NUMERO: 1929A - ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Zambon Sara

MATERIA: Analisi 1 (teoria + esercizi) - Prof. Zanini , Quelali

ELEMENTI DI LOGICA MATEMATICA ← logica di I ordine

Una proposizione logica è un enunciato al quale si può sempre associare un valore di verità: vero (V) o Falso (F)

es. $3 > \sqrt{12}$ (F)

Torino è lontano da Milano ⇒ **NON È** una prop. logica

Un predicato è un enunciato matematico che dipende da 1 o più variabili. Diventa (V) o (F) solo quando viene fissato il valore di tali variabili

es. $p(x)$: "x è un numero primo"
↖NON è una prop. logica, è un predicato

$p(11)$ ← ora sì (V)

CONNETTIVI LOGICI

- NEGAZIONE → $\neg p$ "non p"
  → $\neg p$ è (V) se p è (F), e viceversa ←

p	¬p
V	F
F	V

- CONGIUNZIONE → $p \wedge q$ "p e q"

  $p \wedge q$ è vera solo se entrambe le affermazioni sono vere

Intersezione

p	q	p∧q	p∨q
V	F	F	V
F	V	F	V
V	V	V	V
F	F	F	F

- DISGIUNZIONE → $p \vee q$ "p v q"

  $p \vee q$ è (F) solo se sia p sia q sono entrambe (F), altrimenti è (V)

Unione

- IMPLICAZIONE → $p \Rightarrow q$ "p implica q"
  "se p allora q"

p	q	p⇒q
V	F	F
F	V	$\boxed{V}$
V	V	V
F	F	$\boxed{V}$

$p \Rightarrow q$ è (F) quando p è (V) e q è (F) altrimenti è sempre (V)

es. p: "7 è un numero razionale" (V)
q: "7 è un numero pari" (F)

$\neg p$: (F)

$p \wedge q$: (F)

$p \vee q$: (V)

$p \Rightarrow q$: (F)

$q \Rightarrow p$: (V)

Per negare : $\neg(\forall x, \exists y : p(x,y)) \Leftrightarrow \exists x : \forall y, \neg p(x,y)$

... è come dire ...

es. Tutti i direttori di orchestra sanno suonare il piano e il violino

d : direttore
p : suona il piano
v : suona il violino

$\Rightarrow \quad \forall d, p \vee v$

$$\neg(\forall d, p \vee v) \Leftrightarrow \exists d : \neg(p \vee v)$$

$$\neg(p) \wedge (\neg v)$$

CENNI DI TEORIA DEGLI INSIEMI

Insieme ⇒ è un concetto primitivo, un assioma su cui si basano molte teorie. Un insieme di oggetti che chiamiamo <u>elementi</u>

Se A è un insieme si può scrivere $x \in A$ "appartiene" $y \notin A$ "non appartiene"

es. $A = \{a, b, c\}$

Due insiemi A e B si dicono <u>uguali</u> se hanno gli stessi elementi

$$A = B \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

es. $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$

$B = \{$

$A \neq B$ → ma se $C = \{x \in \mathbb{Z} : |x| \leq 3 \wedge x \neq 0\}$ allora $A = C$

Insieme vuoto $\emptyset$: è l'insieme privo di elementi.

Fissiamo un insieme ambiente X non vuoto.

A si dice sottoinsieme di X, $A \subseteq X$, se $A \subseteq X \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x, x \in A \Rightarrow x \in X$

$A \subset X \Leftrightarrow A \subseteq X$ e $A \neq X$ "esiste almeno un elemento ..."

"sottoinsieme proprio di X"

Insieme delle parti di X

$\mathcal{P}(X)$ = collezione di tutti i sottoinsiemi di X

es. $X = \{a, b, c\}$

$$\mathcal{P}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \emptyset, \{a,b,c\}\}$$

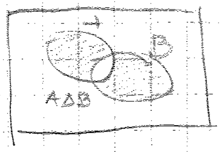
Si può notare che se X ha n elementi, allora $\mathcal{P}(X)$ ha 2^n elementi

Differenza Simmetrica ⇒ "Elementi di A che non stanno in B, oppure gli elementi di B che non appartengono a A"

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

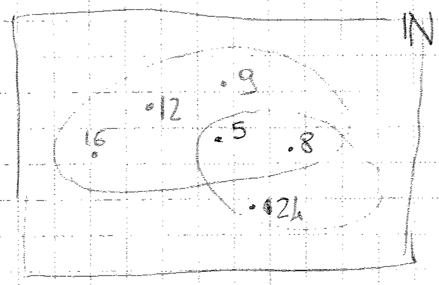
-- oppure --

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$



es. $X = \mathbb{N}$

$A = \{5, 8, 9, 12, 16\}$
$B = \{5, 8, 24\}$
$P = \{n \in \mathbb{N} \,/\, n \text{ è pari}\}$
$D = \{n \in \mathbb{N} \,/\, n \text{ è dispari}\}$



$A \cup \emptyset = A$
$A \cap \emptyset = \emptyset$

$A \cup B = \{5, 8, 9, 12, 16, 24\}$
$A \cap B = \{5, 8\}$
$A / B = \{9, 12, 16\}$
$A \Delta B = \{9, 12, 16, 24\}$

$A \setminus P \{5, 9\}$

$\complement D = P$
$P \cup D = \mathbb{N}$

{PROPRIETÀ}

▷ $\complement(\complement A) = A$

▷ $A \cap \complement A = \emptyset$ ⇒ Principio di non contraddizione

▷ $A \cup \complement A = X$ ⇒ Principio del terzo escluso

- Proprietà COMMUTATIVA e ASSOCIATIVA di $\cup$ e $\cap$:

$A \cup B = B \cup A$ $\qquad A \cap B = B \cap A$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

- Proprietà distributive

$(A \cap B) \cap C = (A \cup C) \cap (\overset{B}{A} \cup \overset{C}{B})$ $\qquad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Leggi di De Morgan

$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$ $\qquad \complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$

"in parole $\qquad$ "in parole

[1] Insiemi Numerici

$\mathbb{N}$ = num. naturali $= \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$

$\mathbb{Z}$ = num interi $= \{0, \pm 1, \pm 2 \ldots\}$

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$ dove p e q sono numeri interi e $q \neq 0$ e p e q primi fra loro x escludere le frazioni equivalenti

$\mathbb{N}$ sottoinsieme di $\mathbb{Z}$, che è sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ $\rightarrow \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

essi sono insiemi numerici:

"Insiemi in cui è possibile definire 2 operazioni:

- SOMMA (+)
- PRODOTTO (·)

associano ogni coppia ordinata dell insieme, l'elemento somma

esempio proprietà delle operazioni in $\mathbb{Q}$

SOMMA:
1. ▷ commutativa $\forall x, y \in \mathbb{Q} \quad x + y = y + x$
2. ▷ associativa $\forall x, y, z \in \mathbb{Q} \quad (x+y)+z = x+(y+z)$
3. ▷ elemento neutro $\exists!$ elemento, detto zero, t.c. $x + 0 = x$
4. ▷ esiste l'opposto $\forall x \in \mathbb{Q} \ \exists!$ elemento $-x$ t.c. $x + (-x) = 0$

OSS. grazie alla proprietà associativa si può scrivere $x+y+z$ senza parentesi

Si può definire la sottrazione grazie all'esistenza dell'opposto
$$x - y \overset{\text{def}}{=} x + (-y)$$

PRODOTTO:
5. ▷ Commutativa $x \cdot y = y \cdot x$
6. ▷ Associativa $(x \cdot y) z = x (y z)$
7. ▷ Elemento neutro $\exists!$ elemento $\neq 0$, detto unità e indicato con 1, t.c. $x \cdot 1 = x$
8. ▷ Reciproco $\forall x \neq 0 \ \exists!$ elemento indicato con x^{-1} o $\frac{1}{x}$ t.c. $x \cdot x^{-1} = 1$
9. ▷ Proprietà distributiva $(x+y)z = xz + yz$

Analogia (non totale) → + → unione · → intersez

OSS. $\mathbb{Q}$, dato che soddisfa tutte queste 9 proprietà → allora si chiama CAMPO COMMUTATIVO

$\mathbb{N}$ non lo è → non si può risolvere $3 + x = 0 \quad \nexists x \in \mathbb{N}$

$\mathbb{Z}$ nemmeno → non si può risolvere $\frac{2}{3} + x = 0 \quad \nexists x \in \mathbb{Z}$

Dimostrazione Per Assurdo

Ths
Non c'è un x razionale che $x^2=2$
↓
Per assurdo pongo che esista

Sia $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : x^2=2 \Leftrightarrow p^2=2q^2$

$\Rightarrow p^2$ è pari
$\Rightarrow$ allora anche p è <u>pari</u> (senno' p^2 verrebbe dispari)
$\Rightarrow p=2K$
$\Rightarrow 4k^2=2q^2 \rightarrow 2k^2=q^2$

$\Rightarrow$ Quindi ci viene che q^2 pari
$\Rightarrow q$ è pari

$\Rightarrow$ ma se p e q sono entrambi pari, non sono primi tra loro $\left(\frac{p}{q}\right)$
<u>ASSURDO</u>!

Allora si introduce $[\mathbb{R}]$
- contiene $\mathbb{Q}$ $\quad \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- contiene anche i numeri Irrazionali
- Si ha la CORRISPOND. BIUNIVOCA con la retta

I numeri reali che non sono razionali, sono Irrazionali $(\sqrt{2}, \pi, e \dots)$
▷ Anche $\mathbb{R}$ è un campo ordinato
▷ <u>Notazione</u> $\quad \mathbb{R}_+ \Rightarrow$ numeri reali positivi
$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x>0\}$
↓
N.B.! se metto $x \geq 0 \rightarrow$ si dicono numeri NON NEGATIVI

$\mathbb{R}_- \Rightarrow$ numeri reali negativi
$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x<0\}$
↓
$x \leq 0 \rightarrow$ si dicono ~~non~~ NON POSITIVI

ESERCIZIO $\quad |x+2| \leq |2x+3|+1$

$|x+2| \leq 2|x+2| = |2x+4| =$
↳ abbastanza = a quello → uso la disug. triangolare

$= |(2x+3)+1| \leq |2x+3|+1$
↑ disuguaglianza triangolare

$S: \{\forall x \in \mathbb{R}\}$

I è intervallo non degenere se contiene almeno un punto interno.
(anche l'insieme formato da 1 solo punto è un intervallo!)

[Insiemi limitati, estremo sup. e inf, max e min di un insieme]

Def. " $A \subseteq \mathbb{R}$, $K \in \mathbb{R}$ Il num. K si dice maggiorante per l'insieme A se x ogni elemento di $A \Rightarrow \exists k: x \leq k$ "

Def " K è Max. dell'insieme A, $K = \max A$, se è maggiorante ed è un elemento dell'insieme."

- $K \in A$
- K è maggiorante di A

Def " $A \subseteq \mathbb{R}$, $K \in \mathbb{R}$ Il num k si dice minorante x l'insieme A se per ogni elemento di $A \Rightarrow \exists x: K \leq x$

K è Min. dell'insieme A, $k = \min A$, se è minorante ed è un elemento dell'insieme"

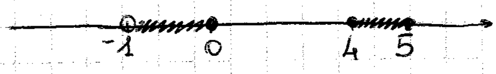
- $K \in A$
- K è minorante di A

→ Max e Min di un insieme, se esistono, sono UNICI ←

es. $A = [-1, \sqrt{2})$

Min $A = -1$
Max $A \rightarrow$ non c'è
Maggioranti $\rightarrow [\sqrt{2}, +\infty)$ Minoranti $\rightarrow (-\infty, -1]$

$$X = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid 4 \leq x \leq 5\}$$



Min $X \rightarrow$ non c'è
Max $X = 5$
insieme Minoranti $= (-\infty, -1]$
insieme Maggioranti $= [5, +\infty)$

Def " $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice limitato superiormente se ammette almeno un maggiorante. Cioè:

$$\text{se } \exists k \in \mathbb{R} \,/\, x \leq k \quad \forall x \in A$$

Def " $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice limitato inferiormente se ammette almeno un minorante. Cioè:

$$\text{se } \exists k \in \mathbb{R} \,/\, K \leq x \quad \forall x \in A$$

$A \subseteq \mathbb{R}$ si dice limitato ~~se~~ è superiormente e inferiormente limitato

es. $X = (-1, 0] \cup [4, 5]$ è limitato

$\mathbb{N}$ è limitato inferiormente (non è limitato)

Congettura: $\inf A = \min A = 0$:

$1 - \frac{1}{n} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \neq 0$ Vera

- quindi zero è un minorante
- è un minimo perché $\in$ ad A
- è anche l'estremo inferiore A

Congettura: $\sup A = 1$:

usiamo — $\begin{cases} \bullet\ 1 \text{ è maggiorante in } A \rightarrow \underbrace{1 - \frac{1}{n}}_{\text{tutti gli elementi di } A} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \quad \text{Vera} \\ \bullet\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A \ /\ x > 1 - \varepsilon \end{cases}$

se riesco a risolvere in n questo:

$1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon \iff \varepsilon > \frac{1}{n} \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$

è risolto Vera

$\Rightarrow$ il $\sup A = 1$

Difficile $\quad A = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ /\ n \in \mathbb{N},\ n \neq 0 \right\}$

si prova che $\quad 2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3 \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \neq 0$

→ Se un insieme non è limitato superiormente, si pone $\sup A = +\infty$ ($A \subseteq \mathbb{R}$ e $A \neq \emptyset$)

→ Se un insieme non è limitato inferiormente si pone $\inf A = -\infty$ ($A \subseteq \mathbb{R}$ e $A \neq \emptyset$)

Assioma di completezza di $\mathbb{R}$ ← non ci sono buchi su retta $\mathbb{R}$

"Ogni sottoinsieme non vuoto $X \subseteq \mathbb{R}$ limitato superiormente ammette estremo superiore" (analogo per infer.)

es. $A = \{ x \in \mathbb{R} \ /\ x^2 < 2 \}$ $\qquad B = \{ x \in \mathbb{Q} \ /\ x^2 < 2 \} \subset \mathbb{Q}$

$\sup A = \sqrt{2}$ $\qquad \sup B \rightarrow$ non esiste

Se un insieme ammette massimo, esso è superiormente limitato; infatti il massimo dell'insieme è un maggiorante dell'insieme, anzi, è facile vedere che è il più piccolo dei suoi maggioranti. Tuttavia, non vale viceversa.

