



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 1926A -

ANNO: 2016

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Tosto Francesco

MATERIA: Aerodinamica Applicata - Prof Di Ciccìa

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

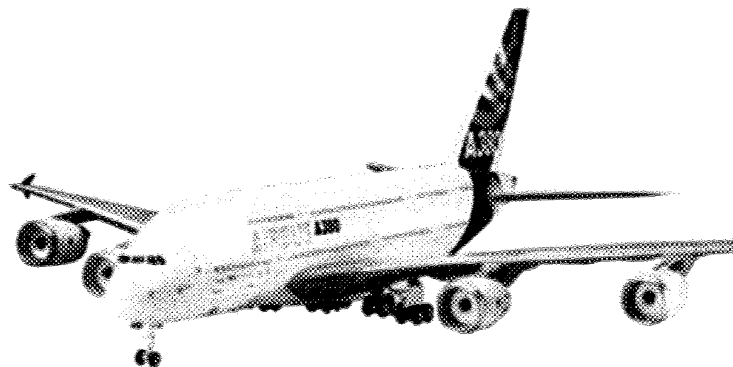
**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

# POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

## **Aerodinamica Applicata**

Appunti delle lezioni

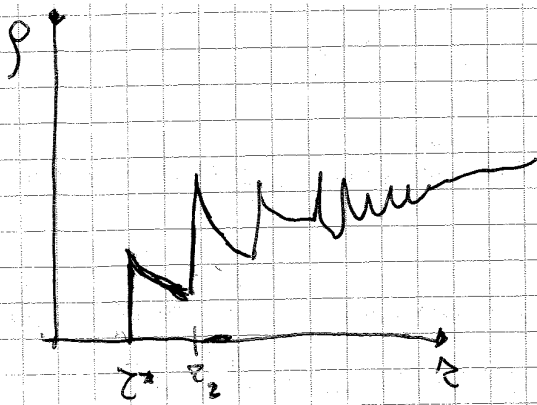


**Docente**  
Gaetano Maria Di Cicca

**Studente**  
Francesco Tosto

---

a.a. 2014-2015



Essenzialmente la nostra densità è nulla fino al valore  $z_1$ , dove la sfera incontra una molecola; dopo di che non incontra altre molecole fino ad  $z_2$ , da  $z_1$  a  $z_2$  la densità quindi diminuisce

con legge proporzionale a  $\frac{1}{z^3}$  per poi aumentare nuovamente; iteriamo questo processo numerose volte fino a quando a valori di  $z$  molto elevati  $\rho$  può essere considerata costante; dopo di che  $\rho$  può cambiare a causa delle condizioni esterne.

Una particella può essere approssimata da un cubetto di lato  $l$  (dimensione caratteristica);  $l$  deve essere abbastanza grande da poter contenere un numero di particelle abb. grande tale da considerare  $\rho, \rho, \rho$  e  $T$  costanti. Allo stesso tempo questa particella fluida deve essere sufficientemente piccola rispetto alla scala del fenomeno che si sta studiando.

Li presentano dei casi limite:

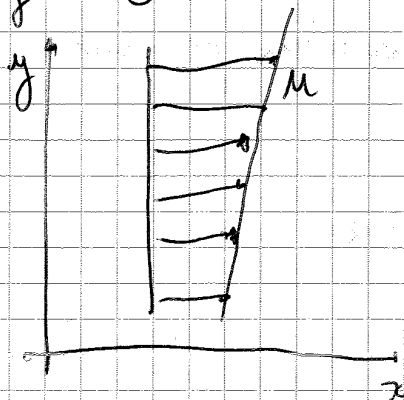
- 1) gas rarefatto; le molecole sono della stessa dimensione della dimensione caratteristica  $l$  della particella fluida  
 $\Rightarrow$  ricorso a metodi statistici
- 2) dimensione caratt.  $l$  risulta essere della stessa scala del fenomeno che stiamo studiando  $\Rightarrow$  microfluidodinamica

### REAZIONI TRA PARTICELLE FLUIDE

Abbiamo due casi:



- per quanto riguarda  $\tau$  possiamo fare un discorso del genere



⇐ profilo di velocità di  $u$ , con  $u$  = componente di velocità lungo l'asse  $x$   
 Si avrà quindi  
 $\tau \propto \frac{du}{dy}$

La costante di proporzionalità è  $\mu$  = viscosità dinamica

Ricordiamo  $\tau = \mu \frac{du}{dy}$  LEGGE DI NEWTON

$[\mu] = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} = \text{Pa} \cdot \text{s}$

Possiamo anche definire la viscosità cinematica:

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ , con  $[\nu] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$

- Vediamo ora un po' di valori da memorizzare relativi all'aria in condizioni standard:

ARIA STANDARD

Per  $T = 15^\circ = 288\text{K}$  abbiamo:

$p = 760 \text{ mm Hg} = 101325 \text{ Pa}$

$\rho = 1,225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

$\nu = 1,459 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$

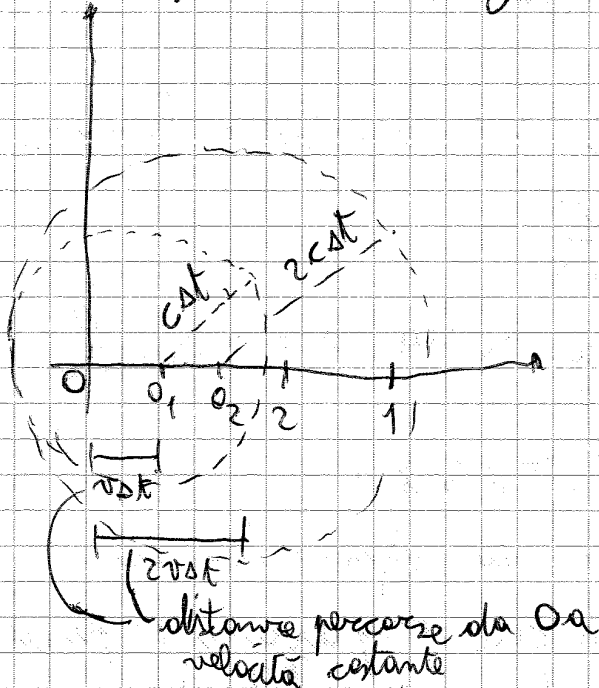
$\mu = 1,781 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$

DA  
MEMORIZZARE

1)  $V < c$ , con  $V$  = velocità velivolo,  $c$  = vel. suono

Consideriamo il velivolo molto distante. esso genera un disturbo che si propaga nel nostro campo di moto.

Viene generato un fronte d'onda sferico, come in figura.



In un certo istante il velivolo si trova nella posizione 1, ad un  $\Delta t$  successivo si trova nella posizione 2 e così via (il velivolo avanza)

O è il punto in cui si trova adesso.

Quando il velivolo si trova in O il disturbo non ha avuto modo di propagarsi all'interno del campo di moto; se ci spostiamo al  $\Delta t$  precedente il disturbo si è propagato alla velocità  $c$  del suono  $\Rightarrow$  il fronte d'onda si trova perciò ad una distanza  $c \cdot \Delta t$  dal velivolo

Il fronte d'onda sferico è quindi capace di "cavalcare" a monte del punto O (se ci posizioniamo in  $O_2$  il fronte d'onda ha percorso una distanza pari a  $c \Delta t$  e "ingloba" tutte le posizioni successive  $O_1$  e O).

Se  $V < c$  progressivamente l'intero campo di moto si altera perturbato, anche a monte del punto O  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  REGIME SUBSONICO

CASO PARTICOLARE per  $M=1 \Rightarrow \mu=90^\circ$  (caso sonico)

Siamo in grado di caratterizzare i nativi regimi in base ad  $M$ :

$M < 1 \rightarrow$  regime subsonico

$M = 1 \rightarrow$  regime sonico

$M > 1 \rightarrow$  regime ipersonico

La velocità del suono vale:

$c = 340 \text{ m/s}$  in aria (standard)

$c \approx 1.000 \text{ m/s}$  in acqua

### APPROSSIMAZIONE DI FLUIDO IDEALE

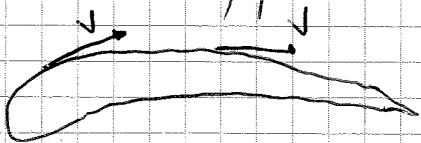
Tratteremo quasi sempre il fluido aria come fluido ideale

FLUIDO IDEALE:  $\mu=0 \iff K=0$   $\rightarrow$  perdite legate dall'agitazione molecolare

L'aria presenta una viscosità molto bassa. Nonostante questo non è sufficiente per poter totalmente trascurare gli effetti della viscosità, in quanto bisogna stare attenti ai gradienti di velocità: se sono bassi è possibile trascurare la viscosità mentre se sono alti, come nello strato limite, ciò non è possibile.

L'assunzione di fluido ideale comporta due conseguenze:

1) CONDIZIONE DI ADERENZA viene sostituita da CONDIZIONE DI TANGENZA; prendendo un profilo alare:



COND. ADERENZA: a parete  $V=0$  se fluido è viscoso

COND. TANGENZA: a parete  $V$  è sempre tangente alla parete se fluido ideale

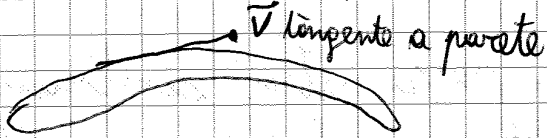
### APPROSSIMAZIONE FLUIDO IDEALE

$\mu = 0 \Leftrightarrow K = 0$  (visto la volta scorsa)

legati da agitazione molecolare

Q<sub>10</sub> ha due implicazioni:

1) CONDIZIONE DI ADERENZA sostituita da condizione di TANGENZA

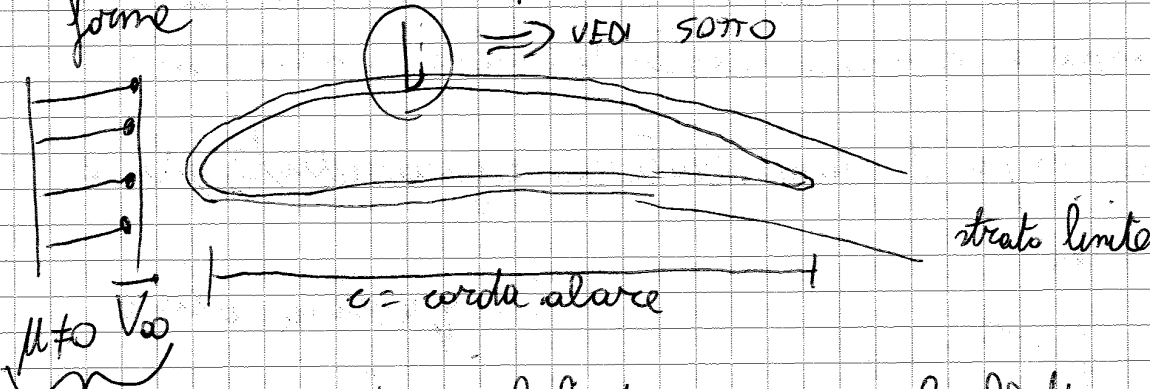


2) NO FLUSSI DI CALORE TRA FILETTI FLUIDI

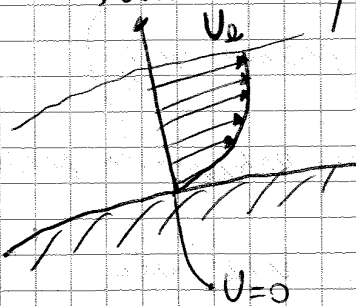
$\mu = 0 \Rightarrow \tau = 0$

$K = 0 \Rightarrow q = 0$

Prendiamo ora un profilo alare investito da corrente unidiretta



in questa zona è possibile trascurare gli effetti viscosi perché non ci sono gradienti di velocità. Non è possibile trascurarli attorno al profilo. Ricomando il riquadro:



#### PROFILO DI VELOCITÀ A PARETE

a parete  $U = 0$ , mentre fuori da strato limite  $U = U_{esterna}$

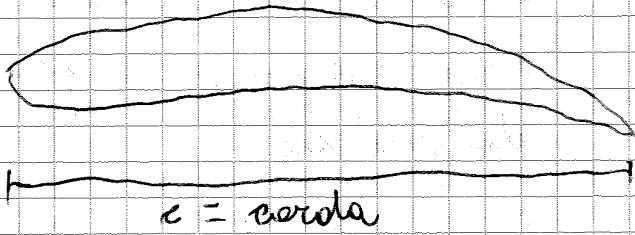
• Esiste un parametro adimensionale detto NUMERO DI REYNOLDS

$Re = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{V \cdot L}{\nu}$ , con  $L$  = lunghezza caratteristica

Q<sub>10</sub> tale parametro ci può dire se possiamo trascurare  $\mu$

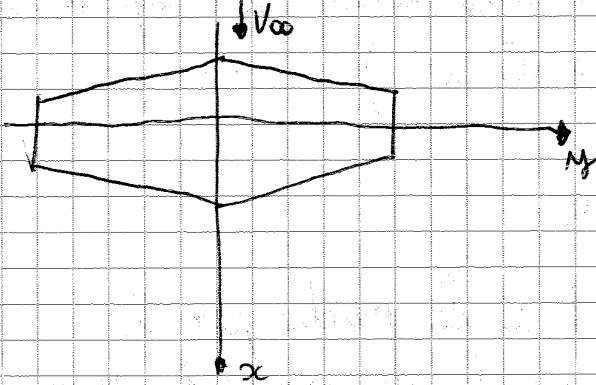


Sezioniamo l'ala con un piano  $\perp$  all'asse  $y$

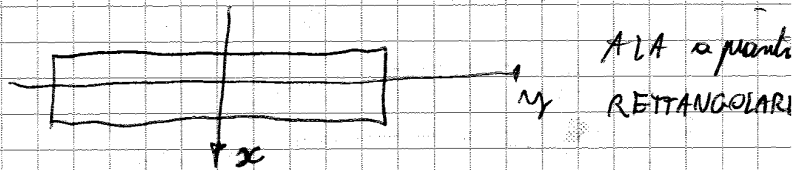


PROFLO ALARE

\* ALA RASTREMATTA.

