\ell u_x w_x \, dx}_{a(u,w)} = \underbrace{\int_0^\ell f \cdot w \, dx + h\, w(0)}_{b(w)}$$

Si esprime in modo da definire due applicazioni:

$b: S \to \mathbb{R}$ $\quad \forall w \in S_0 = \{ v \in S \text{ t.c. } v(\ell) = 0 \}$

$$\boxed{b(w) = \int_0^\ell f \cdot w \cdot dx + h\, w(0)}$$

$a: S \times S_0 \to \mathbb{R}$

$$\boxed{a(u,w) = \int_0^\ell u_x w_x \, dx}$$

FORMA BILINEARE

Applicazione lineare rispetto ad entrambe le variabili

Dim (FD ⇒ FF)

Sia u una soluzione di FD $\Rightarrow u(l) = q$ e $\forall w \in \mathcal{V}$ si ha:

$$\int_0^l w'(x) \cdot u'(x)\,dx = \int_0^l w(x) \cdot f(x)\,dx + w(0)h$$

Utilizziamo LEIBNITZ

$$w' u' = (w u')' - w u'' \quad \text{se } u'' \exists \text{ su tutto } (0, l)$$

Allora sostituisco nel 1° membro dell'eq:

$$\int_0^l \frac{d}{dx}\left(w(x)\, u'(x)\right)dx - \int_0^l w(x) u''(x)\,dx = \int_0^l w(x) f(x)\,dx + w(0)\, h$$

$$\underbrace{w(l)}_{=0} \cdot u'(l) - w(0) \cdot u'(0) - \int_0^l w(x) u''(x)\,dx = \int_0^l w(x) f(x)\,dx + w(0)\, h$$

↳ Poiché w = funz. test e per def $w(l) = 0$

Posso raccogliere i termini uguali:

$$\int_0^l w(x)\left[u''(x) + f(x)\right]dx + w(0)\left[u'(0) + h\right] = 0$$

Riconducendoci al principio variazionale, osserviamo che abbiamo anche qui la somma di un integrale e termini di bordo. L'obiettivo è quello di ottenere la FF. Allora bisogna azzerare l'integrale e i termini di bordo indipendentemente l'uno dall'altro. Poiché w è arbitraria ($\forall w \in \mathcal{V}$) considero, scelgo:

$$\boxed{w(x) = \phi(x) \cdot \left[u''(x) + f(x)\right]}$$

Questo vale se $\phi(x)$ è della stessa tipologia di w.

NB: la condizione di Neumann è stata data dal problema, come succedeva col prin. variazionale. ⇒ La forma debole è equivalente al principio variazionale.

Per questo motivo:

COND di NEUMANN → $\boxed{u'(0) = -h}$ CONDIZIONE NATURALE

COND di DIRICHLET → $\boxed{u(\ell) = g}$ CONDIZIONE ESSENZIALE

⇓

la forma debole:

$$\boxed{\int_0^\ell w'(x)\, u'(x)\, dx = \int_0^\ell w(x)\, f(x)\, dx}$$

c.v.d.

è detto

PRINCIPIO delle POTENZE VIRTUALI
(PPV)

TEOREMA – bilinearità di $a(\cdot,\cdot)$

(DX) $\forall w \in \mathcal{V},\ a(w,\cdot) : \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l}\forall u_1, u_2 \in \mathcal{Y} \\ \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}\end{array}\right| \Rightarrow a(w, c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 a(w, u_1) + c_2 a(w, u_2)$$

$\forall u \in \mathcal{Y},\ a(\cdot, u) : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$

$\forall w_1, w_2 \in \mathcal{V}$

$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$a(c_1 w_2 + c_2 w_2, u) = c_1 a(w_1, u) + c_2 a(w_2, u)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 165 di 270

La prima arrivata diventa:

$$a(w^h, v^h) = \underbrace{(w^h, f) + w^h(0)\,h - a(w^h, p^h)}_{\substack{\text{noto} \\ \shortparallel \\ F}} \qquad v^h \in V^h$$