Proprietà di Monotonia delle potenze (esponente intero)

$a, b \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ ▷ $a^n > b^n \iff a > b$

▷ $a > 1$, $a^m > a^n \iff m > n$

~~Risolvere~~ Una radice n-esima di $a \in \mathbb{R}$ è la soluzione, se esiste, di $x^n = a$

TEOREMA Dato $a \in \mathbb{R}_+$ $\exists!$ la radice n-esima di a appartenente a $\mathbb{R}_+$ e si denota con $\sqrt[n]{a}$

es. $\sqrt{x^2} = |x|$ sempre $\in \mathbb{R}_+$

Proprietà di monotonia delle potenze (esponente razionale) ~~o reale~~)

$p, q \in \mathbb{N}$, $p \neq 0$, $q \neq 0$ ▷ Valgono le proprietà delle potenze e di monotonia

$x > 0$ ▷

$x^{\frac{p}{q}} \overset{def}{=} \sqrt[q]{x^p}$

$x^{-\frac{p}{q}} \overset{def}{=} \frac{1}{\sqrt[q]{x^p}}$

Proprietà di Monotonia delle potenze (esponente reale)

$x > 1$, $x \in \mathbb{R}$ ▷ x^q

$x^r \overset{def}{=} \sup\{x^q : q \in \mathbb{Q}, q \leq r\}$ ▷ Valgono le proprietà delle potenze e di monotonia

$0 < x < 1$, $x \in \mathbb{R}$ ▷

$x^r = \left(\frac{1}{x}\right)^{-r}$

N.B.! $a^{(b^c)} \neq (a^b)^c$ es. $2^{(2^3)} = 2^8 = 256$

$(2^2)^3 = 4^3 = 64$

$$1 < \left(\frac{1}{9}\right)^{2x-3} \leq 27$$

Voglio usare la monotonia → devo avere la stessa base

$$\left(\frac{1}{3}\right)^0 \overset{?}{<} \left(\frac{1}{3}\right)^{4x-6} \overset{?}{\leq} \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$$

le basi sono < 1 → inverto i segni!

$\iff -3 \leq 4x - 6 < 0$

$\iff \frac{3}{4} \leq x < \frac{3}{2}$

esempio 1: dimostriamo la disuguaglianza di Bernoulli

$$(1+x)^n \geq 1+nx \qquad \forall x>-1, \; n\in\mathbb{N}$$

per induzione: 1) $p(0)$: $(1+x)^0 \overset{?}{\geq} 1+0x$ poniamo $n_0=0$

$1 \geq 1$ Vero

2) Supponiamo $p(n)$ vera (ipotesi induttiva), vogliamo provare che $p(n+1)$ è vera

Ths: $(1+x)^{n+1} \overset{?}{\geq} 1+(n+1)x$ assumendo $p(n)$ vera

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \underbrace{(1+x)}_{>0} \underset{p(n)\ \text{ipotesi induttiva}}{\geq} (1+nx)(1+x)$$

$$= 1+nx+x+nx^2 = 1+(n+1)x+\underbrace{nx^2}_{\geq 0}$$

Quindi

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$$

esempio 2: Provare che $\forall n\geq 1$ $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

$$1+2+3+\dots n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Gauss ha visto che ...
$n=100$

+ ↓	1	2	3	... 100
	100	99	98	1
	101	101	101	101

$$2(1+2+\dots+100) = 101\cdot 100 \Rightarrow 1+2\dots+100 = \frac{101\cdot 100}{2}$$

PER INDUZIONE: 1) $p(1)$: $1 \overset{?}{=} \frac{1(1+1)}{2}$ VERO

$n_0=1$

2) Assumiamo $p(n)$ vera (ipotesi induttiva), vogliamo provare che $p(n+1)$ è vero

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \text{assumendo } p(n) \text{ vera}$$

$$= \underbrace{1+2+3\dots n}_{\sum_{k=1}^{n} k} + (n+1) = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \text{vero!}$$

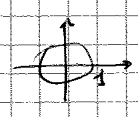
[3] RELAZIONI e FUNZIONI

"Una relazione tra due insiemi è un sottoinsieme del prodotto cartesiano"

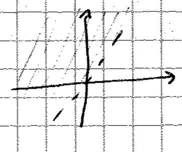
Relazione R tra 2 insiemi X e Y è $R \subset X \times Y$

se $(x,y) \in R \Rightarrow$ si dice che x è in relazione con y

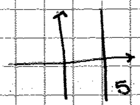
es. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-1=0\}$ circonferenza



$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 2x\}$ semipiano



$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x=5\}$



$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2+y^2<0\} = \emptyset$

"Una funzione è una particolare relazione, con proprietà in più"

Def = "una Relazione f di X in Y si dice funzione di X in Y se

$$\forall x \in X \quad \exists!\, y \in Y : \overbrace{(x,y) \in f}$$

→ x e y sono in relazione mediante f

- X è detto dominio di f $\quad X = \text{dom}(f)$
- Y è detto codominio di f

Si scrive $f : X \longrightarrow Y$ (invece di scrivere $(x,y) \in f$)

↗ Dominio ↗ Codominio

- y si dice immagine di x mediante f

Es. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ è una funzione

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ non è una funzione! c'è la discontinuità in zero! → non è che è vera $\times \forall x \in \mathbb{R}$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| = 1\}$ non è una funzione

$f : X \xrightarrow{\text{"mediante"}} Y$ insieme immagine di f

$$\text{im}(f) \overset{def}{=} \{y \in Y : \exists\, x \in X \text{ tale che } y = f(x)\} = f(x) \subset Y$$

<u>Notazione</u>: sia $f : X \to Y$

se $X \subseteq \mathbb{R} \to f$ si dice funzione di variabile reale

$Y \subseteq \mathbb{R} \to f$ si dice funzione reale ~~o~~ a valori reali f si dice SURIETTIVA se l'insieme immagine corrisponde al codominio

se $f(X) = Y$

f si dice INIETTIVA se a punti distinti corrispondono $f(x)$ diverse

$\forall x_1, x_2 \in X \qquad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

o equivalentemente se:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

OSSERVAZIONE:

$f: X \to Y$ - è suriettiva se x ogni $y \in Y$ si riesce a trovare

<u>∃ almeno</u> una soluzione $x \in X$ di $f(x) = y$

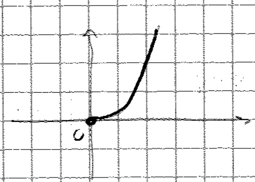
- è iniettiva se x ogni $y \in Y$ <u>esiste al più</u> una soluzione

$x \in X$ di $f(x) = y$

f si dice BIIETTIVA se è sia iniettiva sia suriettiva

es. $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^3$

è iniettiva
non è suriettiva $\Rightarrow$
↘ è $\mathbb{R}^+$



$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x}$

è iniettiva
non è suriettiva → lo <u>zero</u>

$f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{|x+1|}$

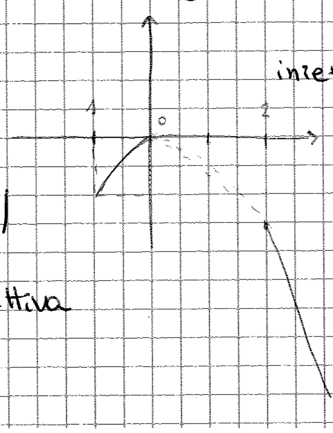
non è iniettiva
non è suriettiva

$f: X \to \mathbb{R} \qquad f(x) = -x^4$

se $X = \mathbb{R}$ né iniettiva né suriettiva

se $X = [1, +\infty)$ iniettiva . non è suriettiva

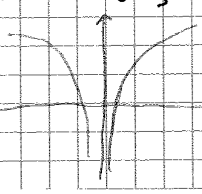
se $X = [-1, 0] \cup [2, +\infty)$



iniettiva ma non suriettiva

$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \log_3 |x|$

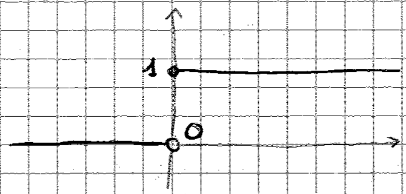
è suriettiva
non è ~~se~~ iniettiva



ESEMPI DI FUNZIONI

- HEAVISIDE $H: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

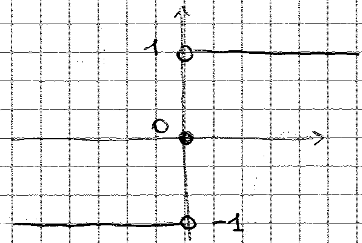
$$H(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x \geq 0 \\ 0 & se \quad x < 0 \end{cases}$$



$H(\mathbb{R}) = \{0, 1\} \to$ immagine

- SEGNO

$$f(x) = \operatorname{sign}(x) \overset{def}{=} \begin{cases} 1 & se \quad x > 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \\ -1 & se \quad x < 0 \end{cases}$$



$f(\mathbb{R}) = \{-1, 0, 1\}$

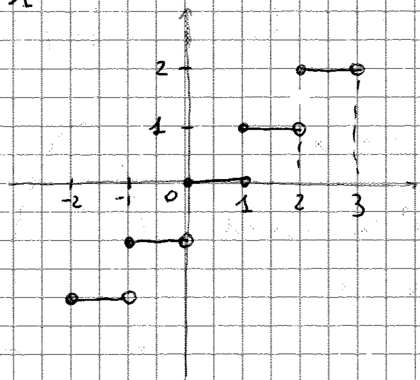
$f([2, +\infty]) = \{1\}$

- FUNZIONE PARTE INTERA

"Il + grande intero $\leq$ del numero x" $\to \lfloor x \rfloor \overset{def}{=} \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$

$\lfloor \frac{3}{2} \rfloor = 1 \qquad \lfloor -\frac{1}{2} \rfloor = -1$

funzione costante a tratti:



Dominio = $\mathbb{R}$

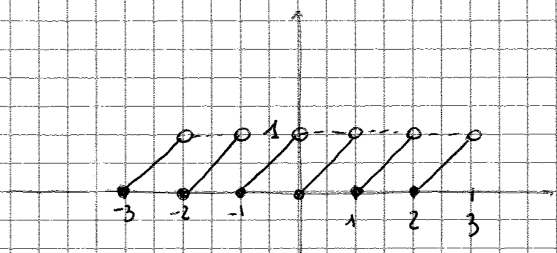
Immagine = $\mathbb{Z}$

Controimmagine di 2:

$$f^{-1}(\{2\}) = [2, 3)$$

- FUNZIONE MANTISSA

$$M(x) \overset{def}{=} x - \lfloor x \rfloor$$



$M(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} - \lfloor \frac{3}{2} \rfloor = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

$M(2) = 0 \to$ la mantissa dei numeri naturali è ZERO

Insieme immagine: $f(\mathbb{R}) = [0, 1)$

[FUNZIONE COMPOSTA]