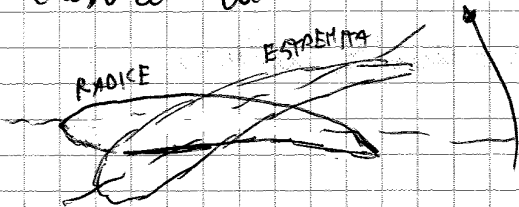


La corda alare cambia valore sezione per sezione, diminuendo verso l'esterno



\* ALA SVERGOLATA

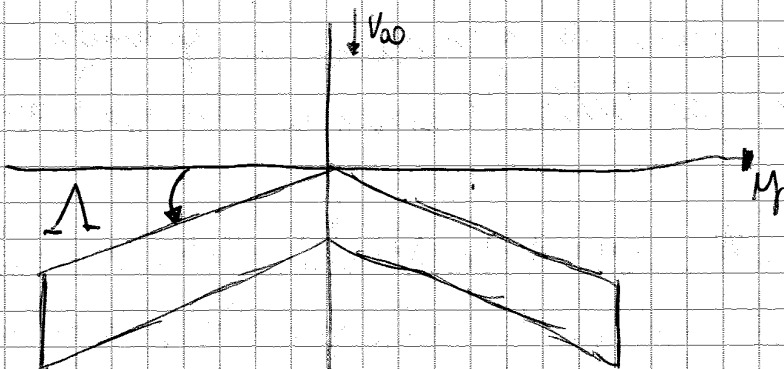
- morphamento GEOMETRICO: le corde dei profili non sono tutte sullo stesso piano, ma ruotano e si muovono verso l'estremità



- morphamento AERODINAMICO: i profili cambiano forma andando verso l'esterno

Si possono avere entrambi gli morphamenti contemporaneamente.

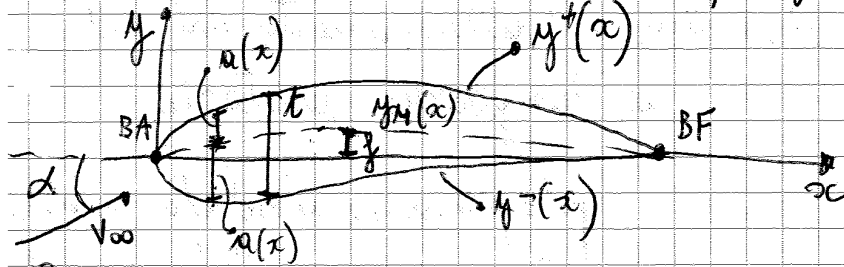
\* ALA A FRECCIA



$\Lambda$  = angolo di freccia (lambda grande)

Prendiamo ora il caso di un profilo alare non simmetrico

notiamo il nuovo sistema di riferimento



La  $V_{\infty}$  ha un'incidenza geometrica  $\alpha =$  angolo tra corrente e corda

BA = bordo d'attacco

BF = bordo di fuga

$y^+(x)$  = grandezza sul DORSO

$y^-(x)$  = grandezza sul VENTRE

LINEA MEDIA DEL PROFILO ALARE: luogo dei punti equidistanti da dorso e ventre ( $y_M(x)$ )

$f$  = FRECCIA MASSIMA (massima distanza tra  $x$  e  $y_M(x)$ )

$t$  = MASSIMO SPESSORE del PROFILO

$$a(x) = \frac{y^+(x) - y^-(x)}{2} \quad \text{LEGGE DEGLI SPESSORI}$$

$$y_M(x) = \frac{y^+(x) + y^-(x)}{2} = \text{linea media}$$

$$a(x) + y_M(x) = y^+(x)$$

$$-a(x) + y_M(x) = y^-(x)$$

se profilo SIMMETRICO:  $y^-(x) = -y^+(x)$

$\alpha > 0$  come in figura

$\alpha < 0$  se sopra anz  $x$

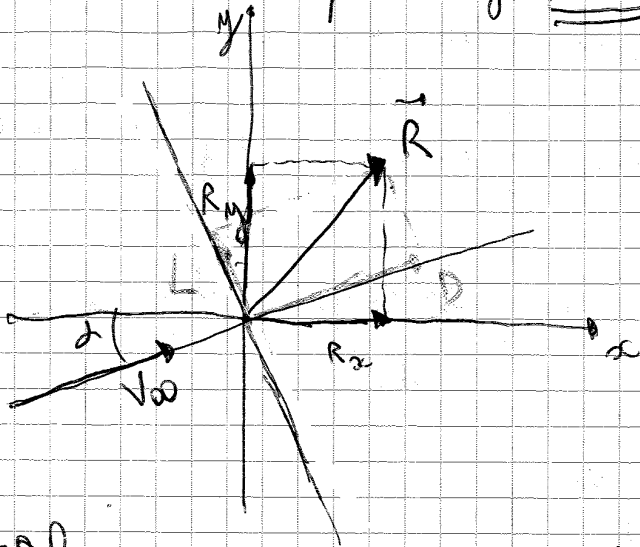
Per  $\beta \ll 1 \text{ rad}$  si ha  $\sin \beta \approx \beta$ ,  $\cos \beta \approx 1$  da cui

$$dF_x \ll dF_y \Rightarrow R_x \ll R_y$$

Abbiamo visto che (vedi sopra)

$$R_y = \int_0^c [(p^- - p_0) - (p^+ - p_0)] dx$$

Soltanto interessa conoscere le risultanti delle azioni aerodinamiche rispetto agli assi vento:



$D$  = resistenza (drag)

$L$  = portanza (lift)

generalmente  $R_x \ll R_y \Rightarrow D \ll L$

Vogliamo passare da  $R_x$  ed  $R_y$  a  $D$  ed  $L \Rightarrow$  proiettato lungo gli assi vento.

$$L = R_y \cos \alpha - R_x \sin \alpha$$

TRASC

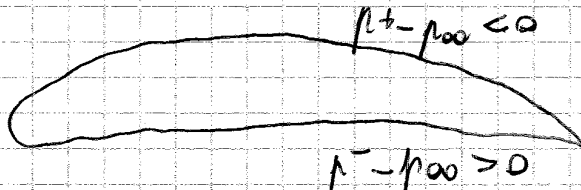
$$D = R_x \cos \alpha + R_y \sin \alpha$$

Soltanto  $\alpha \ll 1 \text{ rad} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha \approx \alpha \\ \cos \alpha \approx 1 \end{cases} \Rightarrow R_x \ll R_y$

Quindi possiamo approssimare

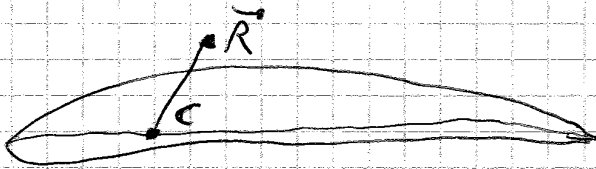
$$L \approx R_y = \int_0^c [(p^- - p_0) - (p^+ - p_0)] dx$$

quindi se vogliamo massimizzare la portanza generata dal profilo è necessario che  $p^- - p_0 \gg 0$  e  $p^+ - p_0 \ll 0$  (soprapressione sul ventre)



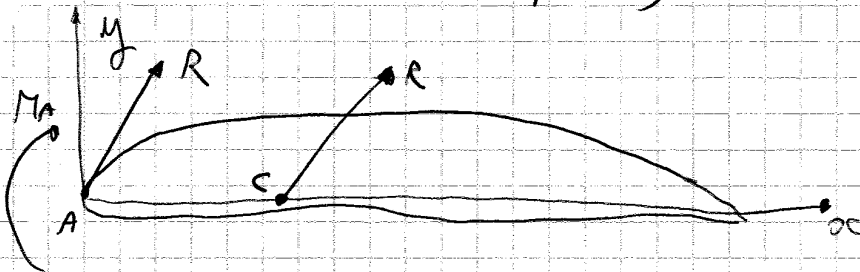
Ovviamente massimizzare  $L$  non è l'unica priorità del progetto

La risultante delle forze <sup>aerodinamiche</sup> applicate su un punto del profilo chiamato CENTRO DI PRESSIONE  $C$

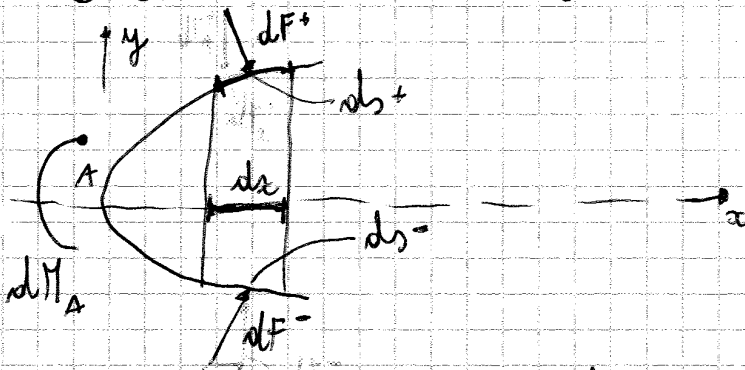


Posso però spostare la risultante lungo la corda mediante l'equazione

di trasposizione dei momenti e delle forze (si aggiunge un momento di trasporto). Calcoliamo ora  $M_A$



Facciamo uno zoom sul bordo d'attacco:



Voglio calcolare il  $dM_A$  calcolato su A e generato da  $dF^+$  e  $dF^-$ . Ricordiamo che

un momento è positivo e orario

Lappiamo che:

$dF_x \ll dF_y$  inoltre posso trascurare  $dF_x^+$  e  $dF_x^-$  perché molto piccole ~~proporzionali~~ anche il loro braccio è molto piccolo; quindi.

se risulta un vettore  $dF_y^+$  è positiva e altro  $\Rightarrow$  aggiungiamo un -

$$dM_A = - (dF_y^+) x - (dF_y^-) x \Rightarrow \text{il momento è contrario rispetto a } dM_A$$

$$\text{ma } \begin{cases} dF_y^+ = - (p^+ - p_{\infty}) dx \\ dF_y^- = (p^- - p_{\infty}) dx \end{cases} \quad (\text{vedi sopra}) \Rightarrow$$

## COEFFICIENTI ADIMENSIONALI

Generalmente in aerodinamica non si fa ricorso a forze e momenti ma a termini adimensionali.

