



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1913A -

ANNO: 2016

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Nappo Maria Luisa

MATERIA: Fondamenti di ingegneria nucleare - prof. Ravetto

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

# INDICE: TEORIA

- Attività, tempo medio di decadimento, Tempo di dimezzamento 3
- Soluzione decadimenti con sorgente costante nel tempo 5 e in funzione del tempo 1E
- Fissione, energie di legame e separazione 11
- Energie e potenze 16-17
- Flusso neutronico 17
- Corrente netta con legge di Fick 22, lunghezze di diffusione 23  $L^2$
- Delta di Dirac, definizione 24
- Equazione della diffusione: caso con sorgente stazionaria, mezzo omogeneo, monodimensionale con  $D, \Sigma$  costanti 24 e soluzione 25 per un mezzo infinito
- Funzione di Green nel piano 26, 10E
- Mezzo semi-infinito con  $S(x) = S_0 \delta(x-x')$  28-29  $\rightarrow A \sinh(\frac{x}{L})$
- Mezzo semi-infinito con  $S(x) = S$  costante 29-30
- Laplace in coordinate polari 31 = funzione di Green 32
- Equazioni della diffusione con fissione e CRITICITÀ 33-34 ( $K_{eff}, K$ )
- Autofunzioni 36 e autofunzione fondamentale
- Teoria della criticità elementare, equazione completa della diffusione 37
- Problema delle autofunzioni di Helmholtz 38
- Vita medie delle particelle  $ln 41$
- Caso senza sorgente:  $K_1 < 1, K_1 = 1, K_1 > 1$  42
- Caso con sorgente non dipendente dal tempo 44, sorgente come  $\psi_1(x)$
- Autofunzioni di Helmholtz in geometrie piane: espressione completa del flusso 49
- Sorgente impulsata  $S(x) = S_0 \psi_1(x) \delta(t)$  49 e localizzate  $S(x) = S_0 \delta(x) \delta(t)$  50  
 $\hookrightarrow$  esercizio ③ pag. 36E  $\hookrightarrow$  pag. 37E
- Sorgente impulsata periodica 52 e 33E
- Esempi su Matlab con disegni di flusso e potenze, curvature 52 = 56

# INDICE : ESERCIZI

- Catene radioattive con sorgente dipendente dal tempo 1
- Catene radioattive con sorgente e pozzo 5-8
- Equazione della diffusione: mezzo infinito con sorgente costante in un intervallo intermedio 9 funzione di Green 10  $\frac{d^2\phi}{dx^2} - \frac{1}{L^2}\phi = 0$  (+S(x))
- $J_+$ ,  $J_-$  correnti parziali 11
- Mezzo semi-infinito, omogeneo con sorgente uniforme di neutroni emessi con decadimento radioattivo 15 ed errori percentuali 15
- Sorgente piana in a nel mezzo semi-infinito 16
- Mezzo semi-infinito con piccole quantità di nuclidi fissili e sorgente costante 18
- Equazione differenziale di decadimento con sorgente dipendente dal tempo e densità di potenze 20 (flusso costante)
- Miscela di fertile e fissili, equazioni che regolano l'evoluzione
- Sorgente impulsata secondo  $\varphi_1(x)$ , # neutroni trasmutati in un bersaglio 25
- Reattore sferico con sorgente costante 26
- Slab piano con sorgente pulsante 26
- Mezzo semi-infinito non omogeneo con sorgente in a 27, # neutroni assorbiti, errore
- Reattore sferico con potenze note 28 integrali  $\int_0^R r \sin(\frac{\pi r}{R}) dr$
- Variazione del raggio con  $Z_e$ , condizioni critiche 29
- Fattore di picco, flusso medio, flusso massimo 30
- Sorgente oscillate 31, sorgente a treni di impulsi 33
- Sorgente costante in uno slab, funzione pari  $\rightarrow \cosh(kx)$  34
- Segno della corrente 35, neutroni uscenti dal dominio, neutroni emessi dalle sorgenti
- $S(x,t) = S_0 \varphi_1(x) \delta(t)$  36,  $S(x,t) = S_0 \delta(x) \delta(t)$  37, # neutroni emessi
- Sistema sottocritico con sorgente oscillate 37
- Slab piano, mezzo non omogeneo 40, mezzo semi-infinito non omogeneo 39
- Slab piano, mezzo non moltiplicante,  $S(x,t) = S_0 \delta(x) \delta(t)$ , autofunzioni di Helmholtz 40
- Sorgente lineare in t 41  $\rightarrow$  reattore cilindrico
- Formule dei 4 fattori, reattore ben termalizzato 42, miscela MFF, masse trasportate

