NUMERO: 1917A - ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Pinto Cora

MATERIA: Fisica 1 - Prof. Gliozzi

Fisica

Prof. Antonio GLIOZZI
antonio.gliozzi@polito.it

LAB. 3 Maggio 2013
B2 (LAB 2) 8.30/11.30
DISAT.

Esercitatore Luca DALL'ASTA
luca.dallasta@polito.it
(squadra B)

Libri:

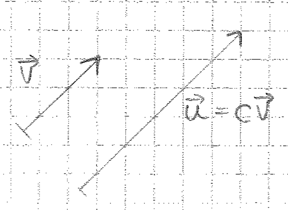
- MAZZOLDI, NIGRO, VOCI
  "Fisica - Vol I - Meccanica e Termodinamica". 2ª ed.
- LONGHI, NISOLI, OSELLAME, STAGIRA
  "Fisica sperimentale. Problemi di meccanica e termodinamica."
  Progetto Leonardo, Bo
- MICHELANGELO AGNELLO
  "Meccanica, Metrologia e termodinamica, esercizi discussi e risolti".
  Clut.

Proprietà:

- **PRODOTTO di un $\vec{v}$ per uno SCALARE** = un altro VETTORE (maggiore)

$\vec{u} = c\vec{v}$

$\vec{u}$ è un vettore // a $\vec{v}$

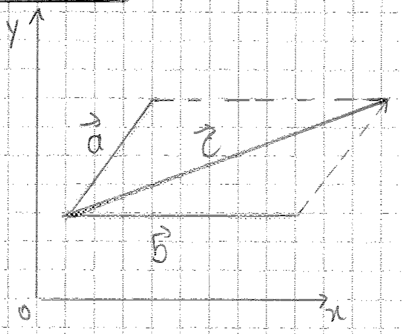


$$|\vec{u}| = \underbrace{|c|}_{se}|\vec{v}|$$

$c > 0 \rightarrow \vec{u} = \text{verso } \vec{v}$

$c < 0 \rightarrow \vec{u} \neq \text{verso } \vec{v}$

- **SOMMA di 2 $\vec{v}$** (metodo del parallelogramma)



$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

↳ risultato della somma (diagonale del parallelo)

$$|\vec{c}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$$

(θ = angolo compreso tra i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$)

NB: se $|\vec{a}| = 2$ e $|\vec{b}| = 3 \Rightarrow \vec{c} = 3+2$? NO! Questo avviene solo se i vettori sono sulla stessa retta

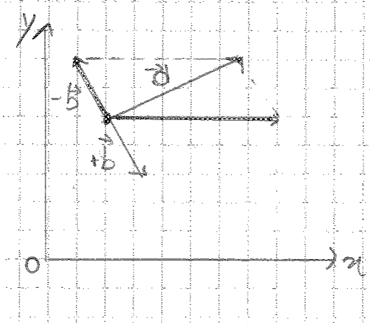
Se scompongo i vettori, trovo un METODO ALGEBRICO per la somma.

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$
$$\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j}$$

$$\Rightarrow (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} = (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j} \qquad \vec{c}\begin{cases} c_x = a_x + b_x \\ c_y = a_y + b_y \end{cases}$$

- **DIFFERENZA TRA DUE VETTORI**

$(\vec{a} - \vec{b}) \Rightarrow$ sommo al vettore $\vec{a}$ l'opposto del vettore $\vec{b}$ $(-\vec{b})$



- **SOMMA DI N VETTORI**

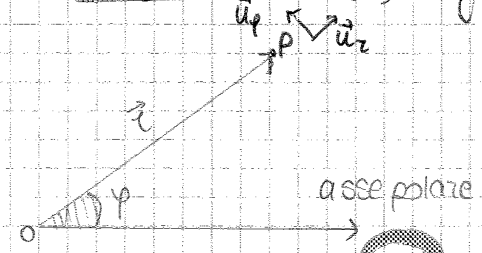
$b_x = a_{1x} + a_{2x} \dots a_{Nx}$

$b_y = a_{1y} + a_{2y} \dots a_{Ny}$

- Si costruisce la spezzata formata dai vettori $a_1, a_2 \dots a_n$
- Unisco gli estremi
- Il vettore che li unisce $\Rightarrow$ la somma

COORDINATE POLARI

es. **VETTORE POSIZIONE** ($\vec{r}$): congiunge l'origine con il punto P.



$\vec{r} = (r_x, r_y)$ $\quad \boxed{\vec{r} = r\hat{u}_r}$

$\hat{u}_r$ = versore nella direzione radicale

$\hat{u}_\varphi$ = versore $\perp$ a $\hat{u}_r$ nella direzione di φ crescente

$\rightsquigarrow$ $\hat{u}_r$ e $\hat{u}_\varphi$ dipendono dalla posizione di P
$\Rightarrow$ sono $\neq$ $\forall$ punto dello spazio

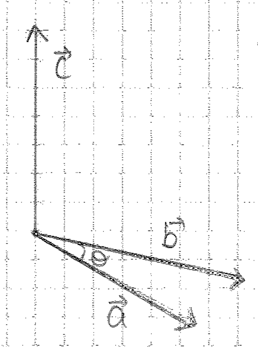
Due valori per trovare P. P = f(φ, $\vec{r}$)

COORDINATE POLARI PIANE

- **PRODOTTO VETTORIALE** (prodotto esterno)

$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{b}$

Caratteristiche di $\vec{c}$:
- MODULO: $ab\sin\theta$ con $\theta < 180°$
- DIREZIONE: $\perp$ al piano di $\vec{a}$ e $\vec{b}$
- VERSO: regola della mano DX

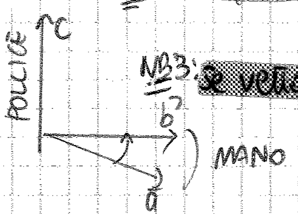


NB: il modulo $\equiv$ **area del parallelogramma** individuato dai 2 vettori

NB2: **il prodotto vettoriale è di della ANTICOMMUTATIVA**

$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$ ma $-\vec{a} \times \vec{b} = +\vec{b} \times \vec{a}$

NB3: **se vettori // $\Rightarrow$ il prodotto vale $\emptyset$**



$\vec{a}$ si sovrappone a $\vec{b}$

CINEMATICA $\rightarrow$ moto di un corpo a prescindere dalle cause

MECCANICA

DINAMICA $\rightarrow$ moto dei corpi + cause

4

- **VELOCITÀ MEDIA**: rapidità con cui avviene lo spostamento tra 2 punti. Media le info. No caratteristic moto.

$$\boxed{v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}}$$

v_m:
- POSITIVA: cresce, il corpo si muove.
- NULLA: corpo fermo.
- NEGATIVA: $\Delta x < 0$ $\Delta t > 0$ (retrocede)

Per essere più precisi analizzo intervalli di tempo più piccoli $\Delta x_1, \dots \Delta x_n$ percorsi in intervalli sempre + piccoli $\Delta t_1, \dots \Delta t_n$

- **VELOCITÀ ISTANTANEA**: rapidità di variazione temporale della posizione nell'istante (t) considerato.

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}} \Rightarrow \boxed{v = \frac{dx}{dt}} \qquad dx = v\,dt$$

NB: se $v > 0 \Rightarrow x$ cresce; $v < 0 \Rightarrow x$ decresce

Integro per calcolare tutte le $\neq$ velocità

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v\,dt$$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

Denoto $x(t_0) = x_0$, $x(t) = x$

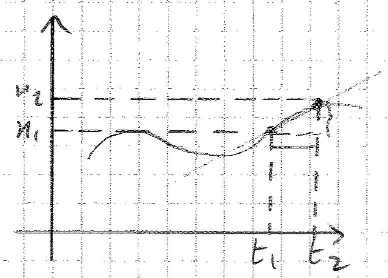
$$x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

$$\boxed{x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt} \rightarrow \text{Calcola lo spazio percorso qualunque sia il moto uniforme}$$

$$v_m = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

RELAZIONE tra v_m e v
$\Rightarrow v_m$ è uguale al valor medio della v istantanea nell'intervallo t considerato

ACCELERAZIONE



- **ACCELERAZIONE MEDIA**

$$\boxed{a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}}$$

- **ACCELERAZIONE ISTANTANEA**:

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt}} \qquad a\,dt = dv \qquad \boxed{a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$

Integro: $\int_{t_0}^{t} a\,dt = \int_0 dv$

$$v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^{t} a\,dt$$

$(v(t_0) = v_0)$

$$\boxed{v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt}$$

$\bar{a}$:
- $> 0 \Rightarrow v$ cresce nel tempo
- $= 0 \Rightarrow$ MU
- $< 0 \Rightarrow v$ decresce nel tempo

NB: è il segno della velocità a dare il senso/verso del moto NON quello di a

DERIVO ↓ | INTEGRO ↑

POSIZIONE	
$x(t)$	$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$
VELOCITÀ	
$v(t) = \frac{dx}{dt}$	$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$
ACCELERAZIONE	
$a(t) = \frac{dv}{dt}$	

Presa l'eq trovata anticipatamente: $x(t) = x_0 + v(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)^2$

Con $t = t_0$ $\quad a = \frac{v - v_0}{t} \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a}$ ↳ sostituisco nell'eq. ↑

$$x - x_0 = v_0 \cdot \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2}a\frac{(v - v_0)^2}{a^2}$$

$$\boxed{x - x_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}}$$

EQUAZIONE DELLA CINEMATICA
DEL ACCELERAZIONE COSTANTE

MOTO VERTICALE

(→ M.U.A)

COSTANTE DI GRAVITÁ $= g = 9.8\ m/s^2$ (← VARIA A SECONDA DELLA DISTANZA DAL SUOLO, infatti è detta ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ)

$\Rightarrow a = \text{cost} = -g$ il segno negativo dipende dal fatto che l'acc è diretto verso il suolo (il basso)

Dalle leggi orarie ricavo che:

- $v(t) = v_0 + a(t - t_0)$ Se $v_0 = 0$ e $t_0 = 0$ $\Rightarrow \boxed{v(t) = -gt}$
- $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$ Se $x_0 = h$ e $v(t) = -gt \Rightarrow x(t) = h + \int(-gt)\,dt$ $\boxed{x(t) = h - \frac{1}{2}gt^2}$

MOTO DI CADUTA IN GRAVITÀ LIBERA

Considerando una situazione in cui manca l'attrito con l'aria ⇒ tutti gli oggetti cadono con la stessa velocità ⇒ $g = 9,8\ m/s^2$ indipendentemente dal loro peso.

qui davvero si parla di COSTANTE DI GRAVITÁ

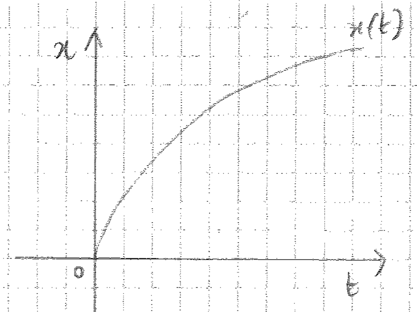
8

- Ricavo la POSIZIONE:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t')\,dt'$$

$$x(t) = x_0 + v_0 \int_{t_0}^{t} e^{-kt'}\,dt'$$

$$x(t) = x_0 + v_0 \left[\frac{e^{-kt}}{-k} \right]_{t_0}^{t}$$ Preso $t_0 = 0$, $x_0 = 0$



$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)}$$

Il punto tende asintoticamente alla posizione v_0/k

la rapidità di variazione di e^{-kt} è in funz di k

+k è grande ⇒ + decrescita rapida
è piccolo ⇒ lenta

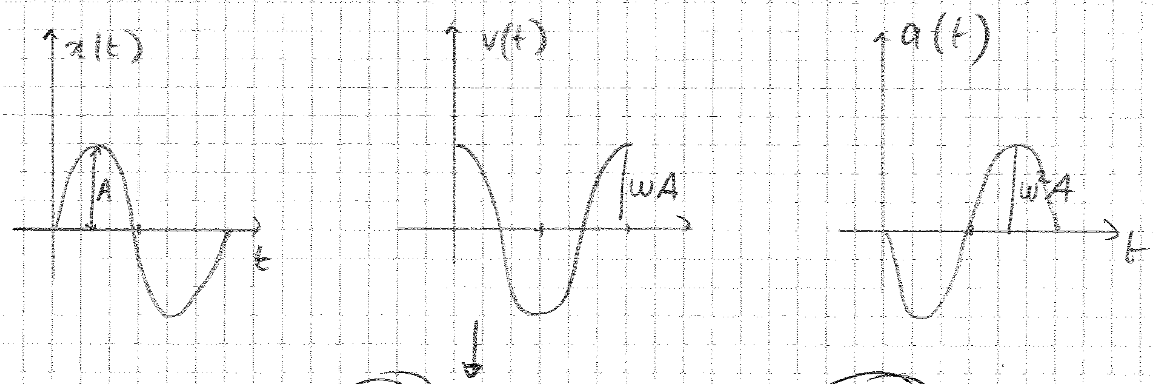
- Ricavo la velocità e l'accelerazione in funzione della posizione:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v} = v\frac{dv}{dx} \Rightarrow a\,dx = v\,dv$$

Risolvo l'eq diff: $\int_{x_0}^{x} a\,dx = \int_{v_0}^{v} v\,dv$ $\quad \int_{x_0}^{x} a(x)\,dx = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2$

$$\Rightarrow \boxed{v^2(x) = v_0^2 + 2a(x - x_0)}$$

* MOTO ARMONICO SEMPLICE



v(t)
valore MAX = origine
si annulla negli estremi

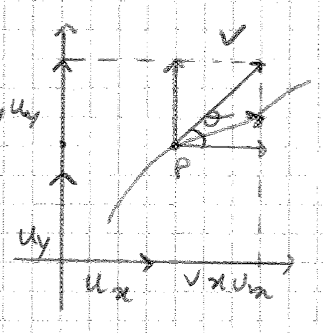
a(t)
si annulla nell'origine
valore MAX = gli estremi

NB = origine = centro di oscillazione

le funz sono SFASATE tra loro.

$v(t)$ è sfasata di $\pi/2$ rispetto $x(t)$ (QUADRATURA IN FASE)
$a(t)$ è sfasata di π " " " (OPPOSIZIONE DI FASE)

· COORDINATE CARTESIANE



POSIZIONE: $\vec{r} = \vec{OP}$ — Scompongo r nelle sue componenti cartesiane

$\vec{r} = x(t)\,\hat{u}_x + y(t)\,\hat{u}_y$

derivo $\vec{v} = \frac{dx(t)}{dt}\hat{u}_x + \cancel{x(t)\frac{d\hat{u}_x}{dt}} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{u}_y + \cancel{y(t)\frac{d\hat{u}_y}{dt}} =$

elimino perché 2 costanti

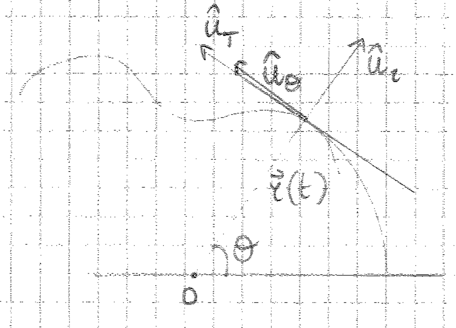
$\Rightarrow \boxed{\vec{V} = \frac{dx}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy}{dt}\hat{u}_y}$

moto in direzione x — moto in direzione y

NB: Con le componenti cartesiane la velocità ha acquistato una altra componente.