Adesso considereremo il caso generale di FLUIDO REALE COMPRESSIBILE. Si avvia che la forza è funzione delle seguenti variabili:

$$F = f(\text{geometria}, \rho, \mu, V, l, \mu)$$

Con geometria intendiamo la forma del profilo e l'angolo di incidenza. In galleria del vento si opera in condizioni di similitudine geometrica trascurando la forma; quindi:

$$F = f(\alpha, \rho, \mu, V, l, \mu)$$

$\alpha$  però è adimensionale; lo mettiamo da parte

$$F = f(\rho, \mu, V, l, \mu) \sim l^a V^b \rho^c \mu^d \mu^e$$

Dimensionalmente abbiamo

$$[\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}] = [\text{m}]^a [\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]^b [\text{kg}/\text{m}^3]^c [\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}]^d [\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}]^e$$

Uguagliando gli esponenti:

$$\begin{cases} 1 = c + d + e \\ 1 = a + b - 3c - d - e \\ -2 = -b - d - 2e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 - d - e \\ 1 = a + 2 - d - 2e - 3(1 - d - e) - d - e \\ b = 2 - d - 2e \end{cases}$$

$$1 = a + 2 - d - 2e - 3 + 3d + 3e - d - e \Rightarrow a - 2 + d = 0$$

$$\begin{cases} a = 2 - d \\ b = 2 - d - 2e \\ c = 1 - d - e \end{cases}$$

sostituiamo nell'espressione della forza

$\Rightarrow$

Il discorso cambia un po' per un'ala ad allungamento infinito (PROFILO ALARE) di cui consideriamo una porzione unitaria:

$$C_l = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 c \cdot (1)}$$

lettere minuscole  $\rightarrow l$

COEFFICIENTE DI PORTANZA

$$C_d = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 c}$$

COEFFICIENTE DI RESISTENZA

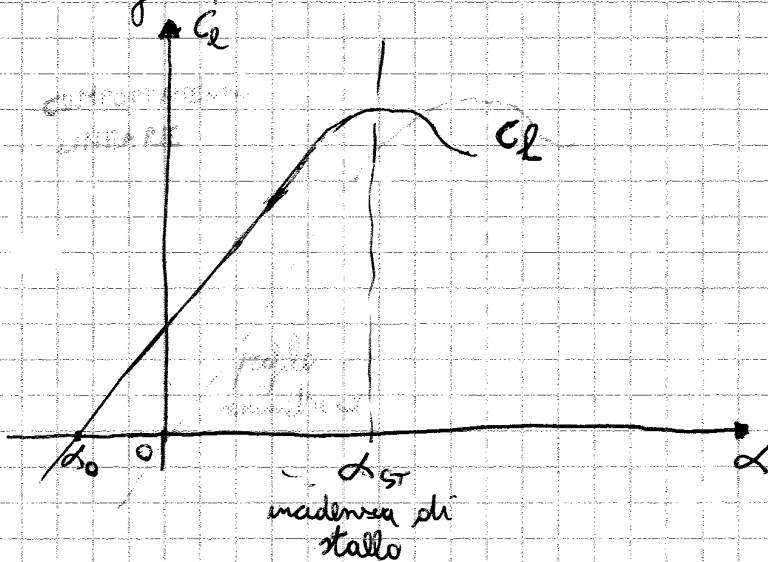
$$C_m = \frac{M}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 c^2}$$

COEFFICIENTE DI MOMENTO

In questo caso

$$[L] [D] [M] = \frac{N}{m} \quad (\text{perché profilo di lunghezza unitaria})$$

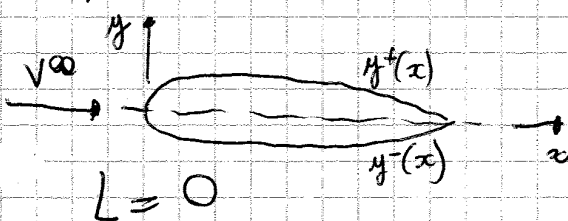
Diagrammiamo l'andamento di questi coefficienti; consideriamo il caso di profilo non simmetrico



$\alpha_0 =$  INCIDENZA DI PORTANZA NULLA  $\Rightarrow C_l = 0$

Per profilo asimmetrico si ha  $\alpha_0 < 0$

Per profilo simmetrico si ha  $\alpha_0 = 0$



$$y^-(x) = -y^+(x)$$

Se due profili sono geometricamente simili, inoltre lavoriamo a stesi  $\alpha, Re, M$ . Allora i profili presentano, negli stessi punti, coeff. di pressione uguali. Ciò non è vero per le pressioni relative. Otterremo visto che:

$$L = \int_0^c [(p^- - p_{\infty}) - (p^+ - p_{\infty})] dx$$

$$C_e = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 c} = \int_0^c \frac{(p^- - p_{\infty}) - (p^+ - p_{\infty})}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 c} dx =$$

$$= \int_0^c (c_p^- - c_p^+) \frac{dx}{c} \Rightarrow \boxed{C_e = \int_0^1 (c_p^- - c_p^+) d\left(\frac{x}{c}\right)}$$

cambio  
da  $x$  a  $\frac{x}{c}$

Posso anche scrivere

$$\Delta c_p = c_p^- - c_p^+ \Rightarrow \boxed{C_e = \int_0^1 \Delta c_p d\left(\frac{x}{c}\right)}$$

Per quanto riguarda il momento:

$$M_A = \int_0^c [(p^- - p_{\infty}) - (p^+ - p_{\infty})] x dx$$

$$C_{m_A} = \frac{M_A}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 c^2} = \int_0^c \frac{(p^- - p_{\infty}) - (p^+ - p_{\infty})}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 c^2} x dx$$

$$\boxed{C_{m_A} = - \int_0^1 \Delta c_p \left(\frac{x}{c}\right) d\left(\frac{x}{c}\right)}$$

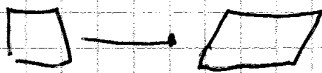
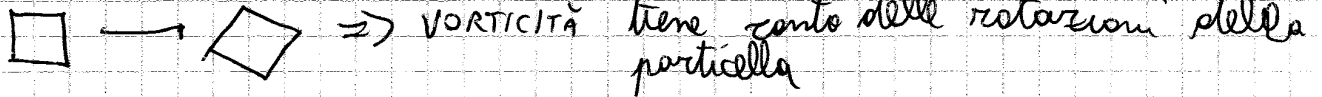
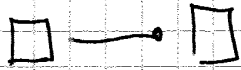
Per il generico punto B lungo la corda posso scrivere:

$$M_B = M_A + L x_B \Rightarrow C_{m_B} = C_{m_A} + C_e \left(\frac{x_B}{c}\right)$$

da cui:

$$\nabla \times \vec{V} = \vec{\omega} = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} \Rightarrow \text{vorticità è perpendicolare al piano } xy$$

- La particella fluida disegnata può tradursi, deformarsi, ruotare



- Se  $\vec{q}$  è tale che  $\nabla \times \vec{q} = 0$  esiste una funzione  $\phi =$  FUNZIONE POTENZIALE tale che:

$$\vec{q} = \nabla \phi$$

In tal caso il campo  $\vec{q}$  si dice IRROTAZIONALE; infatti

$$\nabla \times \vec{q} = \nabla \times (\nabla \phi) = 0 \quad \text{perché } \nabla \times \nabla = 0 \quad (\text{rotore del gradiente})$$

Nel caso della velocità se  $\nabla \times \vec{V} = 0$  si ha

$$\vec{V} = \nabla \phi \quad \text{e} \quad \vec{\omega} = 0$$

**ESEMPIO**

$$\nabla \cdot (\rho \cdot \vec{V}) \stackrel{\text{linearietà}}{=} \rho \nabla \cdot \vec{V} + \vec{V} \cdot \nabla \rho$$



$$y_0 = y(x_0, y_0, z_0, t_0)$$

$$z_0 = z(x_0, y_0, z_0, t_0)$$

$$T_0 = T(x_0, y_0, z_0, t_0)$$

La velocità si ottiene in questo modo:

$$u = \left( \frac{dx}{dt} \right)_{x_0, y_0, z_0} \quad \left( \text{si usa } \frac{d}{dt} \text{ e non } \frac{\partial}{\partial t} \text{ perché } x_0, y_0, z_0 \text{ sono variabili dipendenti da } t; \text{ solo } t \text{ è indipendente} \right)$$

$$v = \left( \frac{dy}{dt} \right)_{x_0, y_0, z_0}$$

$$w = \left( \frac{dz}{dt} \right)_{x_0, y_0, z_0}$$

L'accelerazione si ottiene come:

$$a_x = \left( \frac{d^2 x}{dt^2} \right)_{x_0, y_0, z_0}, \quad a_y = \dots, \quad a_z = \dots$$

2) METODO EULERIANO: si usa il concetto di campo di moto. Ed identifichiamo le funzioni di campo;

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x, y, z, t) \\ v &= v(x, y, z, t) \\ w &= w(x, y, z, t) \end{aligned} \right\} \text{funzioni di } \vec{x} \text{ e } t$$

In questo caso l'accelerazione la posso scrivere come

$$\frac{\partial u}{\partial t} \text{ e non } \frac{du}{dt}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{accelerazione euleriana (non cambia la posizione ma solo il tempo in cui si trova)}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} u dt + \frac{\partial f}{\partial y} v dt + \frac{\partial f}{\partial z} w dt$$

Raccogliendo dt

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} \right) dt$$

Portando dt dall'altra parte

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \left( u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} \right) \Rightarrow \text{termini CONVETTIVI}$$

derivata LAGRANGIANA  $\rightarrow$  derivata EULERIANA

Posiamo scrivere il tutto in maniera compatta

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla f$$

$\Rightarrow$  se non ci sono gradienti di f il termine  $\vec{V} \cdot \nabla f = 0$

$\Downarrow$   
 $\Rightarrow$  per flusso stazionario

Passiamo questo discorso per il vettore velocità  $\vec{u}$

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla u$$

$\Downarrow$   
 accelerazione di tutta la particella lungo x

$\Downarrow$   
 scal. a punto fermo lungo x

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla v$$

$$\frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla w$$

Molte volte si usa "forare" questa scrittura anche per un vettore  $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V}$$

(gradiente di un vettore infatti non esiste; è una scrittura forata)

### 3) EQUAZIONE DI BILANCIO DELL'ENERGIA

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho E d\tau = - \int_{\sigma} \rho E (\vec{V} \cdot \vec{n}) d\omega - \int_{\sigma} p \cdot \vec{n} \cdot \vec{V} d\omega + \int_V \rho \vec{f} \cdot \vec{V} d\tau$$

energia totale per unità di massa
flusso di energia
lavoro delle forze di pressione
lavoro delle forze di campo

con  $E = \underbrace{e}_{\text{energia interna}} + \underbrace{\frac{V^2}{2}}_{\text{componente cinetica}}$  eq. scalare

Non sempre è possibile trovare una forma differenziale in quanto il campo deve essere continuo.

### \* EQUAZIONI DI BILANCIO IN FORMA DIFFERENZIALE

Utilizzeremo il teorema di Gauss (o della divergenza):

$\vec{F}_q =$  campo vettoriale  $\int_{\omega} \vec{F}_q \cdot \vec{n} d\omega = \int_V \nabla \cdot \vec{F} d\tau$

$\vec{F}_q = (F_1, F_2, F_3) \Rightarrow \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$

Se  $f(x, y, z, t)$  è uno scalare

$$\int_{\omega} f \vec{n} d\omega = \int_V \nabla f d\tau$$

Scriviamo finalmente le equazioni di bilancio:

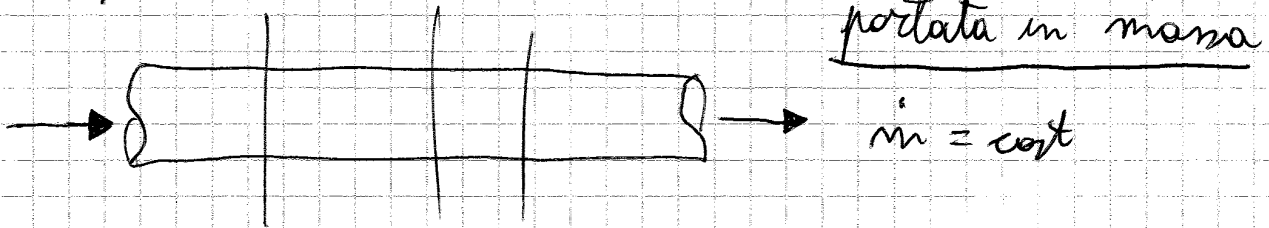
#### 1) EQUAZIONE DI BILANCIO DELLA MASSA:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho d\tau = - \int_{\omega} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) d\omega \Rightarrow \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = - \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{V}) d\tau \Rightarrow$$

dato perché il volume  $\tau$  non cambia

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

Prendendo il nostro condotto stazionario si conserva la



2) EQ. DI BILANCIO DELLA Q. DI MOTO

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{V} d\tau = - \int_{\partial V} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) d\sigma - \int_{\partial V} p \vec{n} d\sigma + \int_V \rho \vec{f} d\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_V \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} d\tau = - \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{V} \cdot \vec{V}) d\tau - \int_V \nabla p d\tau + \int_V \rho \vec{f} d\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_V \left[ \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \cdot \vec{V}) \right] d\tau = \int_V (-\nabla p + \rho \vec{f}) d\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \cdot \vec{V}) = -\nabla p + \rho \vec{f} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} + \vec{V} \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = -\nabla p + \rho \vec{f} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) + \vec{V} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \right] = -\nabla p + \rho \vec{f} \Rightarrow$$

= 0 per bilancio massa

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{f}}$$

3) EQ. DI BILANCIO DELL'ENERGIA

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho E d\tau = - \int_{\partial V} \rho E (\vec{V} \cdot \vec{n}) d\sigma - \int_{\partial V} p \vec{n} \cdot \vec{V} d\sigma + \int_V \rho \vec{f} \cdot \vec{V} d\tau \Rightarrow$$

In realtà possiamo scrivere

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = \underbrace{\rho \cdot \nabla \cdot \vec{V}}_{\text{lavoro termodinamico}} + \underbrace{\vec{V} \cdot \nabla \rho}_{\text{lavoro meccanico}}$$

o di compressione ed espansione      o di spostamento

Guardando l'equazione dell'energia abbiamo le seguenti 6 incognite:

$$\rho, p, \vec{V}, E \text{ con } \vec{V} = (u, v, w)$$

non bastano perché abbiamo 5 equazioni

Dobbiamo aggiungere altre relazioni; aggiungiamo:

$$e = c_v \cdot T, \text{ con } E = e + \frac{V^2}{2}$$

Abbiamo però aggiunto l'incognita  $T$ ; chiudiamo il sistema con l'equazione di stato:

$$\frac{p}{\rho} = R^* \cdot T$$

Il campo di equazioni scritto non è lineare; il sistema va risolto numericamente. Raccogliamo emergere la non linearità per l'equazione (2) in un piano 2D.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + \dots$$

termini non lineari: c'è l'incognita moltiplicata per l'incognita stessa.