# FONDAMENTI DI INGEGNERIA NUCLEARE - Ravetto

La sorgente dell'energia nucleare è il nucleo e non l'atomo. Gli urti intermolecolari tra i nuclei sono di tipo elettrico e per non esplodere ci sono delle forze interne molto forti. Il nucleo è infatti in condizioni di EQUILIBRIO, cioè che ciò che succede è subito bilanciato da un'altra azione. Esistono dei nuclei che non sono in equilibrio e che quindi tendono a una situazione più stabile.

**FENOMENO DELLA RADIOATTIVITÀ:** L'atomo di Uranio U ha 238 protoni e 92 elettroni; se mancano dei neutroni a bilanciare l'atomo esso tende a liberarsi dei protoni in eccesso. In questo senso U è radioattivo. La radioattività causa la propagazione dell'energia cinetica delle particelle nella materia: le particelle emesse (generate) dalla radioattività trasferiscono la loro energia cinetica attraverso gli urti.

La radioattività non può essere espressa in modo deterministico, ma si verifica e si studia con un calcolo PROBABILISTICO. Il fenomeno del DECADIMENTO RADIO-

ATTIVO è studiato infatti attraverso il calcolo probabilistico. Si studia quindi come gli atomi decadono nel tempo, cioè come emettono delle particelle  $\alpha$  o  $\beta$ . Le particelle  $\alpha$  sono degli isotopi di 4 dell'elio che pesa 4,0006 g/mol.

**DECADIMENTO:** le particelle che si urtano spingono elettricamente le particelle che nel tempo decadono cedendo energie. Le particelle  $\alpha$  sono "buone" di segno +.

I neutroni emettono delle particelle  $\beta$ , cioè degli elettroni carichi di segno - per migliorare la stabilità dell'atomo e diventare dei neutroni. Le emissioni possono essere anche di tipo fotonico con energie molto più alte senza carica elettrica né masse e raggiungono distanze molto più elevate (particelle  $\gamma$ ).

Legge che regola il fenomeno della radioattività.

Supponiamo di avere un numero  $N_0$  di atomi radioattivi al tempo  $t=0$ . La probabilità che un nucleo decada è costante nel tempo e non dipende dalle quantità di nuclei che ci sono. Nell'emissione delle particelle il nucleo cambia, cioè la radioattività trasmette la materia.

NOTA - Sopravvivere fino al tempo  $t$  e decadere nel tempo  $t$  sono eventi disgiunti.

Moltiplicando le probabilità dei singoli eventi si ottiene la PROBABILITÀ DI DECADIMENTO

Tra  $t$  e  $t+dt$ :  $p(t) dt = (e^{-\lambda t} \cdot \lambda) dt$  dove  $p(t)$  è la DENSITÀ DI DECADIMENTO

Integrando ottengo la probabilità del nucleo di decadere:

$$\int_0^{+\infty} p(t) dt = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[ \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]_0^{+\infty} = 1$$

la densità di probabilità è normalizzata

Se ho una funzione  $g(t)$  e la integro si ottiene il valor medio:

$$\int_0^{+\infty} g(t) \cdot p(t) dt = \bar{g}, \text{ quindi con } g(t) = t \text{ si ottiene il valor medio di } t, \text{ ossia}$$

$$\text{il TEMPO MEDIO DI DECADIMENTO: } \int_0^{+\infty} t \cdot p(t) dt = \int_0^{+\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = \bar{t}$$

Risolvendo l'integrale per parti si ottiene:

$$\int_0^{+\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = t \frac{e^{-\lambda t}}{-1} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{-1} dt = \left[ -t e^{-\lambda t} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \right]_0^{+\infty} =$$

$$0 + \frac{1}{\lambda} \rightarrow \bar{t} = \frac{1}{\lambda}$$

NOTA INTEGRAZIONE PER PARTI

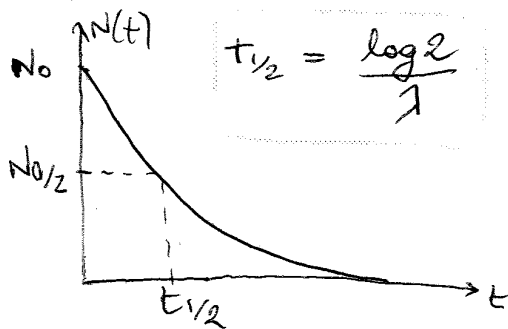
$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