$\vec{r} = r\,u_r$ coincide con il raggio vettore scritto in coordinate cartesiane
$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$
Quello espresso con le coord. polari è + "pulito"

· COORDINATE POLARI

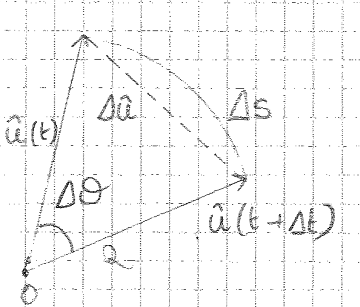


$\vec{r}(t) = r\hat{u}_r$

Derivo: $\vec{V} = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}\hat{u}_r}_{\text{componente della v lungo il versore } \hat{u}_r} + r\underbrace{\frac{d\hat{u}_r}{dt}}_{\text{DERIVATA DI UN VERSORE}}$

↓

Derivata di un VERSORE



Il raggio vettore si muove ⇒ il versore cambia inclinazione e descrive la circ.

Ciò che cambia del versore nel tempo è solo la DIREZIONE. (che varia compiendo una rotazione di angolo $\Delta\theta$)

Al limite $\Delta t \to 0$ la corda Δs tende ad uguagliarsi col $\Delta\hat{u}$

$\Rightarrow d\hat{u} = ds \quad \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{d\hat{u}}{dt}$

$\Delta\bar{u} = \bar{u}(t+\Delta t) - \bar{u}(t)$

Per $\Delta t \to 0 \Rightarrow \Delta\bar{u} \to d\bar{u}$ ($\perp u(t)$)

$|du| = |u(t)|\,d\theta = d\theta$

$d\bar{u} = d\theta\, u_N$

So so che: $S = R\theta$

$\Rightarrow \Delta S = |\hat{u}_r|\,\Delta\theta$

Derivo $\Rightarrow ds = |\hat{u}_r|\,d\theta \qquad \frac{ds}{dt} = |\hat{u}_r|\frac{d\theta}{dt}$

$\hat{u}_N \perp \hat{u}_r$ (N = normale ⇒ sempre ⊥) + essendo $d\hat{u} = ds$

$$\boxed{\frac{d\hat{u}}{dt} = \hat{u}_N \frac{d\theta}{dt}}$$

La derivata di un VERSORE è UN VETTORE (non un versore) con:
- direzione: ⊥ a quello del versore
- modulo pari a: $\frac{d\theta}{dt}$ (in genere ≠ da 1)

↓

$\vec{V} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta$ con $\hat{u}_\theta \perp \hat{u}_r$

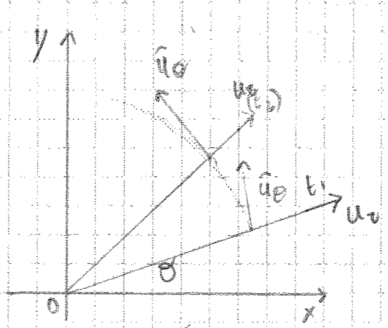
V. RADIALE diretta lungo r, modulo dr/dt

V. TRASVERSA ortogonale a r di modulo $\frac{r d\theta}{dt}$ direzione

$$\boxed{\vec{V} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + \frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta r}$$

12

• COORDINATE POLARI



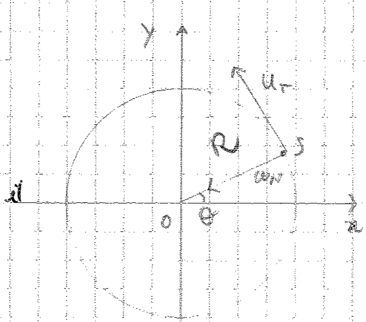
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta}_{\text{def di } v \text{ con COORD. POLARI}}\Big) =$$

↳ Sviluppo la derivata

$$= \frac{d^2r}{dt^2}\hat{u}_r + \frac{dr}{dt}\underbrace{\frac{d\hat{u}_r}{dt}}_{\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta} + \frac{dr}{dt}\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\cancel{\frac{d\hat{u}_r}{dt}}}\hat{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{u}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\underbrace{\frac{d\hat{u}_\theta}{dt}}_{-\frac{d\theta}{dt}u_r} =$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \hat{u}_r\underbrace{\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)}_{\text{ACCELERAZIONE RADIALE }(a_r)} + \hat{u}_\theta\underbrace{\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)}_{\text{ACCELERAZIONE TRASVERSA }(a_\theta)}$$

MOTO CIRCOLARE



- Traiettoria = CIRCONFERENZA (orbita chiusa) } descritto in una sola dimensione
- la VELOCITÀ cambia continuamente direzione
- BIDIMENSIONALE

↳ L'ACC CENTRIPETA è sempre ≠ 0 → agisce una F centripeta sempre diretta verso il centro

• C. CARTESIANE

$$\begin{cases} x(t) = R\cos\theta(t) \\ y(t) = R\sin\theta(t) \end{cases}$$

• C. POLARI

$$\theta(t) = \frac{s(t)}{R}$$

NB: I punti più lontani dal centro della crf hanno una v tangenziale > rispetto a un punto più vicino.

Qui si nota bene: all'aumentare di R aumenta la $\vec{v}$

$\vec{v}$ è un vettore tg alla crf.
ω = velocità angolare

Parto da qui → $s(t)$ = spazio percorso, $\theta(t)$ = angolo sotteso da $s(t)$

$$s(t) = R\theta(t)$$

Derivo: $ds = R\,d\theta$

$$\frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} \qquad \boxed{v = \omega R} = \frac{ds}{dt}$$

ω = velocità ANGOLARE (derivata dell'angolo rispetto a t)

Essendo $\vec{v}$ un VETTORE TG alla crf $\Rightarrow \vec{v} = \frac{ds}{dt}\hat{u}_T = \frac{d\theta}{dt}R\hat{u}_T = \underbrace{R\omega}_{\text{modulo}}\hat{u}_T$

$$\hookrightarrow \omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}$$

VELOCITÀ TRASV. = VELOCITÀ (se l'origine ≡ il centro)

VELOCITÀ ANGOLARE (variazione dell'angolo nel tempo)

VELOCITÀ RADIALE = 0 (raggio vettore costante in modulo)

14

MOTO CIRCOLARE UNIFORME = moto accelerato con accelerazione costante, ortogonale alla traiettoria

- VELOCITÀ = costante in modulo => v, ω costanti
- ACCELERAZIONE
  - → $a_T = 0$
  - → $a = a_N$

Leggi orarie

$$\boxed{\begin{aligned} s(t) &= s_0 + vt \\ \theta(t) &= \theta_0 + \omega t \end{aligned}}$$

$s = s_0$ per $t = 0$

$\theta = \theta_0$ per $t = 0$

Accelerazione

$$\boxed{a = a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R}$$

Periodo

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Sugli assi cartesiani:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= R\cos\theta = R\cos(\omega t + \theta_0) \\ y &= R\sin\theta = R\sin(\omega t + \theta_0) \end{aligned}}$$

MOTO CIRCOLARE NON UNIFORME

- ACCELERAZIONE
  - → $a_T \neq 0$ (variazione del modulo) → no costante
  - → $a_N \neq 0$ (variazione direzione)

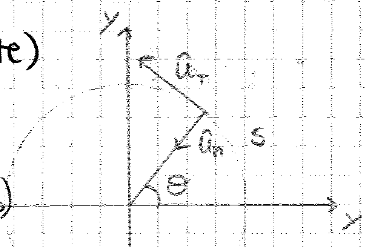
ω varia → ACCELERAZIONE ANGOLARE

$$\boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} = \frac{a_T}{R}}$$

Leggi orarie:

$$\boxed{\begin{aligned} \omega(t) &= \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha(t)\,dt \\ \theta(t) &= \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega(t)\,dt \end{aligned}}$$

• MOTO CIRCOLARE UNIFORME (modulo v costante)



ω = velocità angolare = COSTANTE * (modulo costante)
V = costante

$$\begin{cases} S(t) = S_0 + vt \\ \theta(t) = \theta_0 + \omega t \end{cases}$$

PROIEZIONI SULL'ASSE

$$\begin{cases} x = R\cos\theta = R\cos(\omega t + \theta_0) \\ y = R\sin\theta = R\sin(\omega t + \theta_0) \end{cases}$$

moto armonico ⇒ periodico

→ MOTO PERIODICO: $T = \text{PERIODO} = \dfrac{2\pi R}{V} = \dfrac{2\pi}{\omega}$ (tempo per 1 giro)

$2\pi R$ = spazio x giro
V = velocità

→ ACCELERAZIONE: è normale alla traiettoria.

Parto dalla def di accelerazione (c. intrinseche): $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}\hat{u}_T + \dfrac{v^2}{R}\hat{u}_N$

$$\vec{a} = R\cancel{\frac{d\omega}{dt}\hat{u}_T} + \frac{V^2}{R}\hat{u}_N = \vec{a}_N = \omega^2 R$$

acc in modulo è nulla ⇒ $a = a_N$ ⟶

* derivata di una costante

• MOTO CIRCOLARE UNIFORMEMENTE ACCELERATO

(*) $\dfrac{s(t)}{R} = \dfrac{S_0}{R} + \dfrac{vt}{R} + \dfrac{\frac{1}{2}at^2}{R}$

$\theta(t) = \theta_0 + \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

→ L'accelerazione è definita da 2 COMPONENTI

(*)
$$\begin{cases} \theta(t) = \theta_0 + \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega(t) = \omega_0 + \alpha t \end{cases}$$

(α = accelerazione angolare)

$$\vec{a} = R\frac{d\omega}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{R}\hat{u}_N$$

agiscono due forze → F. TANGENZIALE, F. CENTRIPETA

(θ = rad)

In generale:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}$$

· VELOCITÀ ANGOLARE (rad/s) $\quad \omega(t) = \dfrac{d\theta}{dt} \quad$ se $\omega = k \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \omega t$

· ACC. ANGOLARE (rad/s²) $\quad \alpha(t) = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \dfrac{1}{R}\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{a_T}{R} \Rightarrow a_T = \alpha R \quad$ se $\alpha(t) = k \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

⚠ NOTAZIONE VETTORIALE ⚠

$\vec{\omega}$ = vettore velocità angolare. Definito con:

$|\vec{\omega}| = \dfrac{d\theta}{dt} \qquad \vec{\omega} \perp \vec{r}$

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = |\vec{\omega}||\vec{r}|\cancel{\sin\theta} = \omega R \quad \exists\, \omega = \dfrac{v}{r}$

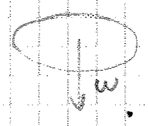
GUARDA pag. 31-32

· DIREZIONE ⊥ al piano della crf
· VERSO dato dalla regola della mano DX
· MODULO → $\dfrac{d\theta}{dt}$
VERSO ORARIO

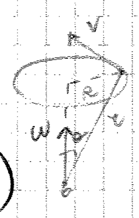
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\vec{\alpha} \times \vec{r}}_{A.TANG} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{v}}_{A.CENTRIP.}$$

$\dfrac{d\vec{v}}{dt}$

ω Applicato al centro della crf. ($r = R$)

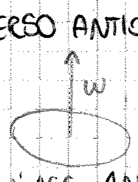


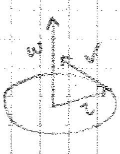
($r \neq R$)



$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega \wedge r) = \frac{d\omega}{dt} \wedge r + \omega \wedge \frac{dr}{dt} \Rightarrow$$

VERSO ANTIORARIO



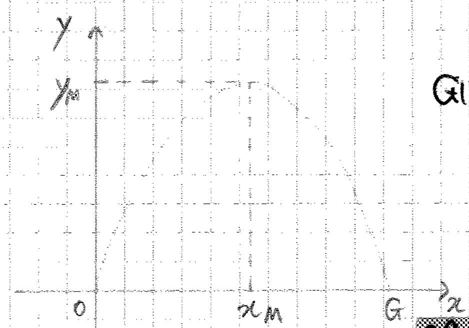


$$\bar{a} = \underbrace{\bar{\alpha} \wedge \bar{r}}_{A\,TANG\;a_T} + \underbrace{\bar{\omega} \times \bar{v}}_{ACC\,CENTRIP.\;a_N}$$

↳ Definisco l'ACC. ANGOLARE: $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$, $/\!/\,\omega$

→ CALCOLO DELLA **GITTATA** e **MAX QUOTA** raggiunta dall'oggetto:

Riprendo la legge (traiettoria) del moto parabolico → $y = x\,tg\theta - \dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2$



• Per il calcolo della gittata impongo $y=0$

GITTATA → (ovvero quando l'oggetto tocca il suolo).

$$x\left(tg\theta - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x\right) = 0$$

$\cos\theta \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

1ª sol ⇒ $x = 0$ (partenza)

2ª sol: $x\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\theta} = tg\theta \qquad x = \dfrac{2v_0^2\cos^2\theta\, tg\theta}{g}$

$$\boxed{x = \frac{2v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}}$$

$(x_G/2)$

ALLORA

NB: $G = 2x_M$ ⇒ Dalla gittata ricavo coordinate della MAX QUOTA:

MAX QUOTA
$$\begin{cases} x = \dfrac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g} = x_M \\ y = \dfrac{v_0^2\sin^2\theta}{2g} = y_M \end{cases}$$

• Angolo di lancio per cui si ha la GITTATA MAX

Condizione: $\dfrac{dx_G}{d\theta} = 0 \Rightarrow \dfrac{2v_0^2}{g}\left(-\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) = 0 \Rightarrow \theta = 45°$, $x_{G\,(max)} = \dfrac{v_0^2}{g}$

• Tempo TOTALE di volo

⇒ tempo necessario a raggiunge G (da o) con $v_x = v_0\cos\theta$

$$t_G = \frac{2x_M}{v_0\cos\theta} = \frac{2v_0\sin\theta}{g} = 2t_M$$

NB: il tempo per raggiungere la quota max e ritornare al suolo coincide con quello per raggiungere G.

$\boxed{\text{FORZA RISULTANTE}} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{R} = m\vec{a} \Rightarrow \sum \vec{a}_i m = m\vec{a}$ → Nonostante agiscano $\neq$ forze, alla fine il corpo si muove come se fosse applicata una sola F.

CONCETTO DI FORZA

la forza è causa del moto ⇒ da questa è possibile ricavare le caratteristiche del moto.

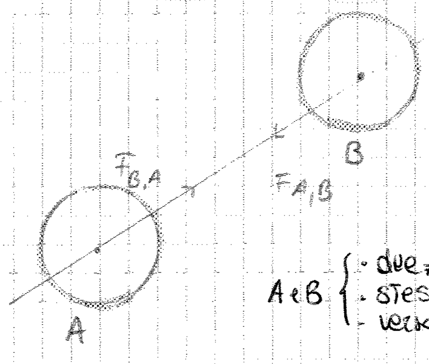
$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Questa è una relazione vettoriale e vale nei sistemi di riferimento inerziali

NB: Questo se i valori di v sono molto minori di c (velocità della luce).

III LEGGE DI NEWTON (PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE)

→ Se un corpo A esercita una forza su un corpo B, allora B esercita su A una forza della stessa intensità, ma di verso opposto.



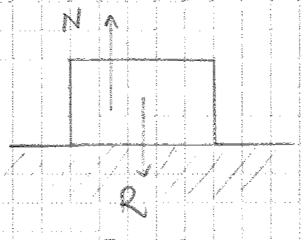
A e B: stessa retta di azione: $F_{A,B} = -F_{B,A}$

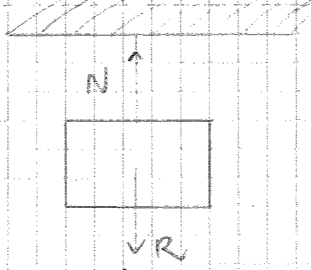
$$|F_{A,B}| = |F_{B,A}|$$

$$|\vec{a}|_B = \frac{|\vec{F}_{B,A}|}{m_B} \qquad |\vec{a}|_A = \frac{|\vec{F}_{A,B}|}{m_A}$$

A e B
- due $\neq$ pti di applicazione
- stessa direzione
- verso opposto

⇒ Se un corpo sottoposto a forze rimane in equilibrio ⇒ deve essere soggetto a una forza di REAZIONE provocata dall'ambiente.