Prendiamo l'eq. della q.d.m in forma differenziale:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} \quad (1)$$

Possiamo scrivere (ricordiamo  $\vec{a} \times (\vec{v} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{v} - (\vec{a} \cdot \vec{v})\vec{c}$ )

$$\vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = \nabla \left( \frac{V^2}{2} \right) - \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V}) = \nabla \left( \frac{V^2}{2} \right) - \vec{V} \times \vec{\omega}$$

Non abbiamo ancora fatto uso della equazione della continuità

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{V} \quad (*)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho^2 \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) \Rightarrow \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) = -\frac{1}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt}$$

sostituiamo nella (\*):

$$+\rho \nabla \cdot \vec{V} = +\rho^2 \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) \quad \text{sostituendo nella (5)}$$

$$\frac{De}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) \Rightarrow \boxed{\frac{De}{Dt} + \rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) = 0}$$

In termodinamica abbiamo a che fare con differenziali; mentre in aerodinamica con derivate; in t.d. avevamo visto il 1° principio della TD scritto così:

$$de + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) = T ds$$

Derivando lagrangianamente otteniamo

$$\frac{De}{Dt} + \rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) = T \frac{Ds}{Dt}$$

Prima in pratica avevamo ottenuto il 1° principio della TD dove  $T \frac{Ds}{Dt} = 0$  perché, considerando nulli gli sforzi d'attrito per ipotesi delle equazioni di Eulero, non abbiamo aumento di entropia  $\Rightarrow$  entropia della particella rimane costante lungo la traiettoria  $\Rightarrow$  CAMPO di MOTO ISENTROPICO

$$\frac{Ds}{Dt} = 0 \quad \neq \quad \nabla s = 0$$

si dovrebbe dire entropia costante in tutto il comp.

Se  $\nabla s = 0$  il campo è OMOTROPICO

• Abbiamo visto

$$\frac{D\sigma}{Dt} = 0 \neq \nabla\sigma = 0$$

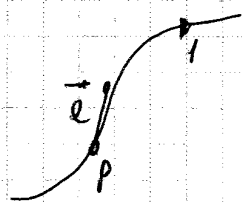
Quando un campo è isoentropico? Procuriamo l'eq. dell'energia in forma differenziale:

Introduciamo l'entalpia  $h$ :  $Tds = de + p d\left(\frac{1}{\rho}\right)$   $h = e + \frac{p}{\rho}$  differenziando

$$dh = de + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho} dp \quad \text{da cui}$$

$$dh = Tds + \frac{1}{\rho} dp$$

Passiamo dai differenziali ai gradienti mediante le derivate direzionali; consideriamo una linea di flusso:



$\vec{e}$  = vettore tangente in P alla linea di corrente

Avremo:

$$\vec{V} = V \cdot \vec{e}$$

Proiettiamo tutto lungo  $\vec{e}$ :

$$\frac{dh}{ds^*} = \nabla h \cdot \vec{e} \Rightarrow dh = \nabla h \cdot \vec{e} ds^* = \nabla h ds^*$$

con  $ds^* = ds \cdot \vec{e}$

allo stesso modo si procede per  $\sigma$  e  $p$

$$ds = \nabla \sigma \cdot \vec{e} ds^*$$

$$dp = \nabla p \cdot \vec{e} ds^*$$

Da cui ricaviamo:

$$\nabla h = T \nabla \sigma + \frac{1}{\rho} \nabla p \Rightarrow -\frac{1}{\rho} \nabla p = T \nabla \sigma - \nabla h \quad (6)$$

Prendiamo ora l'equazione della qdm:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - (\vec{V} \times \vec{\omega}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \left( \frac{V^2}{2} \right) \quad \text{trascorrendo}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} \left( p + \rho \frac{V^2}{2} \right) = 0 \Rightarrow \boxed{p + \frac{1}{2} \rho V^2 = \text{cost}} \quad \text{lungo una linea di corrente}$$

$$p + \frac{1}{2} \rho V^2 = \text{PRESSIONE TOTALE} = p^0 \quad \text{o D'ARRESTO}$$

$$p^0 = p + \frac{1}{2} \rho V^2$$

$\downarrow$                        $\downarrow$   
 pressione statica      pressione dinamica

Se cambia linea di corrente  $p^0$  può cambiare

9-10-2014

Tutto quanto sopra visto vale per flusso stazionario e incomprimibile

- Vediamo ora il caso di un fluido INCOMPRESSIBILE ed in campo IRROTAZIONALE

INCOMPRESSIBILITÀ:  $\rho = \text{cost} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{V} = 0$

IRROTAZIONALITÀ:  $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} = 0$

In tal caso esiste una funzione  $\Phi =$  funzione potenziale tale che

$$\vec{V} = \nabla \Phi$$

Sostituiamo nell'espressione di  $\rho = \text{cost}$ .

$$\nabla \cdot \vec{V} = \nabla \cdot \nabla \Phi = 0$$

Ma  $\nabla \cdot (\nabla(\cdot)) = \nabla^2(\cdot)$  LAPLACIANO

Quindi possiamo scrivere:

$$\boxed{\nabla^2 \Phi = 0} \quad \text{EQUAZIONE DI LAPLACE}$$

Tale equazione è lineare e possiamo usare il principio di sovrapposizione degli effetti: se ho un campo di moto



$$\rho \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi) + \nabla p + \rho \nabla \left( \frac{V^2}{2} \right) - \rho \vec{g} = 0 \quad (2)$$

Ma anche  $\vec{g}$  è un campo irrotazionale (conservativo):

$$\vec{g} = \nabla \Phi_g, \quad \Phi_g = \text{potenziale di } \vec{g}$$

$\Phi_g = -g z$ , con  $z = \text{quota}$ . Sostituendo nella (2) e sfruttando l'ipotesi di incomprimibilità:

$$\nabla \left( \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \nabla p + \nabla \left( \rho \frac{V^2}{2} \right) - \rho \nabla \Phi_g = 0$$

=  $+\nabla(\rho g z)$

raggruppando tutto:

$$\nabla \left( \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + p + \rho \frac{V^2}{2} + \rho g z \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + p + \rho \frac{V^2}{2} + \rho g z = F(t) \Rightarrow \text{funzione del solo tempo perché non siamo nel caso stazionario VALE SEMPRE}$$

Nel caso STAZIONARIO:

$$\boxed{p + \frac{1}{2} \rho V^2 + \rho g z = \text{costante}}$$

EQUAZIONE DI BERNOULLI

valida per ogni punto del campo

Le trascuriamo gli effetti del campo ~~gravitazionale~~ gravitazionale

$$p_0 = \boxed{p + \frac{1}{2} \rho V^2 = \text{COST}}$$

vale per campo incomprimibile irrotazionale, stazionario

rispetto a quanto visto ieri abbiamo aggiunto solo questa ipotesi e l'equazione diventa valida per tutto il campo e non solo più per una linea di campo.

vale sempre in regime non viscoso  $\Rightarrow$  DEVONO VALERE LE IPOTESI DI EULERO

Spacciamo  $\nabla \cdot (\rho \vec{V})$

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = \rho \nabla \cdot \vec{V} + \vec{V} \cdot \nabla \rho$$

Scriviamo l'equazione di continuità:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{V}$$

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) = -\frac{1}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} \Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} = -\rho^2 \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho} \right)$$

da cui, rimpiazzando nell'equaz. di continuità

$$-\rho \nabla \cdot \vec{V} = -\rho^2 \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) \quad \text{da cui}$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = \rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho} \right)$$

Osserviamo che:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \rho \Rightarrow \vec{V} \cdot \nabla \rho = \frac{D\rho}{Dt} - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\frac{DE}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \rho \nabla \cdot \vec{V} - \frac{1}{\rho} \vec{V} \cdot \nabla p$$

$$\frac{DE}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) - \frac{1}{\rho} \left( \frac{D\rho}{Dt} - \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$$

$$\frac{DE}{Dt} = \underbrace{-\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}}_{-\frac{D}{Dt} \left( \frac{\rho}{\rho} \right)} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

da cui

$$\frac{DE}{Dt} + \frac{D}{Dt} \left( \frac{\rho}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Ricordando

$$E = e + \frac{V^2}{2} \Rightarrow$$

• In questi casi il campo si dice **OMOTOTAL ENTALPICO**.

• Per un gas abbiamo visto

$$h = c_p T \quad \text{ed} \quad H = c_p T^0 = h + \frac{V^2}{2} = c_p T + \frac{V^2}{2}$$

quindi:

$$c_p T^0 = c_p T + \frac{V^2}{2} \quad T^0 = T \left( 1 + \frac{1}{c_p} \frac{V^2}{2} \right)$$

Moltiplichiamo per  $c^2$  sopra e sotto il denominatore

$$T^0 = T \left( 1 + \frac{c^2}{c_p} \frac{V^2}{c^2} \frac{1}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T^0 = T \left( 1 + \frac{c^2}{c_p T} \frac{M^2}{2} \right)$$

Ricordando  $c^2 = \gamma R^* T$  si ha

$$T^0 = T \left( 1 + \frac{\gamma R^* T}{c_p T} \frac{M^2}{2} \right)$$

ma

$$\frac{\gamma R^*}{c_p} = \frac{c_p}{c_v} \frac{c_p - c_v}{c_p} = \gamma - 1 \quad \text{quindi:}$$

$$T^0 = T \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

in caso STAZIONARIO e COMPRIMIBILE

Questa espressione è valida anche se sono presenti discontinuità nel campo di moto ed in condizioni di non isentropicità.

Se il campo è **ISOENTROPICO**:

$$\frac{T}{\rho^{\gamma-1}} = \text{costante} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \left( \frac{T^0}{T} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad \text{da qui otteniamo}$$

si ha:

$$\vec{V} = \nabla\phi \Rightarrow \nabla \times (\nabla(\phi)) = 0 \quad \text{OK}$$

Quindi possiamo scrivere

$$\boxed{\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{\omega} = -\vec{\omega} (\nabla \cdot \vec{V}) + \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{V} - \nabla \left( \frac{1}{\rho} \right) \times \nabla p + \nabla \times \vec{f}}$$

EQUAZIONE DELLA VORTICITÀ

Questa equazione ha diversi termini:

$\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{V}$  = ci dice come si distribuisce la vorticità nel campo di moto

$-\nabla \left( \frac{1}{\rho} \right) \times \nabla p$  : ci dice come si ridistribuiscono le pressioni

Riscriviamo ora l'equazione in forma vettoriale:

$$\boxed{\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = +\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{V} - \vec{\omega} (\nabla \cdot \vec{V}) - \nabla \left( \frac{1}{\rho} \right) \times \nabla p + \nabla \times \vec{f}} \quad (1)$$

• Introduciamo l'ipotesi di incomprimibilità:

$$\rho = \text{cost} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{V} = 0$$

L'equazione (1) diventa

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{V} + \nabla \times \vec{f}$$

Aggiungiamo ora l'ipotesi di irrotazionalità di  $\vec{f}$  (tale è il caso di  $\vec{g}$ ) allora  $\nabla \times \vec{f} = 0$

Supponiamo inoltre il nostro campo di moto 2D  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{V} \text{ è sempre } \perp \text{ a } \vec{\omega} \Rightarrow \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{V} = 0$$

Valutiamo quindi  $\frac{D\Gamma}{Dt}$

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Gamma_1 - \Gamma}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[ \oint_{\mathcal{L}_1} \vec{V}_1 \cdot d\vec{s}_1 - \oint_{\mathcal{L}} \vec{V} \cdot d\vec{s} \right] =$$

$$= \oint_{\mathcal{L}} \frac{D}{Dt} (\vec{V} \cdot d\vec{s}) = \oint_{\mathcal{L}} \frac{D\vec{V}}{Dt} \cdot d\vec{s} + \oint_{\mathcal{L}} \vec{V} \cdot \frac{D}{Dt} (d\vec{s}) \quad , \text{ con}$$

$$1) \frac{D}{Dt} (d\vec{s}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{d\vec{s}_1 - d\vec{s}}{\Delta t} \quad ; \quad \text{guardando il disegno abbiamo:}$$

$$\overline{AA_1} + d\vec{s}_1 = \overline{BB_1} + d\vec{s} \Rightarrow d\vec{s}_1 - d\vec{s} = \overline{BB_1} - \overline{AA_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\vec{s}_1 - d\vec{s} = (\vec{V} + d\vec{V}) \Delta t - \vec{V} \Delta t = d\vec{V} \Delta t \quad \text{sostituendo}$$

$$\frac{D}{Dt} (d\vec{s}) = d\vec{V} \quad \text{quindi}$$

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{V} \cdot \frac{D}{Dt} (d\vec{s}) = \oint_{\mathcal{L}} \vec{V} \cdot d\vec{V} = \oint_{\mathcal{L}} d\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0$$

integrale di linea su differenziale esatto.