FORMA di GALERKIN (FG) $\boxed{a(w^h, v^h) = F}$ → combinazione di integrali

30.11.15

FB-G (Formula di Bobnov - Galerkin)

Dati f, h, g trovare:

sol. approssimata $u^h = v^h + p^h$ con $v^h \in V^h$, t.c.

$$\forall w^h \in V^h, \quad a(w^h, v^h) = (w^h, f) + w^h(0)h - a(w^h, p^h)$$

Ricorda: V^h = spazio funzioni

$$V^h = \{ v^h \text{ t.c. } v^h \in V \}$$

punto in cui impongo la cond. di Dirichlet

$$V = \{ v \text{ t.c. } \underbrace{\int_0^\ell |v_x|^2 dx < +\infty}_{v \in H_0^1} \wedge v(\ell) = 0 \}$$

→ condizione Dirichlet soddisfatta omogeneamente

Ovvero: Ω^h è stata scomposta in una somma finita. => L'insieme di funzioni:

$$\boxed{\{N_1, N_2, \dots N_{nodi}\} \text{ genera } V^h}$$

Una funzione test arbitraria fissata la base $\{N_1, \dots, N_n\}$ equivale ad una n-upla di n° reali $\{c_1, \dots, c_n\}$

=> <u>la dimensioni di V^h è pari al numero di nodi</u> <=

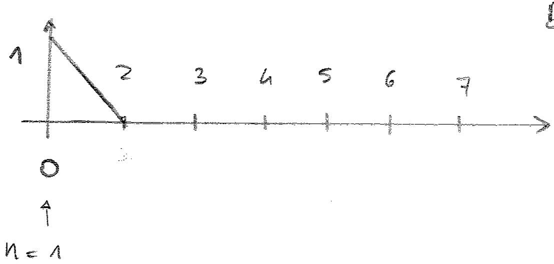
In letteratura: $V^h = \text{Span}\{N_1, \dots, N_{nodi}\}$ Span = generare

CERCO DI GENERARE LO SPAZIO

=> le N possono essere prese in tanti modi ma il modo + furbo è questo:

N nel nodo a loro corrispondente valgono 1

Devo far valere N 1 nel nodo Ø mentre Ø in tutti gli altri



Il valore è zero ma il nodo è 1.

$$N_1(x) = \begin{cases} ? & \forall x \in [x_1, x_2] \\ 0, & \forall x > x_2 \end{cases}$$

Devo scrivere l'eq di una retta che

$N_1(x) = ax + b$

$$\begin{cases} N_1(x_1) = ax_1 + b = 1 \\ N_1(x_2) = ax_2 + b = 0 \end{cases}$$

Sottraggo membro a membro:

$$a(x_1 - x_2) = 1 \rightarrow a = \frac{1}{x_1 - x_2}$$

$$b = -\frac{x_2}{x_1 - x_2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{N_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_2}{x_1 - x_2} & \forall x \in [x_1, x_2] \\ 0 & \forall x > x_2 \end{cases}}$$

L'incognita del problema è data dal vettore in un punto generico della griglia.

Mi resta da definire p^h

N particolare di x nulla ovunque se non che in ℓ

$$\boxed{p^h(x) = g N^P(x)}$$

$\Rightarrow$ Bisogna far sì che $N_7(x) = 0$?

$$v^h(x) = \sum_{A=1}^{n-1} d_A N_A(x)$$

$$v^h(x_B) = \sum_{A=1}^{n-1} d_A N_A(x_B)$$

Così sono sicuro che in 7 faccia $\emptyset$.