$R + N = 0$

Quando un oggetto è in contatto con una superficie, questa esercita sempre una forza sull'oggetto. La componente di tale forza ⊥ alla sup è la [illegible] (N).

→ Se il corpo è in equilibrio, per la seconda legge di Newton si ha che:

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{N} + \vec{P} = 0 \qquad \vec{N} = m\vec{g}$$

Dove $\vec{P} = m\vec{g}$ = FORZA PESO → Preso un qualsiasi corpo in caduta, questo indipendentemente dalla sua massa inerziale subisce un'accelerazione di gravità

↓

È sempre // alla terra dato il suo enorme raggio terrestre

$|\vec{P}| = 9{,}81\,m/s^2 \qquad \vec{F} = m\vec{a} = m\vec{g}$

NB: In generale la forza normale N non è uguale alla forza peso (anche se la sup è orizzontale).

es. Se oltre a $\vec{N}$ e $\vec{P}$ intervenga un'altra forza ⇒ $\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F} = 0$

TIPI DI FORZE

Le interazioni in natura sono dovute a pochi tipi di INTERAZIONI PRINCIPALI, quelle:

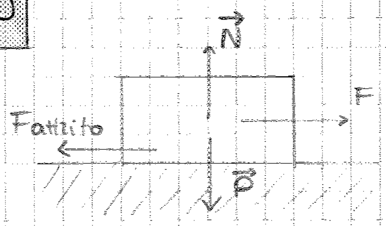
a) GRAVITAZIONALI (10^{-38})
b) ELETTROMAGNETICHE (10^{-2}) — Misure delle interazioni rispetto a quella forte presente fra due protoni a contatto superficiale $(d=1)$
c) NUCLEARI DEBOLI (10^{-7})
d) NUCLEARI FORTI (1)

	ACCELERAZIONE	FORZA
M.R.U	$\vec{a}=0$	$\vec{F}=0$
M.U.A	$\vec{a}=cost$	$\vec{F}=cost$
MOTO VARIO	$\vec{a}=\vec{a}_T+\vec{a}_N$	$\vec{F}=m\vec{a}_T+m\vec{a}_N=F_T+F_N$

NB:
- F_T = responsabile della variazione del modulo di $\vec{v}$
- $\vec{F}_N$ = responsabile variazione della direzione di $\vec{v}$

FORZA DI ATTRITO

- ATTRITO RADENTE STATICO
- ATTRITO RADENTE DINAMICO

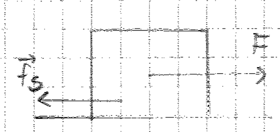


In genere si parla di FORZE DI ATTRITO quando si verifica una resistenza durante il moto di un corpo, il quale scivola su una sup. scabra o si muove in un fluido.

A cos'è dovuto? Al fatto che ogni sup non è MAI del tutto LISCIA ⇒ le imperfezioni impediscono il movimento. Per questo la forza con cui agisco deve superare la RESISTENZA dell'attrito.

OGGETTO FERMO SU UNA SUP SCABRA (con attrito)

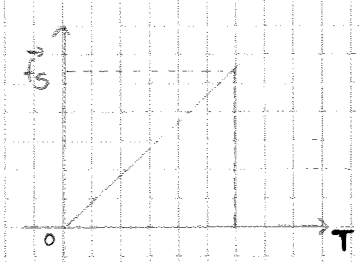
a) Inizio a tirare l'oggetto (orizzontalmente) con una forza che cresce via via.



Finché il corpo non si muove, vale la seguente condizione:

$$\boxed{|\vec{f}_s| = |\vec{F}|} \quad e \quad \sum\vec{F}=0$$

(la risultante delle forze agenti su di esso $=0$)

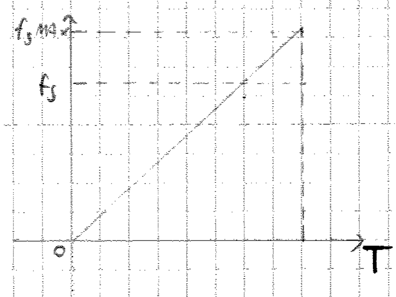


b) Arrivo alla CONDIZIONE LIMITE (dove se aumento ancora la F, il corpo comincia a muoversi).

⇒ CONDIZIONE LIMITE $= \vec{f}_s$ MAX

Questo valore MAX è proporzionale a $\vec{N}$

$$\boxed{\vec{f}_s\,MAX = \mu_s\, N}$$

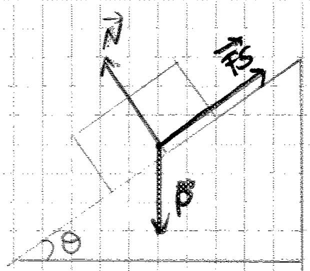


μ_s = coeff di attrito statico $0<\mu_s<1$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 180

② ATTRITO RADENTE STATICO

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_S = 0$$



$$\vec{P} = m\vec{g} \begin{cases} P_x = mg\sin\theta \\ P_y = mg\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} P_x - F_S = 0 \\ N - P_y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} F_S = P_x \\ N = P_y \end{cases}$$

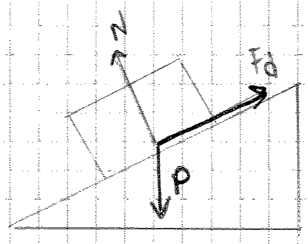
μ_S? So che essendo fermo il corpo $\Rightarrow F_S < \mu_S N$

$mg\sin\theta < \mu_S\, mg\cos\theta$

$\mu_S > \tan\theta$

③ ATTRITO RADENTE DINAMICO

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_d = m\vec{a}$$



$mg\sin\theta - \mu_D\, mg\cos\theta = ma$

$a = g(\sin\theta - \mu_D\cos\theta)$

Se $\mu_D = \tan\theta \Rightarrow a = 0$

▫ FORZA DI ATTRITO VISCOSO

(liquido o gas)

→ è la resistenza che un fluido oppone quando un corpo tenta di muoversi in esso.

È una forza che si OPPONE al moto ed è proporzionale alla velocità del corpo soggetto a tale forza

$$\boxed{\vec{F} = -b\vec{v}} \qquad \boxed{\vec{a} = -b\frac{\vec{v}}{m}} \qquad b = cost$$

NB: in questo caso non si può realizzare una condizione di di EQUILIBRIO STATICO (se $v=0$ anche $F=0$)

ESEMPIO: punto materiale (massa $= m$) lasciato cadere in un fluido. Forze agenti:

- $\vec{F}_1 = m\vec{g}$ (Forza peso)
- $\vec{F}_2 = -mk\vec{v}$ $(b = mk)$

C.I = $x=0$, $v=0$, $t=0$

Applico la (II) legge di Newton $\Rightarrow$ $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m\vec{g} - mk\vec{v} = m\vec{a}$ ma $m\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}m$

$$\Rightarrow m(g - k\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} \longrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = g - k\vec{v} \qquad \frac{d\vec{v}}{g - kv} = dt$$

Integro: $$\int_0^v \frac{1}{g-kv}\,dv = \int_0^t dt$$

$$-\frac{1}{k}\left[\log(g-kv)\right]_0^v = t \qquad \log(g-kv) - \log g = -kt$$

$$\log\frac{g-kv}{g} = -kt \Rightarrow v(t) = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt})$$

Sotto la sola azione di P il moto sarebbe M.U.A ma l'attrito si oppone => rende il moto unif. (se $v = \frac{g}{k} \Rightarrow a = 0$)

Allora
→ il filo teso esercita agli estremi la tensione (T) il cui valore dipende dalle forze applicate.
La reazione sul filo non può superare un valore MAX (T_{MAX}) oltre il quale il filo si spezza.

NB: T_{MAX} dipende dal materiale del filo + dalle dim geometriche.

Il filo può anche non essere rettilineo.

- CARRUCOLA: avvolto attorno ad un disco

NB2: il filo opera solo in TRAZIONE, mentre una bacchetta lavora di TRAZIONE e COMPRESSIONE (spinge).
+ sollecitazioni che seguono la direzione del filo.

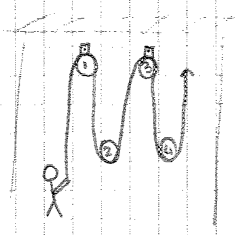
Per calcolare T si può TAGLIARE il filo e misurare il valore inserendo una molla. Tendendo il filo, si applicano ai capi della molla le forze $-T$ e T e misuriamo la deformazione.

$$\boxed{T = kx}$$ con k = costante el. molla e x = deformazione

~ CARRUCOLE

Il filo passa attorno ad una carrucola ideale → la tensione del filo è trasmessa SENZA diminuzione all'altra estremità.

(INVERTE LA DIREZIONE DEL FILO, INTENSITÀ UGUALE)



$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = mg$

Ma l'uomo tira il filo che ha intensità T. ⇒ Tirerà la tensione pari a 1/4 di quello tot.

Questo perché il muro sostiene la carrucola.

FORZA ELASTICA

Forza unidimensionale.

- DIREZIONE COSTANTE
- VERSO RIVOLTO sempre ad un punto O
- MODULO PROPORZIONALE ALLA DISTANZA DA O

$$\boxed{\vec{F} = -kx\,u_x}$$

K = COSTANTE ELASTICA > 0 (N/m)

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$$

Sapendo che $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ ← PULSAZIONE

PERIODO $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$

Forza elastica applicata quasi sempre con una molla

→ MOLLA

Presenta due lunghezze $\begin{cases} l.\ a\ riposo\ (l_0) \\ l\ estesa\ (l) \end{cases}$ $\{ l > l_0$

NB: Può anche essere compressa $l < l_0$ (stessa espressione)

Essa sviluppa una forza che tende a riportarla alle condizioni di riposo (F. di RICHIAMO).

$$\vec{F} = -Kx = -K(l - l_0) = -Kx$$

LAVORO

→ il lavoro fisico avviene applicando una forza che causa uno spostamento.

SI HA LAVORO (L) QUANDO UNA FORZA (F) PRODUCE UNO SPOSTAMENTO (S).

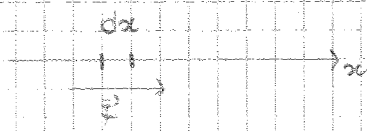
NB: L è maggiore tanto quanto maggiore è la F applicata o tanto quanto maggiore è lo spostamento s prodotto.

Lavoro
- **DI SOLLEVAMENTO**: movimento che fa cambiare l'altezza del corpo. es. sollevare una valigia
- **DI TRASPORTO**: movimento // al piano es. spingere un oggetto

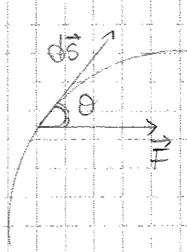
· CASO UNIDIMENSIONALE

Si definisce lavoro infinitesimo della F il prodotto:

$$\boxed{dL = \vec{F}\, dx}$$



· CASO NON UNIDIMENSIONALE / GENERICO



$F_{//} = F\cos\theta$

$dL = F_{//}\, ds$

Proiettando la forza su ds posso ricondurmi al caso unidimensionale

$$dL = \vec{F}\cdot d\vec{s} = F\cos\theta\, ds$$

→ INTEGRALE DI LINEA: nel caso in cui lo spazio percorso non sia infinitesimo ma il tratto di curva che va da A a B si ha che:

$$\boxed{L_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_A^B F\cos\theta\, ds = \int_A^B F_T\, ds}$$

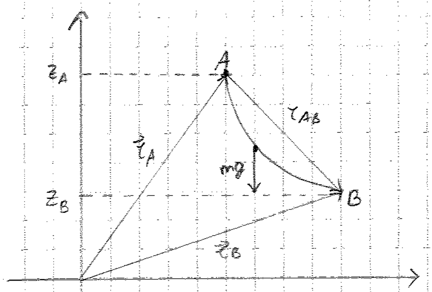
$$[L] = [F][L] = N\cdot m = J$$

3 CASI
- $\theta < \pi/2$ ⇒ LAVORO POSITIVO. Forza concorde allo spostamento.
- $\theta > \pi/2$ ⇒ LAVORO NEGATIVO. Forza in verso opposto allo spostamento.
- $\theta = \pi/2$ ⇒ forza ⊥ spostamento

NB: Dato che la forza può anche essere la risultante di diverse forze applicate si può scrivere:

$$L_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_A^B (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n)\cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{F}_1 d\vec{s} + \dots + \int_A^B \vec{F}_n d\vec{s} = L_1 + \dots + L_n$$

Lavoro della forza peso



$$L_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} = \vec{F}\int_A^B d\vec{s} = \vec{F}\,[\vec{r}_B - \vec{r}_A] = m\vec{g}\cdot\vec{r}_{A,B}$$

NB: l'unica componente non nulla della forza peso è lungo l'asse y dove la componente del vettore è data da:

$$y_B - y_A$$

$$L_{A,B} = -mg(y_B - y_A) = -(mgy_B - mgy_A)$$

Riscrivo l'ep $\Rightarrow$ $L_{A,B} = -(E_{p,B} - E_{p,A}) = -\Delta E_p$ $\qquad \boxed{E_p = mgy}$ $\Rightarrow$ **Energia Potenziale della F peso**

$$\boxed{L_{A,B} = -\Delta E_p}$$

- funzione della coordinate y
- il lavoro è uguale all'opposto della variazione di pot. funzione da A a B
- il LAVORO NON DIPENDE DALLA TRAIETTORIA

ENERGIA POTENZIALE

$$\boxed{L_{A\to B} = -(E_{p,B} - E_{p,A}) = -\Delta E_p}$$

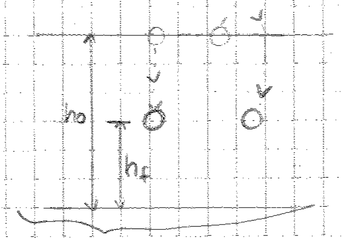
NB: Non ∃ una formulazione generale dell'espressione dell'energia potenziale, essa dipende dalla forza a cui si riferisce.

ES ↗ ENERGIA POTENZIALE DELLA F PESO: $\quad E_p = mgy$

$$L_{A\to B} = -(E_{p,B} - E_{p,A}) = E_{K_B} - E_{K_A}$$

$$E_{K_B} + E_{p,B} = E_{K_A} + E_{p,A}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{E_k + E_p = \text{COSTANTE}}$ } ENERGIA MECCANICA



$$dL = \vec{F}d\vec{s} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dE_p$$

$\longrightarrow$ L'ep è definibile solo nel caso in cui il lavoro da A a B è indip. dal percorso ma dipende dagli estremi.
(Essendo una funzione della coord. y)

DIFFERENZIALE ESATTO $\rightsquigarrow \oint (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = 0$

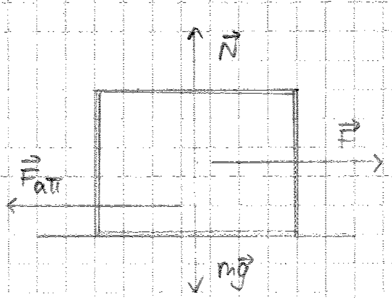
DERIVATE PARZIALI

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy + \frac{\partial E_p}{\partial z}dz$$

$$\left.F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\ ;\ F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}\ ;\ F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla}E_p} \text{ GRADIENTE}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 180

Lavoro di una forza d'attrito radente



$$\vec{F}_{ad} = -\mu_d N \hat{u}_v$$

$$L_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{s} = \int_A^B -\mu_d N \hat{u}_v \cdot d\vec{s} = -\mu_d \int_A^B N\, ds$$

Supposto N = costante $\Rightarrow\ = -\mu_d N \int_A^B ds$ lunghezza del percorso effettuato

⇝ l'INTEGRALE SCALARE è la lunghezza del percorso da A a B, misurata lungo la traiettoria effettiva

Non si può esprimere il lavoro tramite la sola differenza tra le coordinate di A e B.