Quindi, eliminando il termine, si ha

$$\oint_{\mathcal{L}} \frac{D\vec{V}}{Dt} \cdot d\vec{s} = \oint_{\mathcal{L}} \frac{D\vec{V}}{Dt} \cdot d\vec{s}$$

2) Abbiamo, grazie a eq. qdm

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (\text{trascuriamo } \vec{f})$$

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_{\mathcal{L}} \frac{D\vec{V}}{Dt} \cdot d\vec{s} = -\oint_{\mathcal{L}} \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\vec{s}$$

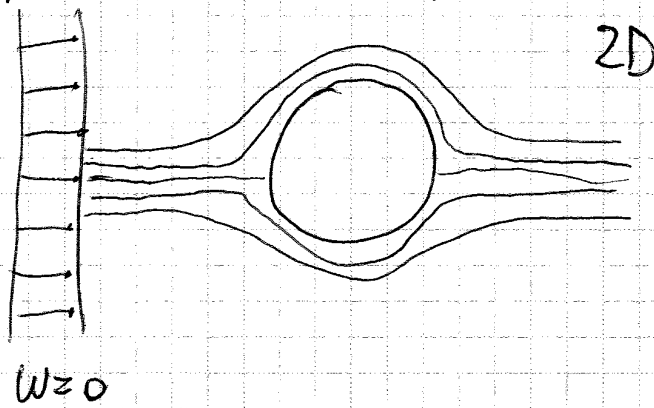
b) fluido comprimibile, con  $\rho = \rho(p)$ ; in tal caso, ponendo  $\omega$  per ~~il caso~~ esempio nel caso isentropico:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cost} \Rightarrow \rho = \left( \frac{p}{\text{cost}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = - \oint \frac{1}{\rho} dp = - \oint \left( \frac{p}{\text{cost}} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} dp \Rightarrow \frac{D\Gamma}{Dt} = 0$$

$\Rightarrow dQ(p)$   
 se  $dQ$  è differenziale esatto

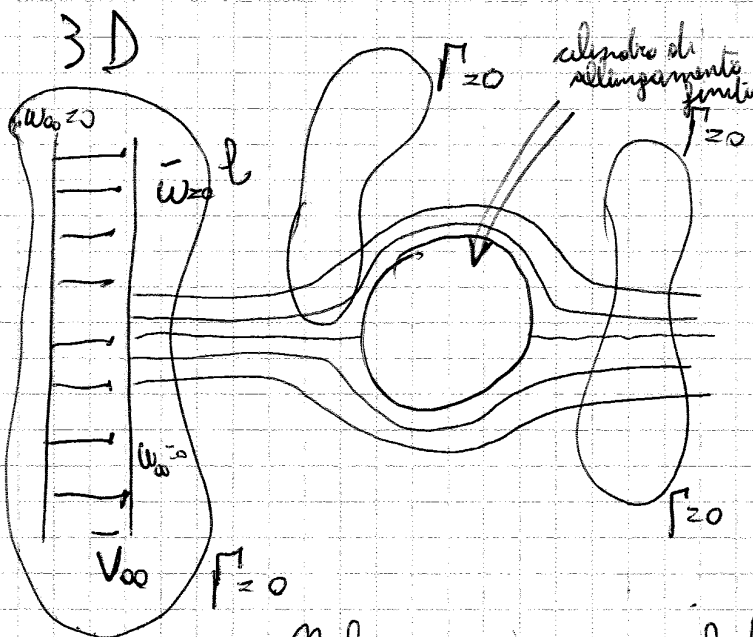
La circolazione in caso incompressibile o comprimibile isentropicamente è costante; in altri termini:



In tal caso

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = 0 \quad \begin{matrix} \text{CAMPO 2D, } \vec{\omega} \\ \text{IRROTAZ., WCOM} \\ \text{PRIMITIVILE} \end{matrix}$$

ovvero lungo ogni punto del campo di moto si ha  $\omega = 0$  se  $\omega_0 = 0$  in ogni punto a monte



Il cilindro avrà dimensione finita. Se consideriamo una linea chiusa a monte la  $\Gamma$  avrà un suo valore: stessa cosa per le linee  $l_1$  ed  $l_2$ .

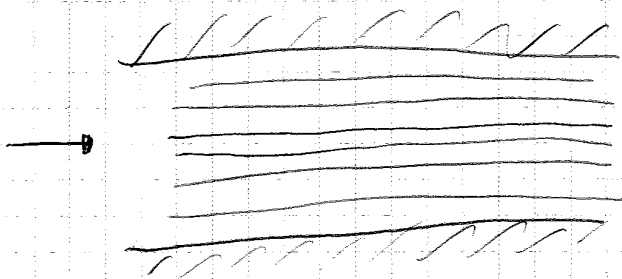
Nel caso incompressibile o  $\rho = \rho(p)$  si avrà che i valori di  $\Gamma$  sono sempre uguali per ogni curva

variazioni di energia cinetica a livello molecolare.  
È una funzione della viscosità e dei gradienti di velocità.

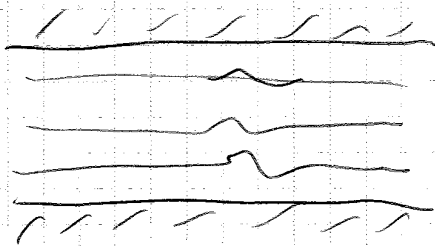
Comparsa delle non-linearità molto forti; i termini di Navier-Stokes sono importanti per i flussi turbolenti; questi ultimi li vedremo solo in piccolissima parte (vedi diagrammi).

17-10-2019

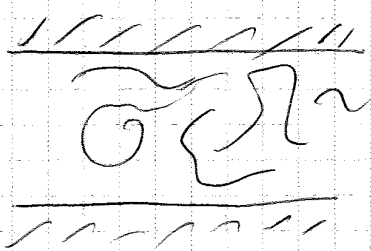
• Immaginiamo una condotta dove aumentiamo la portata



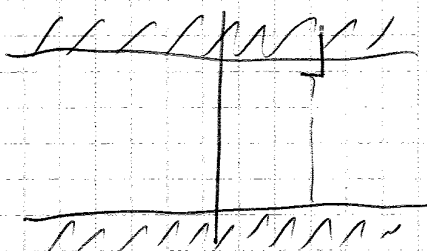
Aumentando la portata  
mi rendo conto che ogni  
tanto ci sono delle fluttua-  
zioni (fase transizionale)



Dopo qualche  $\tau$  si perde l'ordine  
(flusso turbolento)

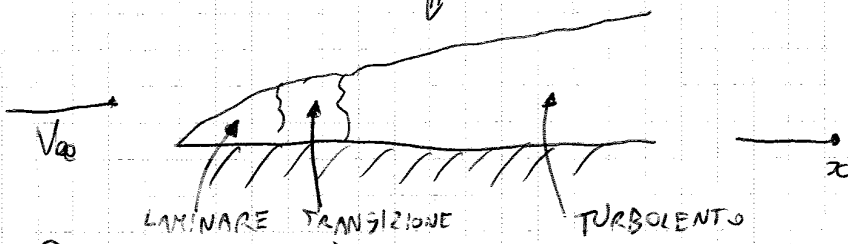


Per studiare i profili di velocità si possono usare sonde pneu-  
matiche velocimetriche (tipo Pitot). si osservano  
profili di velocità diversi

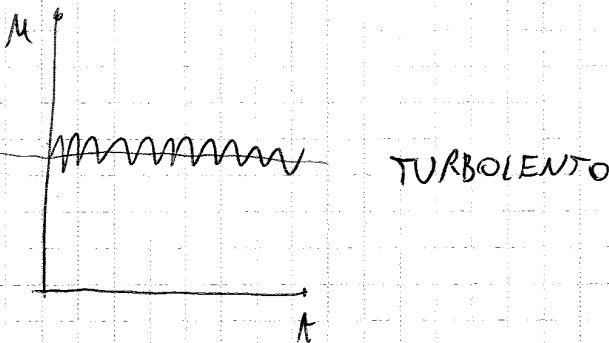
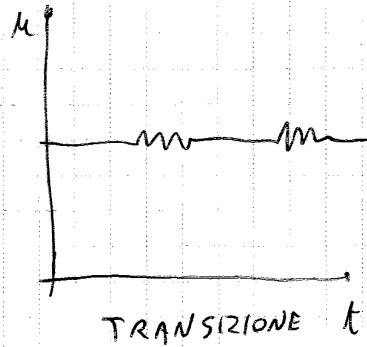
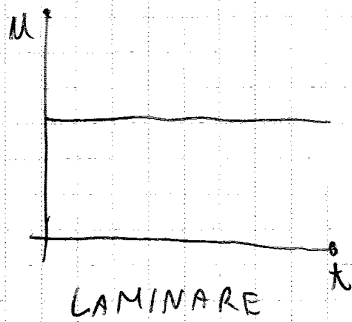


Per una placca piana:

↓ dall'esterno in regime incomprimibile  $V = V_0$



Diagrammi  $\mu$  e  $t$



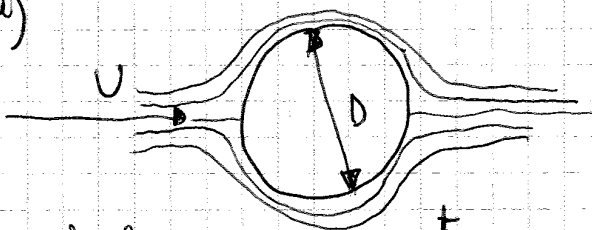
Posso valutare il Reynolds con  $x$ .

$$Re_x = \frac{V \cdot x}{\nu}$$

il Reynolds critico si ha per  $Re_x = 5 \cdot 10^5$

- Supponiamo ora di avere un cilindro  $2D$  investito da una corrente

a)



$$Re_D = \frac{V \cdot D}{\nu}$$

⇐ Vediamo il caso  $Re \ll 4$

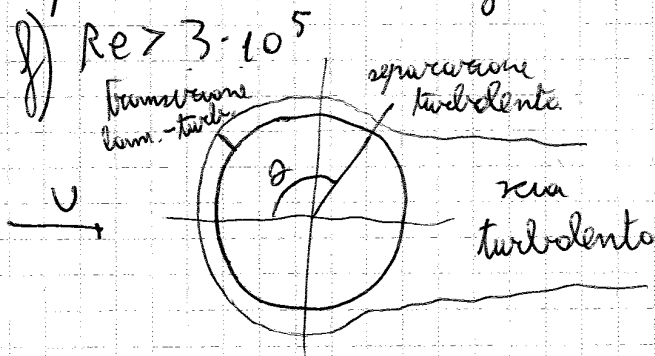
Le linee di corrente seguono perfettamente il cilindro (si richiudono perfettamente)



a creare una SCIA TURBOLENTA. Si ha separazione LAMINARE ma scia TURBOLENTA

In questi casi si ha  $C_d$  molto elevato perché non si ha recupero di pressione elevato a valle

Per calcolare la frequenza di shedding si deve ricorrere a Zettou  $\Rightarrow$  non è generale.