Al tempo  $t_{1/2}$ , detto TEMPO DI DIMMEZZAMENTO, si hanno esattamente metà dei nuclei iniziali.

$$N(t_{1/2}) = N_0 e^{-\lambda t_{1/2}} = N_0/2$$

$$e^{\lambda t_{1/2}} = 2 \rightarrow \lambda t_{1/2} = \log 2$$

$$t_{1/2} = \frac{\log 2}{\lambda} = \bar{t} \cdot \log 2$$



$$N(t) - N(t+dt) = (\lambda dt) N(t)$$

Considerando  $R(t)$  la funzione dei nuclei introdotti al secondo.

$$N(t+dt) - N(t) = R(t) dt - \lambda N(t) dt$$

si ottiene un' Eq. DIFF. OMOGENEA,

$$\frac{dN(t)}{dt} = R(t) - \lambda N(t)$$

Per risolverla serve una tecnica che ci dia una soluzione  $\forall R(t)$ : si sfrutta il PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

DEGLI EFFETTI dove, alle condizioni iniziali si ha  $N(t=0) = N_0$

↳ grazie alla linearità dell'equazione

Man mano che  $T$  pesse, le quantità di nuclei radioattivi aumentano, ma pian piano i nuclei iniziano a decadere, ossia  $\lambda N(t) \uparrow$  con  $R(t)$  che continue ad aumentare. Quando l'incremento di  $R(t)$  eguaglia l'attività  $\lambda N(t)$  di nuclei che decadono si raggiunge una CONDIZIONE DI STAZIONARIETÀ o di EQUILIBRIO DINAMICO:

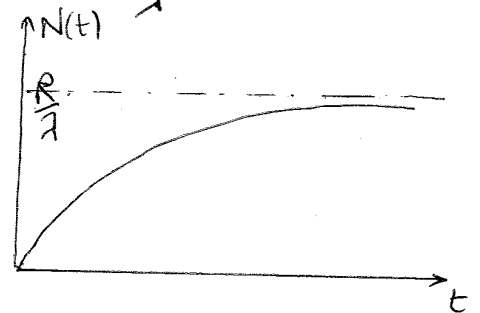
$$\frac{dN(t)}{dt} = R(t) \uparrow - \lambda N(t) \uparrow \rightarrow R(t) = \lambda N(t) \text{ ossia che tutto ciò}$$

che succede è bilanciato da un'altra azione, quindi le risposte diventano

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} + R \left( \int_0^t dt' e^{\lambda t'} \right) e^{-\lambda t} \text{ con } N(t) = \frac{R}{\lambda} \text{ asintoto}$$

orizzontali a  $t \rightarrow +\infty$ :  $R - \lambda N_{As} = 0 \Rightarrow N_{As} = \frac{R}{\lambda}$

$$N(t) = R e^{-\lambda t} \left[ \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t'} \right]_0^t = \frac{R}{\lambda} e^{-\lambda t} [e^{\lambda t} - 1]$$



$$N(t) = \frac{R}{\lambda} [1 - e^{-\lambda t}]$$

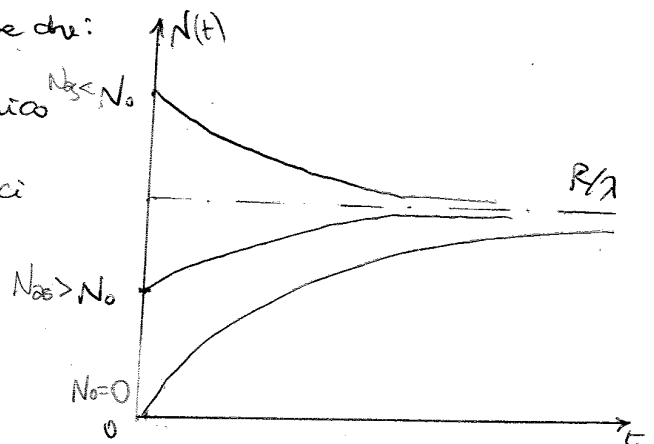
risposte date da una quota costante e una variabile nel tempo tale che per  $t \rightarrow \infty$  si ottiene  $\frac{R}{\lambda}$  (asintoto). Si ha che:

- se  $N_0 < \frac{R}{\lambda}$  per  $t \rightarrow \infty$  l'equilibrio dinamico  $N_{As} < N_0$

si raggiunge in un tempo minore perché ci

sono già dei nuclei all'interno;

- se  $N_0 > \frac{R}{\lambda}$  stessa situazione  $N_{As} > N_0$



### CATENE DI DECADIMENTO

Può succedere che il prodotto del decadimento produce dei NUCLEI anch'essi radioattivi. Ad esempio  $U^{238}$  produce  $U^{239}$  attraverso l'assorbimento di un neutrone che è un isotopo dell'uranio radioattivo che non esiste in natura.  $U^{238}$  ha un  $\lambda$  molto piccolo mentre  $U^{239}$  ha un decadimento molto rapido, infatti decade subito in Np neptunio che non esiste in natura e decade  $\beta$  senza cambiare massa, ossia è  $Np^{239}$  con numero atomico 93 che a sua volta decade nel plutonio  $Pu^{94}$ , molto più stabile, cioè con un decadimento radioattivo molto lento.

Se supponiamo di avere un nucleide radioattivo  $N_1$  che decadendo produce un nuovo nucleide  $N_2$  le equazioni diventano:

con la materia avvengono diverse risposte. Il neutrone collide meccanicamente con il nucleo: si conserva la quantità di moto e l'energia totale, mentre l'energia del neutrone viene trasferita, ossia il neutrone CAMBIA LA SUA ENERGIA e la DIREZIONE di volo. Per descrivere questo processo si vuole costruire un modello matematico:

Fermi utilizzo la LEGGE DI BOLTZMANN che descrive un'equazione di tipo STOCASTICO attraverso concetti probabilistici.

NOTA - Un processo stocastico o aleatorio è la versione probabilistica del concetto di sistema dinamico, ossia si parla della Teoria della probabilità. È una forma di rappresentazione di una grandezza che varia nel tempo in modo casuale e con certe caratteristiche. Facendo delle prove o osservazioni ripetute dello stesso processo si ottengono diversi esiti nel tempo o realizzazioni del processo. Osservando le diverse realizzazioni ad un istante  $t$  otteniamo una variabile aleatoria  $X(t)$  che comprende i diversi valori che il processo può assumere in quell'istante. Questi valori avranno un valore medio che corrisponde al valore al centro delle curve gaussiane all'istante  $t$ . (Wikipedia)

La Teoria di Boltzmann serve a simulare il moto delle particelle attorno al nucleo

• URTO ELASTICO - Le particelle e il nucleo collidono come due sfere rigide: il neutrone cambia la sua energia e la sua direzione secondo il fenomeno di SCATTERING

ELASTICO BIPOTENZIALE di tipo MECCANICO, ma l'energia globale si conserva.

La probabilità che questi neutroni di collisione dipende dalle dimensioni del nucleo, ossia delle SEZIONE DI URTO. Il neutrone può collidere con il nucleo ed entrare a far parte del nucleo stesso, cambiando la sua energia. Se il nucleo lascia ripartire il neutrone si parla di SCATTERING ELASTICO & RISONANZA e anche in questo caso l'energia globale viene conservata. Lo scattering bipotenziale + lo scattering di risonanze fanno lo SCATTERING ELASTICO.

Nel caso in cui ci sia la CATTURA del neutrone da parte del nucleo si crea un isotopo dell'elemento che può essere o non essere radiattivo. Quando avviene l'ASSORBIMENTO del neutrone il nucleo decade in un tempo molto breve. La scala di vite del neutrone è legata all'assorbimento e non al decadimento. Il nucleo trattiene una parte dell'energia e avviene quindi un URTO ANELASTICO in cui non si conserva l'energia dopo la collisione tra neutrone e nucleo.