FORZE CONSERVATIVE (il lavoro non dipende dal percorso ma dagli estremi)
(Vale il TEOREMA dell'E MECC + E. CINETICA)

· **Forza peso:**

$$L_{A\to B} = -(mgy_B - mgy_A) \Rightarrow L_{A,B} = -(E_{p,B} - E_{p,A}) = -\Delta E_p$$

· **Forza elastica:**

$$L_{A\to B} = -\left(\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2\right) \Rightarrow L_{A,B} = -(E_{p,B} - E_{p,A}) = -\Delta E_p$$

In generale: $L_{A\to B} = \int_A^B (\bar{F} d\bar{s})_I = \int_A^B (\bar{F} d\bar{s})_{II}$

FORZE NON CONSERVATIVE (il lavoro dipende dal percorso)

Tutte le forze che non hanno le stesse caratteristiche MA vale il teorema dell' E_{cin}.

$$\Rightarrow L_{A\to B} = \int_A^B mv\,dv = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = E_{k,B} - E_{k,A} = \Delta E_k$$

In generale: $L_{A\to B} \Rightarrow \int_A^B (\bar{F} d\bar{s})_I \neq \int_A^B (\bar{F} d\bar{s})_{II}$

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

$$L_{A\to B} = E_{k,B} - E_{k,A} = E_{p,A} - E_{p,B}$$

$$E_{k,A} + E_{p,A} = E_{k,B} + E_{p,B}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{E_m = E_k + E_p = \text{COSTANTE}}$ Definizione di Energia meccanica

SOLO X FORZE CONSERVATIVE

CASO PARTICOLARE: sono presenti anche F. non conservative.

$$L_{A\to B} = L_C + L_{NC} = E_{k,B} - E_{k,A}$$

$$L_{A\to B} = E_{p,A} - E_{p,B} + L_{NC} = E_{kB} - E_{kA}$$

$$\Rightarrow L_{NC} = (E_{k,B} + E_{p,B}) - (E_{k,A} + E_{p,A})$$

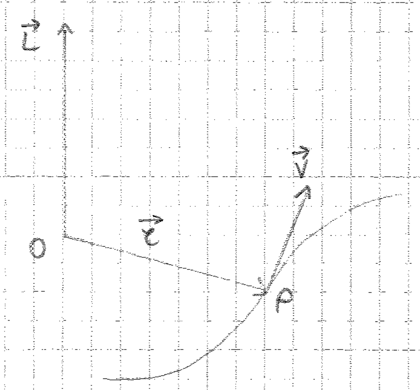
$$\boxed{L_{nc} = E_{m,B} - E_{m,A}}$$

MOMENTO ANGOLARE

Def: il momento angolare è il momento vettore QUANTITÁ DI MOTO. Grandezza vett che ne def. l'eq.

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}} \qquad (\vec{p} = m\vec{v})$$

O = polo rispetto cui è calcolato $\vec{L}$



NB: so che se cambia il polo vale la relazione:

$$L_{O'} = L_O + O'O \times m\vec{v}$$

In generale: $L = rp \sin\theta$

- NEL PIANO (MOTO CURVILINEO)

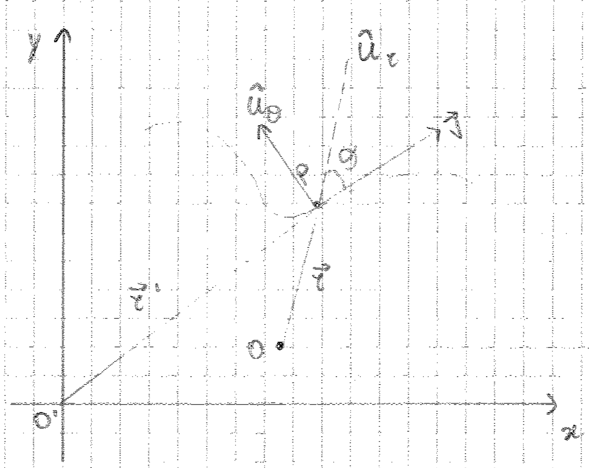
C.P. $\vec{v} = \vec{v}_\theta + \vec{v}_r \qquad |\vec{v}_\theta| = r\frac{d\theta}{dt}$

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = \vec{r} \wedge m(\vec{v}_r + \vec{v}_\theta) = \vec{r} \wedge m\vec{v}_\theta$$

componente // a r => prodotto vettoriale tra essi = 0

Modulo: $|\vec{L}| = m\,|\vec{r}|\,|\vec{v}_\theta| = m|\vec{r}|^2 \frac{d\theta}{dt}$ (se il polo O sta nel piano di $\vec{L}$)

Modulo (M. CIRCOLARE): $|\vec{L}| = r^2 m\omega$ (con riferimento al centro della circf)



MOMENTO DELLA FORZA

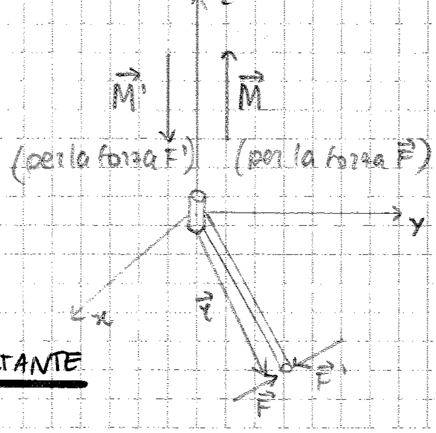
$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}}$$

$$|\vec{M}| = |\vec{r}|\,|\vec{F}| \sin\theta$$

Se cambio il polo: $\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \vec{O'O} \times \vec{F}$

Se ad un punto sono applicate + forze =>

il MOMENTO COMPLESSIVO = MOMENTO FORZA RISULTANTE



Esempi di forze centrali:

- **F. di GRAVITAZIONE UNIVERSALE:** $\vec{F} = -G \dfrac{mM}{r^2} \hat{u}_r = -G \dfrac{mM}{r^2} \dfrac{\vec{r}}{r}$

- **F. di COULOMB:** $\vec{F} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_r$

- **F. ELASTICA:** $\vec{F} = -kx\hat{i}$

NB: Vi è una sorta di equilibrio tra i moti traslatori e quelli rotatori

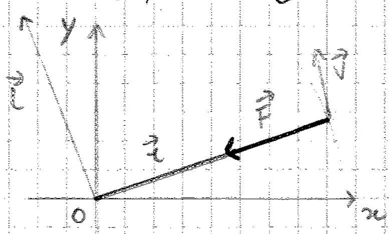
MOTI TRASLATORI	MOTI ROTATORI
$\vec{F}$	$\vec{M}$
$\vec{p}$	$\vec{L}$
m	I

⤳ Moto di un punto materiale sotto l'azione di una forza centrale

Riprendo la definizione di MOMENTO ANGOLARE e lo calcolo rispetto al centro: $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$

(prodotto vettoriale di 2 vettori // tra loro)

$\Rightarrow \vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} = 0$



Il momento di una F. centrale rispetto al centro della forza è nullo.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_0 \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{COSTANTE}$$

$\Downarrow$

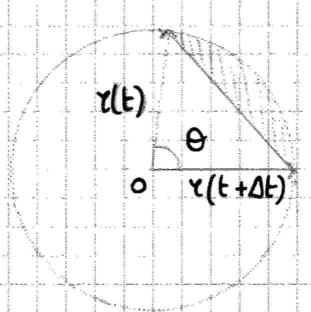
Il momento della quantità di moto rispetto al centro della forza deve rimanere costante:

- DIREZIONE: il moto è un moto piano (COSTANTE)
- VERSO: percorsa traiettoria sempre nello stesso verso (COSTANTE)
- MODULO: la $\vec{v}$ reale è costante *. Si tratta della velocità con cui è spazzato lo spazio (II° legge di Keplero).

* VELOCITÀ AREALE

Suppongo di avere un'orbita circolare e considero l'intervallo Δt.

Se il SETTORE CIRCOLARE non è troppo grande $\Rightarrow$ posso approssimare la sua area a quella del triangolo sotteso.



La traiettoria di 1 punto che si muove in un campo di F centrale giace in un piano fisso passante per il centro ed è percorsa in modo tale che la v areale rimanga costante

Area del triangolo: $\dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{(\text{arco di cf})\, r}{2}$

$$S = \text{arco} = \vec{r}\theta \qquad \Delta\vec{S} = \vec{r}\Delta\theta \qquad = \frac{r(\vec{r}d\theta)}{2} = \frac{\vec{r}^2 d\theta}{2}$$

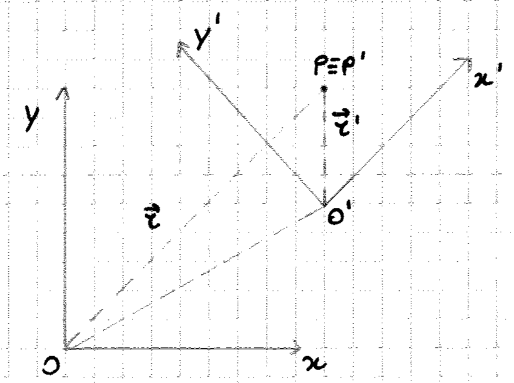
L'area spazzata nel tempo dt risulta essere: $\boxed{\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{1}{2} r^2 \dfrac{d\theta}{dt}}$ VELOCITÀ AREALE

Ricordo che:

$$\vec{L} = m r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$

Nel caso della forza centrale poiché il modulo del momento della quantità di moto è costante $\Rightarrow$ **la v areale è costante.**

SISTEMI IN ROTOTRASLAZIONE



TRASLAZIONE + ROTAZIONE

(i versori variano nel t)

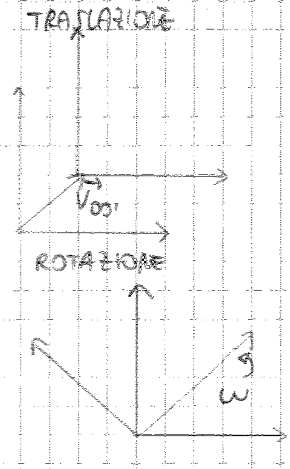
$\vec{r} = \vec{OO'} + \vec{r}'$ $\quad (* \ \vec{v} = \omega \wedge \vec{r})$

$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$

$\vec{v}_t = \vec{v} - \vec{v}' = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$

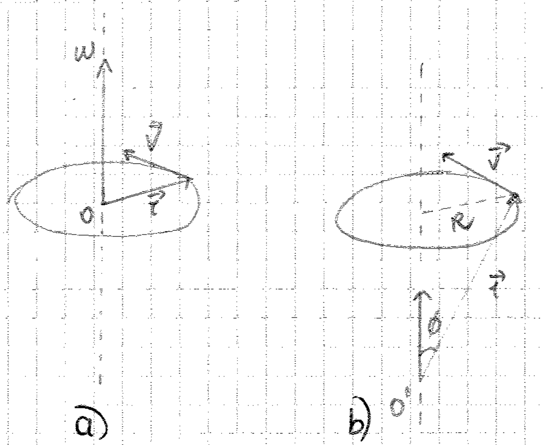
Se: • $\vec{\omega} = 0 \Rightarrow \vec{v}_t = \vec{v}_{O'}$

• $\vec{v}_{O'} = 0 \Rightarrow \vec{v}_t = \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$



$|v| = \omega r = \omega R \sin\theta$

$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$



← MOTO DI PRECESSIONE $\begin{cases} r = \text{costante} \\ R = \text{costante} \end{cases}$

$\vec{v} = \boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \omega \wedge \vec{r}}$ formula di Poisson

↳ se il vett. $\vec{r}$ ha modulo costante e compie un moto di precessione con v angolare ω posso scrivere così la sua derivata tempor.

$\frac{dr'}{dt} = \underline{v}' + \omega \wedge \underline{r}'$ $\quad \boxed{\frac{dv}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}}$

NB: Se cambia il punt di riferimento (b)) vale ancora l'uguaglianza: $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$

$\left(|\vec{v}| = \omega r \sin\theta = \omega R \right)$

$\vec{v}_t = \underline{v} - \underline{v}' = \underline{v}_{O'} + \underline{\omega} \times \underline{r}'$

V = velocità assoluta

NB2: V_t = velocità di trascinamento ed è la differenza delle 2 velocità misurate nei 2 sist di riferimento. Se il punto P fosse fermo $\Rightarrow$ la sua $\vec{v} \equiv \vec{v}_t$

$v_{O'}$ = velocità relativa

~ D ACCELERAZIONI e FORZE

MOTO DI TRASCINAMENTO

in ogni istante è la somma di un termine traslatorio con velocità istantanea v_0 e di un termine rotatorio con velocità angolare ω (variabile in modulo + dir).

$\vec{r} = x\hat{u}_x + y\hat{u}_y + z\hat{u}_z$

$\vec{r}' = x'\hat{u}'_x + y'\hat{u}'_y + z'\hat{u}'_z$

$OO' = OO'\hat{u}_x + OO'\hat{u}_y + OO'\hat{u}_z$

$a = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}u_y + \frac{d^2z}{dt^2}u_z$ (acc assoluta)

$\bar{a}' = \frac{d^2x'}{dt^2}\hat{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{u}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{u}_z$ (acc relativa)

• Derivo in funzione del tempo queste quantità:

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy}{dt}\hat{u}_y + \frac{dz}{dt}\hat{u}_z$

$\bar{a}_0 = \frac{dv_{O'}}{dt}$ $\quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv_{O'}}{dt} + \frac{dv'}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \wedge r' + \omega \wedge \frac{dr'}{dt}$

$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{dx'}{dt}\hat{u}'_x + x'(\vec{\omega} \wedge \hat{u}'_x) + \frac{dy'}{dt}\hat{u}'_y + y'(\vec{\omega} \wedge \hat{u}_y) + \frac{dz'}{dt}\hat{u}'_z + z'\vec{\omega} \wedge \hat{u}_z$

$\vec{v}_{O'} = \frac{d\vec{OO'}}{dt} = \frac{d\vec{OO'}}{dt}\hat{u}_x + \frac{d\vec{OO'}}{dt}\hat{u}_y + \frac{d\vec{OO'}}{dt}\hat{u}_z$

$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}' + \omega \wedge (\underbrace{x'\hat{u}_x + y'\hat{u}'_y + z'\hat{u}'_z}_{\vec{r}'}) = \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$

TEOREMA DELLE VELOCITÀ RELATIVE

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_{OO'} + \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'}$$

$\boxed{\vec{a}_{coriolis} = -2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'}$ ACC. DI CORIOLIS

* NORD: emisfero boreale
SUD: " australe

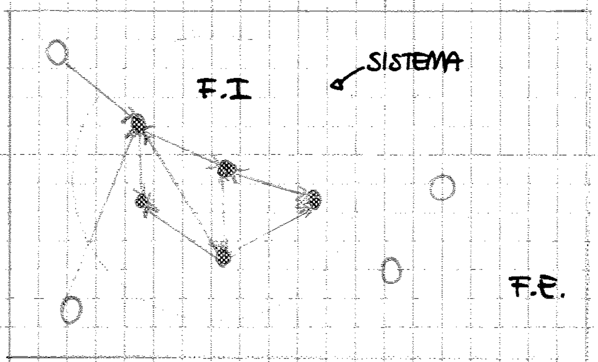
Effetti ≠ nell'emisfero
- NORD: quando un corpo si muove in un piano orizzontale la componente dell'acc di CORIOLIS punta a (DX) della direzione del moto.
- SUD: quando un corpo si muove in un piano orizzontale, la componente dell'acc di Coriolis punta a (SX) della direzione del moto.