$f: X \to Y$

supponiamo $f(x) \subset Z$

$g: Z \to W$

la composizione di f e g è la funzione $g \circ f: X \to W$ definita da:

$$g \circ f(x) \overset{def}{=} g(f(x))$$

<u>Dominio</u>: sarà un sottoinsieme de Dominio di f ovvero

$$dom(g \circ f) = \{ x \in dom f : f(x) \in dom\, g \}$$

es. $f(x) = \log_2 x \quad \cancel{X} = \mathbb{R}_+$

$g(x) = 3 + x \quad dom\, g = \mathbb{R}$

▷ $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\log_2 x) = 3 + \log_2 x$

$$dom(g \circ f) = \mathbb{R}_+ = dom f$$

▷ $f \circ g = f(g(x)) = f(3+x) = \log_2(3+x)$

$$dom(f \circ g) = (-3, +\infty)$$

<u>Esercizio</u>

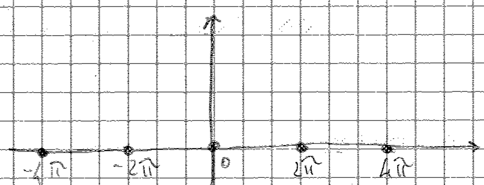
▷ $f(x) = \begin{cases} 0 & se\ x \leq 0 \\ -4 & se\ x > 0 \end{cases}$

$g: [-2, +\infty) \to \mathbb{R} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & se\ -2 \leq x < 0 \\ 14 & se\ x = 0 \\ 0 & se\ x > 0 \end{cases} \qquad x \geq -2$

$dom(g \circ f) = \{ x \in \mathbb{R} : f(x) \in dom\, g \} = (-\infty, 0]$

$\underbrace{x \in (-\infty, 0]}_{\text{Dominio } g \circ f} \quad g \circ f = g(0) = 14$

▷ $f(x) = \sqrt{\log_2(\cos x)}$



$Dom f(x) = \{ \forall x \in \mathbb{R} : \cos x > 0 \wedge \log_2(\cos x) \geq 0 \} =$

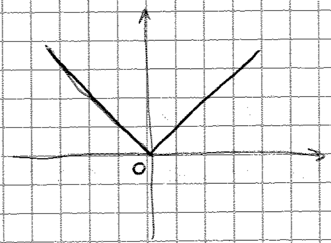
$= \{ x \in \mathbb{R} : \cos x > 0 \wedge \cos x \geq 1 \} = \{ x \in \mathbb{R} : \cos x = 1 \}$

$\{ x \in 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \}$

ESEMPI ▷ $f(x) = |x|$

immagine $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$

- $\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0 = \inf [0, +\infty)$
- $\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \sup [0, +\infty) = +\infty$

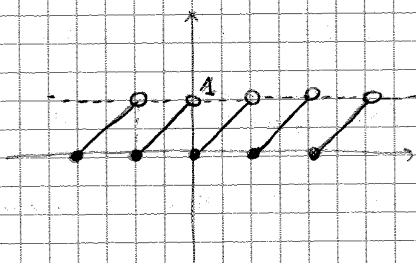


Quindi f è limitata inferiormente ma non superiormente. Quindi non è limitat

▷ $f(x) = M(x)$

immagine $f(\mathbb{R}) = [0, 1]$

- $\inf f(x) = 0 \quad x \in \mathbb{R}$
- $\sup f(x) = 1 \quad x \in \mathbb{R}$



Quindi $f(x)$ è limitata

GRAFICAMENTE: una funzione è limitata se compresa tra 2 rette orizzontali del piano

MONOTONIA

$f: X \to \mathbb{R}$ si dice

▷ CRESCENTE se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

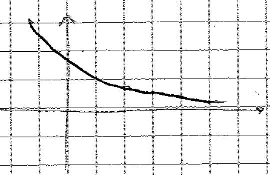
▷ STRETTAMENTE CRESCENTE $f(x_1) < f(x_2)$

▷ DECRESCENTE se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

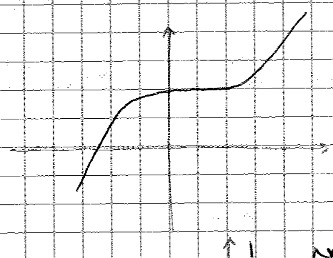
▷ STRETTAMENTE DECRESCENTE $f(x_1) > f(x_2)$

Una f. è monotona se è 1 di queste 4 in tutto il suo Dominio (o strettamente monotona)

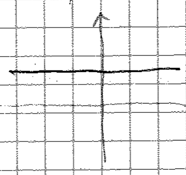
ESEMPI



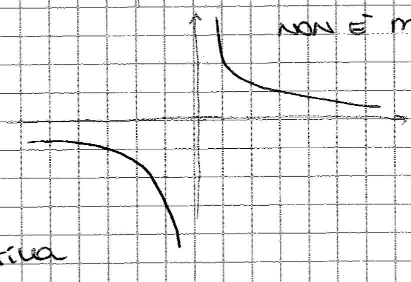
STRETTAMENTE DECRESCENTE



CRESCENTE



SIA CRESCENTE SIA DECRESCENTE



NON è monotona

PROPRIETÀ

▷ Se la f. è strettamente monotona, allora è iniettiva

▷ la somma di funzioni crescenti è crescente

▷ il prodotto di funzioni crescenti e ≥ 0 è crescente

MA: somma di 2 funzioni monotone NON è necessariamente monotona

▷ Se f è invertibile e monotona allora f^{-1} ha la stessa monotonia di f

$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ Domf : $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

n dispari

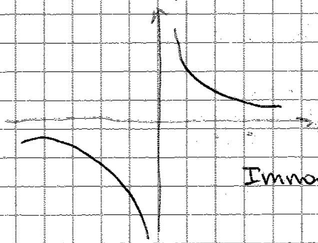
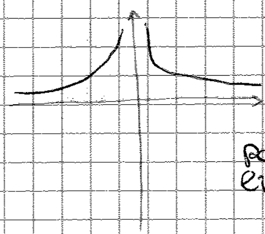


Immagine : $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

n pari



pari
limitata sup

▷ FUNZIONI POLINOMIALI

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots a_1 x + a_0$$

dove $a_n, a_{n-1} \dots a_0 \in \mathbb{R}$ Domf $= \mathbb{R}$

▷ FUNZIONI RAZIONALI

facendo il quoziente di 2 funzioni polinomiali:

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono due funzioni polinomiali e $Q(x)$ non identicamente nulla

$$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$$

Si può scrivere : $f(x) = D(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ con grado R < grado Q

facendo la divisione tra polinomi

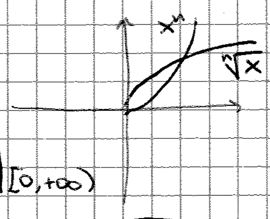
▷ FUNZIONE RADICE $\sqrt[n]{x}$

Dalla funz potenza → restringiamo il dominio alla semiretta $[0, +\infty]$ ora è iniettiva, quindi invertibile

$f(x) = x^n$

⊕ n pari

⇒

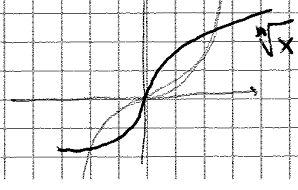


$f|_{[0,+\infty)}$

è strettamente crescente
⇓
INIETTIVA
⇓
INVERTIBILE

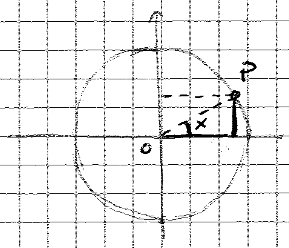
$f^{-1} : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ si denota con $\sqrt[n]{x}$

⊕ n dispari

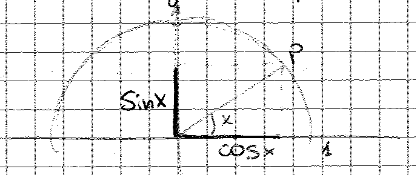


$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è invertibile

▷ FUNZIONI TRIGONOMETRICHE



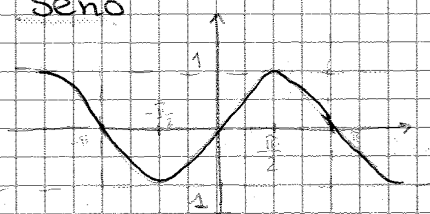
x = angolo espresso in radianti



Sin, Cosx si estendono da $[0,2\pi]$ a tutto $\mathbb{R}$

ponendo $\begin{cases} \sin(x+2k\pi) = \sin x \\ \cos(x+2k\pi) = \cos x \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$

• funzione seno



$f(x) = \sin x$

$\text{dom} f = \mathbb{R}$

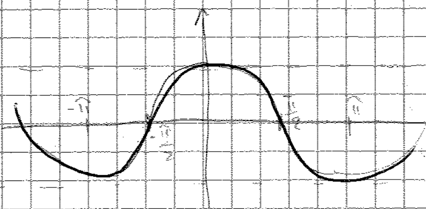
immagine

$f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$

è dispari

è periodica $P = 2\pi$

• funzione coseno



$f(x) = \cos x$

$\text{dom} f = \mathbb{R}$

$f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$

è Pari

è periodica $P = 2\pi$

[Formule Trigonometriche]

$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

cateto = ipotenusa · sen angolo opp / cos angolo ad

$\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x$

$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$

$\tan x = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{cateto adiac}}$

$\tan(2x) = \frac{2 \cdot \tan x}{1-\tan^2 x}$

RECIPROCHE

$\text{cosec}\, x = \frac{1}{\text{sen}\, x}$ $\sec = \frac{1}{\cos x}$

$\frac{1}{\text{tg}\, x} = \text{ctg}\, x = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x} = \frac{\text{cateto adiac}}{\text{cateto opp}}$

PROSTAFERESI

- $\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta = 2\,\text{sen}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
- $\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\beta = 2\,\text{sen}\,\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$
- $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
- $\cos\alpha - \cos\beta = -2\,\text{sen}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,\text{sen}\,\frac{\alpha-\beta}{2}$

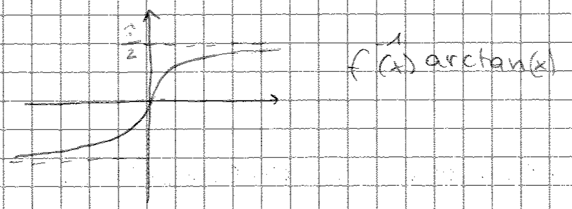
$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\beta}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 448

▷ ARCOTANGENTE (inversa della tangente)

Se $f(x) = \tan x \rightarrow f|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$

l'inversa $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



[5] NUMERI COMPLESSI

$\sqrt{-1} \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $x^2 + 1 = 0$ Non si risolve in $\mathbb{R}$

Gli introduciamo proprio x risolverle

$x^3 + px + q = 0 \rightarrow$ questa può anche non avere soluzioni in $\mathbb{R}$ in base a p e q

$\mathbb{C}$ = è l'insieme dei numeri complessi: $= \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ ← differenza con prodotto cartesiano

Def "Un numero complesso z è una coppia ordinata di numeri reali"

$z = (x, y)$ con $x, y \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $(x, 0) = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Parte reale del numero complesso → Parte immaginaria

$x = \mathbb{R}e(z)$ $\qquad$ $y = \mathbb{I}_m(z)$

Proprietà dei numeri complessi: si possono scrivere in più modi (Trigonometrica, Cartesiana, esponenziale)

▷ FORMA CARTESIANA $\qquad z = x + iy$

definita $i \stackrel{def}{=} (0, 1)$ Perché ↳ $(x,y) = (x,0) + (0,1)(y,$

es. $z = (-2, 5)$

forma cartesiana $\rightarrow z = -2 + i5$

Cosa vuol dire che due numeri complessi sono uguali? Se e solo se sono uguali le loro parti immaginarie e le loro parti reali

es. $\quad z_1 = x_1 + iy_1 \qquad z_2 = x_2 + iy_2$

allora $\quad z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$

Possiamo identificare i numeri complessi della forma $(x, 0) = x + i0 = x$ con i numeri reali:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

I numeri complessi con la parte reale uguale a zero $\rightarrow (0, y) = 0 + iy = iy$ si dicono <u>immaginari puri</u>

OSSERVAZIONE II $\quad i^2 = i \cdot i = (0+i)\cdot(0+i) =$

$$= \big((0\cdot 0) - (1\cdot 1)\big) + i\,(0\cdot 1 + 0\cdot 1)$$

$$= -1 + i0 = -1$$

Cioè $i^2 = -1$ $\rightarrow$ Vale anche $(-i)^2 = -1$

Cioè l'equazione $z^2+1=0$ in $\mathbb{C}$ ha le soluzioni $z = \pm i$

OSSERVAZIONE III per fare il prodotto di due numeri complessi basta usare le solite regole di $\mathbb{R}$ e il fatto che $i^2 = -1$

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 + \underbrace{i^2}_{=-1} y_1y_2 =$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(y_1x_2 + x_2y_2)$$

esempio $\quad (5+2i)(-1+3i) = -5 + 6i^2 - 2i + 15i =$

$$= -5 - 6 + i(-2+15) = -11 + 13i$$

POTENZA DI i

i, $i^2 = -1$, $i^3 = i \cdot i^2 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$

$i^5 = i$, $i^6 = -1$, $i^7 =$

Potenze multiple di $4 = 1$ $\qquad$ esempio $\quad i^{63}$

$63 : 4 = 15$ resto 3

$63 = 4 \cdot 15 + 3$ resto

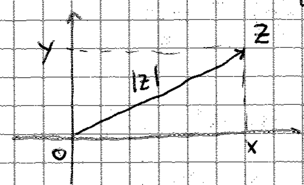
$$i^{63} = \underbrace{(i^4)^{15}}_{=1} \cdot i^3 = i^3 = -i$$

MODULO DI UN NUMERO COMPLESSO

$z = x + iy \qquad |z| = |x+iy| \overset{def}{=} \sqrt{x^2+y^2}$ Pitagora

$|z| \in \mathbb{R} \qquad |z| \geq 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$

Geometricamente $|z|$ è la distanza dall'origine!