1 Si ha:  $N = \frac{\rho N_A}{A} \approx \frac{\text{g/cm}^3}{\text{g/gatomo}} \cdot N_A = \left( \frac{\text{g/cm}^3}{\text{g/gatomo}} \right) \cdot \left( \frac{\text{nuclei}}{\text{g gatomo}} \right) = \frac{\text{nuclei}}{\text{cm}^3}$

con  $A =$  masse atomiche e  $N_A =$  numero di Avogadro.

NOTA - L'unità di misure usate per le lunghezze è il  $[cm]$  e non il  $\mu$ .

2 Ogni grammo atomico di una certa sostanza contiene il numero di Avogadro.

3 Numero di nuclei:  $N \cdot A \cdot d$  Area esposta dagli ostacoli da colpire:  $N \cdot A \cdot d \cdot \sigma$

Probabilità di colpire a caso un ostacolo:  $\frac{\text{area ostacoli da colpire}}{\text{area totale}} = \frac{N \cdot A \cdot d \cdot \sigma}{A}$

↳ probabilità di colpire un nucleo con un neutrone =  $N$

4 Le collisioni sono legate al fatto che le particelle si muovono, cioè, l'interazione è legata al moto delle particelle.

5 Sezione d'urto macroscopica del materiale:  $\Sigma = N \cdot \sigma \approx \text{cm}^{-1}$

6 Sezione d'urto microscopica di collisione:  $\sigma \approx \text{cm}^2$

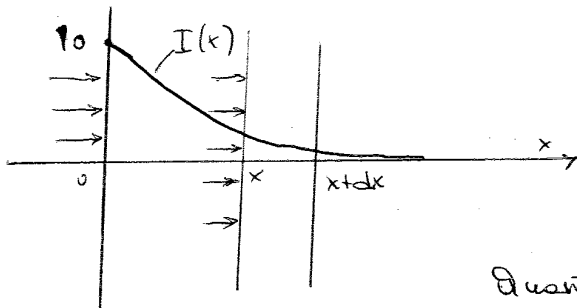
7 UNITÀ DI MISURA:  $[\sigma] = 10^{-24} \text{cm}^2 = \text{barn (b)}$

Esercizio.

8 Supponiamo di avere un mezzo omogeneo, dove l'omogeneità è una PROPRIETÀ

9 legata alle dimensioni spaziali, mentre l'isotropia è relativa alle direzioni.

10 Sia  $I$  l'INTENSITÀ DEL FASCIO data dal rapporto fra le particelle nell'unità di aree sull'unità di tempo (concetto simile alle portate).



11 Consideriamo un problema monodimensionale:

↳ unice dipendenze di  $I$  e da  $x$

$I(x) - I(x+dx)$

12 Quantità totale di interazioni che le particelle hanno subito.

13 Probabilità per unità di percorso  $\Sigma \times$  percorso  $dx = \Sigma dx$ : probabilità di collisione fino a  $x$

$I(x) - I(x+dx) = I(x) \Sigma dx \rightarrow I(x) - I(x) - I(dx) = I(x) \Sigma dx$

$dI(x) = -I(x) \Sigma dx$

Successivamente vengono emessi dai neutroni fino a un massimo di 5-6 neutroni. Per capire quanti neutroni vengono emessi si fa una MEDIA STATISTICA (poiché il numero di neutroni è un numero intero), ossia una media sulle probabilità che l'evento si verifichi:

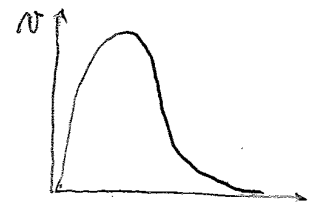
$$\nu = \sum_{i=1}^N P(i) \cdot i = 2,45 \text{ (per l'isotopo } U^{235}) \quad \text{con } i = \text{n. di neutroni emessi}$$

MEDIA DEL NUMERO DI NEUTRONI EMESSI

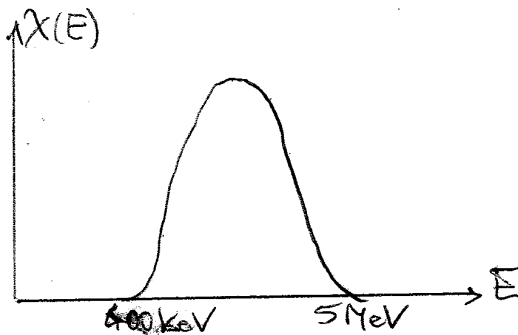
Nel discreto la media è data dalle sommatorie, mentre nel continuo si integra  $\int g(x)f(x)dx$ . L' $U^{235}$  è l'unico elemento presente in natura in grado di far avvenire la fissione con  $N_0 = 0$ , ossia l'unico in grado di avere il  $\Delta E$  necessario per far avvenire la fissione spontaneamente.  $U^{235} > U^{238}$