CICLONI
- NORD: circolazione aria ANTIORARIA
- SUD: circolazione aria ORARIA

DINAMICA DEI SISTEMI

Descrizione della dinamica di ≠ punti che hanno comunque qualcosa in comune, ovvero ∈ allo stesso SISTEMA

- insieme dei punti che interagiscono fra loro (FORZE INTERNE) (F.I)
- delimitato da un confine che lo separa dalla realtà esterna → (FORZE ESTERNE) (F.E)



Considero n-punti materiali: m_1, m_i, m_n

- F.I = forze scambiate tra i punti => per il PRINCIPIO di AZIONE e REAZIONE

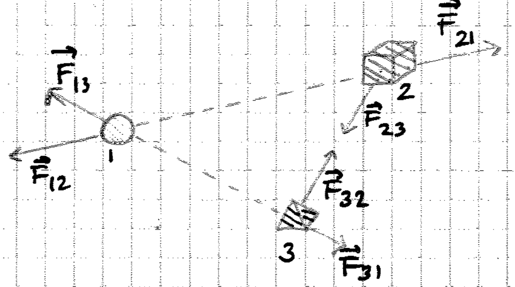
$$\vec{F}_{i,j} = -\vec{F}_{j,i}$$

- stesso modulo ma verso opposto

- F.E = forze che agiscono sul sistema per via di fattori esterni al sistema. Si indicano con:

$$\vec{F}_i^{(e)}, \quad F_j^{(e)}$$

Considerando la somma vettoriale delle F si ottengono due risultati ≠:



FI: $\sum_{i,j} \vec{F}_{i,j} = 0$

F.E: $\sum_i \vec{F}_i^{(e)} = \vec{R}^{(e)}$

◦ C.M. e ACCELERAZIONE ◦

Continuo la derivazione ⇒ derivo la velocità secondo il tempo:

$$\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \vec{a}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i \vec{F}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M} \sum_i \vec{F}_i \Rightarrow \boxed{\sum_i \vec{F}_i = \left(\sum_i m_i\right) \vec{a}_{CM}}$$

NB: le forze agenti sul punto materiale sono sia le F.I che le F.E

$$\Rightarrow \sum_i \vec{F}_i = \underbrace{\sum_{i,j} \vec{F}_{i,j}}_{\text{somma f\_i} = 0} + \underbrace{\sum \vec{F}_i^{(e)}}_{R^{(e)}} = 0 + R^{(e)} = \left(\sum_i m_i\right) \vec{a}_{CM} \quad \boxed{\vec{R}^{(e)} = M\vec{a}_{CM}} \text{ ACC C.M}$$

EQUAZIONE DEL MOTO del CENTRO DI MASSA

$$\boxed{\vec{R}^{(e)} = \left(\sum_i m_i\right) \vec{a}_{CM} = M\vec{a}_{CM}}$$

Il CM si comporta come un punto materiale in cui è concentrata tutta la M e su cui agisce la $R^{(e)}$.

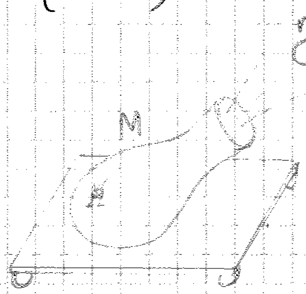
Conservazione della quantità di moto.

$$\vec{R}^{(e)} = \left(\sum_i m_i\right) \vec{a}_{CM} = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

NB: quando $\boxed{\vec{R}^{(e)} = 0} \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow P = \text{costante}$

La $\vec{P}$ dei singoli punti varia, la somma rimane costante

- es (cannone)



• Prima dello scoppio:

$$(m+M)v_A = 0 = \vec{P}_{in}$$

• Dopo lo scoppio:

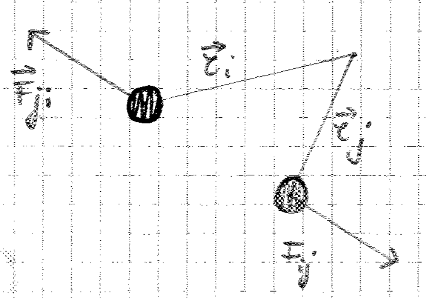
$$Mv_c + mv_p = \vec{P}_{fin}$$

MA per la conservazione della quantità di moto:

$$\vec{P}_{fin} = \vec{P}_{in}$$

$$\Rightarrow mv_p + Mv_c = 0 \quad -mv_p = Mv_c \quad v_p = -\frac{M}{m} v_c$$

$\rightsquigarrow \sum_{ij} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ij}^{(I)} = \vec{M}^{(I)} = 0$ perché?!



$\vec{M}_{ij}^{(I)} = \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{i,j} + \vec{r}_j \wedge \vec{F}_{j,i} =$

$\underline{\underline{MA}} \Rightarrow \vec{F}_{i,j} = -\vec{F}_{ji}$

$= (r_i - r_j) \wedge \vec{F}_{i,j} = \underbrace{\vec{r}_{ij}}_{\text{vettore che unisce i due punti}} \wedge \vec{F}_{ij} = 0$ $\quad \vec{r}_{ij} \parallel \vec{F}_{ij}$

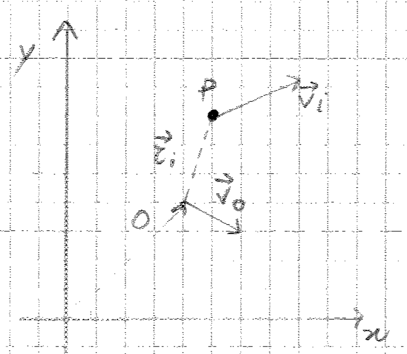
LA SOMMA DI TUTTI I MOMENTI INTERNI È NULLA

- Suppongo che il polo si muova a velocità v_0

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\,\vec{OP}}{dt} = \vec{v}_i - \vec{v}_0$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(e)} - v_0 \wedge \sum_i m_i v_i =$$

Ricordando
$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$
$$\vec{v}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum m_i}$$



$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(e)} - v_0 \wedge v_{CM} \left(\sum m_i\right)}$$

NB: $\vec{v}_0 \wedge M\vec{v}_{CM} = 0$ quando:
- il polo è fisso ($\vec{v}_0 = 0$)
- CM in quiete ($\vec{v}_{CM} = 0$)
- il polo coincide con CM
- v_0 è parallela a v_{CM}

NB: $\vec{R}^{(e)}$ = risultante delle forze esterne.
È SBAGLIATO scrivere $\frac{R}{n}$
- non considero la F singola e in più a me interessa solo l'effetto totale.

RIASSUMENDO $\Rightarrow$ TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE

- 1 PUNTO, POLO O FERMO: $\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$

- N PUNTI, POLO O FERMO: $\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{(e)} = \vec{M}^{(e)}}$

- N PUNTI, POLO O NON FERMO: $\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(e)} - \vec{v}_0 \wedge \vec{v}_{CM} \sum_i m_i}$

Inoltre: $\sum_i \vec{r}_i \wedge \left(\vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(I)} - m\vec{a}_{CM}\right) = \vec{M}^{(e)} - \sum m_i \vec{r}_i' \wedge \vec{a}_{CM} = \vec{M}^{(e)}$

⇝ il momento risultante rispetto al CM è uguale al solo ~~momento~~ momento delle $F^{(e)}$ vere senza contributi delle forze di inerzia.

→ Momento angolare calcolato nel S.I in riferimento al C.M:

Anche se il sist è in movimento non importa io sono su CM.

- Calcolo prima $\vec{L}$ in O scegliendo come polo CM.

$$\vec{L} = \sum_i (\vec{r}_i' \wedge m_i \vec{v}_i) = \sum_i \vec{r}_i' \wedge m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}_{cm}) = \underbrace{\sum_i \vec{r}_i' \wedge m_i \vec{v}_i'}_{\vec{L}'} + \underbrace{\cancel{\sum_i \vec{r}_i' \wedge m_i \vec{v}_{cm}}}_{nullo}$$

distanza tra

$$\vec{L} = L' + \cancel{\left(\sum_i m_i \vec{r}_i'\right)} \wedge \vec{v}_{cm} = \vec{L}'$$

$\Rightarrow \vec{L} = \vec{L}'$ ⇒ il momento angolare rispetto al CM ha lo stesso valore sia nel S.INERZIALE sia nel sist del CM

→ NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL CM ←

⇓

- La posizione del CM è nulla (r'_{cm})
- P' (quantità di moto tot) è nulla
- il momento angolare tot non è nullo ⇒ la sua derivata temporale è:

$$\frac{dL'}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_i' \wedge m_i \vec{v}_i'\right) = \vec{M}'^{(e)}$$

⇒ il teorema del mom. angolare vale anche nel sist inerziale del CM basta che il polo ≡ CM. Contribuiscono solo le $\vec{F}^{(e)}$.

NB: ASSIMMETRIA NELLE FORMULE

SISTEMA DI R. INERZIALE	S.R CENTRO DI MASSA
$\vec{L}_0 = \vec{L}_{cm} + \vec{L}'$	$\vec{L}' = \sum \vec{r}_i' \wedge m_i \vec{v}_i'$
$E_{cin} = \frac{1}{2} M_{tot} \vec{v}_{cm}^{\,2} + E'_{cin}$	$E'_{cin} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2$
$\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_{cm} = M \vec{v}_{cm}$	$\vec{P}' = 0$

→ Nota che il MOTO GLOBALE e quello MEDIO coincido solo per $\vec{P}$ (anche $\vec{R}^{(e)}$) / Negli altri casi contribuisce anche il moto interno => nel caso di $\vec{L}$ e E_{cin} il centro di massa non riassume le proprietà del sistema.

→ NON bastano $\vec{P}$ ed $\vec{R}^{(e)}$ per ricavare $\vec{L}$ ed E_k. Ho bisogno del moto rispetto al C.M.

TEOREMA dell'ENERGIA CINETICA in un SISTEMA di N PUNTI

Parto dalla singola particella. So che il lavoro è dato da:

$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

Separo le forze interne da quelle esterne:

$$\Rightarrow dW_i = \vec{F}_i^{(e)} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_i^{(int)} \cdot d\vec{r}_i = dW_i^{(e)} + dW_i^{(int)}$$

NON SI ANNULLA in quanto:

$$(F_{ij} = -F_{ji})$$

$$dW^{(I)} = \sum_i dW_i^{(int)} = \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_j + \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_i = \vec{F}_{ij} \, (d\vec{r}_j - d\vec{r}_i) = \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij}$$

(si annulla solo se sono nulli i cambiamenti delle distanze relative dei punti) → es: CORPO RIGIDO

tutte le forze che agiscono sul sist

$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot d\vec{r}_i = m_i \vec{v}_i \, d\vec{v}_i \qquad \int dW = \int m_i v_i \, dv_i$$

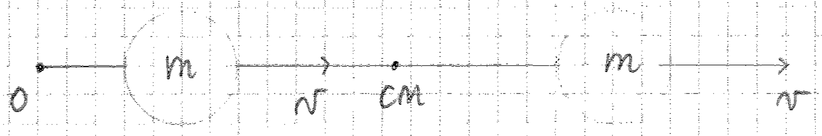
integro

$$W = W^{(E)} + W^{(I)} = \underbrace{\left[\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right]_A^B}_{\text{integro il lavoro della particella da A a B}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,B}^2 - \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,A}^2 = \boxed{\Delta E_K = W}$$

FORZE CONSERVATIVE: $\boxed{E_{k,A} + E_{p,A} = E_{k,B} + E_{p,B} = \text{COST}}$ (Teor. E meccanica)

FORZE NON CONSERVATIVE: $\boxed{L_{nc} = (E_{k,B} + E_{p,B}) - (E_{k,A} + E_{p,A})}$

Esempio ③



• O non coincide con CM

$$2m\vec{r}_{CM} = m\vec{r}_1 + m\vec{r}_2 \Rightarrow \vec{r}_{CM} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$$

$$2m\vec{v}_{CM} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}_{CM} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} = \vec{v} \quad \vec{P} = 2m\vec{v}_{CM}$$

Momento angolare:

$\vec{L}_{CM} = 0$ (braccio // v)

$\vec{L} = 0$ (braccio // v)

$\vec{L}' = 0$ ($v = 0$ nel sist CM)

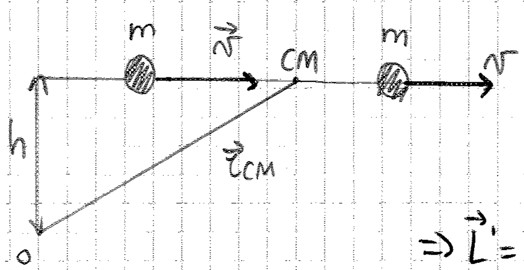
Energia Cinetica:

$E_k = mv^2$

$E_{kCM} = mv^2$

$E_k' = 0$

Esempio ④



rispetto a prima solo la posizione del polo è ≠ ciò modifica TUTTO per $\vec{L}$

CM rimane sempre nella posizione intermedia tra m e m

$$\Rightarrow \vec{L}' = 0 \qquad \vec{L} = \vec{L}' + \vec{L}_{CM} = \vec{L}_{CM} = \vec{r}_{CM} \wedge M\vec{v} = 2m\vec{v}$$

RIASSUNTO

$\vec{R}^{(E)} = m\vec{a}_{CM}$	$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(e)} - \vec{v}_0 \wedge \vec{v}_{CM} \sum_i m_i$

EQ. DEL MOTO per un sist di punti (no info sui singoli moti)

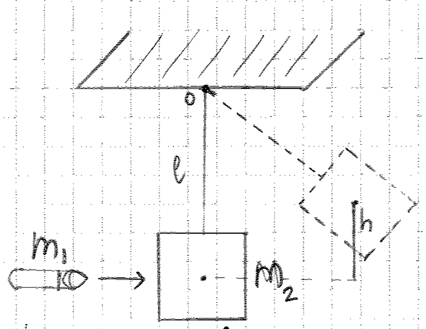
• ΔE_{cin} = lavoro compiuto da tutte le $\vec{F}$ (I ed E)

se ve ne sono di NON CONSERVATIVE ⇒ $W = E$ meccanica

• Teoremi di Koenig utili per calcolare il momento angolare + E_{cin}: scompongono il moto rispetto a CM e moto del CM

Pendolo balistico → esempio di urto completamente anelastico

- Usato per fini bellici: infatti misurava la $\vec{v}$ dei proiettili sparati da un'arma.



blocco di legno/ sacco di sabbia

Proiettile: penetra nel blocco

URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO

- Dopo che il proiettile colpisce, blocco e proiettile OSCILLERANNO come un pendolo

- la misura dell'ampiezza delle oscillazioni + masse varie, l ⇒ risalgo alla v del proiettile

In O ho una REAZIONE VINCOLARE (la tensione del filo agisce su O).
REAZIONE ⊥ alla direzione del proiettile.