$\downarrow$

Posso riscrivere il tutto così:

Pongo: M = n° di nodi da usare nello sviluppo di v^h e w^h

$$w^h = \sum_{A=1}^{M} c_A \cdot N_A(x)$$

$$v^h = \sum_{A=1}^{M} d_A \cdot N_A(x) = \sum_{B=1}^{M} d_B \cdot N_B(x)$$

$$a(w^h, v^h) = a\left(\sum_{A=1}^{M} c_A \cdot N_A, \sum_{B=1}^{M} d_B N_B\right) = \sum_{A=1}^{M} \cdot \sum_{B=1}^{M} c_A \, a(N_A, N_B) \, d_B$$

$$a(N_A, N_B) = \int_0^\ell \frac{dN_A}{dx}(x) \cdot \frac{dN_B}{dx}(x)\, dx = \int_0^\ell N_A'(x) \cdot N_B'(x)\, dx = K_{AB}$$

Questo termine, al variare di A e B, definisce gli elementi di una matrice detta RIGIDEZZA del SISTEMA (K_{AB})

Dovendo la forma algebrica valere $\forall \{c_1 \dots c_m\} \in \mathbb{R}^m \Rightarrow$ deve succedere che:

$$\boxed{\sum_{B=1}^{M} K_{AB} \cdot d_B = F_A}$$

↳ ci siamo ricondotti ad un sist. lineare.

Forma Matriciale $\rightarrow [K]\{d\} = \{F\}$

<u>NB</u>: se il problema è vincolato MALE $\Rightarrow$ la matrice K è SINGOLARE

$$\begin{bmatrix} [K_{AA}] & [K_{AV}] \\ [K_{VA}] & [K_{VV}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_A \\ d_V \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_A \\ F_V \end{Bmatrix}$$

incognita

Non ha senso provare a invertire questa matrice

NB: Se la matrice è NON singolare => Ker? Il nucleo è banale poiché si riconduce ad un unico vettore, cioè il vettore nullo. Quest'ultimo è ortogonale a tutti i vettori => se il nucleo è banale => F è sicuramente $\perp$ e quindi il problema ammette $\perp$.

forma a valutata nelle funzioni N_A, N_B scelte per la discretizzazione.

Mi ricordo che $K_{AB} = a(N_A, N_B) = \int_0^1 N_A'(x) \cdot N_B'(x)\, dx$

$M+1$ = indice relativo al nodo di Dirichlet

f = forzante del sistema

$$F_A = (N_A, f) + N_A(0)h - g \cdot a(N_A, N_{M+1}) =$$

$$= \int_0^1 N_A(x) f(x)\, dx + N_A(0)h - g \int_0^1 N_A'(x) \cdot N_{M+1}'(x)\, dx$$

⚠ Ricorda esempio in cui si aveva una trave alla cui veniva sottratta una forzante e considerato la trave come unico elemento.

RISOLUZIONE del PROBLEMA

Esempio:

FORMA FORTE
$$\begin{cases} u'' = 0 \\ u(1) = g \\ u'(0) = -h \end{cases}$$

$u'(x) = \text{costante}$

$u(x) = c_0 x + c_1$

Bisogna avere la consistenza delle condizioni al bordo:

$$u(1) = c_0 + c_1 = g$$
$$u'(0) = c_0 = -h$$

Ricavo che:

$$c_0 = -h$$
$$c_1 = g + h$$

$\Rightarrow \boxed{u(x) = -hx + g + h}$ Soluzione esatta

$\boxed{u(x) = (1-x)h + g}$ Forma + compatta

Il problema che devo risolvere è: $K_{11}\, d_1 = F_1$

$$\Downarrow$$

$$1 \cdot d_1 = h + g \Rightarrow d_1 = h + g \quad = \text{SPOSTAMENTO NODALE}$$

Sostituisco nella st approssimata e trovo che:

$$u^h(x) = d_1 N_1(x) + g N_2(x) = (h+g)(1-x) + gx = h + g - hx \cancel{-gx} \cancel{+gx} =$$

La st approssimata è uguale a quella esatta! $\rightarrow$ $\boxed{u^h(x) = (1-x)h + g}$

Ho approssimato il sist. con la peggiore discretizzazione eppure la st. approssimata è identica a quella esatta. Con questo esempio abbiamo dimostrato un **TEOREMA**

> Quando la forzante è nulla ($f=0$) la soluzione approssimata e quella esatta coincidono ($u^h(x) = u(x)$)

Ovviamente il thr vale per determinate condizioni al bordo e per le funzioni di forma qui assegnate.