OSS. $\quad z = x + i0$

$$|z| = \sqrt{x^2+0^2} = |x|$$

esempio. $\quad z = 1 + 2i$

$$|z| = |1+2i| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$$

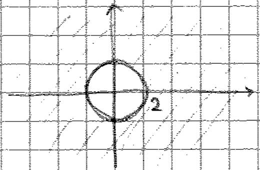
Disequazioni in $\mathbb{C}$

In $\mathbb{C}$ non hanno senso le disuguaglianze del tipo $z < i$ o $z \geq 0$

Hanno senso disequazioni del tipo $|z| \geq 2$, $Re(z) < (Im(z))^3$

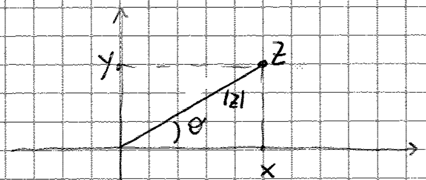
$|z| \geq 2$ $\quad z = x + iy$

$\sqrt{x^2+y^2} \geq 2$



Forma trigonometrica

$z \in \mathbb{C}$, $z \neq (0,0)$ $\quad z = (x,y)$ $\quad |z| = \sqrt{x^2+y^2}$



$\theta \overset{def}{=}$ argomento di z = **arg**(z)

$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ $\quad \begin{cases} x = |z|\cos\theta \\ y = |z|\sin\theta \end{cases}$

$\theta \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x>0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)+\pi & \text{se } x<0 \end{cases}$

L'argomento di z dei multipli di π

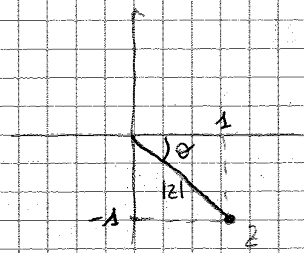
$Arg(z)$ = argomento principale di z, è l'unico argomento compreso tra $-\pi$ e π

esempio $\quad z = 1 - i$

Determinare modulo e argomento

$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

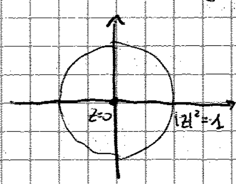
$Arg(z) = -\frac{\pi}{4}$



es. $i^{2015} = i^3 = -i$

$z^2 \cdot \bar{z} = z$ $\quad$ NON si semplifica!

$z(z\bar{z} - 1) = 0$ $\quad \to z = 0 \;\wedge\; z\bar{z} = |z|^2 = 1$



Se $x \neq 0$ $\quad \frac{y}{x} = \tan\theta$ $\quad |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

Questa forma semplifica molto la formula del prodotto tra numeri complessi:

$z_1 = |z_1| \cdot (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ $\quad z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$z_1 \cdot z_2 = (|z_1||z_2|)\left(\overbrace{\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2}^{=\cos(\theta_1+\theta_2)} + \left(i\,\overbrace{\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1}^{=\sin(\theta_1+\theta_2)}\right)\right) \Rightarrow$

$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$

esercizio $z = \sqrt{3} + i$ Calcolare z^{24}

1) scrivo z in forma trigonometrica

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) \qquad \begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

2) $\Rightarrow z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right)$

3) $\Rightarrow z^{24} = 2^{24}\left(\cos\left(\underbrace{24\frac{\pi}{6}}_{=\pi 4}\right) + i \sin\left(24 \cdot \frac{\pi}{6}\right)\right) =$

$= 2^{24}(1 + i0) = 2^{24}$ no parte immaginaria

RADICI n-ESIME DI UN NUMERO COMPLESSO

Prendo $n \geq 1$ intero $w^n = z$ $z \in \mathbb{C}$ dato

le soluzioni si chiamano $(w \in \mathbb{C})$ si chiamano radici n-esime di z

$z = |z| (\cos\theta + i \sin\theta)$ NOTO

$w = \rho (\cos\varphi + i \sin\varphi)$ $\rho = ?$ $\varphi = ?$

$w^n = z$ $\quad w^n = \rho^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$

$z = |z| (\cos\theta + i \sin\theta)$

$\Rightarrow \begin{cases} \bullet \text{ devono essere = i moduli} \\ \bullet\ n\varphi = \theta + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{|z|} \\ \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

... al variare di k ...

$k = 0 \quad \varphi_0 = \frac{\theta}{n}$

$k = 1 \quad \varphi_1 = \frac{\theta + 2\pi}{n}$

---

fino a $n-1$

$k = 0, 1 \ldots, n-1$ n soluzioni distinte

$k = n \quad \varphi_n = \frac{\theta + 2n\pi}{n} = \varphi + 2\pi$

Se $z = |z| (\cos\theta + i \sin\theta)$ allora le sue radici n-esime sono

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right) \quad k = 0, 1, \ldots n-1}$$

FORMULA DI EULERO

$\forall \theta \in \mathbb{R}$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

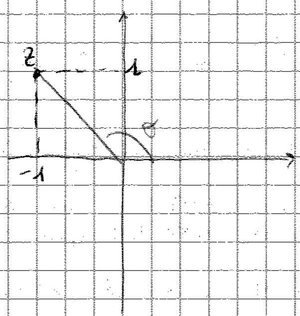
Forma esponenziale di un numero complesso

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\boxed{z = |z| e^{i\theta}}$$

modulo + argomento } → Forma trigonom. → Forma esponenziale

esempio: $z = -1 + i$



$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \frac{3}{4}\pi \qquad z = \sqrt{2}\, e^{\frac{3}{4}\pi i}$$

OSSERVAZIONE

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) =$$
$$= \cos(\theta) - i\sin(\theta)$$

Quindi
$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cdot\cos(\theta) \Rightarrow \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$
$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin(\theta) \Rightarrow \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

OSSERVAZIONE II

Se $z = |z| e^{i\theta} \neq 0$

▷ $$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}\left(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right) = \frac{1}{|z|} e^{-i\theta}$$

▷ $z_1 = |z_1| e^{i\theta_1} \qquad z_2 = |z_2| e^{i\theta_2}$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1 \cdot z_2|\, e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

▷ QUOZIENTE $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

▷ RADICI N-ESIME di $z = |z| e^{i\theta}$

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{|z|}\; e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}} \qquad k = 0, 1 \dots (n-1)$$

▷ ESPONENZIALE DI UN N. COMPLESSO

$z \in \mathbb{C} \quad z = x + iy$ — se $y = 0 \to e^x$ (esponenziale reale)

$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$

$$\boxed{e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)}$$

Esercizio

Sia $p(z) = i z^3 + (i+1) z^2 + (1-6i) z - 6$

provare che $z = i$ risolve $p(z) = 0$

cioè $p(i) \overset{?}{=} 0$

$$p(i) = i\,i^3 + (1+i)\,i^2 + (1-6i)\,i - 6 = \cancel{1} \cancel{-i} \cancel{-1} \cancel{+i} \cancel{+6} \cancel{-6} = 0$$

Quindi... (usando ruffini)

$$p(z) = (z-i)\,(?)$$

	i	$i+1$	$1-6i$	-6
i		i^2		6
	i	i	$-6i$	//

$$p(z) = (z-i)\,(i z^2 + i z - 6i) = (z-i)\cdot i\,(z^2 + z - 6) =$$
$$= (z-i)(z+3)(z-2)\,i$$

si risolve Δ...

CASO POLINOMI A COEFFICIENTI REALI

Sia $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$

con $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2 \dots, n$, $a_n \neq 0$ poiché $\overline{a_n} = a_n$

Allora: se $z_0 \in \mathbb{C}$ risolve $p(z_0) = 0$ allora anche $\overline{z_0}$ è radice, cioè $p(\overline{z_0}) = 0$

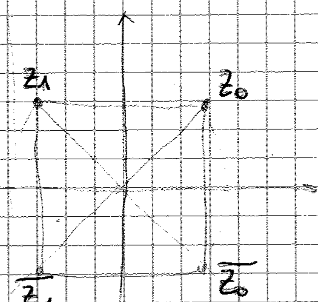
Quindi nella fattorizzazione di $p(z)$ avremo $(z - z_0)(z - \overline{z_0})$

$$(z - z_0)(z - \overline{z_0}) = z^2 - z\underbrace{(z_0 + \overline{z_0})}_{= 2 R_{e(z_0)} \in \mathbb{R}} + \underbrace{z_0 \overline{z_0}}_{= |z_0|^2 \in \mathbb{R}}$$

esempio $\quad z^4 + 1 = 0 \quad$ si fattorizza in $\mathbb{R}$!

$$z^4 = -1$$
$$z^4 = \sqrt[4]{-1} = 1\, e^{i\pi}$$

Quindi... $\quad z_k = \sqrt[4]{1}\; e^{i\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right)} \qquad k = 0, 1, 2, 3$



$p(z) = z^4 + 1 =$

$= (z - z_0)(z - \overline{z_0})\underline{(z - z_1)(z - \overline{z_1})}$ in $\mathbb{C}$

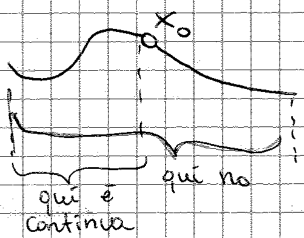
fattorizziamo in $\mathbb{R}$...

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$
$$\overline{z_0} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$
$$(z - z_0)(z - \overline{z_0}) = z^2 - 2 R_{e(z_0)} \cdot z + |z_0|^2 = z^2 - 2\frac{\sqrt{2}}{2} z + 1 = z^2 - \sqrt{2} z + 1$$

[6] FUNZIONI CONTINUE

Una funzione è continua se ...

la continuità è una proprietà **LOCALE**: vale punto × punto.
Poi se vale per tutti i suoi punti → allora la f(x) è continua.
Vale la regola dello "stacco la penna dal foglio". Linea continua



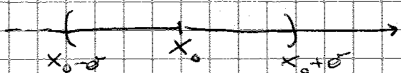
Si parla di continuità in un punto x_0, quindi è una proprietà locale.

⇒ "f è continua nel punto x_0 se per x opportunamente vicino a x_0, f(x) risulta vicino quanto vogliamo a $f(x_0)$"

GLI INTORNI

Siano $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$

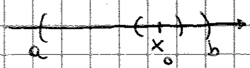
INTORNO simmetrico di x_0 e raggio δ è l'intervallo $(x_0-\delta, x_0+\delta)$



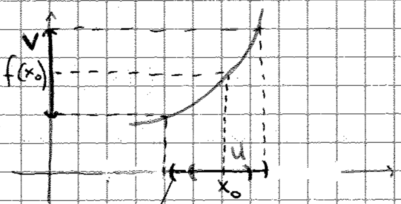
oss: $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \iff |x-x_0| < \delta$

oss: due intorni di uno stesso punto o coincidono o sono uno dentro l'altro:
$U_1 \cap U_2$ è ancora un intorno di x_0

oss: ogni intervallo aperto contenente x_0 contiene un intorno di x_0



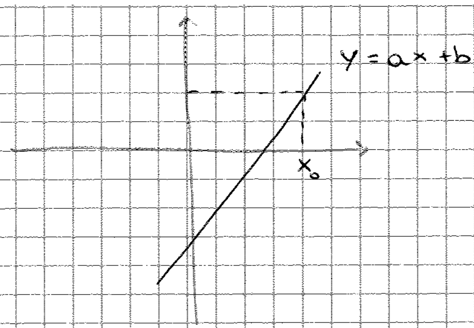
⇒ "Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$
f si dice continua nel punto x_0 se
per ogni intorno V di $f(x_0)$ esiste un intorno U di x_0 tale che se $x \in X \cap U$ allora $f(x) \in V$"



se $x \in U \to f(x) \in V$

è + grande U che posso prendere (che deve essere simmetrico) per far valere la definizione

⊛ $f(x) = ax + b$



Impongo $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\iff |ax + b - (ax_0 + b)| < \varepsilon$

$\iff |a(x - x_0)| < \varepsilon$

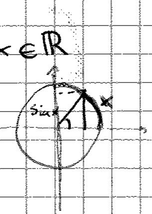
$\iff |x - x_0| < \dfrac{\varepsilon}{|a|}$ con $a \neq 0$

Quindi δ è qualsiasi valore $0 < \delta \leq \dfrac{\varepsilon}{|a|}$

→ la retta è sempre continua

⊛ $f(x) = \sin x$

impongo $|\sin(x)| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$ infatti:

- se $0 < x < \frac{\pi}{2}$  $\sin x < x$

- se $x \geq \frac{\pi}{2}$ $\quad |\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq x = |x|$

- se $x < 0$ utilizzando il modulo → $|\sin x| = |-\sin(-x)| = |\sin(-x)|$

in ogni caso $|\sin(-x)| \underset{-x>0}{\leq} |-x| = |x|$

Ok!