La velocità di un neutrone termico (in equilibrio termico) a  $20^\circ C$  è data dalla LEGGE DI BOLTZMANN  $\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = kT$  dove  $\bar{v}$  è la velocità media, mentre la distribuzione delle velocità segue una curva maxwelliana.

Per i neutroni lenti  $\bar{v} = 2200 \frac{m}{s}$  con energia  $E = 0,025 eV$ .



NOTABENE: la quantità di neutroni emessi dai neutroni termici (lenti) è molto più alta. I neutroni emessi nelle fissione hanno energie molto alte  $\sim MeV$ . La probabilità che venga emesso un neutrone di fissione con energie comprese tra  $E$  ed  $E+dE$  è data dalla DENSITÀ DI PROBABILITÀ  $\chi(E)$  che descrive dove vanno a finire i neutroni per l'energia  $dE$ :  $\chi(E) \cdot dE$  dove  $\chi(E)$  è detto SPETTRO DI FISSIONE ed è una distribuzione:



L'energia media con cui vengono rilasciati i neutroni di fissione è data dall'integrale:  $\int E \chi(E) dE = \bar{E} \approx 2 MeV$  ossia danno un neutrone VELOCE che deve essere rallentato predisponendo un materiale, detto MODERATORE,

Tale da rendere i neutroni emessi uguali ai padri, quindi neutroni termici o lenti.

### SCALE DI VELOCITÀ E VITA MEDIA

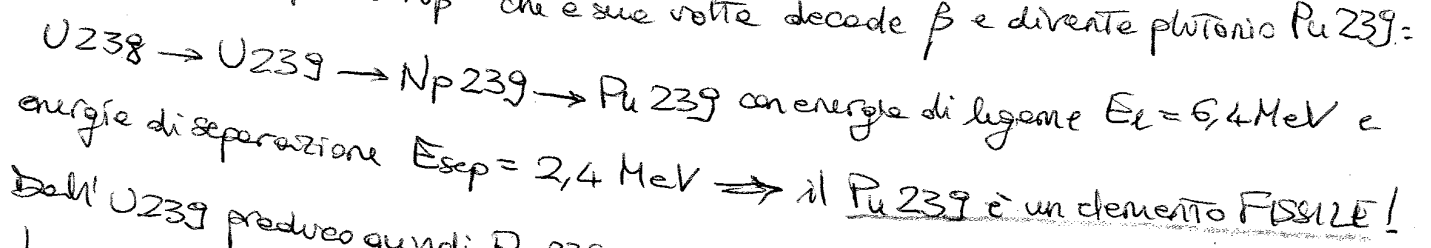
I neutroni si muovono a  $2200 \frac{m}{s}$  - Per conoscere la vite media dei neutroni si

Tiene conto dell'ordine di grandezza del tempo che trascorrono in un

masse facendo diffondere l'uranio in un setto poroso. In questo modo si ottiene un uranio al 4-5% di U235 e non più del 0,7%, ma non si arricchisce di più perché ci sono limiti dettati dalla legge. Un altro metodo di separazione è quello del moto centrifugo che separa le particelle più pesanti da quelle più leggere.

NOTA - Non può essere separato chimicamente perché è sempre U2

CATENA DI DECADIMENTO. L'U238 assorbe un neutrone e diventa U239 radioattivo che decade  $\beta(-)$  diventando un elemento che pesa sempre 239 ma ha un elettrone in meno, ossia il neptunio Np<sup>93</sup> che a sua volta decade  $\beta$  e diventa plutonio Pu239:



Dall'U239 produce quindi Pu239, ossia combustibile. L'U238 è invece fissionabile.  $\rightarrow$  FENOMENO DI BRIDGE: per la separazione dell'uranio