Ponendo $f=0 \Rightarrow$ non risolvo l'integrale. Ciò che devo risolvere è dato dai termini di bordo e questi sono stati scelti in modo da avere a sx Neumann e a dx Dirichlet.

$$N_1(x) = \begin{cases} 1-2x & [x_1, x_2] \\ 0 & (x_2, x_3] \end{cases}$$

$$N_2(x) = \begin{cases} \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = 2x & [0, 1/2] \\ \dfrac{x_3-x}{x_3-x_2} = 2-2x & \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

$$N_3(x) = \begin{cases} 0 & [x_1, x_2] = [0, 1/2] \\ 2x-1 & (1/2, 1] \end{cases}$$

Spezzo l'integrale in 2 parti!

$$F_1 = \int_0^1 N_1(x) \cdot f_0 \, dx = f_0 \int_0^{1/2} (1-x) dx + \cancel{f_0 \int_{1/2}^1 0 \, dx}^{=0} = f_0 \left[x - \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} \right]_0^{1/2} = f_0 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right] = f_0/4$$

$$F_2 = \int_0^1 N_2(x) \cdot f_0 \, dx = f_0 \left\{ \int_0^{1/2} N_2(x) dx + \int_{1/2}^1 N_2(x) dx \right\} = f_0 \left\{ \int_0^{1/2} 2x \, dx + \int_{1/2}^1 (2-2x) dx \right\} =$$

$$= f_0 \left\{ \frac{1}{4} + 2 \left[x - \frac{1}{2} x^2 \right]_{1/2}^1 \right\} = \frac{f_0}{2}$$

Calcolo della matrice di ~~rigidezza~~ rigidezza.

2 gradi di libertà $\Rightarrow$ matrice 2×2. Dovrei fare 4 calcoli ma si riducono a 3 in quanto la matrice è simmetrica!

$$K_{11} = \int_0^1 N_1'(x) \cdot N_1'(x) \, dx = \int_0^{1/2} (-2)(-2) \, dx = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$K_{22} = \int_0^1 N_2'(x) \cdot N_2'(x) \, dx = \int_0^{1/2} 2x \, dx + \int_{1/2}^1 (2-2x) dx = 4$$

$$K_{12} = K_{21} = -2$$

Bisogna verificare anche che:

$$u(x) = \frac{f_0}{2}(1-x^2)$$ ← Riprendo la soluzione esatta

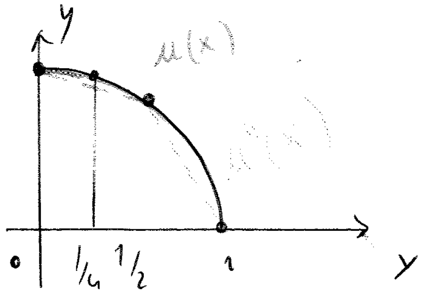
$$u(0) = \frac{f_0}{2} = u^h(0)$$ ← Verifico quanto vale in ∅ e osservo che assume lo stesso valore di quella approssimata in quel punto

Anche in ∅ le st coincidono → $u(1) = 0 = u^h(1)$

E anche in $1/2$ → $u(1/2) = \frac{3}{8} f_0 = u^h\left(\frac{1}{2}\right)$

Nei 3 nodi le due soluzioni coincidono. Ma in realtà la:

- st corretta è quadratica (parabola)
- st app. è lineare a tratti (spezzata)



Un tratto di retta non può soddisfare Neumann!

⇒ per forza Neumann non è soddisfatta. Potrei anche verificare la diversità tramite la rappresentazione delle derivate!

- Come ottenere la condizione di Neumann → Bisogna infittire l'intervallo di discretizzazione!
  ↳ Infittiamo il numero di nodi. Si soddisferà Neumann solo all'∞! Per ampiezze degli intervalli nulli!

Osservo la derivata

$$u_h^{h'}(x) = \begin{cases} -\frac{f_0}{4} & x \in (0, \frac{1}{2}) \\ -\frac{3}{4} f_0 & x \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

$u^h(x)$ non è derivabile su tutto l'intervallo!