Proviamo che $\sin(x)$ è continua in $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\underline{|\sin(x) - \sin(x_0)|} = \left|2 \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)\right| =$$

... PROSTAFERESI ...

$$= 2 \left|\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)\right| \underbrace{\left|\cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)\right|}_{\text{è sempre} \leq 1}$$

$$\leq 2\left|\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)\right| \leq 2\left|\frac{x - x_0}{2}\right| = \underline{|x - x_0|}$$

disuguaglianza $|\sin x| < |x|$

$\Rightarrow$ ogni $0 < \delta \leq \varepsilon$ va bene

così se $|x - x_0| < \delta \Rightarrow \underline{|\sin(x) - \sin(x_0)|} \leq \underline{|x - x_0|} < \delta \leq \varepsilon$

cioè $|\sin(x) - \sin(x_0)| < \varepsilon$ ✓

[7] Limiti di Funzioni

$f: X \to \mathbb{R}$

Hp $\left[\begin{array}{l} x_0 \in \mathbb{R} \text{ tale che } \exists\, r>0: \\ (x_0-r, x_0) \cup (x_0, x_0+r) \subset X \end{array}\right.$ ← Intorno del punto x_0 senza x_0

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$

$\overset{def}{\iff}$

$\forall$ intorno V di l

$\exists$ intorno U di x_0 tale che $x \in U \cap X,\ x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \in V$

↳ non ci interessa cosa accade lì

OSS ▷ Funzioni continue
Se f è continua in x_0 allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Quindi sapendo che f è continua in x_0 il calcolo dei limiti è immediato

$$\lim_{x \to -1} x^3 = (-1)^3 = -1$$

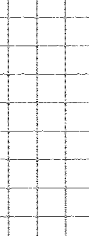
$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \lfloor x \rfloor = \left\lfloor \tfrac{1}{2} \right\rfloor = 0$$

TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE
"Il limite, se esiste, è unico" → $f(x)$ non può tendere a due limiti distinti per $x \to x_0$

se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$ allora $l_1 = l_2$

(cioè il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$, se esiste, è unico)

Dimostrazione (x assurdo): suppongo che $l_1 \neq l_2$



sia $\underset{\text{raggio}}{\varepsilon} \overset{def}{=} \frac{|l_2 - l_1|}{2}$ e siamo sicuri che

gli intervalli $V_1 = (l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon)$
$V_2 = (l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon)$
sono disgiunti

Allora $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \Rightarrow \exists$ intorno U_1 di x_0 tale che $x \in U_1 \cap X,\ x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \in V_1$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2 \Rightarrow \exists$ intorno U_2 di x_0 tale che se $x \in U_2 \cap X,\ x \neq \Rightarrow f(x) \in V_2$

$\underset{x \in X}{x \in U_1 \cap U_2} \Rightarrow f(x) \in \underbrace{V_1 \cap V_2}_{\text{ma è } \emptyset\,!}$ ASSURDO!

OSS "Traduzione" caso $x_0, \ell \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in X \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Esercizio:

a) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ scrivere la definizione di $\lim_{x \to +\infty} h(x) = \ell, \ \ell \in \mathbb{R}$

$\forall$ intorno V di $\ell \quad \exists$ intorno U di $+\infty$ t.c. se $x \in \overbrace{U \cap \mathbb{R}}^{U}$, ~~$x \neq +\infty$~~

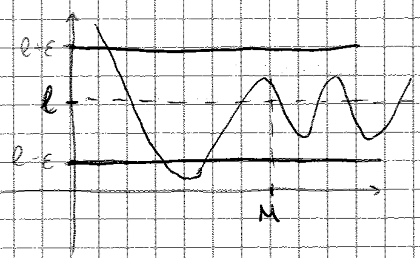
$\Rightarrow h(x) \in V$

oppure

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{R}$ tale che $x > M \Rightarrow |h(x) - \ell| < \varepsilon$

b) $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ strettamente positive e tali che $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

Dimostrare che $\ell > 1 \Rightarrow f(x) > g(x)$ in un intorno di $+\infty$



dato $\varepsilon > 0 \ \exists M > 0$:

$x > M \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > \underbrace{\ell - \varepsilon > 1}_{?}$

$\ell > 1$ molto piccolo

prendendo ε piccolo

p. es $\varepsilon \overset{def}{=} \frac{\ell - 1}{2}$

$\Rightarrow \ell - \varepsilon > 1$

Quindi

$\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - \ell$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \Rightarrow \exists M > 0 : \quad x > M \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > \ell - \varepsilon > 1$

$\Rightarrow f(x) > g(x) \quad \forall x > M$

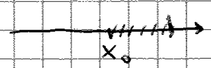
LIMITE DX e SX

Def: $x_0 \in \mathbb{R}, \ r > 0$

intorno destro di x_0 di raggio r

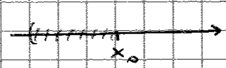
$(x_0, x_0 + r)$

non è un intorno simmetrico



intorno sinistro di x_0 di raggio r

$(x_0 - r, x_0)$



$\Rightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \overset{def}{\iff} \forall$ intorno V di ℓ
$\exists$ intorno destro di x_0 U^+ t.c. $x \in U^+ \cap X, \ x \neq x_0 \Rightarrow$
$f(x) \in V$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \overset{def}{\iff}$ - - - intorno sinistro ...

PUNTO DI ACCUMULAZIONE

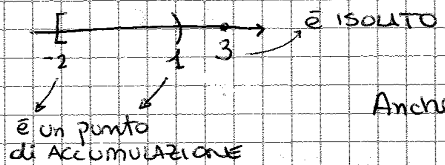
Def: $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ si dice punto di accumulazione per X se $\forall$ intorno di x_0 (U) si ha $X \cap (U \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$
(contiene almeno un punto $\neq$ da x_0)

OSS: x_0 di accumulazione per X
$\Rightarrow \forall$ intorno U di x_0 contiene infiniti punti di X

OSS: x_0 di accumulazione per X $\not\Rightarrow$ $x_0 \in X$

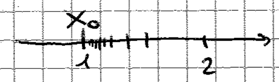
Def: Un punto che non sia di accumulazione ($x_0 \in X$) di un insieme, si dice <u>PUNTO ISOLATO</u>: cioè $\exists$ intorno U di x_0 tale che $U \cap X = \{x_0\}$ oppure che $(U \setminus \{x_0\}) \cap X = \emptyset$

es. • $X = [-2, 1) \cup \{3\}$



Anche $x \in (-2, 1) \Rightarrow$ è di ACCUMUL

• $X = \left\{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \neq 0\right\}$



$x_0 = 1 \rightarrow$ punto di ACCUMULAZIONE

Per dimostrarlo = $\forall \delta > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} : 1 + \frac{1}{n} \in (1-\delta, 1+$

Scriviamolo $1 + \frac{1}{n} < 1 + \delta$

$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\delta}$ ✓

OSS: se $\sup X = +\infty \Rightarrow x_0 = +\infty$ è di accumulazione per X
$\inf X = -\infty \Rightarrow x_0 = -\infty$ " " per X
$X = \mathbb{N}$ ha $+\infty$ come <u>unico</u> punto di accumulazione

Si può estendere la definizione di limite al caso x_0 punto di accumulazione per X:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \qquad x_0, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$$

↳ d'ora in poi lo consideriamo <u>punto di accumulazione</u>

Si dice che f ha limite ℓ, o tende a ℓ, per x che tende a x_0 se per ogni intorno V di ℓ esiste un intorno U di x_0 tale che, se $x \in U \cap X$, $x \neq x_0$ allora $f(x) \in V$

(Siano $x_0, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, e sia $f: X \to \mathbb{R}$ una funzione il cui dominio $X \subset \mathbb{R}$ abbia x_0 come punto di accumulazione

<u>OSS:</u> f continua in $x_0 \Rightarrow \exists$ intorno U di x_0 in cui $f(x)$ ha lo stesso segno di $f(x_0)$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

<u>OSS:</u> non vale viceversa!

$f(x)>0$ in un intorno di x_0, $x \neq x_0$ $\not\Rightarrow$ $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$

$\boxed{\text{infatti}}$ $f(x) = e^{-x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, (oppure $f(x)=x^2$)

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$

$\rightarrow$ Vale: $f(x)>0$ in un intorno di $x_0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) \geq 0$ (se esiste)

▶ TEOREMA DELLA LIMITATEZZA LOCALE

"Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ <u>esiste</u> ed è <u>finito</u> allora $\exists$ $M>0$ e $\exists$ intorno U di x_0 tale che $x \in U\cap X$, $x \neq x_0 \Rightarrow |f(x)|<M$
$[x_0 \in \overline{\mathbb{R}}]$ (ovvero $f(x)$ è limitata)

<u>DIM:</u> Sia $\varepsilon = 1$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \Rightarrow \exists$ intorno U di x_0 tale che $x \in U\cap X$, $x\neq x_0 \Rightarrow |f(x)-\ell|<1$

Sia $x \in U\cap X$, $x = x_0$

$$|f(x)| = |f(x)-\ell+\ell| \overset{\text{disug. triang.}}{\leq} |f(x)-\ell| + |\ell| < \underbrace{1+|\ell|}_{M}$$

aggiunti dopo

$\boxed{\forall}$

oppure $\ell-1 < f(x) < 1+\ell \Rightarrow f(x)$ limitata

▶ TEOREMA SULL'ALGEBRA DEI LIMITI

"Siano $f,g: X \to \mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$ con $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$.
Allora $[x_0 \in \overline{\mathbb{R}}]$

$\rightarrow \lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = \ell_1+\ell_2$

$\rightarrow \lim_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) = \ell_1 \cdot \ell_2$

Se $\ell_2 \neq 0$ $\rightarrow \lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$ (per la permanenza del segno)

<u>OSS:</u> dal teorema precedente segue $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha\ell_1 + \beta\ell_2$$

<u>OSS:</u> f e g continue in $x_0 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ combinazion lineare di f e g ($f\cdot g$ e $f+g$) $\Big\}$ <u>sono continue in x_0</u>

se $g(x_0)\neq 0 \Rightarrow \dfrac{f}{g}$ è continua in x_0

• Quindi Polinomi e funz. razionali sono continue rispettivamente in $\mathbb{R}$ e nel dominio (dove non si annulla il denominatore).

LIMITI

• $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

[INTORNI] ⇒ Per ogni intorno **V** di ∞ esiste un intorno **U** di ∞ tale che, se $x \in U$, allora $f(x) \in V$

$\Leftrightarrow \forall I_V(\infty) \exists I_U(\infty) / \forall x \in I_U(\infty) \Rightarrow f(x) \in I_V(\infty)$

$I_V(\infty) = (-\infty, -K)$ oppure $(K, +\infty)$ → $|f(x)| > K$ con $K>0$

$I_U(\infty) = (-\infty, -M)$ oppure $(M, +\infty)$ → $|x| > M$ con $M>0$

[SIMBOLI]

$\forall K>0 \ \exists M>0 / \forall x \in X: |x| > M \Rightarrow |f(x)| > K$

• $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

[INTORNI] ⇒ Per ogni intorno **V** di **0** esiste un intorno **U** di ∞ tale che, se $x \in U$, allora $f(x) \in V$

$\Leftrightarrow \forall I_V(0) \exists I_U(\infty) / \forall x \in I_U(\infty) \Rightarrow f(x) \in I_V(0)$

$I_V(0) = (0-\varepsilon, 0+\varepsilon)$

$I_U(\infty) = (-\infty, -M)$ oppure $(M, +\infty)$ → $|x| > M$ con $M>0$

[SIMBOLI]

$\forall \varepsilon>0 \ \exists M>0 / \forall x \in X: |x| > M \Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon$

$(+\infty)$ $x > M$ $\quad$ 0^- $\quad -\varepsilon < f(x) - 0 < 0$

$(-\infty)$ $x < -M$ $\quad$ 0^+ $\quad 0 < f(x) - 0 < \varepsilon$

es $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$ ⇒ obiettivo: avere la stessa forma con x per uguagliare δ e ε !

dal pezzo con δ

dall'ultimo pezzo

Forme Indeterminate

Non si risolvono con l'algebra dei limiti, ci vogliono ulteriori informazioni

Somma: $+\infty - \infty$ o $-\infty + \infty$

Prodotto: $0 \cdot \infty$

Quoziente: $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$

▷ limiti all'∞ di polinomi:

$$\lim_{x \to +\infty} a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = \text{raccolgo il grado massimo} =$$

$n \geq 1$, $a_n \neq 0$

$$= \lim_{x \to +\infty} x^n \Big(a_n + \underbrace{\frac{a_{n-1} \cdot x^{\cancel{n-1}}}{x^{\cancel{n}}} \dots}_{0} + \underbrace{\frac{a_1 \cancel{x}}{x^{\cancel{n}\, n-1}}}_{0} + \underbrace{\frac{a_0}{x^n}}_{0} \Big) =$$

↓ in definitiva

$$= \lim_{x \to +\infty} x^n a_n = a_n \lim_{x \to +\infty} x^n = \pm\infty$$

↳ lo stesso segno di a_n

▷ limiti all'∞ di funzioni razionali $\frac{P(x)}{Q(x)} \longrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ b_m \neq 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0} = \text{raccolgo} \dots =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \text{se } n = m \to \text{rapporto coeff.} \\ \text{se } m < n \to \pm\text{infinito} \\ \text{se } n < m \to \text{zero} \end{cases}$$

ESERCIZIO

... per farli diventare dei polinomi ...