Quindi, con  $w = 2,45 \rightarrow 1,0$  viene distrutto e  $1,45$  produce Pu239, ossia si ottiene più combustibile che può essere separato CHIMICAMENTE dall'uranio ottenendo del combustibile puro. Il Pu è molto radiativo di tipo  $\alpha$  e ha un tempo di decadimento lungo (circa 24000 anni). Il Pu239 prodotto rimane nel reattore e in parte produce fissione, un'altra parte invece cattura un neutrone e diventa Pu240 fissionabile che, a sua volta, prende un neutrone e diventa Pu241 di nuovo fissile con decadimento  $\beta$ . Queste reazioni sono molto pericolose perché sono reazioni a catena molto rapide con pochi ritardanti, ma gli elementi diventano sempre più pesanti e quindi più facilmente separabili  $\rightarrow$  RIPROCESSAMENTO di elementi pericolosi

NOTA - Per riprocessamento si intendono i processi chimici che consentono la separazione del combustibile nucleare nelle sue principali componenti: uranio, plutonio e attinidi minori con i prodotti di fissione. Questo processo permette di recuperare nuovo combustibile fissile e quindi avere una resa energetica maggiore dalle stesse quantità di uranio naturale estratto originariamente dalle miniere.

MASCA CRITICA: è la minima massa per fare un reattore chimico. Se si usa U238 si ha il 100% in più di combustibile rispetto a U235. Il Pu239 ha una sezione d'urto di cattura, una di fissione, ecc. e la probabilità che produce fissione è data da:  $\frac{\sigma_f}{\sigma_a} = \frac{570 \text{ bar}}{680 \text{ bar}} = 0,84$ , quindi c'è la probabilità

Dividendo ancora per  $d\vec{r}$  e integrando su  $DE$  si ha le potenze generate da tutte le fissioni per unità di volume, ossia la DENSITÀ DI POTENZA, mentre integrando in  $d\vec{r}$  si ha la POTENZA DELLA MACCHINA:  $\int d\vec{r} \int DE \int d\vec{\Omega} E_f \cdot \Sigma_f \cdot N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) \cdot V$

Lo stesso procedimento si usa per la cattura, lo scattering, ecc.

Per conoscere le potenze occorre conoscere  $N$ , quindi serve un'equazione generale che ci permette di calcolarle: l'equazione di Boltzmann. Noi usremo un metodo più semplice introducendo delle semplificazioni.

FLUSSO NEUTRONICO  $\phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) = N N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$   
 (flusso di particelle)

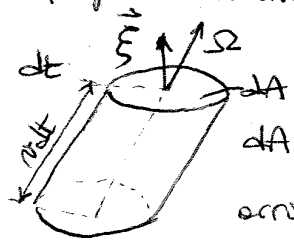
↳ quantità di distanze percorse in  $d\vec{r} dE d\vec{\Omega} dt$

Se una grandezza non dipende da  $\Omega$  si chiama ISOTROPA e il campo di particelle è detto isotropo. Nella realtà non avviene nei reattori, ma lo si può supporre.

Una volta noto il prodotto  $NN$  si può progettare un reattore nucleare.

Definizione. La CORRENTE è la massa che attraversa l'unità di superficie ortogonale al flusso nell'unità di tempo. La corrente elettrica è la quantità di carica che attraversa una sezione ortogonale al flusso nell'unità di tempo e si misura in  $\left[\frac{C}{m^2 s}\right]$ .

→ La CORRENTE DI NEUTRONI è il numero di particelle che attraversa l'unità di superficie nell'unità di tempo e dipende dall'orientamento della superficie.



La corrente delle particelle che attraversa un'area infinitesima  $dA$  con normale  $\vec{n}$  in direzione  $\vec{\Omega}$  è data da particelle che arrivano da una distanza al più di  $v dt$  attraversate nel tempo  $dt$ . Quindi, tutte le particelle presenti nel cilindro attraversano  $dA$  in  $dt$ .