La derivata della st esatta invece è: $u'(x) = -f_0 x \quad x \in (0,1)$

Per $x = \frac{1}{4}$ ⇒ $\boxed{u'(x) = u^{h'}(x)}$ ← Qui la derivata è esatta! Con una discretizzazione del genere quando studio la norma devo studiare la NORMA H^1

↳ NORMA H^1

$$\|u - u^h\|^2_{H_1} = \|u-u^h\|_{L^2} + \|u' - u^{h'}\|^2_{L^2} =$$

$$= \int_0^1 (u(x) - u^h(x))^2 dx + \int_0^1 (u'(x) - u^{h'}(x))^2 dx$$

Ad esempio l'intervallo $[x_1, x_2]$ viene ~~detto~~ numerato 1 poiché corrisponde al n° del 1° termin

I domini $[x_A, x_{A+1}]$ e $[\xi_1, \xi_2]$ sono legati tra loro da trasformazioni di riferimento di tipo affine, cioè:

$$\boxed{\xi = c_1 + c_2 x} \quad \forall x \in [x_A, x_{A+1}]$$

dato che le trasf. affini sono lineari e quindi invertibili ricavo che:

$$\boxed{x = \frac{\xi - c_1}{c_2}}$$

Quindi:

$$\begin{cases} \xi_1 = c_1 + c_2 x_A \\ \xi_2 = c_1 + c_2 x_{A+1} \end{cases} \rightarrow \xi_2 - \xi_1 = c_2 (\underbrace{x_{A+1} - x_A}_{h_A}) = c_2 h_A$$

$$c_2 = \frac{\xi_2 - \xi_1}{h_A}$$

$\downarrow$

Risalgo a c_1 tramite una delle 2 equazioni.

Convenzione: si usa quella che permette di assegnare numeri reali a $\xi_{1,2}$, nella fattispecie:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -1 \\ \xi_2 &= 1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} c_2 &= \frac{2}{h_A} \\ c_1 &= -1 - \frac{2}{h_A} x_A \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \xi &= \frac{2x - x_A - x_{A+1}}{h_A} \\ x^e &= \frac{h_A \xi + x_A + x_{A+1}}{2} \end{aligned}}$$

GLOBALE $\rightarrow$ LOCALE

LOCALE $\rightarrow$ GLOBALE

Funzione inversa relativa all'elemento e-simo

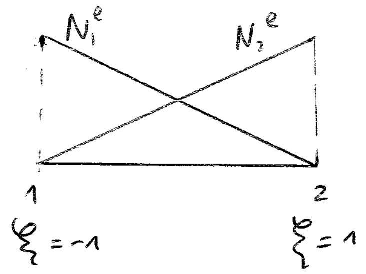
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 183 di 270

$(*)\ N_a(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi_a \xi)$ come si ricava:

$N_1^e(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)$

$N_1^e(-1) = 1$

$N_1^e(1) = 0$



$$N_A(x) = \begin{cases} \frac{x_2 - x}{x_2 - \cancel{x_1}} & x \in [x_1, x_2] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$N_A(x^e(\xi)) = (*)$

Per come ho definito le funzioni di prima nello riferimento globale, si verificava una proprietà:

la derivata è costante!

$$\frac{dN_a^e}{d\xi}(\xi) = \frac{\xi_a}{2} = \begin{cases} -1/2 \ , & a = 1 \\ 1/2 \ , & a = 2 \end{cases}$$

Calcolo della matrice di rigidezza:

RICORDA: $\boxed{\text{CALCOLO della MATRICE nel RIFERIMENTO GLOBALE}}$

$$K_{AB} = a(N_A, N_B) = \int_0^L \frac{dN_A}{dx}(x) \cdot \frac{dN_B}{dx}(x)\, dx$$

$\begin{cases} h = \text{condiz. di Neuman} \\ g = \ldots \text{Dirichlet} \end{cases}$

$$F_A = (N_A, f) + N_A(0) h - g a(N_A, N_{n+1}) = \int_0^L N_A(x) \cdot f(x) dx + \delta_{A1} h - g \int_0^L \frac{dN_A}{dx}(x) \cdot \frac{dN_{A+1}}{dx}(x) dx$$

$\downarrow$

NB: Integrali estesi a tutto il dominio.