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \sqrt{1-x^2})(1 + \sqrt{1-x^2})}{x^2 (1 + \sqrt{1-x^2})} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - (1 - x^2)}{x^2 (1 + \sqrt{1-x^2})} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + \sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}$$

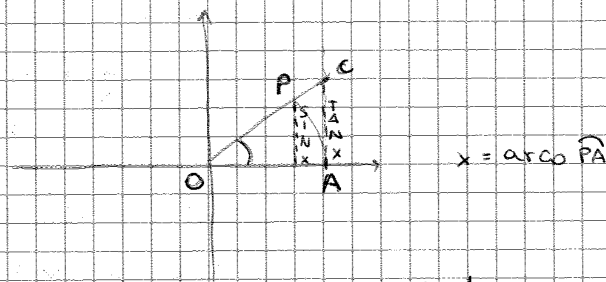
esempio: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ f.i. $\frac{0}{0}$

$f(x)$ è pari!

$f(-x) = f(x)$

$\Rightarrow$ è sufficiente calcolare $\left[\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x}\right]$

Vale: per $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $\underbrace{\sin x < x < \tan(x)}_{\text{già visto}}$



area settore OAP $= \frac{x \cdot 1}{2}$

area triangolo $O\hat{A}C = \frac{\tan x \cdot 1}{2}$

$\Rightarrow$ $\frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2}$ cioè $x < \tan x$

Quindi $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $\sin x < x < \tan x$

dividido tutto x sin x (sempre positivo)

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$$

Quindi per $0 < x < \frac{\pi}{2}$: $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$

$x \to 0^+$: $1 \to 1$, $\frac{1}{\cos x} \to 1$

APPLICO IL TEOREMA DEL CONFRONTO

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1}$$

Possiamo concludere che per l'algebra dei limiti $\Rightarrow$ $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$

Dato che il seno

$\Rightarrow$ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

esempio: $\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ (non ammette limite!)

... Posso usare la conseguenza del teorema

$x \to 0$

$-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1 \quad \forall x \neq 0$ $\qquad x$ = infinitesima

limitato

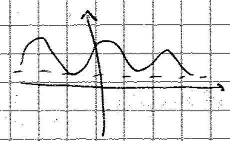
esempio $\lim_{x \to +\infty} \left(x + x^3(1 - \sin x)\right) =$

$x \to +\infty$

$x^3(1 - \sin x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$

limitata inferiormente

esempio $\lim_{x \to +\infty} x^2 \underbrace{(2 + \cos x)}_{\text{non ammette limite}}$ → ma esso è sempre ≥ 1



$2 + \cos x \geq 1$

$x^2(2 + \cos x) \geq x^2$ ⟹ Per il teorema del confronto (per gli infiniti) $\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} x^2(2+\cos x) = +\infty$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$+\infty \qquad\quad +\infty$

LIMITI DI FUNZIONI COMPOSTE

$f: X \to \mathbb{R}, \quad g: Y \to \mathbb{R}$ con $f(X) \subseteq Y \qquad x_0 \in \overline{\mathbb{R}}, \; y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

▷ Teorema 1

esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$, $f(x) \neq y_0$
g continua in y_0

$\Rightarrow$ Allora $\exists \lim_{x \to x_0} g(f(x))$ e vale

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(y_0) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)$$

$$= \lim_{y \to y_0} g(y)$$

$y = f(x)$ cambio variabile

DIM:

Ths $= \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(y_0)$

g continua in $y_0 \Rightarrow \forall$ intorno W di $g(y_0)$ $\exists$ intorno V di y_0 tale che $y \in V \cap Y \Rightarrow g(y) \in W$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \Rightarrow \exists$ intorno U di x_0 tale che $x \in U \cap X, x \neq x_0$
$\Rightarrow f(x) \in V \cap Y \quad (f(X) \subseteq Y)$

$\Rightarrow g(f(x)) \in W$

Cioè $\forall$ intorno W di $g(y_0)$ abbiamo trovato U intorno di x_0 tale che $x \in U \cap X$, $x \neq x_0 \Rightarrow g(f(x)) \in W$

cioè $\lim g(f(x)) = g(y_0)$ ▯

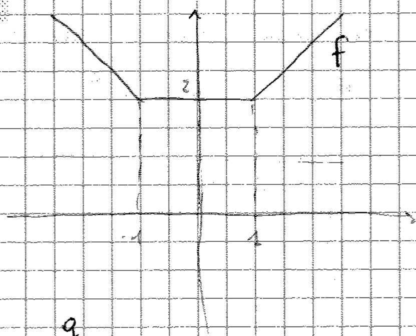
▷ Teorema 2

Supponiamo:

$$\begin{cases} \lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \\ f(x) \neq y_0 \quad \forall x \in X \setminus \{x_0\} \\ \exists \lim_{y \to y_0} g(y) \text{ in } \overline{\mathbb{R}} \end{cases}$$

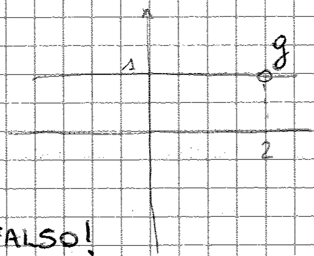
Allora $\exists \lim_{x \to x_0} g(f(x))$ e vale

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y)}$$



esempio $\quad f(x) = |x+1| + |x-1|$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x > 1 \\ 2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ -2x & \text{se } x < -1 \end{cases}$$



$g(x) = |\operatorname{sign}(x-2)|$

$$\lim_{x \to 0} g(f(x)) = \lim_{y \to 2} g(y) = 1 \quad \text{FALSO!}$$

$\{y_0 = f(x)\}$

$$\lim_{x \to 0} g(f(x)) = \lim_{x \to 0} g(2) = 0$$

LIMITI NOTEVOLI

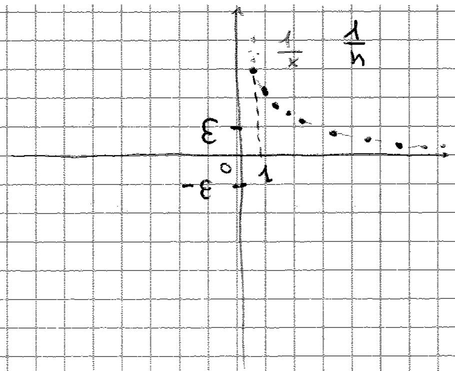
▷ $$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y \to 0} \underbrace{\frac{y}{\sin y}}_{\text{l.n.}} = 1$$

$y = \arcsin x$

▷ $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2 (1+\cos x)} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{\cos x + 1} \to \frac{1}{2}$$

esempio $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$



$a_n = \frac{1}{n}$ $n_0 = 1$

DIMOSTRARLO!

Sia $\varepsilon > 0$

Cerchiamo $\bar{n} \in \mathbb{N}$: $n > \bar{n}$ ($n \geq n_0$) $\Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ $\quad \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ (sempre +) $\quad \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$

Qualunque $\bar{n} \in \mathbb{N}$ $\bar{n} > \frac{1}{\varepsilon}$ $\rightarrow$ c'è sempre $n > \bar{n}$ per il quale vale la proprietà!

ovvero $\forall n > \bar{n}$ si ha $n > \bar{n} > \frac{1}{\varepsilon}$ cioè $n > \frac{1}{\varepsilon}$ cioè $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Quindi vale $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

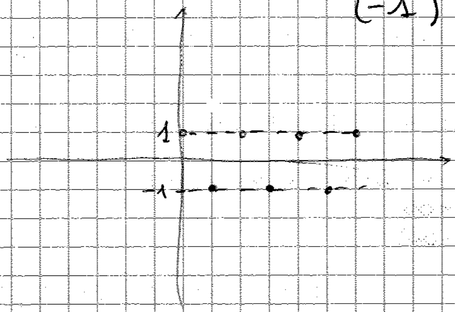
☑

ESEMPIO $\lim_{n \to +\infty} \cos(n\pi) \Longleftrightarrow \lim_{n \to +\infty} (-1)^n$

$a_0 = \cos(0) = 1$
$a_1 = \cos(\pi) = -1$
$a_2 = \cos(2\pi) = 1$
$a_3 = \cos(3\pi) = -1$

$\Rightarrow$ è come la successione $(-1)^n$

il limite non c'è



TEOREMA

Sia $f : [n_0, +\infty) \to \mathbb{R}$

Sia $a_n = f(n)$ (f calcolata nei naturali) $n \in \mathbb{N}, n > n_0$

Allora $\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$

OSS: si applicano ai limiti di successioni tutti i risultati visti per i limiti di funzioni

TEOREMA DI RELAZIONE

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad , [\ell \in \overline{\mathbb{R}}] \qquad [x_0 \in \overline{\mathbb{R}}]$$

$$\Updownarrow$$

Per ogni successione $a_n \to x_0$, $a_n \neq x_0$ per ogni n, risulta $f(a_n) \to \ell$

Si collega al limite delle restrizioni (che abbiamo usato per dimostrare che un limite non esiste)

Corollario Se f continua in x_0, $a_n \to x_0$ $\Big\}$ $\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = f(x_0) = f\left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right)$

(caso particolare)

esempio $\lim_{n \to +\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ funz. seno applicata alla successione $\frac{1}{n}$

$f(x) = \sin x$ è continua in 0

$a_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Quindi

$$\lim_{n \to +\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \sin\left(\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\right) = \sin 0 = 0$$

esempio $\lim_{n \to +\infty} \frac{n - 2n^2}{n+1} = -\infty$

Deriva dai razionali $\to \lim_{x \to +\infty} \frac{x - 2x^2}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x^2}{x} = -\infty$

esercizio

$$\lim_{n \to +\infty} n^4\left(3\sin^2\left(\frac{1}{3n^2}\right) + \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1\right) =$$

limiti notevoli!

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{3n^4 \sin^2\left(\frac{1}{3n^2}\right)}{\left(\frac{1}{3n^2}\right)^2} \cdot \frac{1}{(3n^2)^2} + \cancel{n^4} \frac{\cos\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1}{\left(\frac{1}{n^2}\right)^2} \left(\frac{1}{\cancel{n^2}}\right)^2 =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{3} \underbrace{\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{3n^2}\right)}{\frac{1}{3n^2}}\right)^2}_{1} + \underbrace{\frac{\cos\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1}{\left(\frac{1}{n^2}\right)^2}}_{\frac{1}{2}} \right] =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

[11] Successioni Monotone . Sottosuccessioni

Def SUCCESSIONI MONOTONE

Una successione si dice crescente (risp. strettamente crescente)

se $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n$

$(a_n < a_{n+1}) \rightarrow$ strettamente

Una successione si dice decrescente (risp. strettamente decrescente)

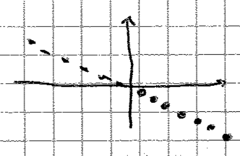
Se $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n$

$(a_n > a_{n+1})$

Una successione si dice monotona se è (strettamente) crescente o (strettamente) decrescente

esempio
- $1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 \rightarrow$ è una succ. crescente
- $a_n = -n$

Viene dalla funzione $-x$



$a_n \overset{?}{>} a_{n+1}$

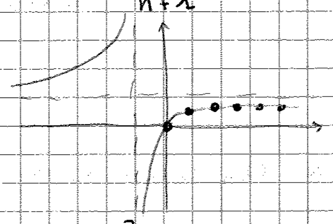
$-n > -(n+1) \iff 0 > -1$ ✓

$\Rightarrow a_n$ è una successione strettamente decrescente

- $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

$$\frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$y = 1 - \dfrac{1}{x+1}$



{verifica} $\rightarrow \quad a_n \overset{?}{<} a_{n+1}$

$$1 - \frac{1}{n+1} \overset{?}{<} 1 - \frac{1}{n+2} \iff \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}$$

$$\iff n+1 < n+2 \iff 1 < 2$$

$\Rightarrow a_n$ è strettamente crescente

le successioni costanti sono sia crescenti che decrescenti, ma mai in senso stretto

TEOREMA $\quad e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \forall n \geq 1$

Allora e_n converge a un numero compreso tra 2 e 3

Cenno DIMOSTRAZIONE:

* $e_n < e_{n+1}$ * per $n=1$ $\quad e_1 = 2 < e_n < 3$

Per il teorema visto prima, ammette limite!