Questo limite subisce una separazione nella parte anteriore da laminare a turbolento, si ha strato limite

limite turbolento necessariamente e poi separazione con  $\alpha > 90^\circ$ ; si viene a generare scia turbolenta molto più chiusa  $\Rightarrow$  maggior recupero di pressione  $\Rightarrow C_d$  minore rispetto a e)

• Prendiamo le eq. di Navier-Stokes

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{V}$$

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{V} + \frac{\nu}{3} \nabla(\nabla \cdot \vec{V})$$

$$\rho \frac{De}{Dt} = k \nabla^2 T - \rho \nabla \cdot \vec{V} + D$$

Molte volte si ricorre ad un sistema di equazioni MEDIANTE alla REYNOLDS; si ricorre alle equazioni RANS (Reynolds averaged Navier-Stokes equations)

Ma vedremo queste equazioni per il caso INCOMPRESSIBILE:

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{v} + \vec{v}') &= 0 \\ \rho \left[ \frac{\partial (\vec{v} + \vec{v}')}{\partial t} + (\vec{v} + \vec{v}') \cdot \nabla (\vec{v} + \vec{v}') \right] &= -\nabla(\bar{p} + p') + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 (\vec{v} + \vec{v}') \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla \cdot \vec{v} &= 0 \\ \rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} + \vec{v}') \cdot \nabla (\vec{v} + \vec{v}') \right] &= -\nabla \bar{p} + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{v} \end{aligned} \right.$$

Li accorgiamo che la rottura è la stessa della forma non mediata a parte per il termine convettivo, perciò possiamo scrivere:

$$\nabla \cdot (\vec{v} \vec{v}) = \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} + \vec{v} (\nabla \cdot \vec{v}) \Rightarrow$$

$= 0 \text{ se } \rho = \text{cost}$

$$\Rightarrow \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \nabla \cdot (\vec{v} \vec{v})$$

Possiamo scrivere:

$$\nabla \cdot (\vec{v} \vec{v}) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i \cdot u_j) \Rightarrow$$

passando in componenti

con  
 $i = 1, 2, 3$   
 $j = 1, 2, 3$

Nel caso cartesiano

$u_1 = u$	$x_1 = x$
$u_2 = v$	$x_2 = y$
$u_3 = w$	$x_3 = z$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i \cdot u_j})$$

per Reynolds abbiamo

$$\begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i + u'_i \\ u_j &= \bar{u}_j + u'_j \end{aligned}$$

$$\overline{u_i \cdot u_j} = \overline{(\bar{u}_i + u'_i)(\bar{u}_j + u'_j)} = \bar{u}_i \bar{u}_j + \bar{u}_i u'_j + u'_i \bar{u}_j - u'_i u'_j =$$

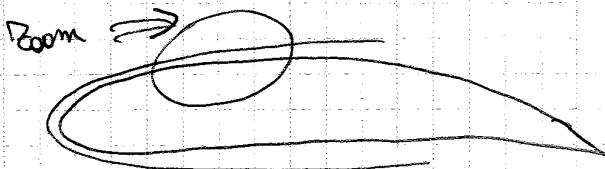
Andiamo ora a risolvere le equazioni di PRANDTL per lo strato limite. Partiamo dalle equazioni di Navier - Stokes per caso stazionario, incomprimibile, plano 2D

Le risolveremo per componenti, non in notazione vettoriale:

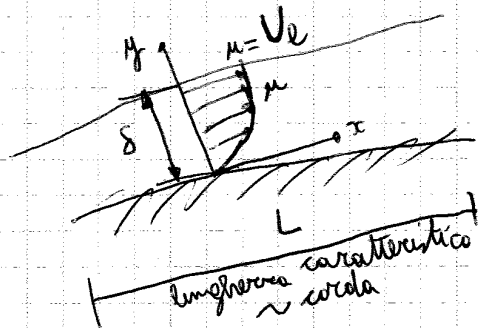
$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ 2) \quad \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \quad \mu \frac{\partial v}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{array} \right.$$

Partiamo da questo che valgono anche al di fuori dello strato limite

Consideriamo ora un profilo alare:



zoomiamo la parte dorsale:



Abbiamo

$\delta \ll L$ : possiamo quindi trascurare alcuni termini ( $\delta$  = spessore strato limite)

Partiamo dalla 1), abbiamo che le varie variabili sono dello stesso ordine di grandezza di:

$$\begin{array}{l} u \sim U_e \\ x \sim L \\ y \sim \delta \\ v \sim \frac{U_e \delta}{L} \end{array}$$

Utilizzando la  $\delta \ll L$  possiamo trascurare alcuni termini dalle 1) e 2)

Infatti, da 1):  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

stesso ordine di  $\frac{U_e}{L}$  e  $\frac{v}{\delta} \Rightarrow v \sim \frac{U_e \cdot \delta}{L}$

non posso trascurare nulla

Vediamo ora di semplificare le 2):

$$\frac{V_e^2 \delta}{L^2} \quad \frac{V_e^2 \delta}{L^2} \quad \frac{V_e^2}{\delta} \quad \frac{V_e \delta^2}{L} \quad \frac{V_e}{L \delta}$$

stesso ordine  
 ordine diverso e superiore  
 ordine diverso e inferiore rispetto al secondo

Restano solamente:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

pressione, rimane costante e minima  
 in  $L$  alla parete

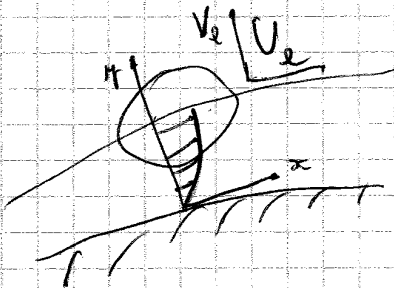
Ricapitolando:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \quad (*) \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \Rightarrow p = p(x) \end{aligned} \right.$$

EQUAZIONI  
 DI  
 PRANDTL per lo  
 STRATO LIMITE  
 caso 2D, incompressibile  
stazionario

- Se noi quindi misuriamo la pressione statica a parete, otteniamo la pressione per tutti i punti perpendicolari in quel punto alla parete.

Scriviamo ora l'eq. di bilancio p.d.m per la zona in cavallo tra stato limite e zona esterna

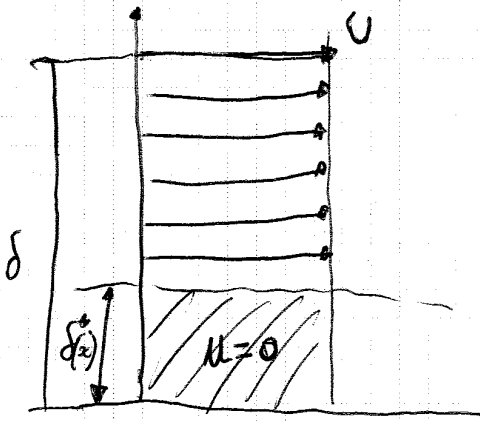


$$V_e \frac{\partial V_e}{\partial x} + V_e \frac{\partial V_e}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}$$

Vi sono termini trascurabili:

- quelli dovuti alla viscosità che nella zona esterna è trascurabile;

- $\frac{\partial V_e}{\partial y} \cdot V_e$ :  $V_e$  è piccolo e  $V_e$  non varia lungo  $y$  (cammino piatto);



Avremo però anche un deficit di qdm:

$$\delta = \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \cdot \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

SPESSO RE DI  
QUANTITÀ DI MOTO

Con questi due concetti e la parete portata posso ricomporre il tutto a flusso non viscoso.

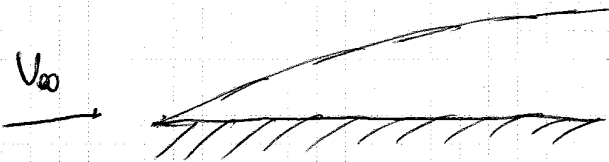
Introduciamo anche

$$H(x) = \frac{\delta^*(x)}{\theta(x)}$$

FATTORE DI FORMA

H è molto importante; nel caso di PLACCA PIANA investita SENZA INCIDENZA (no gradienti di pressione)

nel caso di strato limite laminare si ha



$$H_{lam} = 2,605$$

nel caso turbolento:

$$H_{turb} = 1,3$$

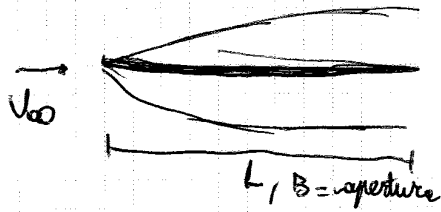
Dal valore di H si riesce quindi a capire (per una placca piana) se il flusso è laminare o turbolento

Ricordiamo la legge di Newton

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

Possiamo quindi identificare lo SFORZO TANGENZIALE A PARETE.

Per il caso di placca piana

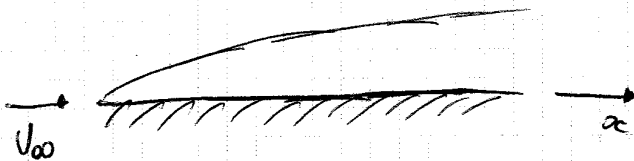


$$S_w = 2L \cdot B$$

Inoltre si ha:

$$Re_x = \frac{U \cdot x}{\nu}$$

NUMERO DI REYNOLDS LOCALE



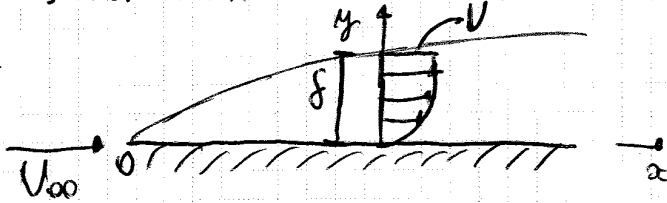
oppure, in base a  $\theta$ :

$$Re_\theta = \frac{U \cdot \theta}{\nu}$$

per tutta la lamina L

$$Re_L = \frac{U \cdot L}{\nu}$$

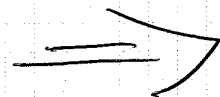
- Applichiamo tutti questi concetti al caso particolare di STRATO LIMITE SU PLACCA PIANA INVESTITA SENZA INCIDENZA:



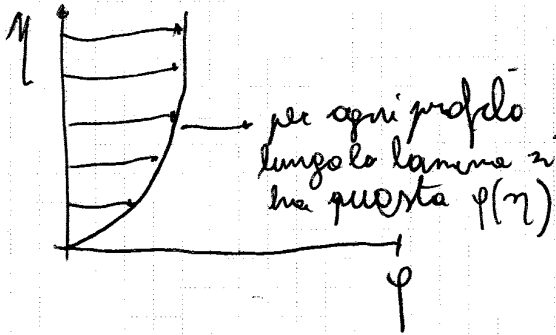
Convenzionalmente si prende

$$\delta = \text{per lo strato limite} = y: u = 0,99 U$$

Si fa così perché è molto difficile andare a trovare sperimentalmente il punto in cui  $u = U$  (la velocità si avvicina infatti al valore  $U_e$  asintoticamente)



3 profili di velocità divergono tutti uguali  $\Rightarrow$  si ottiene la SELF-SIMILARITY e i profili sono detti PROFILI AUTOSIMILI



3 profili si impacchettano l'uno sopra l'altro

È di notevole importanza questo fatto: sapendo  $U$  e  $\delta(x)$  si possono ricavare i profili per ogni punto della lamina.

Nel caso di strato limite turbolento per osservare self-similarity si deve lavorare a fissato numero di Reynolds

Nel caso di strato limite LAMINARE:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases}$$

Il signor Blasius ha trovato le soluzioni per questo caso (ricordiamo lamina piana ad  $\alpha=0$ )

SOLUZIONI:

$$\psi = \frac{u}{U}$$

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)}$$

$\eta$	$\psi_B$
0	0
0,1	0,166
0,2	0,330
0,3	0,487
0,4	0,630
0,5	0,751
0,6	0,846
0,7	0,913
0,8	0,956
0,9	0,979
1,0	1,000

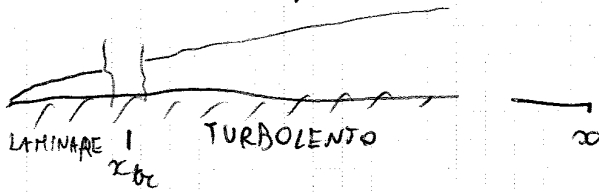
Li ha  $\eta=1$  per  $y = \delta(x)$ , ovvero quando  $u = 999U \Rightarrow \psi_B = 0,999$

Per il flusso turbolento questo discorso non si può fare

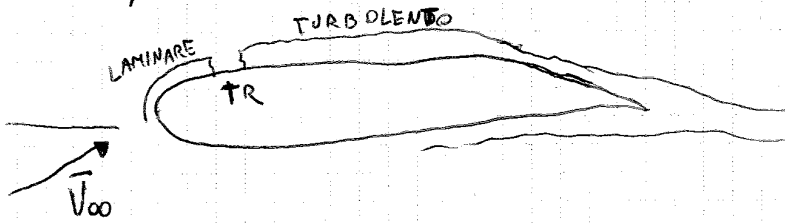
• TRANSIZIONE NELLO STRATO LIMITE: la transizione avviene per

$$Re_{x_{TR}} = 5 \cdot 10^5 \quad \text{per lamina piana}$$

Prendiamo un profilo (prima però una lamina)



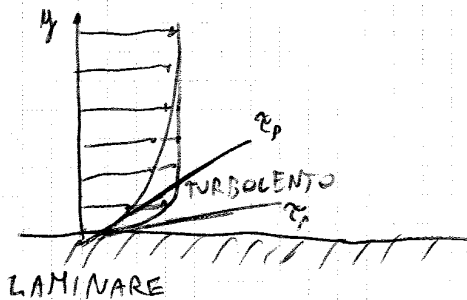
Ora il profilo



Oramai il punto di transizione non si avrà più per

$$Re = 5 \cdot 10^5$$

È importante conoscere il passaggio da strato limite laminare a turbolento; prendiamo una parete e disegniamo i profili di velocità:



Valutiamo  $\tau_p$  nei due casi:

$$\tau_p = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$$

Nel caso turbolento lo sforzo di attrito risulta più forte che nel caso laminare  $\Rightarrow$  se aumentiamo il tratto laminare ritardando la transizione diminuiamo la resistenza (nono stati inventati i profili laminari che lavorano solo in regime laminare e si usano per gli alianti; in questi profili viene portato più a valle il punto di massimo spessore).