So che $\forall$ funzione Q:

$$\int_0^L Q(x) dx = \sum_{A=1}^{M+1} \int_{x_A}^{x_{A+1}} Q(x) dx$$

Ovvero posso spezzare l'integrale di una funz. continua in + integrali estesi a sottointervalli + piccoli.

Ricorda: il punto del nodo di Dirichlet non rientra nella matrice di rigidezza poiché so già quanto vale lì!

RIFERIMENTO LOCALE

$$K_a^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} \frac{dN_A}{dx}(x) \cdot \frac{dN_B}{dx}(x)\, dx$$

composto

$$\text{Ma:} \quad N_A(\xi) = N_A(x^e(\xi)) = (N_A \circ x^e)(\xi)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dN_A^e}{d\xi}(\xi) = \frac{dN_A}{dx}(x) \cdot \underbrace{\frac{dx^e}{d\xi}(\xi)}$$

JACOBIANO del CAMBIO di VARIABILI ($\neq 0$ sempre)

$$\Downarrow$$

$$\frac{dN_A}{dx}(x) = \frac{dN_a^e}{d\xi}(\xi) \cdot \frac{1}{dx^e/d\xi\,(\xi)}$$

$$K_{ab}^e = \int_{-1}^{+1} \frac{dN_a^e}{d\xi}(\xi) \cdot \frac{dN_b^e}{d\xi}(\xi) \cdot \frac{1}{dx^e/d\xi(\xi)}\, d\xi \overset{!}{=} \frac{(-1)^{a+b}}{h_A}$$

$$K^e = \frac{1}{h_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

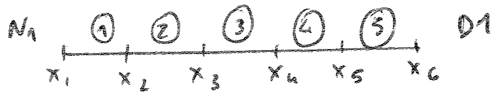
$$\Downarrow$$

$$K^e = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

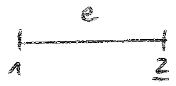
ALGORITMO di ASSEMBLAGGIO (Location Matrix)

↳ A ciascun estremo dell'e-simo elemento associa un'eq. del sistema globale.

$\forall\, e = 1, \dots, (N_{elementi} - 1)$



$$K_{e,e} \longleftarrow K_{e,e} + k^{e}_{11}$$



n° el. / nodo

$$A = LM(a, e) = \begin{cases} e, & a = 1 \\ e+1, & a = 2 \end{cases}$$

$$K_{e,e+1} \longleftarrow K_{e,e+1} + k^{e}_{12}$$

$$K_{e+1,e+1} \longleftarrow K_{e+1,e+1} + k^{e}_{22}$$

OUTPUT: $LM(2, N_{el}) = LM(2, 5) = 0$

Esempio:

Supponiamo di avere 2 elementi $\Rightarrow e = 1$

$$K_{11} \longleftarrow 0 + 2 = 2$$

$\emptyset$ poiché ho inizializzato

$$K_{12} \longleftarrow 0 - 2 = -2$$

$$K_{21} \longleftarrow 0 - 2 = -2$$

$$K_{22} \longleftarrow 0 + 2 = 2$$

⋮

Quando arrivo al nodo di Dirichlet ~~annessi~~ si ha un $\neq$ assemblaggio:

$$K_{N_{el},N_{el}} \longleftarrow K_{N_{el},N_{el}} + k^{N_{el}}_{11}$$

Nel caso di $e = 2$ devo solo riassemblare K_{22}

$$K_{22} \longleftarrow K_{22} + k^{e}_{22} = 2 + 2 = 4 \qquad \Rightarrow K = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

FORMA ASTRATTA

$$a(w,y) = \int_0^L w^{(2)}(x) \cdot EI\, y^{(2)}(x)\, dx$$

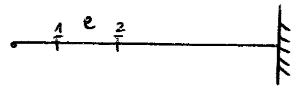
$$(w,q) = \int_0^L w(x)\, q(x)\, dx$$

$$\boxed{a(w,y) = (w,q) + w(0)Q - w^{(1)}(0)M}$$

FORMA di B - GALERKIN

le funzioni test che andavano bene per un problema di trazione mono assiale non vanno + bene. Non si possono usare funzioni a "tetto" poiché qui compare la derivata II.