- Analisi della conservazione della quantità di moto per componenti (DURANTE L'URTO)

direzione x: $(m_1+m_2)\vec{v}_f = m_1\vec{v}_0$

- Conservazione dell'E (DOPO L'URTO)

$$(m_1+m_2)gh_f = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\vec{v}_f^{\,2}$$

si trasforma in energia potenziale in punto massimo

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_0 = \frac{(m_1+m_2)\vec{v}_f}{m_1}$$

$$\vec{v}_{fin} = \sqrt{2gh}$$

URTI ELASTICI = $\boxed{\vec{P}_{in} = \vec{P}_{fin} \;\|\; E_{K,in} = E_{K,fin}}$ ← FORZE INTERNE CONSERVATIVE ⇒ si conserva E_K

- IN 1 DIMENSIONE

$$\begin{cases} m_1 v_{1,in} + m_2 v_{2,in} = m_1 v_{1,fin} + m_2 v_{2,fin} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1,in}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,in}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,fin}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,fin}^2 \end{cases}$$

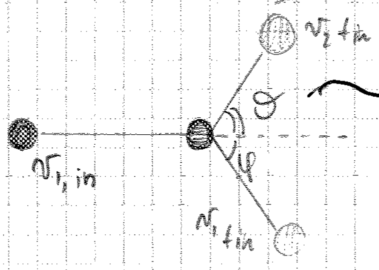
→ 2 eq in 2 incognite
Risolvo il sist!

- IN 2 DIMENSIONI

$$\begin{cases} m_1 v_{1,in}^x + m_2 v_{2,in}^x = m_1 v_{1,fin}^x + m_2 v_{2,fin}^x \\ m_1 v_{1,in}^y + m_2 v_{2,in}^y = m_1 v_{1,fin}^y + m_2 v_{2,fin}^y \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1,in}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,in}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,fin}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,fin}^2 \end{cases}$$

→ 3 eq in 4 incognite
ho bisogno di una 4° condizione

$$\Rightarrow \frac{v_y}{v_x} = tg\,\theta \quad \text{dove}$$



→ angolo di SCATTERING

GRAVITAZIONE

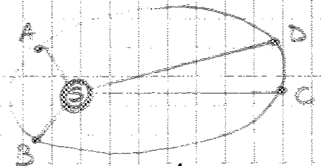
Teorie nella storia

- SISTEMA TOLEMAICO (antichità)
- RIVOLUZIONE COPERNICANA (1473/1543)
- BRAHE (1546/1601)
- KEPLERO (1571-1630)
- NEWTON (1642-1727)
- CAVENDISH (1731-1810)

LEGGI DI KEPLERO

- PRIMA LEGGE

Tutti i pianeti descrivono attorno al sole delle orbite di forma ellittica. Il Sole occupa uno dei due fuochi



- SECONDA LEGGE

Il raggio vettore di un pianeta (cioè il segmento che congiunge il centro del Sole con quello del pianeta) copre aree uguali in tempi uguali.

- TERZA LEGGE

Il quadrato dei periodi di rivoluzione dei pianeti è PROPORZIONALE ai cubi dei semiassi maggiori delle loro orbite

$$\boxed{T^2 = K \cdot r^3}$$

⇝ CONSEGUENZE

Suppongo di non avere orbite ellittiche ma CIRCOLARI (caso particolare di quello ellittico)
↳ (I LEGGE) Al centro dell'orbita vi è il Sole.

LA V. AREALE È COST

Per la II LEGGE ho che: $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2m} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2} = \text{COST}$

Essendo costanti sia il MOMENTO ANGOLARE (L) sia il RAGGIO VETTORE (r) ⇒ si ha che la VELOCITÀ ANGOLARE È COSTANTE

⇒ cioè si esercita una forza CENTRIPETA (manca la componente tangenziale)

• Considero un oggetto sulla CROSTA TERRESTRE

L'oggetto è attratto da una F pari a: $F = \gamma \frac{m M_T}{r_T^2}$ (che sarebbe $= \gamma \frac{m M_T}{(r_T + h)^2}$

La stessa forza l'abbiamo anche scritta come: $F = mg$ ⇝ $\gamma \frac{M_T}{r_T^2} = g$

Dall'osservazione del sistema TERRA-LUNA ricavo che:

$$F_{T,L} = \gamma \frac{m_T m_L}{r_{T,L}^2} = m_L \omega_L^2 r_{T,L} \Rightarrow \gamma M_T = \omega_L^2 r_{T,L}^3$$

↳ Velocità angolare Luna: la calcolo valutando quanto tempo impiega la Luna a tornare nella stessa posizione.

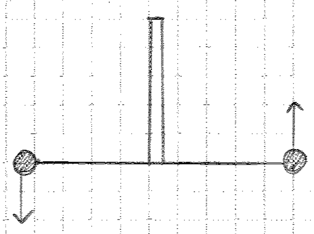
$$g = \gamma \frac{m_T}{r_T^2} \Rightarrow g = \frac{\omega_L^2 r_{T,L}^3}{r_L^2}$$

NB1: Se sostituisco i valori ottengo: ⇝ il valore della costante di gravità

NB2: Se conosco la massa della Terra posso misurare la COSTANTE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE ⇝ CAVENDISH

↓

Calcola γ tramite un esperimento con un pendolo a torsione



Le attrazioni fra le 2 masse fanno ruotare il pendolo.

Note le M e la distanza tra i pianeti, calcolo γ

$$\boxed{\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2}}$$

→ PROBLEMI CONCETTUALI

• AZIONE A DISTANZA: le eq per la F. GRAVITAZIONALE e in maniera analoga per quella ELETTROSTATICA prevedono un'azione a distanza: una massa/carica generano una forza su un'altra massa/carica molto distante, anche senza la presenza di un MEZZO INTERPOSTO e in MANIERA ISTANTANEA.

CAMPO → L'interazione tra gli oggetti rappresenta una PERTURBAZIONE delle proprietà fisiche dello spazio ⇝ CAMPO

$M_1 \longleftrightarrow$ CAMPO $\longleftrightarrow M_2$

OSSERVAZIONI SUL SIGNIFICATO DI CAMPO

Ha senso se:

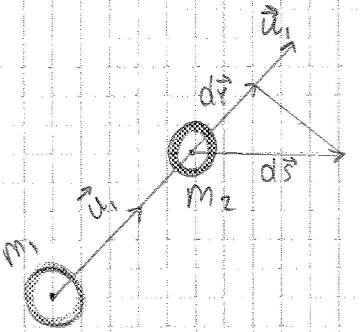
- NON vi sono masse sonda? es: deviazioni raggi luminosi da parte del campo gravitazionale. I fotoni non hanno massa.
- NON vi è la massa sorgente? es. quando si osserva una supernova che ha generato il campo questo può essere già esplosa.

ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

La forza gravitazionale è:

- CENTRALE ⇒ da qui deriva che è CONSERVATIVA ⇒ si può definire un' ∃ potenziale relativa a tale forza. Dimostro che ∃ e quanto vale.

- Calcolo il lavoro della $\vec{F}$ gravitazionale: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \underbrace{\vec{u}_1 \cdot d\vec{s}}_{dr}$ dr = proiezione di $d\vec{s}$ su $\vec{u}_1$



$$W = \int_A^B dW = \int_{r_A}^{r_B} -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = -\gamma m_1 m_2 \left(-\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A} \right) =$$

$$= -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_A} - \left(-\gamma \frac{m_1 m_2}{r_B} \right) = E_{p,A} - E_{p,B}$$

$$E_p = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} \Rightarrow \boxed{W = -\Delta E_p}$$

L'energia potenziale vale 0 all'∞

Quando m_2 si avvicina a m_1 la forza gravit. fa un lavoro positivo e m_2 acquisisce energia cinetica.

VELOCITÀ DI FUGA

Def.: è la VELOCITÀ MINIMA iniziale a cui un soggetto SENZA PROPULSIONE deve muoversi per potersi ALLONTANARE indefinitivamente da una sorgente di campo gravitazionale.

E. MECCANICA del corpo sulla sup. terrestre $\mapsto E_{in} = \frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{m m_T}{r_T}$

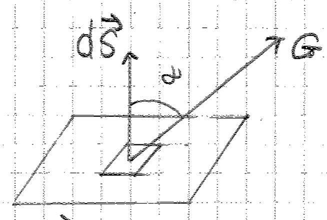
E. MECCANICA del corpo all'∞ $\mapsto E_{fin} = \frac{1}{2} m v_0^2$

la v di fuga è quella minima che l'ogg deve avere a Terra ⇒ all'∞ la v è nulla ⇒ per la cons. dell'E. meccanica: $v_f = \sqrt{\gamma \frac{2 m_T}{r_T}}$

FLUSSO DI UN CAMPO GRAVITAZIONALE

Ogni SUPERFICIE PIANA può essere rappresentata mediante un VETTORE (s) che ha

- Intensità = Area della sup
- Direzione = $\perp$ alla sup
- Verso ← diretto verso l'INTERNO se la sup è chiusa; arbitrario se la sup è APERTA

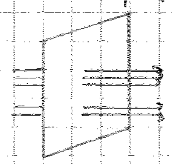


$$d\vec{S} = dS\,\vec{u}_N$$

FLUSSO DI UN CAMPO G. UNIFORME

Def Si dice flusso di un campo vettoriale (A) UNIFORME attraverso una sup piana (S) il prodotto scalare

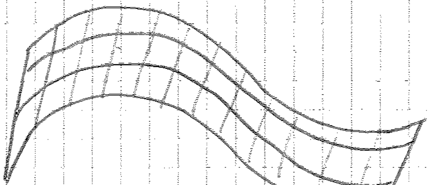
$$\boxed{\Phi(A) = \vec{G}\cdot\vec{S} = GS\cos\alpha}$$



FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE NON UNIFORME

Se il campo non è UNIFORME e la sup non è PIANA ⟹ divido la sup in elementi infinitesimi

$$\Rightarrow \Phi_S(E) = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_n = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i \qquad \Phi_S(E) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Phi_i$$



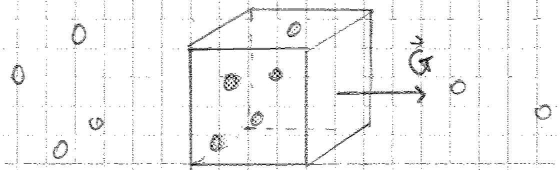
$$\boxed{\Phi_S(\vec{G}) = \oint_S d\Phi = \oint_S \vec{G}\cdot\vec{u}_N\, dS}$$

direzione campo

TEOREMA DI GAUSS

Il FLUSSO del campo gravitazionale $\Phi_S(G)$ attraverso una sup. CHIUSA qualsiasi (S) è uguale alla SOMMA di tutte e sole le masse contenute all'interno della superficie.

$$\boxed{\Phi_S(\vec{G}) = 4\pi\gamma \sum_{i=1}^{n} m_i}$$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 180

NB: Se considero un campo generato da una massa all'esterno genera un flusso attraverso la superficie che è uguale in entrata e in uscita ⇒ in conclusione si ha un flusso NULLO

APPLICAZIONI GAUSS

- MASSA m distribuita uniformemente su una sfera di raggio R (solo sulla sup)

Su ogni punto ESTERNO alla sfera su cui si distribuisce uniformemente la CARICA giacciono punti disposti SIMMETRICAMENTE che generano un CAMPO RADIALE dipendente solo dalla DISTANZA dal Centro della sfera.

R = raggio sfera

$$\boxed{\vec{G} = -G(r)\vec{u}_r}$$

r = raggio sfera usata per Gauss

Per calcolare $\vec{G}(r)$ uso Gauss ⇒ (con sup di integrazione = SFERA concentrica di raggio r) $r>R$

$$\Phi(\vec{G}) = \oint_C -G(r)\underline{u}_r \cdot \underline{u}_N \, dS = G(r)\oint_C dS = G(r)\,4\pi r^2 = 4\pi\gamma m$$

PER GAUSS

$$\Rightarrow G(r) = \begin{cases} \gamma \dfrac{m}{r^2} & \text{se } r>R \\ 0 & \text{se } r<R \end{cases}$$

- MASSA m distribuita non solo sulla superficie della sfera ma su tutto il volume

$$G(r) = \gamma \frac{m}{r^2} \quad \forall\ r>R$$

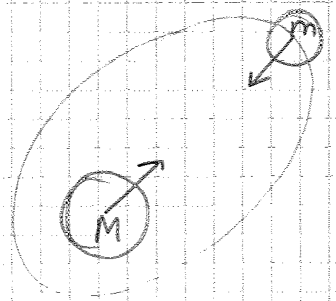
Dato che la m è distribuita uniformemente sul volume, il rapporto tra m e volume deve essere costante per ≠ raggi interni

$$\Rightarrow \boxed{m(r) = m\frac{r^3}{R_2^3}}$$

$$\left(\frac{m(r_1)}{\frac{4}{3}\pi r_1^3} = \frac{m(r_2)}{\frac{4}{3}\pi r_2^3} = \dots = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R_2^3} \right)$$

• DUE CORPI e MASSA RIDOTTA

$$\vec{F} = m\vec{a}_m$$
$$-\vec{F} = M\vec{a}_M$$



Acc relativa di m rispetto a M è:

$$\vec{a} = \vec{a}_m - \vec{a}_M = \underbrace{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)}_{1/\mu} \vec{F} = \frac{1}{\mu}\vec{F}$$

$\Rightarrow$ DEFinisco così la MASSA RIDOTTA $\Rightarrow$ $\boxed{\mu = \frac{mM}{m+M}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{F} = \mu\vec{a}}$

Conclusione: il moto relativo di 2 pti sottoposti alla loro interazione mutua è EQUIVALENTE al moto di un punto con massa eguale alla massa ridotta e forza pari a quella di interazione mutua.

• DUE CORPI: LA TRAIETTORIA

Una massa m che si muove in un piano sotto l'azione di un campo gravitazionale conservativo generato da un'altra massa M avrà la seguente energia:

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\mu v^2 + E_p}$$

Coord. POLARI $\mapsto$ $v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$

NB: per un moto circolare si ha:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \qquad |L| = r^2\mu\omega \quad \Rightarrow r^2\omega^2 = \frac{L^2}{r^2\mu^2}$$

L'energia posso riscriverla come:

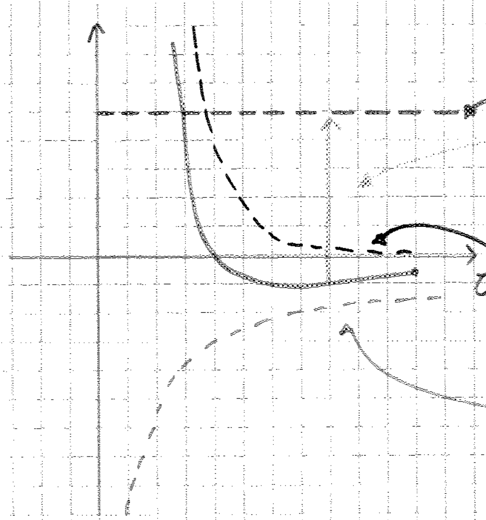
$$E = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + E_p$$

$$\begin{cases} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr\, d\theta}{d\theta\, dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\omega^2 = \frac{2}{\mu}\left(E - E_p - \frac{1}{2\mu r^2}\right) \\ \omega^2 = \frac{L^2}{r^4\mu^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{2\mu r^4}{L^2}\left(E - E_p - \frac{L^2}{2\mu r^2}\right)$$

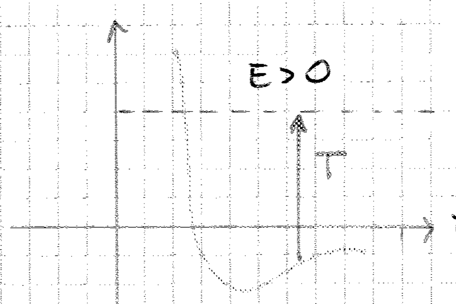
$$E = \underbrace{\frac{1}{2}\mu v_r^2}_{\text{ENERGIA CINETICA RADIALE}} + \underbrace{\frac{L^2}{2\mu r^2}}_{\text{ENERGIA CINETICA AZIMUTALE}} - \underbrace{\frac{k}{r}}_{\text{ENERGIA POTENZIALE}}$$

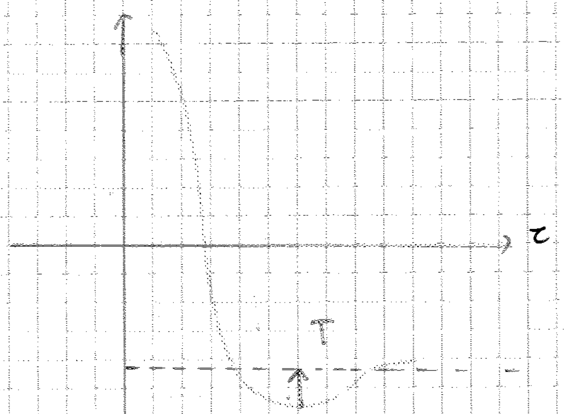
NB: L'energia azimutale può anche essere considerata come energia potenziale, aggiuntiva a quella gravitazionale di una particella fittizia di cui il primo termine rappresenta tutta l'energia cinetica. Così si riduce il n dei dimens. problema da 2 a uno.