Def: numero di Nepero

$$\boxed{e \stackrel{def}{=} \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

Criterio del rapporto per le successioni

$a_n > 0 \quad \forall n \qquad [\ell \in \bar{\mathbb{R}}]$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$$

(quindi ammette limite)

Allora > se $\ell < 1 \Rightarrow$ la successione (a_n) è decrescente e tende a zero $(a_{n+1} \leq a_n)$

> se $\ell > 1 \Rightarrow$ la successione (a_n) è crescente e tende a ∞ $(a_{n+1} > a_n)$

> se $\ell = 1 \rightarrow$ il criterio non ci da' una risposta $(a_{n+1} = a_n)$

Esempio

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty \quad a > 1, \ k > 0$$

Proviamo col criterio del rapporto:

$$\left[b_n = \frac{a^n}{n^k}\right] \qquad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)^k} \cdot \frac{n^k}{\cancel{a^n}} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^k \xrightarrow[n \to +\infty]{} a > 1$$

$\Rightarrow b_n$ è crescente e $b_n \to +\infty$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{a^n}{n^k} \to +\infty}$$

Esempio $\quad \lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty \quad a > 1$

proviamo col criterio del rapporto:

$$\left[b_n = \frac{n!}{a^n}\right] \Rightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)!}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{n!} = \frac{\cancel{(n!)}(n+1)}{\cancel{a^{n+1}}} \cdot \frac{\cancel{a^n}}{\cancel{n!}} =$$

$$= \frac{(n+1)}{a} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

$\Rightarrow b_n$ è crescente

$$\Rightarrow \boxed{\frac{n!}{a^n} \to +\infty}$$

$$c_k \to \ell_1 \qquad d_k \to \ell_2 \qquad d_k - c_k = \frac{d-c}{2^k} \to 0 \Rightarrow \ell_1 = \ell_2$$

<u>Esempio</u> $a_n = \sqrt{n+1} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ <u>non è regolare</u> → non ammette limite

Per dimostrare estraggo 2 sottosucc che tendono a 2 valori ≠

- $n_k = k^2$: $a_{n_k} = \sqrt{k^2+1} - \underbrace{\lfloor \sqrt{k^2} \rfloor}_{=k}$

$$\lim_{k \to +\infty} \sqrt{k^2+1} - k \qquad \frac{\infty}{\infty} \text{ f.i.}$$

razionalizzo... $\to = \lim_{k \to +\infty} \frac{(\sqrt{k^2+1} - k)(\sqrt{k^2+1} + k)}{\sqrt{k^2+1} + k} =$

$$= \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2+1} + k} = 0$$

- $n_k = k^2 - 1 \Rightarrow b_{n_k} = \sqrt{k^2-1+1} - \lfloor \sqrt{k^2-1} \rfloor$

$$= k - \underbrace{\lfloor \sqrt{k^2-1} \rfloor}_{= k-1}$$

$$(k-1)^2 \leq k^2 - 1 < k^2 \qquad \forall k \geq 1$$

Dimostro... $k^2 - 2k + 1 \leq k^2 - 1$
$2 \leq 2k$
$k \geq 1$

$$\Rightarrow \sqrt{(k-1)^2} \leq \sqrt{k^2-1} < \sqrt{k^2}$$

$$k - 1 \leq \sqrt{k^2-1} < k$$

$\Rightarrow \lfloor \sqrt{k^2-1} \rfloor = k - 1$ poiché si era detto che $\sqrt{k^2-1}$ è compreso tra $k-1$ e k → quindi la sua parte intera è il num. intero + piccolo

Quindi $b_{n_k} \to 1$ e $\lim_{n \to +\infty}$ <u>non esiste</u>

③ $\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

cambio variabile

si pone $y = -x-1 \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$ $\quad \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1+\frac{1}{y}\right)^y \left(1+\frac{1}{y}\right) \xrightarrow[y \to +\infty]{} e \cdot 1 = e$

④ $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

cambio variabile $y = \frac{1}{x}$ e si usano ② e ③

⑤ $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a \quad a \in \mathbb{R}$

$y = \frac{x}{a} \Rightarrow \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^a$

⑥ $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

$$\frac{\log(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\log(1+x) = \log(1+x)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to 0]{} \log e = 1$$

$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \qquad (a>0, a \neq 1)$

si usa $\log_a(1+x) = \log(1+x) \cdot \log_a e$ (cambiamento di base) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

⑦ $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

cambio variabile $y = e^x - 1 \Rightarrow y+1 = e^x \Rightarrow x = \log(1+y)$

$$\frac{e^x-1}{x} = \frac{y}{\log(1+y)} \xrightarrow[y \to 0]{(\log(1+y))^{-1}} 1$$

$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a \quad$ con $a \neq e$ e $a > 0$ e $a \neq 1$

$y = a^x - 1 \Rightarrow x = \log_a(1+y)$ (cambio base!)

$$\frac{a^x-1}{x} = \frac{y}{\log_a(1+y)} \xrightarrow[y \to 0]{(\log_a e)^{-1}} \frac{1}{\log_a e} = \frac{\log_a a}{\log_a e} = \log a$$

⑧ $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \underbrace{\frac{(1+x)^\alpha - 1}{\log(1+x)}}_{x \to 0 \;\; \alpha} \cdot \underbrace{\frac{\log(1+x)}{x}}_{1 \text{ per } x \to 0}$$

$y = (1+x)^\alpha - 1$

$1+y = (1+x)^\alpha \Rightarrow \log(1+y) = \log(1+x)^\alpha = \log(1+x) \cdot \alpha$

ESERCIZI

- $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(2x)}{\sin(x^2)} = 2$

Con l'algebra dei limiti non si risolve $\rightarrow \dfrac{1-\cos(2x)}{\sin(x^2)} = \underbrace{\dfrac{1-\cos(2x)}{(2x)^2}}_{\to \frac{1}{2}} \underbrace{\dfrac{4x^2}{\sin(x^2)}}_{\to 4}$

Quindi per $x \to 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$

- $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(5x^2-3x+2^x)}{\sin(3x)}$ $\quad \frac{0}{0}$ f.i.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(5x^2-3x+2^x)}{\sin(3x)\cdot\frac{3x}{3x}} = \underbrace{\frac{3x}{\sin(3x)}}_{\to 1} \frac{\log(5x^2-3x+2^x)}{3x} = \text{aggiungo e tolgo } 1 =$$

$$= \frac{\log(\overbrace{5x^2-3x+2^x-1}^{x\to 0}+1)}{3x} = \frac{\log(\overbrace{5x^2-3x+2^x-1}^{y}+1)}{3x\underbrace{(5x^2-3x+2^x-1)}_{y\to 0}} \cdot (5x^2-3x+2^x-1)$$

$$\left[\frac{\log(1+x)}{x}\right]$$

$$= \frac{5x^2-3x+2^x-1}{3x} = \cancel{x(5x-3)} \quad \frac{x}{3x}\left(5x-3+\frac{2^x-1}{x}\right) =$$

$$\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{3}\left(5x-3+\underbrace{\frac{2^x-1}{x}}_{\text{limite notevole}}\right) \longrightarrow \frac{1}{3}(-3+\log 2)$$

$$f(x) = \frac{3x}{\sin(x)} \cdot \frac{\log(1+5x^2-3x+2^x-1)}{5x^2-3x+2^x-1} \; \frac{1}{3x}\left(5x-3+\frac{2^x-1}{x}\right)$$

$$\longrightarrow 1\cdot 1\cdot \frac{1}{3}(-3+\log 2) = -1+\frac{1}{3}\log 2$$

- $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$ $\quad \infty^0$ f.i.

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = e^{\sin x \cdot \log\frac{1}{x}} = e^{-\sin x \log x}$$

$$-\sin x \log x = -\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \underbrace{\log x \cdot x}_{\to 0} = 0 \quad \text{(11) l.n.}$$

Quindi $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x} = e^0 = 1$

SIMBOLI DI LANDAU

f, g def in un intorno di $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, t.c. $\frac{f(x)}{g(x)}$ abbia senso. $(g(x) \neq 0)$

caso particolare di

- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ allora f e g sono dello stesso ordine per $x \to x_0$

  e si scrive $f \asymp g$ per $x \to x_0$

- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ allora

  f e g sono equivalenti per $x \to x_0$ e si scrive
  $f \sim g$ per $x \to x_0$

- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ allora

  f è un "o-piccolo" di g per $x \to x_0$ e si scrive $f = o(g)$ per $x \to x_0$

CASO GENERALE!

- se $\exists$ intorno U di x_0, $\exists$ $M > 0$ (costante) tale che $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq M$ $\forall x \in U \setminus \{x_0\}$
  allora f è un "O-grande" di g per $x \to x_0$
  e si scrive $f = O(g)$ per $x \to x_0$

esempi

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$
$\Rightarrow \log(1+x) \sim x$ per $x \to 0$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{\log\left(1+\frac{x}{2}\right)}{2 \cdot \frac{x}{2}} = \frac{1}{2}$
$\Rightarrow \log\left(1+\frac{x}{2}\right) \asymp x$ per $x \to 0$

3) $\lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\log(1+x^2)}{x \cdot x}}_{\to 1} \cdot x = 0$
$\Rightarrow f = o(g) \Rightarrow \log(1+x^2) = o(x)$ per $x \to 0$

$\log(1+x) \sim x$ per $x \to 0$
$\sin x \sim x$ per $x \to 0$

$\sin x = o(\tan x)$ per $x \to \frac{\pi}{2}$

esempio: $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$1 - \cos x \asymp x^2$ per $x \to 0$

$1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2$ per $x \to 0$

PROPRIETÀ

$f = o(1)$ per $x \to x_0$

$\Rightarrow$ "f è infinitesima per $x \to x_0$"

Infatti: $f = o(1)$ per $x \to x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{1} = 0$

PROPRIETÀ di $\sim$:

▷ RIFLESSIVA $f \sim f \rightarrow \frac{f(x)}{f(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 1$

▷ SIMMETRICA $f \sim g \Leftrightarrow g \sim f$

$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 1 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{f(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 1 \Leftrightarrow \underset{x \to x_0}{g \sim f}$

▷ TRANSITIVA $f \sim g$, $g \sim h \Rightarrow f \sim h$ per $x \to x_0$

$\frac{f(x)}{h(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 1$ per dimostrare questo:

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{h(x)} = 1$

moltiplico e divido

PROPRIETÀ di $\asymp$ (analoghe)

PROPRIETÀ di "o-piccolo"

▷ RIFLESSIVA NO $\cancel{f = o(f)}$

▷ SIMMETRICA NO $\cancel{f = o(g) \overset{?}{\Rightarrow} g = o(f)}$

▷ TRANSITIVA

$f = o(g)$, $g = o(h) \overset{?}{\Rightarrow} f = o(h)$ per $x \to x_0$

$\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{f}{g} \cdot \frac{g}{h} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ ✓

$\rightarrow 0 \quad \rightarrow 0$

• $f \sim g$ per $x \to x_0 \Leftrightarrow f = \underbrace{g}_{\text{p.p.}} + o(g)$ per $x \to x_0$

DIM $f \sim g$ per $x \to x_0$

$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0 \rightarrow$ mi sta dicendo... $\rightarrow f - g = o(g)$ per $x \to x_0$

$\Leftrightarrow f = g + o(g)$ per $x \to x_0$

Def = f, g siano 2 infiniti per $x \to x_0$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

- f è un infinito di ordine inferiore a g se
  $f = o(g)$ per $x \to x_0$ "$\frac{f}{g} \to 0$"
- f è un infinito di ordine superiore a g se
  $g = o(f)$ per $x \to x_0$ "$\frac{f}{g} \to \infty$"
- f e g sono infiniti dello stesso ordine se
  $f \asymp g$ per $x \to x_0$ "$\frac{f}{g} \to \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$"

Altrimenti f e g si dicono infiniti non confrontabili per $x \to x_0$

Def = f, g siano due infinitesime per $x \to x_0$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

- f è un infinitesimo di ordine superiore a g se:
  $f = o(g)$ per $x \to x_0$
- f è un infinitesimo di ordine inferiore a g se:
  $g = o(f)$ per $x \to x_0$
- f e g sono infinitesimi dello stesso ordine se
  $f \asymp g$ per $x \to x_0$

Altrimenti f e g si dicono infinitesimi non confrontabili per $x \to x_0$

ORDINE DEGLI INFINITI

Sia $\varphi(x)$ un infinito (infinitesimo) per $x \to x_0$ $\varphi(x) \neq 0$
Si dice che f è un infinito (infinitesimo) di ordine α rispetto all'infinito campione $\varphi(x)$ se:

FINITO NON NULLO

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)^\alpha} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ORDINE DI INFINITO

o anche $f(x) \sim \ell\, \varphi(x)^\alpha$

oppure:

$$f(x) = \ell \varphi(x)^\alpha + o(\varphi(x)^\alpha)$$

PARTE PRINCIPALE di f rispetto a φ

p.p è $\ell \cdot \varphi(x)^\alpha$

es. $\sin(x^2) \to 0$ per $x \to 0$ è un infinitesimo

prendo $\varphi = x$

con i limiti notevoli... $\sin(x^2) = \underbrace{x^{2}}_{\text{p.p}} + o(x^2)$ ORDINE

p.p rispetto all'infinitesimo x

ESEMPIO

$$\lim_{x\to+\infty} e^x\left(\underbrace{\log(1+\overset{+\infty}{e^{2x}})}_{\substack{\text{TRUCCO!}\\ (\text{raccolgo } e^{2x})}}-2x\right) \quad \text{f.i.}$$

$$\log(1+e^{2x}) = \log\left(e^{2x}(e^{-2x}+1)\right) = 2x+\log(1+\underbrace{e^{-2x}}_{0 \text{ per } x\to+\infty}) =$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\log(1+t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1 \qquad t=e^{-2x} \\ \qquad\qquad\qquad \text{LIMITE NOTEVOLE} \\ \log(1+t) \underset{t\to 0}{=} t+o(t) \end{array}\right\} \longrightarrow \underset{\text{per } x\to+\infty}{=} 2x+e^{-2x}+o(e^{-2x})$$

QUINDI $\quad e^x\left(\log(1+e^{2x})-2x\right) \underset{\text{per } x\to+\infty}{=} e^x\left(\cancel{2x}+e^{-2x}+o(e^{-2x})-\cancel{2x}\right) =$

$$= e^x\left(e^{-2x}+\underbrace{o(e^{-2x})}_{\text{si elimina}}\right) \quad (\text{in un intorno di } +\infty)$$

Per teorema degli elementi trascurabili: ... $\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

▷ Cioè abbiamo ottenuto

$$\lim_{x\to+\infty} e^x\left(\log(1+e^{2x})-2x\right) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{e^x\cdot e^{-2x}}_{=e^{-x}} = 0$$

ESERCIZIO $\quad 3\times 2$ offerta supermercato

Scrivere la successione $\quad \underset{\substack{n \text{ pezzi}\\ \text{che prendo}}}{n} \longrightarrow \underset{\substack{n \text{ pezzi}\\ \text{che pago}}}{a_n}$

1 → 1   0 R 1
2 → 2   0 R 2
3 → 2   1 R 0
4 → 3   3+2   4:3   1 R=1 → PAGHI 3
5 →   3+2   5:3   1 R=2 → PAGHI 4
6 →   6:3 = 2   2 R=0 → PAGHI 4
7 →   7:3 = 2   2 R=1 → PAGHI 5

$$a_n = \frac{n}{3} + \text{resto}\left(\frac{n}{3}\right) - $$

$(n - k)$

- $\dfrac{n}{3}$ (se è divisibile x 3)
- $\dfrac{n-1}{3}$ (se non è divisibile
- $\dfrac{n-2}{3}$ (se

ESERCIZIO $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x + o(x) - x - o(x)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\overbrace{o(x)}^{\text{può essere tante cose } (x^2, x^3 \ldots)}}{x^3} \quad ?$$

SIAMO FRITTI

MA NOI SCRIVIAMO TANX come $\boxed{\frac{\sin x}{\cos x}}$!

$$\sin x - \tan x = \sin x - \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x \left(1 - \frac{1}{\cos x}\right)$$

ora sviluppiamo...

$$= \underbrace{\frac{\sin x}{\cos x}}_{\tan x = x + o(x)} (\cos x - 1) = \frac{(x + o(x))\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{\cancel{\cos x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{(x + o(x))\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^3}{2}}{x^3} = -\frac{1}{2}$$

ESERCIZIO $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \log(1+x)}{x^2}$

$$\frac{\log(1+x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1 \Rightarrow \log(1+x) = x + o(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \log(1+x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x + o(x) - x - o(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\overbrace{o(x)}^{?}}{x^2} \quad ?$$

...SVILUPPI DI TAYLOR...

ESERCIZIO Provare che...

- $o(x^2) + o(x^5) = \underbrace{o(x^2)}_{\text{se divido per } x^2 \text{ tende a zero}}$ per $x \to 0$

$$\frac{o(x^2) + o(x^5)}{x^2} = \underbrace{\frac{o(x^2)}{x^2}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{o(x^5)}{x^5}}_{\to 0} \underbrace{\frac{x^5}{x^2}}_{x^3 \to 0} \to 0$$

- $o\left(-\frac{1}{2} x^3\right) = o(x^3)$: devo dimostrare che x^3 va a zero per $x \to 0$

$$\frac{o\left(-\frac{1}{2} x^3\right)}{x^3} = \underbrace{\frac{o\left(-\frac{1}{2} x^3\right)}{-\frac{1}{2} x^3}}_{\to 0} \left(-\frac{1}{2}\right) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

→ Quindi un coeff davanti alla x si può omettere

[14] MAX E MIN; Teorema di Weierstrass

Richiamo: $f: X \to \mathbb{R}$

valore massimo di $f = \max\limits_{x \in X} f(x) \overset{def}{=} \max f(X)$

valore minimo di $f = \min\limits_{x \in X} f(x) \overset{def}{=} \min f(X)$

PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO o GLOBALE

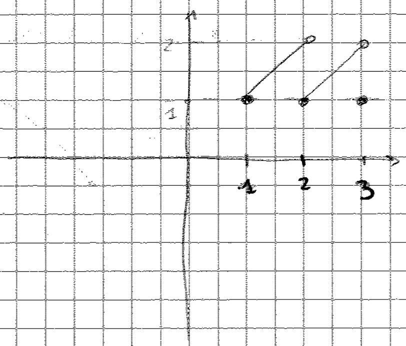
$x \in X : f(x) = \max\limits_{x \in X} f(x)$

Punto del Dominio la cui immagine corrisponde al valore max $f(x)$

PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO o GLOBALE

$x \in X : f(x) = \min\limits_{x \in X} f(x)$

Punto del Dominio la cui immagine corrisponde al valore min $f(X)$



es $f: [1,3] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 1 + M(x)$

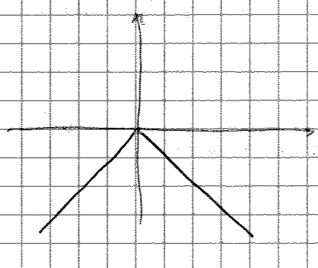
$f([1,3]) = [1,2)$

Quindi $f(x)$ ammette minimo $= 1$
ma non massimo

$\min\limits_{x \in [1,3]} f(x) = 1$, $\quad \max\limits_{x \in [1,3]} f(x) \nexists$

PUNTI DI MINIMO: $\{1, 2, 3\}$

es $f(x) = -|x|$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Non c'è il min ma c'è il max

$f(\mathbb{R}) = (-\infty, 0]$

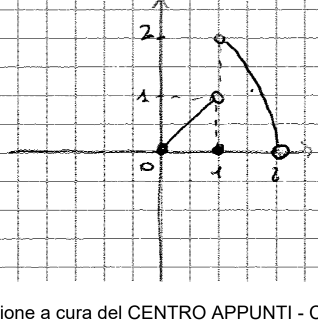
$\Rightarrow \min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) \nexists$ $\quad \max\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$

PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO: $x = 0$

es
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \\ 2 - \frac{x^2}{2} & \text{se } 1 < x < 2 \end{cases}$$

D: $0 \le x < 2$

$f: [0,2) \to \mathbb{R}$



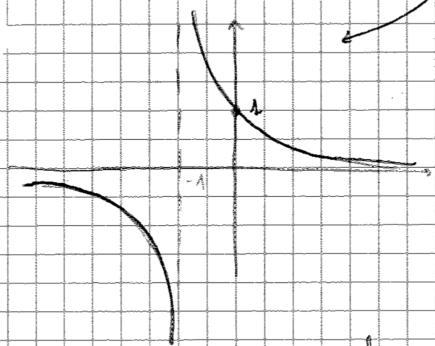
$f([0,2)) = [0, \frac{3}{2})$

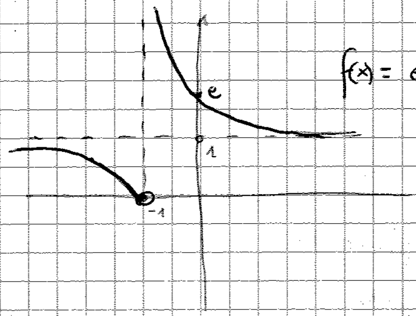
$\Rightarrow \min\limits_{x \in [0,2)} f(x) = 0$ $\quad \max \nexists$

PUNTI DI MINIMO: $x = 0, x = 1$

ESERCIZIO

- $f(x) = e^{\frac{1}{1+x}}$





Si applica il teorema di Weierstrass in $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$? SI $\quad f: \left[-\frac{1}{2}, 2\right] \to \mathbb{R}$ è continua e l'intervallo è chiuso e limitato

- $$\tilde{f}(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{1+x}} & \text{se } x \neq -1 \\ 0 & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

Si applica il teorema di Weierstrass in $[-1, 0]$? NO $\quad f(x)$ non è continua in $[-1, 0]$

Si applica il teorema di Weierstrass in $[-2, -1]$? SI $\quad f(x)$ è continua e l'intervallo è chiuso e limitato

[15] Teorema dei valori intermedi; Continuità della funzione inversa

x_0 è uno zero di una funzione se $f(x_0) = 0$

OSS $\quad P_n$ polinomio di grado n

$n = 2, 3, 4 \quad \exists$ algoritmo per risolvere $P_n(x) = 0$

$n \geq 5 \quad \nexists$

In generale $\nexists$ formule precise risolutive per $f(x) = 0$

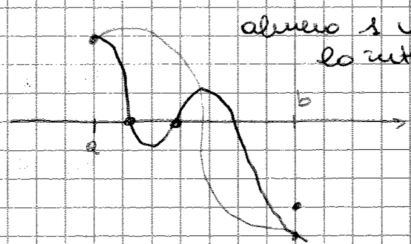
TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI

$f: [a, b] \to \mathbb{R}$

f continua su $[a, b]$

$f(a) \cdot f(b) < 0 \quad \to$ a e b hanno segno opposto

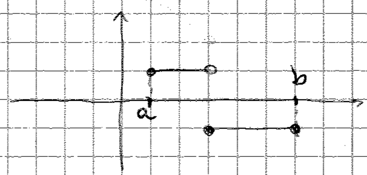
$\Rightarrow \exists\, x_0 \in (a, b) : f(x_0) = 0$



OSS: il metodo di bisezione si usa per approssimare con un errore $\leq \frac{b-a}{2n}$ il valore di x_0

Se togliamo una delle ipotesi...
Il teorema non è detto che sia vero

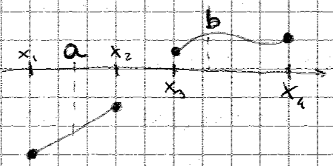
- $f: [a,b] \to \mathbb{R}$
  $f(a)\,f(b) < 0$
  No continua
  $\Rightarrow$



NON VALE!

- $f: X \to \mathbb{R}$ (No intervallo)
  f continua su X
  $\exists\, a, b \in X : f(a)\,f(b) < 0$
  $\Rightarrow$

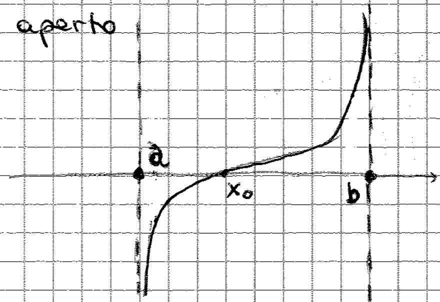
se prendo $X = [x_1, x_2] \cup [x_3, x_4]$



CONSEGUENZE IMPORTANTI:

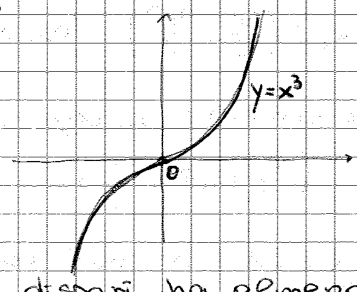
Il teorema degli zeri vale nei seguenti casi:

- $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ intervallo aperto
  f continua su (a,b)
  $\to \left(\lim_{x\to a^+} f(x)\right)\left(\lim_{x\to b^-} f(x)\right) < 0$



Intervallo non limitato

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  f continua in $\mathbb{R}$
  $\to \left(\lim_{x\to -\infty} f(x)\right)\left(\lim_{x\to +\infty} f(x)\right) < 0$



In particolare: ogni polinomio di grado dispari ha almeno uno zero.

- Varianti $[a, b)$
  $\to f(a)\left(\lim_{x\to b^-} f(x)\right) < 0$
- Variante $[a, +\infty)$
  $\to f(a)\left(\lim_{x\to +\infty} f(x)\right) < 0$