(cap. 1 pag. 49)



Per l'e-simo elemento

$$N_1(x) = \frac{-(x-x_2)^2\left[-h+2(x_1-x)\right]}{h^3}$$

$$N_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)^2}{h^2}$$

$$N_3(x) = \frac{(x-x_1)\left[h+2(x_2-x)\right]}{h^3}$$

$$N_4(x) = \frac{(x-x_1)^2(x-x_2)}{h^2}$$

Tutte sono cubiche ma:

$N_1, N_3 \Rightarrow [-]$

$N_2, N_3 \Rightarrow [L]$

$$\begin{cases} w^h = N_1(x) \cdot w^h(x_1) + N_2(x) \cdot \frac{dw^h}{dx}(x_1) + N_3(x)\, w^h(x_2) + N_4(x) \cdot \frac{dw^h}{dx}(x_2) \\ w^h = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 \end{cases}$$

L'ORDINE di DERIVAZIONE -1 = ORDINE della FUNZ. D'INTERPOLAZ.

Esempio
Per N = 10,

$a = 0.15 \cdot 10^{-2}$, $p = 0.15$, $q = -2$;
$a = 12.4 = 0.124 \cdot 10^{2}$, $p = 0.124$, $q = 2$;
$a = 0.0013 \cdot 10^{4} = 0.13 \cdot 10^{2}$, $p = 0.13$, $q = 2$.

Fissato N, s e la coppia (p,q) della rappresentazione floating-point normalizzata $a=(-1)^s pN^q$ individuano univocamente il numero reale a. Pertanto per memorizzare a è sufficiente memorizzare il segno di a, p e q. Un calcolatore riserva per la memorizzazione di tali quantità uno spazio finito.

Se:

1) p può avere al massimo t cifre nel sistema di numerazione scelto e
2) $m \leq q \leq M$ con $m < 0$ e $M > 0$ interi. → soglia inferiore e superiore per l'esponente!

Fissato m, al posto di q il calcolatore memorizza $\boxed{q^* = q - m \geq 0}$ (esponente normalizzato).
L'esponente $q^* = 0$ ($q = m$) viene usato per la codifica dello zero (in questo caso $p = 0$), l'esponente $q^* = M - m$ viene usato per rappresentare un non numero (NaN), quale il simbolo ∞ oppure risultati di operazioni impossibili oppure non valide (0/0, ∞/∞,...)

t + m + M sono gli elementi caratterizzanti di un numero per il calcolatore. Più grande è il numero più grande deve essere la memoria.

NUMERI DI MACCHINA

E' evidente che non tutti i numeri reali soddisfano le condizioni dell'aritmetica fissata su di un calcolatore.
⇒ Non tutti i numeri reali sono esattamente rappresentabili su di un calcolatore.

Si definiscono allora numeri di macchina quei numeri le cui mantissa e caratteristica sono esattamente rappresentabili negli spazi a loro riservati. L'insieme dei numeri floating point è denotato con F.

Esempio
per N = 10, t = 5, m = −127, M = 128,

$a = 1.58291 = 0.158291 \cdot 10^{1}$ non è un numero di macchina ($t = 6 > 5$);
$a = 0.0038245 = 0.38245 \cdot 10^{-2}$ è un numero di macchina;
$a = 12.29 \cdot 10^{128} = 0.1229 \cdot 10^{130}$ non è un numero di macchina ($M = 130 > 128$).

Quindi ogni numero reale, se non è un numero di macchina, deve essere approssimato con un numero di macchina a lui "vicino", se possibile.