$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$$

ENERGIA





Per $E>0 \Rightarrow r$ ha un valore minimo ma può assumere valori arbitrariamente grandi: l'orbita è aperta

$e>1$

$$e = \sqrt{1+\frac{2EL^2}{\mu k^2}} = \sqrt{1+\frac{2|E|L^2}{\mu k^2}} > 1$$

Per $E<0 \Rightarrow r$ è compreso tra un valore min e uno MAX: l'orbita è limitata

$e<1$

$$e = \sqrt{1+\frac{2EL^2}{\mu k^2}} = \sqrt{1-\frac{2|E|L^2}{\mu k^2}} < 1$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 180

- INTENSITÁ DELLE FORZE A CONFRONTO (2 PROTONI)

$$\boxed{\frac{\text{INT. ELETTRICA}}{\text{INT. GRAVITAZ.}} = \frac{\vec{F}_{el}}{\vec{F}_{gra}} = \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 G m_p^2} = 1{,}24 \cdot 10^{36}}$$

NB: Su scala ATOMICA la forza GRAVIT. ha ruolo TRASCURABILE

TEOREMA DI GAUSS per il CAMPO ELETTRICO

Il flusso del campo elettrico $\Phi_S(E)$ attraverso una superficie chiusa qualsiasi (S), è uguale alla somma algebrica di tutte e sole le cariche Q_i contenute all'interno della superficie diviso la costante DIELETTRICA del mezzo

$$\boxed{\Phi_S(E) = \frac{Q_1 + Q_2 + \dots + Q_N}{\varepsilon_0} = \frac{\sum_i Q_i}{\varepsilon_0}}$$

* Gradi di Libertà

N Punti materiali INDIPENDENTI ⇒ 3N PARAMETRI bastano per lo STATO DEL SISTEMA

N Punti materiali INDIPENDENTI ⇒ 3N PARAMETRI PER LO STATO bastano

↳ MA ci sono condizioni aggiuntive sulla mutua distanza fra punti ⇒ 6 gradi di libertà

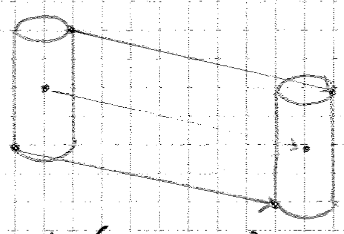
SISTEMA	GRADI DI LIBERTÀ
Corpo rigido	$l = 6$
Punto materiale	$l = 3$
N Punti INDIPENDENTI	$l = 3N$
Punto su una linea	$l = 1$
Punto su un piano	$l = 2$
Due punti vincolati con distanza fissa	$l = 5$

{ 3 parametri per gli assi
{ 3 par.: CM

* Moto più generale di un corpo rigido: ROTOTRASLATORIO

- **PURA TRASLAZIONE** → Nelle traslazioni tutti i punti hanno lo stesso moto

↳ tutti i punti del corpo rigido descrivono traiettorie uguali, con la stessa velocità ($V = V_{CM}$)



Una volta noto il moto del CM è noto il moto di QUALSIASI punto

⇒ la dinamica è la stessa del punto materiale. (no movimento rispetto al CM)

$$\boxed{P = m\vec{v}_{CM}} \quad \boxed{R^{(e)} = m\vec{a}_{CM}} \quad \boxed{E_{CIN} = \frac{1}{2} m\vec{v}^{\,2}_{CM}}$$

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r}_{CM} \wedge m\vec{v}_{CM}}$$

↳ $R = Ma_{CM}$ → EQ del moto

se $\begin{cases} E'_{CIN} = 0 \\ \vec{L}' = 0 \end{cases}$ ⇒ non c'è movimento rispetto al CM

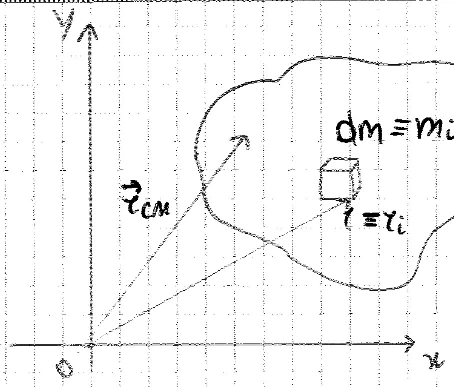
DENSITÁ (ρ)

$$\boxed{\rho = \frac{dm}{dV}}$$

VOLUMICA	$\rho = \frac{dm}{dV}$	$m = \int_{vol} \rho dV$
VOLUMICA corpo omogeneo	$\rho = \frac{m}{V}$	$m = \rho \cdot V$
SUPERFICIALE	$\rho_S = \frac{dm}{dS}$	$m = \int_{sup} \rho_S dS$
LINEARE	$\rho_L = \frac{dm}{dl}$	$m = \int_{linea} \rho_L dl$

$$dm = \rho dV \Rightarrow \underbrace{m}_{\text{MASSA TOT}} = \int_{vol} \rho dV$$

CENTRO DI MASSA DI UN CORPO RIGIDO



$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm}$$

* $dm = \rho dV$ dove dV é il volume occupato da dm. Hp: costante su V

$$\Rightarrow \vec{r}_{CM} = \frac{\int_{vol} \vec{r} \, dV \cancel{\rho}}{\int_{vol} \rho dV} = \frac{\int_{vol} \vec{r} dV}{\int_{vol} dV} = \boxed{\frac{\int_{vol} \vec{r} dV}{\text{Volume totale}} = \vec{r}_{cm}}$$

es: CUBO ($l = 6$ cm)

omogeneo $\Rightarrow$ il centro di SIMMETRIA $\equiv$ CM

coordinate $(3,3,3)$

$(dV = dx \cdot dy \cdot dz)$ $\quad (V = l^3)$

$$x_{CM} = \frac{\int x \rho \cdot dV}{m} = \frac{\cancel{\rho} \iiint x \, dx \, dy \, dz}{\cancel{\rho} V} = \frac{\int_0^l dy \int_0^l dz \int_0^l x dx}{V} =$$

$$= \frac{l^4/2}{l^3} = l/2$$

$$x_{CM} = \frac{\int x \rho \cdot dV}{m} = \frac{\int x \, dV}{V} = \frac{\int l^2 \cdot x \cdot dx}{V} = \frac{l^2 \int_0^l x dx}{l^3} = l/2$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 180

MOMENTO DELLA FORZA PESO

Il momento della forza peso rispetto a un POLO FISSO (es. origine assi) è dato da:

$$\vec{M} = \int \vec{r} \wedge \vec{g}\, dm = \left(\int \vec{r}\, dm\right) \wedge \vec{g} = m \vec{r}_{cm} \wedge \vec{g} = \vec{r}_{cm} \wedge m\vec{g}$$

ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

$$E_p = \int g z\, dm = g \int z\, dm = m g z_{cm}$$

Se il corpo è libero ed agisce solo la forza peso la traiettoria del CM è verticale rettilinea o parabolica a seconda delle condizioni iniziali.

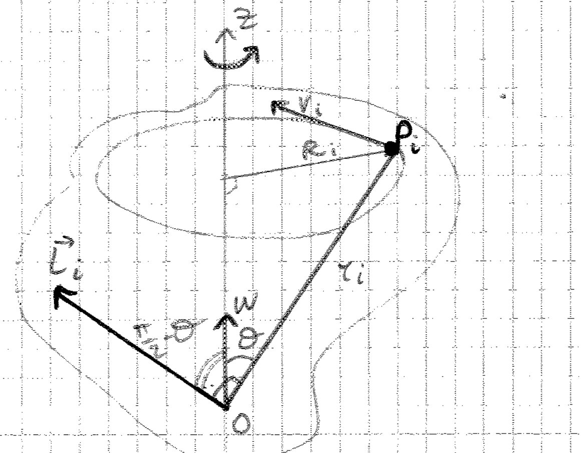
ROTAZIONI RIGIDE ATTORNO A UN ASSE FISSO

- Prendo un CORPO QUALSIASI + un ASSE DI ROTAZIONE QUALSIASI (non cambia direzione)
- Scelgo un POLO (O) $\in$ all'asse di rotazione.
- Isolo una massa nel pnt P_i. Qst ruota su una crf di raggio R

Calcolo il momento angolare nel punto P_i.

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i$$

NB: $\vec{L}_i \perp \vec{r}_i \perp \vec{v}_i$



$$|\vec{L}_i| = m_i |\vec{r}_i||\vec{v}_i| \sin(\overbrace{\vec{r}_i \hat{\ } \vec{v}_i}^{\pi/2}) =$$

$$= m_i |\vec{r}_i||\vec{v}_i| = m_i r_i \underbrace{R_i w}_{v_i} \quad ①$$

MOM. ANGOLARE ASSIALE (cioè proietto il momento angolare sull'asse di rotazione)

Prendo $L_i \cos\alpha$ e trovo la componente // all'asse di rotazione $L_{i//} = |L_i| \cos\alpha$

MA $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta_i \Rightarrow L_{i//} = |L_i| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = |L_i| \sin\theta_i$

$$|L_{i//}| = |L_i| \sin\theta_i = m_i r_i R_i w \sin\theta_i$$

MA $r_i \sin\theta_i = R_i \Rightarrow \quad |L_{i//}| = m_i R_i^2 w$ → quantità che non dipende dal pnt

Applico la ① a tutti i pnt del corpo. Ottengo il momento angolare totale

↳ In generale non è // all'asse di rotazione

Però se ci si riferisce al L assiale

$$\boxed{L_{//} = \Sigma |L_{i//}| = \underbrace{\Sigma_i m_i R_i^2}_{I} w = I w}$$

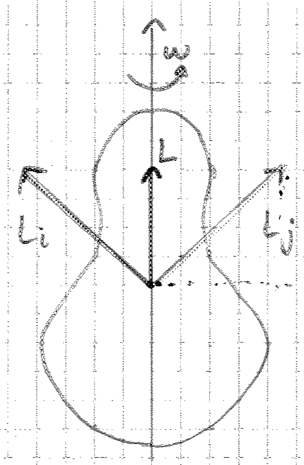
(I) MOMENTO D'INERZIA

ROTAZIONE ATTORNO AD UN ASSE PRINCIPALE D'INERZIA

Tutti gli oggetti SIMMETRICI se ruotati su uno degli ASSI PRINCIPALI D'INERZIA non presentano moto di precessione

$\boxed{\vec{L} = I\omega}$ $\quad$ $\boxed{|\vec{L}| = L_z}$

$\boxed{\vec{L}_\perp = 0}$



MOTO DI PRECESSIONE

→ un moto come quello più generale di $\vec{L}$, che ruota attorno all'asse di rotazione si chiama moto di precessione.

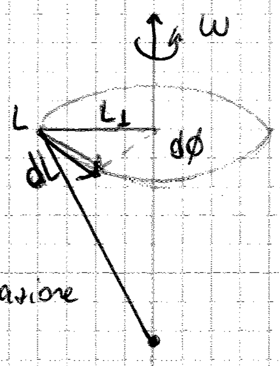
NB: Se ω è COSTANTE ⇒ anche il moto di pre. si dice COSTANTE, in p! gode della seguente proprietà (essendo anche $\vec{L}$ costante in modulo):

Momento della Forza → $\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{L}}$

Ricorda $\frac{d\bar{A}}{dt} = \bar{\omega} \wedge \bar{A}$

NB2: La variazione di $\vec{L}$ è ORTOGONALE ad $\vec{L}$ e // a $\vec{M}$ e il suo modulo vale $dL = L_\perp d\varphi$

$$\boxed{|\vec{M}| = \left|\frac{d\vec{L}}{dt}\right| = L_\perp \frac{d\varphi}{dt} = L_\perp \omega}$$



⇒ la variazione di $\vec{L}$ nel tempo si riferisce solo alla variazione di direzione e non del modulo

↳ espressa da: $\omega \times \vec{L}$

$d\vec{L}$ è ortogonale ad $\vec{L}$ e parallelo a $\vec{M}$ ⇒ $dL = L_\perp d\phi$

$$\Rightarrow M = \frac{dL}{dt} = L_\perp \frac{d\phi}{dt} = L_\perp \omega$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 180

- Se $M = 0$

$\Rightarrow$ CORPO INQUIETE / MOTO CIRCOLARE UNIFORME

$\alpha = 0$	$\omega = \omega_0$	$\theta = \theta_0 + \omega t$

- Se $M = \text{cost}$

$\Rightarrow$ MOTO CIRCOLARE UNIFORMEMENTE ACC.

$\alpha = \text{cost}$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$	$\theta = \theta_0 + \frac{1}{2}\omega t^2$

- Se $M = M(t)$

$\Rightarrow$ MOTO CIRCOLARE VARIO

$\alpha = \frac{M}{I_z}$	$\omega = \omega_0 + \int_0^t \alpha \, dt$	$\theta = \theta_0 + \int_0^t \omega dt$

② Caso in cui $\vec{L}$ non // a ω

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z \omega) = I_z \alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_z = I_z \alpha}$$

$\Rightarrow$ Vale solo per la COMPONENTE ASSIALE.
L'altra componente non porta variazioni di α ma è responsabile dei moti di PRECESSIONE

$$\boxed{\frac{dL_\perp}{dt} = M_\perp}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 180

MOMENTO D'INERZIA

$\vec{M}$ e $\vec{F}$ hanno un ruolo analogo nella variazione dell'acc:

$$\vec{M} = I\vec{\alpha} \iff \vec{F} = m\vec{a}$$

NB: Il momento d'inerzia ha ruolo analogo a quello della MASSA.
Ma il 1° dipende dall'asse di rotazione, la 2° è univoca

$$I = \int R^2 dm = \int \rho R^2 dV = \int \rho (x^2 + y^2) dV$$

Questo parallelismo tra I e M ritorna anche per quanto riguarda la quantità di moto (moto traslatorio) e il momento angolare (moto rotatorio)

$$\vec{p} = m\vec{v} \iff \vec{L} = I\vec{\omega}$$

MOTO TRASLATORIO		MOTO ROTATORIO	
SPOSTAMENTO INFINITESIMO	$d\vec{r}$	SPOSTAMENTO ANGOLARE INFINITESIMO	$d\vec{\theta}$
VELOCITÁ	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	VELOCITÁ ANGOLARE	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$
ACCELERAZIONE	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	ACCELERAZIONE ANG.	$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
QUANTITÁ DI MOTO	$\vec{p} = m\vec{v}$	MOMENTO ANGOLARE	$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = I\vec{\omega}$
FORZA	$\vec{F} = m\vec{a}$	MOMENTO DI UN FORZA	$\vec{M} = I\vec{\alpha}$
E CIN	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	E CIN	$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$
LAVORO	$W = \int \vec{F} d\vec{s}$	LAVORO	$W = \int \vec{M}\, d\vec{\theta}$
POTENZA	$\vec{F} \cdot \vec{v}$	POTENZA	$\vec{M} \cdot \vec{\omega}$

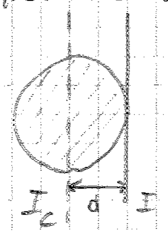
TEOREMA DI HUYGENS-STEINER

→ utilizzato per calcolare il momento d'inerzia rispetto ad assi che non coincidono con quelli di simmetria.