Vediamo ora i fattori che influenzano la transizione in uno strato limite; essi sono:

- a) Numero di Reynolds  $Re_x = \frac{Ux}{\nu}$
- b) gradienti di pressione
- c) rugosità della superficie (rendendo rugoso favoro la transizione)
- d) aspirazione o soffiatura
- e) temperatura a parete



### EQUAZIONI per lo STRATO LIMITE TURBOLENTO

Supponiamo di essere in caso 2D, stazionario e incompressibile  
 Le equazioni possono essere scritte così:

$$\begin{aligned}
 a) & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \\
 b) & \\
 c) &
 \end{aligned}$$

Questo sistema è overcond per calcolare lo strato limite turb.  
 $\Rightarrow$  ricorriamo alla DECOMPOSIZIONE alla REYNOLDS

$$\begin{aligned}
 u &= \bar{u} + u' & \bar{u}' &= 0 \\
 v &= \bar{v} + v' & \bar{v}' &= 0 \\
 p &= \bar{p} + p' & \bar{p}' &= 0
 \end{aligned}$$

Elaboriamo le equazioni partendo da b):

$$\rho \left[ u \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

ho sommato  
la a) due volte  
e annulla

da cui:

$$\rho \left( 2u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

li accorgiamo che:

$$\begin{cases} 2u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial (u^2)}{\partial x} \\ u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial (uv)}{\partial y} \end{cases}$$

da cui

$$\rho \left[ \frac{\partial (u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\rho \left[ \underbrace{\bar{\mu} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)}_{=0} + \bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{\nu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial}{\partial x} (-\rho \overline{u'v'}) \right) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \overline{u'v'})$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0$$

Mostriamo che

$$\frac{\partial}{\partial x} (-\rho \overline{u'v'}) \text{ e } \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \overline{u'v'})$$

sono due delle componenti del tensore di Reynolds  
 Inoltre siamo nel caso di strato limite con  $\delta \ll L \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$

Quindi

$$\left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \right. \quad a')$$

$$\left\{ \rho \left( \bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{\nu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \overline{u'v'}) \right. \quad b')$$

Si vede che, rispetto ad a) e b), a') e b') presentano i valori mediati più la componente del tensore di Reynolds  
 Applicando il modello di BOUSSINESQ otteniamo

$$-\rho \overline{u'v'} = \mu_T \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad \text{con } \mu_T = \text{viscosità TURBOLENTA}$$

Possiamo dire che

$$\tau = \underbrace{\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}}_{\text{forza viscosa}} + \underbrace{\mu_T \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}}_{\text{forza di Reynolds}} = (\mu + \mu_T) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

Sostituendo abbiamo

Ordine dei comportamenti diversi a seconda delle regioni che considero 'spontaneamente' da parete

- a)  $0 \leq y^+ \leq 5 \Rightarrow u^+ = u^+ \Rightarrow$  vicino al SOTTOSTRATO VISCOSO (VISCOUS SUBLAYER)
- b)  $5 < y^+ < 50 \Rightarrow$  ZONA DI RACCORDO (BUFFER LAYER)
- c)  $50 < y^+ < 500 \div 1000 \Rightarrow$  REGIONE LOGARITMICA, dove  
 estensione dipende da  $Re$ ;  $Re$  + alto  $\Rightarrow$  regione più estesa  
 $u^+ = \frac{1}{k} \ln y^+ + C$ , con  $k$  e  $C$  costanti.

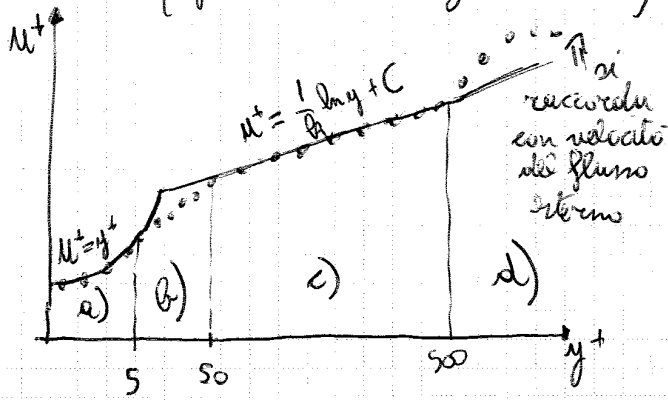
tipicamente si ha

$k =$  costante di von Karman  $= 0,41$

$C \approx 5$

- d)  $y^+ > 500 \div 1000 \Rightarrow$  REGIONE ESTERNA (OUTER)

Utilizzando questo scaling per lo strato limite turbolento abbiamo ( $y^+$  in scala logaritmica)



Ma blu abbiamo riportato i punti del profilo medio misurato mediante sonde  
 Per ogni esperimento è fissato  $Re$  in regime turbolento i punti in cadremo sempre nelle linee del grafico  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  ho self similarity anche in questo caso ma a fissato  $Re$ ; se aumenta  $Re$  la zona c) si porta più a destra

Possiamo in questo caso scrivere:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial \tau}{\partial y} \end{cases}$$

no gradienti di pressione; consideriamo le espressioni mediate anche se non abbiamo meno il -

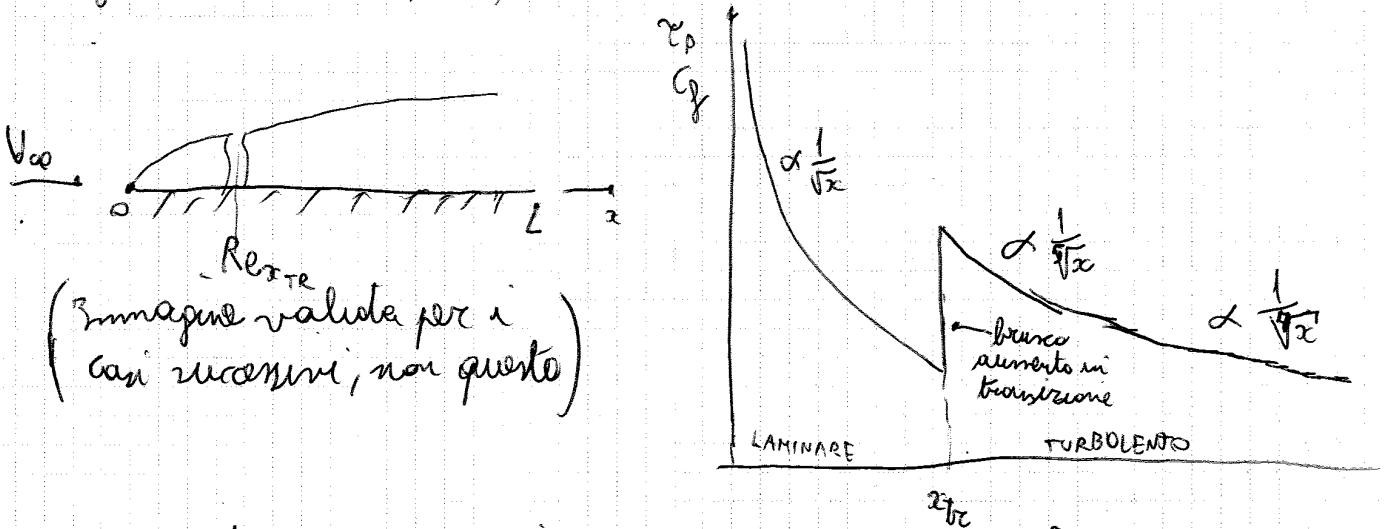
e a troviamo le soluzioni per  $5 \cdot 10^5 < Re < 10^7$

$$C_f(x) = \frac{0,023}{(Re_x)^{1/4}}$$

$$\bar{c}_f = 0,0134 \rho U^2 \left( \frac{U}{U \cdot L} \right)^{1/4} = \frac{0,0134 \rho U^2}{(Re_L)^{1/4}}$$

$$C_D = \frac{0,0285}{(Re_L)^{1/4}}$$

Diagrammiamo  $c_f(x)$ ; abbiamo:



Lo sa succede ad una lamina in regime transizionale? Come calcoliamo i vari parametri?

• Vediamo il caso di LAMINA PIANA CON TRANSIZIONE IMPOSTA O CON TRANSIZIONE NATURALE. DIAGRAMMA  $C_D - Re$

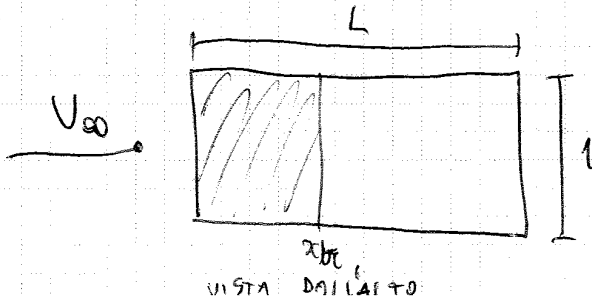
a) Supponiamo la transizione mediante soffiatura oppure rugosità

CASO LIMITE:  $x_{tr} = 0 \Rightarrow$  strato lim tutto turbolento  $\Rightarrow$  lo sappiamo già trattare

$x_{tr} = L \Rightarrow$  laminare

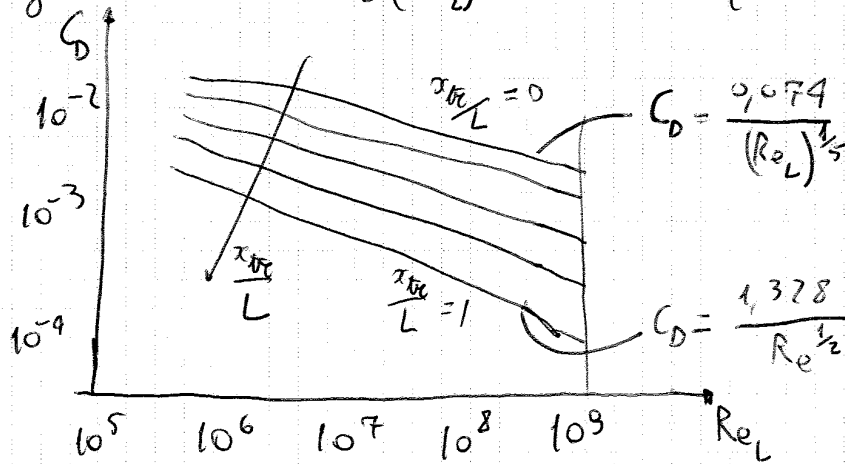
$\Rightarrow$  lo sappiamo già trattare

CASI INTERMEDI: supponiamo la lamina di apertura unitaria e consideriamo  $D = D$  tutto turbolento inizialmente ( $x_{tr} = 0$ )



Proponiamo  $x_{tr}$   
 Il  $D$  tutto turb. togliamo la resistenza dovuta al tratto  $0 - x_{tr}$ , sostituendola col contributo laminare:

Diagrammando  $C_D(Re_L)$  abbiamo (scale logaritmiche):



Si può quindi operare praticamente a via formula (quella cerchiata) (2)

b) la transizione è naturale, possiamo riprendere la (1) e ricordare che

$$\frac{x_{tr}}{L} = \frac{Re_{x_{tr}}}{Re_L} \quad \text{da cui}$$

$$C_D = \frac{0,074}{(Re_L)^{1/5}} - \frac{Re_{x_{tr}}}{Re_L} \left[ \frac{0,074}{(Re_{x_{tr}})^{1/5}} - \frac{1,328}{(Re_{x_{tr}})^{1/2}} \right]$$

Sappiamo che in questo caso vale:

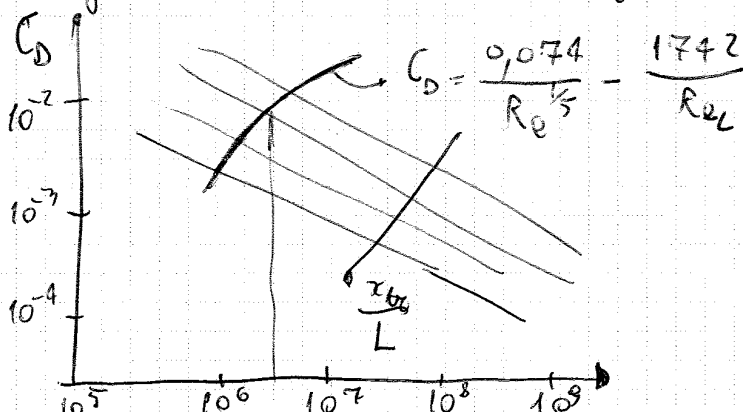
$$Re_{x_{tr}} = 5 \cdot 10^5$$

otteniamo:

$$C_D = \frac{0,074}{Re_L^{1/5}} - \frac{5 \cdot 10^5}{Re_L} \left[ \frac{0,074}{(5 \cdot 10^5)^{1/5}} - \frac{1,328}{(5 \cdot 10^5)^{1/2}} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_D = \frac{0,074}{(Re_L)^{1/5}} - \frac{1,742}{Re_L}$$

Diagrammando otteniamo (curva in blu)



Analogo:

$$C_{D,inc} = C_{D,inc}(Re_{Loo}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{D,comp} = C_{D,inc}(Re_{Loo}) \chi\left(M_{\infty}, \frac{T_p}{T_{\infty}}\right)$$

e anche:

$$\overline{C_{p,comp}} = \overline{C_{p,inc}}(Re_{Loo}) \cdot \chi\left(M_{\infty}, \frac{T_p}{T_{\infty}}\right)$$

Per lo strato limite termico è necessario anche calcolare il NUMERO DI PRANDTL:

$$Pr = \frac{\mu \cdot c_p}{k}, \text{ con } k = \text{coeff di conducibilità termica}$$

Dimensionalmente  $[k] = \frac{W}{m \cdot K}$

Il Prandtl lo possiamo riscrivere come

$$Pr = \frac{\mu/\rho}{k/\rho c_p} = \frac{\nu}{\alpha}$$

con  $\alpha = \frac{k}{\rho c_p} = \text{DIFFUSIVITÀ TERMICA}$ ;  $[k] = [\nu] = \frac{m^2}{s}$

Osserviamo che la  $\nu$  = viscosità cinematica è anche detta DIFFUSIVITÀ VISCOSA. Per l'aria si ha

$$Pr = 0,71$$

Quando si ha  $Pr = 1$  i processi diffusivi termici e cinematici avvengono alla stessa velocità; quindi:

$$Pr = 1 \Rightarrow \nu = \alpha \Rightarrow \delta = \delta_t$$

Per flusso esterno allo strato limite si conserva l'entalpia d'arresto  $H$ :

$$H = h + \frac{V^2}{2} = h_e + \frac{V_e^2}{2} = \text{costante}$$

da ciò si ha anche:

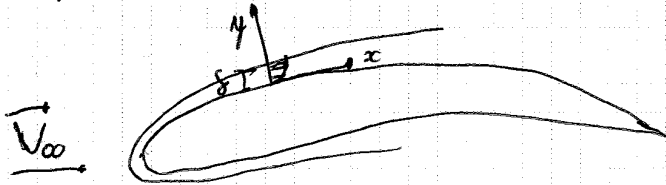
$$T^0 = T \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right) = \text{cost}$$

Analogamente si può ricavare

$$\chi_{\text{turb}} = \left( 1 + R \frac{\gamma - 1}{2} \frac{3}{4} M_{\infty}^2 \right)^{-0,65}$$

valida per parte  
adiabatica e s.l. turbolento

- Preprendiamo il nostro profilo e consideriamo i gradienti di pressione



All'ingegnere non gliene  
folte un corso di cosa succede  
punto per punto lungo la  $y$   
ma gli interessano più che  
altro le grandezze integrate  
 $\delta, \delta^*, H, \theta$

Formuliamo quindi ~~la~~ l'equazione integrale per lo strato limite  
- ritornando al caso di fluido incompressibile e esterno, vogliamo  
passare da  $\mu, v, \rho$  a  $\delta, \delta^*, \theta, H$ . Per fare ciò riprendiamo  
le equazioni di Prandtl in cui compare  $U_e$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases}$$

Ricordiamo  
 $U_e \frac{dU_e}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}$

Integriamo queste equazioni lungo  $y$  tra 0 e  $\infty$

$$\int_0^{\infty} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} - U_e \frac{dU_e}{dx} \right) dy = \nu \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy$$

Ricordando che  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  e  $\tau_p = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$  otteniamo:  
2° membro)

$$\nu \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy = \frac{\mu}{\rho} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \right]_0^{\infty} = \frac{\mu}{\rho} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=\infty} - \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \right] = -\frac{\tau_p}{\rho}$$

$= 0$

1° membro) abbiamo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \int_0^y \frac{\partial v}{\partial y} dy = - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy = v ; \text{ sostituendolo}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (U_e^2 \vartheta) + U_e \delta^* \frac{dU_e}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho}$$

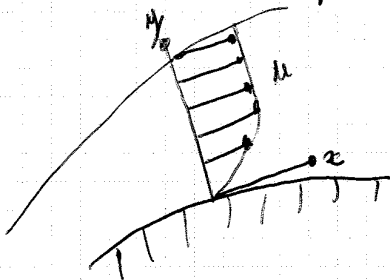
equazione integrale per lo strato limite. le variabili sono  $\vartheta$ ,  $\delta^*$  e  $\tau_p$ .

La velocità esterna è un parametro che deve essere noto. Facendo l'integrazione lungo  $y$  ci siamo ridotti a 3 incognite, ci sono dei metodi che permettono di aggiungere altre equazioni per ridurre il sistema passando alle incognite  $\vartheta$ ,  $H$  e  $C_f$ ; queste equazioni aggiuntive sono però differenti a seconda che lo strato limite sia laminare o turbolento.

• Abbiamo visto l'equazione integrale per lo strato limite:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases}$$

Se ci inerzia la parete



Integrando nell'asse  $y$  si ha:

$$\frac{d}{dx} (U_e^2 \vartheta) + U_e \delta^* \frac{dU_e}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho} \quad \begin{matrix} \text{incognite} \\ \vartheta, \delta^*, \tau_p \end{matrix}$$

3 incognite e 1 equazione  $\Rightarrow$  dobbiamo aggiungere equazioni ausiliarie; facciamo prima però comparire nell'equazione  $H$ ,  $\vartheta$  e  $C_f$ :

$$\frac{d}{dx} (U_e^2 \vartheta) = U_e^2 \frac{d\vartheta}{dx} + \vartheta \frac{dU_e^2}{dx} = U_e^2 \frac{d\vartheta}{dx} + 2U_e \vartheta \frac{dU_e}{dx}$$

ostituendo abbiamo:

$$U_e^2 \frac{d\vartheta}{dx} + 2U_e \vartheta \frac{dU_e}{dx} + U_e \delta^* \frac{dU_e}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho}$$

dividendo per  $U_e^2$

$$\frac{d\vartheta}{dx} + 2 \frac{\vartheta}{U_e} \frac{dU_e}{dx} + \frac{\delta^*}{U_e} \frac{dU_e}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho U_e^2}$$

ricordiamo

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2} \rho U_e^2}$$

$$\frac{d\vartheta}{dx} + \frac{\vartheta}{U_e} \frac{dU_e}{dx} \left[ 2 + \frac{\delta^*}{\vartheta} \right] = \frac{C_f}{2}$$



$$\frac{U_e}{\nu} \frac{d\theta^2}{dx} = 0,45 - 6\theta^2 \quad (3) \quad \left( \begin{array}{l} \text{ottenute} \\ \text{sperimentalmente} \end{array} \right)$$

Confrontando 2 e 3 si osserva che:

$$l = 0,225 \quad H = 1$$

È strano notare che  $H$  sia costante e  $\approx 1$ ; per la lamina piana avremmo trovato  $H = 2,608$  per strato limite laminare; in realtà  $H$  va a compensare le variazioni di  $\nu$  (le variazioni di  $\nu$  vanno compensate dalle variazioni di  $H \Rightarrow$  giustificato dal tutto dalla teoria). Riprendendo la (3) si ha:

$$\frac{U_e}{\nu} \frac{d\theta^2}{dx} = 0,45 - 6\theta^2 \frac{dU_e}{dx} \quad \text{Moltiplicando per } U_e^5$$

$$\frac{U_e^6}{\nu} \frac{d\theta^2}{dx} = 0,45 U_e^5 - 6 \frac{\theta^2 U_e^5}{\nu} \frac{dU_e}{dx} \quad \text{ovvero}$$

$$\frac{U_e^6}{\nu} \frac{d\theta^2}{dx} = 0,45 U_e^5 - \frac{\theta^2}{\nu} \frac{dU_e^6}{dx} \quad \text{ovvero}$$

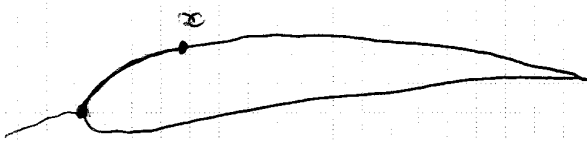
$$\frac{U_e^6}{\nu} \frac{d\theta^2}{dx} + \frac{\theta^2}{\nu} \frac{dU_e^6}{dx} = 0,45 U_e^5 \quad \text{ovvero}$$

$$\frac{1}{\nu} \frac{d}{dx} (\theta^2 U_e^6) \quad \text{da cui}$$

$$\frac{d}{dx} (\theta^2 U_e^6) = 0,45 \nu U_e^5 \quad \text{integrando tra } 0 \text{ e } x$$

$$\theta^2(x) U_e^6(x) - \underbrace{\theta^2(0) U_e^6(0)}_{\text{nel bordo d'attacco}} = 0,45 \nu \int_0^x U_e^5(x') dx' \quad (4)$$

Osservando il nostro profilo analizziamo  $\theta(0)$  e  $U_e(0)$



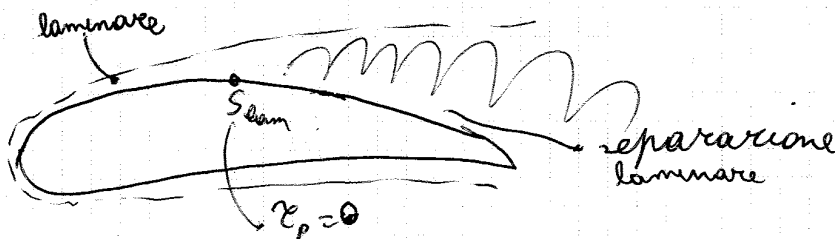
Supponiamo di avere un bordo d'attacco arrotondato

Averemo un  $\theta(0) \neq 0$  ma  $U_e = 0$

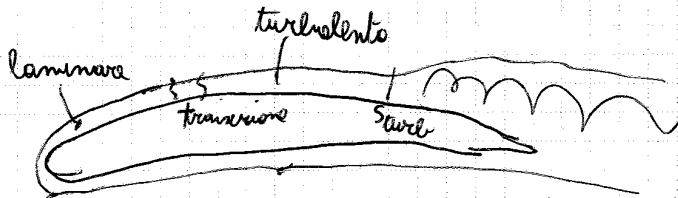


$l(z)$  e  $H(z)$ ; ricordando che  $l = \frac{1}{2} C_f Re_\delta$  si calcola il  $C_f$  e dopo il  $z_p$ ; ricordando che  $H(z) = \frac{\delta^+}{\delta}$  si calcola  $\delta^+ \Rightarrow$  abbiamo calcolato  $C_f, \delta$  e  $H \Rightarrow$  problema risolto.

Dobbiamo arrestare il calcolo se il flusso diventa turbolento o se si separa: la separazione si ha se  $z_p = 0$  o  $C_f = 0$ , ovvero se  $l = 0$ ; se  $l = 0$  dobbiamo fermare il calcolo.



Se si ha transizione si ha poi separazione turbolenta; stoppo i calcoli alla transizione.



## b) EQUAZIONE INTEGRALE DELLO STRATO LIMITE (TURBOLENTO) - METODO DI

HEAD (per lo s.l. turb.)

L'equaz. integrale trovata prima vale anche per il caso turbolento? Noi avevamo trovate le equazioni di Prandtl mediate alla Reynolds:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \\ \rho \left( \bar{u} \frac{d\bar{u}}{dx} + \bar{v} \frac{d\bar{u}}{dy} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \end{cases}$$

con  $\tau = (\mu + \mu_T) \frac{d\bar{u}}{dy}$

Seguendo lo stesso procedimento usate per lo s.l. laminare otteniamo la stessa equazione integrale

$$\frac{d\delta}{dx} + \frac{\theta}{V_e} \frac{dV_e}{dx} [2+H] = \frac{C_f}{2}$$

Combiniamo però le equazioni ausiliarie in quanto nello s.l. turbolento vi sono delle strutture vorticosi