Dato un generico a, denotiamo con $\bar{a}$ la sua approssimazione di macchina, se esiste. Ci sono due tecniche per determinare $\bar{a}$ a partire da a:

1. tecnica di troncamento = si esclude la parte a destra della t-esima cifra;

2. tecnica di arrotondamento = si aggiunge $1/2\ N^{-t}$ a *p* e poi si tronca il risultato alla t-esima cifra.
⇒

NB: negli appunti le $\bar{a}$ stanno per a soprassegnate ovvero numero di macchina

ERRORI

Visto che non tutti i numeri reali sono rappresentabili ⇒ mi aspetto degli errori in conseguenza dell'applicazione della tecnica di arrotondamento o troncamento.

Sia $\bar{a}$ l'approssimazione di a, si definisce:

- **ERRORE ASSOLUTO**

$$\boxed{e_a = |a - \bar{a}|;}$$

a = numero iniziale, quantità esatta
$\bar{a}$ = numero che considera il calcolatore, quantità approssimante

- **ERRORE RELATIVO**

$$\boxed{e_r = \frac{|a - \bar{a}|}{|a|}.}$$

Questi sono utili nella stima degli errori assoluto e relativo che si commettono quando si approssima il numero reale a con il numero di macchina $\bar{a}$ ottenuto con le tecniche i) e ii).

Vi sono differenze tra i due errori? Guardiamo un esempio

Esempio

$a = 10^3$
$\bar{a} = 10^3+1 = 1000 + 1$
$e_a = |(10^3 - (10^3+1))| = 1$
$e_r = |1|/(10^3) = 10^{-3} = 0,01$

L'errore relativo fornisce più informazioni rispetto a quello assoluto.

Nel caso di a si passa da 1000 - 1001 quindi ci sta un errore basso.

$b = 10^{-3}$
$\bar{b} = 10^{-3}+1 = 0,01 + 1 = 1,01$
$e_a = |10^{-3} - 10^{-3} - 1| = 1$
$e_r = |1|/(10^{-3}) = 10^3$

Nel caso di b invece si passa da 0,01 - 1,01 quindi l'errore deve essere alto come indicato da quello relativo.

Perché l'errore relativo è migliore di quello assoluto

Quindi, l'errore assoluto soddisfa:

$$|a - \bar{a}| \begin{cases} < N^{q-t}, & \textit{per la tecnica i)} \\ \leq \frac{1}{2} N^{q-t}, & \textit{per la tecnica ii)} \end{cases}$$

mentre quello relativo, poiché:

$$|p| \geq N^{-1} \text{ implica } |a| \geq N^{q-1}$$

$$\frac{|a - \bar{a}|}{|a|} \leq \frac{|a - \bar{a}|}{N^{q-1}} \begin{cases} < N^{1-t}, & \textit{per la tecnica i)} \\ \leq \frac{1}{2} N^{1-t}, & \textit{per la tecnica ii)} \end{cases}$$

La tecnica ii) è migliore della tecnica i).
i) è meno cara, ma produce un errore più grande (il doppio di quello prodotto dalla tecnica ii)).

PRECISIONE DI MACCHINA

La quantità

$$\boxed{eps = \begin{cases} N^{1-t}, & \textit{per la tecnica i)} \\ \frac{1}{2} N^{1-t}, & \textit{per la tecnica ii)} \end{cases}}$$

definisce la cosiddetta precisione di macchina oppure errore di roundoff.
Essa è una costante caratteristica di ogni aritmetica floating-point e rappresenta una misura della massima precisione di calcolo raggiungibile. La precisione di macchina è un numero piccolissimo, dipende solo dal calcolatore. E' si un numero piccolo ma rappresenta comunque il più grande errore che possiamo commettere sostituendo ad un numero il suo corrispondente numero di macchina.

Pertanto se $\bar{a}$ denota il numero di macchina corrispondente al numero reale a, posto

$$\varepsilon = (\bar{a} - a)/a$$

possiamo scrivere:

$$\boxed{\bar{a} = a(1 + \varepsilon) \text{ con } |\varepsilon| \leq eps}$$

$\bar{a}$ vista come perturbazione. Questo numero rappresenta una perturbazione di a dell'ordine di precisione di macchina.

Ogni numero macchina è pensato come un numero reale perturbato di una quantità pari ad ε