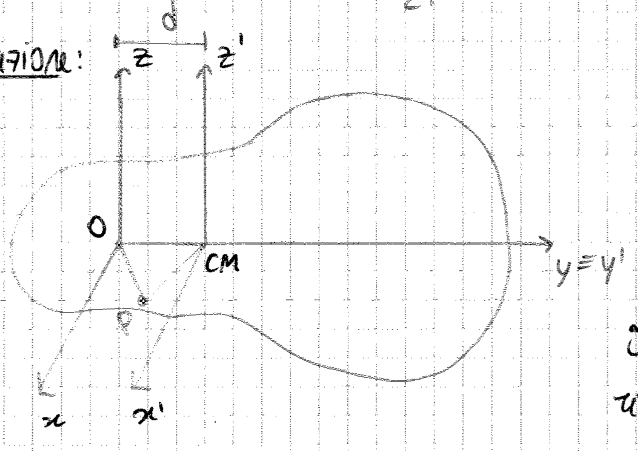
TS: Il momento d'inerzia di un corpo di massa m rispetto ad un asse che si trova a DISTANZA d dal centro di massa del corpo è dato da:

$$\boxed{I = I_C + md^2}$$

con I_C = momento d'inerzia del corpo rispetto ad un asse // al primo e passante per il CM.



dimostrazione:



$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' + d \\ z = z' \end{cases}$$

Il momento d'inerzia di un punto generico P_i rispetto all'asse z è dato da:

$$m_i \underbrace{(x_i^2 + y_i^2)}_{R^2}$$

$$I = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i (x_i'^2 + (y_i' + d)^2) = \underbrace{\sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2)}_{\text{calcolato rispetto al CM}} + \sum_i \overbrace{m_i}^{m} d^2 + 2d \sum_i m_i y_i'$$

lascio dentro solo ciò che dipende da i e non è costante

$$I = I_C + md^2 + 2d \sum_i m_i y_i' \qquad \text{MA} \qquad y'_{CM} = \frac{\sum m_i y_i'}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{\sum m_i y_i'}{m} = 0 \begin{cases} \rightarrow \bullet\ m = \infty \text{ IMPOSSIBILE!} \\ \rightarrow \bullet\ \sum m_i y_i' = 0 \Rightarrow \text{POSSIBILE!} \end{cases}$$

Rispetto a un sistema di riferimento qualsiasi (se il riferimento è il CM $\Rightarrow y_{CM} = 0$)

$$\Rightarrow I = I_C + md^2 \quad \text{cvd}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgr}{I_z}\theta = 0 \implies \frac{d^2\theta}{dt^2} + \Omega^2\theta = 0$$

$\to \theta = A \sin(\omega t + \varphi)$ → fase, → pulsazione; A ampiezza MAX

$\theta = A \sin(\Omega t + \phi)$

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\Omega t + \Phi)$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{mgr}{I_z}} \qquad T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \sqrt{\frac{I_z}{mgr}}\,2\pi \qquad l = \frac{I_z}{mr}$$

→ Lunghezza ridotta del pendolo composto

⚠ Se il punto vincolo è il CM ⇒ non si formano momenti (il braccio sarebbe nullo) e quindi non inizia l'oscillazione)

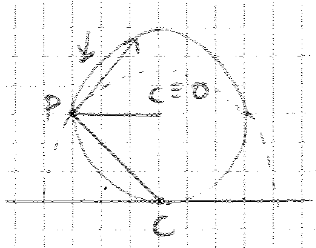
MOTO DI PURO ROTOLAMENTO

- Moto ROTO-TRASLATORIO in cui però ho un vincolo (imposto dalla presenza del terreno
  ⇒ si ha un legame fra il moto ROTATORIO e quello TRASLATORIO che non sono + indipendenti
  - Se le velocità fossero tutte // e uguali fra loro ⇒ l'oggetto SCIVOLEREBBE sul piano senza ruotare ⇒ se striscia non si ha puro rotolamento ma anche traslazione.
  - Se il corpo rotolasse ma il punto di contatto avesse $v=0$ ⇒ scivola e striscia
    ↳ Qui si parla di **PURO ROTOLAMENTO** (trasla solo il CM)

Se non vi fosse il terreno la sfera (es) ruoterebbe attorno a C e il CM descriverebbe una circonferenza di raggio R.

Se si ha il vincolo del terreno si ha una rotazione con punti consecutivi sempre ≠ come centro della traiettoria della rotazione.

⇒ il moto di puro rotolamento può essere visto come un moto rotatorio del corpo che nell'istante infinitesimo "dt" ruota con velocità "ω" attorno all'asse passante per C



- la v nel punto C è nulla
- la v_{CM} è // al terreno
- la v di un punto generico P è tg alla traiettoria circolare di raggio $\overline{CP}$ e centro C

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP} \implies \vec{v}_P = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

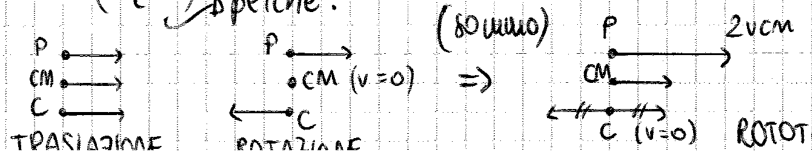
$\vec{v}_{CM} = -\vec{\omega} \wedge \vec{r}$

$v_{CM} = \omega r$

$a_{CM} = \alpha r$

- in C: $\vec{v}_C = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} = 0 \implies \vec{v}_{CM} = -\vec{\omega} \wedge \vec{r}$

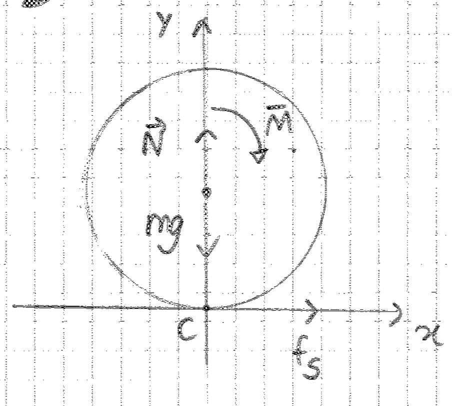
  $(\vec{v}_C = 0)$ → perché:



P, punto con v MAX

$$\boxed{F \leq \mu_s mg \left(1 + \frac{mr^2}{I}\right)} \rightarrow$$ Se la forza rispetta più limite => sarà possibile avere un moto di puro rotolamento

2) MOMENTO COSTANTE



- Viene applicato un MOMENTO MOTORE

Equazioni del moto

TRASLAZIONE
$$\begin{cases} x & f_s = ma_{cm} \\ y & N - mg = 0 \end{cases}$$

ROTAZIONE $\bar{M} + \bar{r} \wedge \bar{f}_s = I\bar{\alpha}$

momento applicato

momento della forza d'attrito

$$M - rf_s = I\alpha \qquad \alpha = \frac{a_{cm}}{r}$$

$$M - rf_s = I\frac{a_{cm}}{r} \Rightarrow a_{cm} = \frac{M}{mr\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)} \Rightarrow f_s = \frac{M}{\left(\frac{I}{mr^2} + 1\right)r}$$

$$f_s = \frac{M}{\left(\frac{I}{mr^2} + 1\right)r} \leq \mu_s N = \mu_s mg \Rightarrow M \leq \mu_s mg\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)$$

condizione su M affinché un oggetto abbia un moto puro si hanno vincoli sulle forze che vengono applicate

=> In assenza di forze e momenti si ha un roto-traslazione uniforme ($\bar{v}$ e ω costanti, $\bar{a}_{cm}$ e $\bar{\alpha}$ nulle)

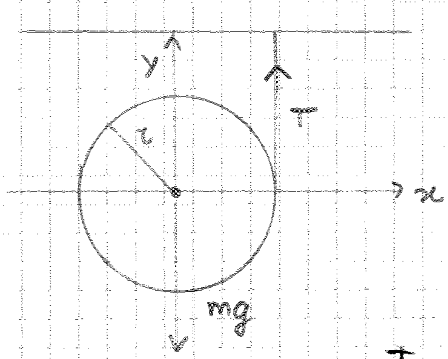
=> la FORZA DI ATTRITO STATICO NON compie lavoro in un moto di puro rotolamento. Ciò implica che un corpo che si muove di moto di puro rotolamento NON dovrebbe mai fermarsi!

Non è così! Si ferma! Questo a causa dello

ATTRITO VOLVENTE

★ ESEMPIO 2 : YOYO

Disco di raggio r e massa m scende srotolando un filo che non slitta rispetto al bordo del disco.



FORZE $mg - T = ma_{cm}$

MOMENTI $Tr = I_{cm}\alpha$
↳ momento della tensione

$$\alpha = \frac{a_{cm}}{r}$$

$$Tr = I_{cm} \cdot \frac{a_{cm}}{r} \qquad T = \frac{I_{cm} \cdot a_{cm}}{r^2} \qquad I_{cm} = \frac{1}{2} m r^2$$
↳ di un disco

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} m \cancel{r^2} \cdot \frac{a_{cm}}{\cancel{r^2}} = \frac{m a_{cm}}{2} \\ mg - T = m a_{cm} \end{cases} \qquad mg = ma_{cm} + \frac{1}{2} m a_{cm} = \frac{3}{2} m a_{cm}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{3} mg}$$

$$\boxed{a_{cm} = \frac{2}{3} g}$$

→ con il puro rotolamento si diminuisce la tensione del filo fino ad un terzo rispetto a quando è fermo (ad esempio quando lo reggi tutto srotolato e hai perso).

IMPULSO ANGOLARE e MOMENTO DELL'IMPULSO

$$\vec{F}dt = d\vec{p} \Rightarrow \underbrace{\vec{J} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}dt = \int_{p_0}^{p} dp = \vec{p} - \vec{p_0} = \Delta\vec{p}}_{\text{TEOREMA DELL'IMPULSO}}$$

(forma integrale della legge di Newton)

→ in assenza di forze applicate $\Delta p = 0$

★ IMPULSO ANGOLARE

$$\vec{M}dt = d\vec{L} \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \vec{M}dt = \int_{p_0}^{p} (\vec{r} \wedge \vec{F})dt \overset{*}{=} \underbrace{\vec{r} \wedge \vec{J}}_{\text{MOMENTO DELL'IMPULSO}} = \Delta\vec{L}$$

* NB: r posso portarlo fuori dal segno di integrale poiché varia in un tempo piccolissimo ⇒ rimane costante

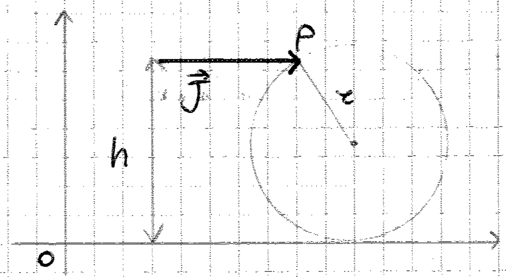
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 180

$$\Rightarrow \omega(t) = \alpha t = \frac{5}{2}\mu_d \frac{g}{r} t$$

- La velocità del CM diminuisce mentre la velocità angolare aumenta
  Vi sarà un istante in cui: $v_{CM} = \omega r$

NB: non vi sono né FORZE MOTRICI né MOMENTI ROTORI $\Rightarrow$ MU e di PURO ROTOLAMENTO

IMPULSO NON PASSANTE PER LA RETTA D'AZIONE DEL CM



$\Rightarrow$ Applico il TEOREMA DELL'IMPULSO

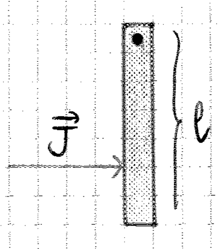
$$\vec{J} = \Delta\vec{p} = m\vec{v}_{CM} \qquad \Rightarrow \vec{v}_{CM} = \frac{J}{m}$$

$$\vec{r} \wedge \vec{J} = \vec{L}_{CM} = I_{CM}\,\omega$$

$$(h-r)J = I_{CM}\,\omega = \frac{2}{5}mr^2\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{5}{2}\frac{(h-r)J}{mr^2}$$

MA $\frac{J}{m} = \omega r \Rightarrow h = \frac{7}{5}r$

PENDOLO COMPOSTO



- Asta di lunghezza l, massa m, vincolata in un estremo
- Un IMPULSO ORIZZONTALE $\vec{J}$ ortogonale all'asta

$\rightarrow$ QUALE VALORE DEVE AVERE e DOVE DEVE ESSERE APPLICATO PER FAR COMPIERE ALL'ASTA UNA ROTAZIONE DI 90°?

Modulo MOMENTO DELL'IMPULSO $= rJ$
- MOMENTO INIZIALE $= 0$
- MOMENTO FINALE $= I\omega$

$$\Rightarrow \Delta L = rJ = I\omega = \frac{1}{3}ml^2\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{3rJ}{ml^2}$$

Dopo l'urto l'asta ruota e il suo CM si alza di $l/2$
Si applica il teorema della conservazione dell'energia

$$mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow$$

$$J = \frac{m}{r}\sqrt{\frac{gl^3}{3}}$$

Leggi di Conservazione di un corpo rigido

1) CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

$$\vec{P} = m\vec{v}_{cm}$$

Se la risultante delle forze esterne è nulla, il CM si muove di MRU, ma il moto dei singoli punti non è detto che sia TRASLATORIO RETTILINEO UNIFORME.

(es. la PURO ROTOLAMENTO)

2) CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}_{cm}$$

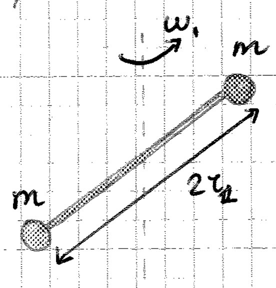
Se il momento delle forze esterne è nullo (rispetto al polo scelto) in un sistema di riferimento inerziale, il MOMENTO ANGOLARE si conserva in modulo, direzione, verso

<u>NB</u>: QST NON implica che la velocità angolare sia costante.

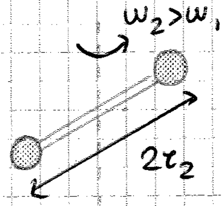
Quando il moto di rotazione avviene attorno ad un asse principale d'inerzia $\Rightarrow \vec{L} = \vec{I}\omega = cost$

CASO PARTICOLARE: + CORPI RIGIDI

$\Rightarrow$ La variazione relativa della posizione delle singole parti VARIA il MOMENTO D'INERZIA



$$I_1 = 2\left[\frac{2}{5}mr^2 + m(r+r_1)^2\right] \cong 2mr_1^2$$



$$I_2 \cong 2mr_2^2 \qquad |\vec{\omega}_2| = \frac{r_1^2}{r_2^2}|\vec{\omega}_1| > |\vec{\omega}_1|$$

3) CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

Questa legge è valida quando non ci sono attriti o quando le forze di attrito non compiono lavoro (es. puro rotolamento)

Si ha dissipazione di energia in presenza di attrito che agisce sull'asse di rotazione.

<u>NB</u>: La CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE <u>NON</u> implica quella dell'energia cinetica.

<u>es</u>. caso sfere che cambiano posizione relativa:

$$W = E_{k,fin} - E_{k,in} = \frac{L^2}{2I_f} - \frac{L^2}{2I_i}$$