Considero il volume  $dV = v dt \cdot dA \cdot (\vec{n} \cdot \vec{\Omega})$  → prodotto tra due vettori scalari da cui il coseno compreso tra i vettori.  
 l'elemento di area orientata  $dA \vec{n}$

$$\underbrace{N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) dE d\vec{\Omega}}_{\text{numero di particelle per unità di volume}} \cdot \underbrace{v dt (dA \vec{n}) \cdot \vec{\Omega}}_{\text{dividendo per } dt} = \vec{\Omega} \phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) \cdot \vec{n} dA dE d\vec{\Omega}$$

Facciamo una foto del volume  $dV$  al tempo  $t$  e al tempo  $t+dt$  il numero di particelle può cambiare -

$$n(\vec{r}, t+dt) dV - n(\vec{r}, t) dV = -(\text{USCITE} - \text{ENTRATE}) - \sum_a(\vec{r}) \Phi(\vec{r}, t) dV dt + S(\vec{r}, t) dV dt = -\text{Assorbimenti} + \text{Sorgente} - (\text{USCITE} - \text{ENTRATE})$$

Perché è cambiato il numero di particelle nel tempo  $dt$ ? Si studia il fenomeno dal punto di vista fisico: il materiale NON È FISSILE, ma È DIFFONDENTE. Le particelle possono essere assorbite, quindi essere rimosse per assorbimento; le particelle vengono introdotte in  $dV$  tramite una sorgente utilizzata che fa aumentare  $n$ . Esse hanno una velocità  $v$  con cui possono uscire dal volume nell'intervallo di tempo  $dt$ , ma possono entrarne altre -

- Sorgente: è un dato del problema  $S(\vec{r}, t) dV dt$  ci dice quante particelle vengono generate nell'unità di tempo e nell'unità di volume

- Assorbimento: si calcola la probabilità per unità di percorso, nota  $\sum_a(\vec{r}, t)$ :

$$\sum_a(\vec{r}) \Phi(\vec{r}, t) dV dt \quad \text{con } \sum_a \text{ che dipende del percorso, ma anche del tempo } \downarrow$$

Supponiamo che il materiale sia stazionario, indipendente del tempo:  $\sum_a(\vec{r}, t) = \sum_a(\vec{r})$

Sommando i contributi di tutte le aree si trova (USCITE - ENTRATE):

$$\sum_{i=1}^M \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\xi}_i dA_i dt \rightarrow \text{questo sommatorio non coinvolge l'elemento di volume ma la sua superficie, ossia somma su tutte le facce del volume.}$$

Con il TEOREMA DI GAUSS si ha una relazione che collega la superficie con il volume -

$$(\text{USCITE} - \text{ENTRATE}) = \sum \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\xi}_i dA_i dt \equiv (\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) dV) dt$$

$$\frac{n(\vec{r}, t+dt) dV - n(\vec{r}, t) dV}{dt} = -\sum_a(\vec{r}) \Phi(\vec{r}, t) dV dt + S(\vec{r}, t) dV dt - \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) dV dt$$

$$\frac{\partial n(\vec{r}, t)}{\partial t} = S(\vec{r}, t) - \sum_a \Phi(\vec{r}, t) - \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) = \frac{1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\vec{r}, t)$$

Si ottiene un'equazione ESATA, ma con 2 incognite: serve trovare una relazione tra la densità e le correnti delle particelle.  $\rightarrow$  4 scalari: 1 vettore e uno scalare

Si può supporre intuitivamente che le particelle si muovano dove il flusso è minore, come avviene per le trasmissioni del calore, si ha quindi:  $\vec{J} \propto -\nabla \Phi$

lontani è trascurabile, perché la probabilità che avviano e grande distanza non contribuisca nelle correnti  $\rightarrow$  l'r utile è molto piccolo quindi  $\Psi \rightarrow 0$ .

La diffusione descrive un fenomeno in cui le particelle non hanno velocità finite, contro la teoria delle relatività. È un COLLISION DOMINATED PROCESS, cioè un processo in cui avvengono tantissime collisioni per unità di distanza.

Per mantenere l'ipotesi di emissioni isotrope lo scattering deve essere dominante.

$\Sigma_s \gg \Sigma_e \Rightarrow$  bisogna fare delle ipotesi su  $\Psi$  che contenga  $\Sigma_s$ .

• Assunzione 4:  $\Psi(\vec{r}, t) = \Psi(0,0,0, t) + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_0 x + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_0 y + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \Big|_0 z$

Si suppone che la densità di emissioni possa essere approssimata dalle gaussiane di Maxwellian.

Con  $(x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta)$

$$\frac{dA_z}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin \theta dt \int_0^{+\infty} dr \left[ \Psi(0,0,0, t) + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_0 r \sin \theta \cos \varphi + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_0 r \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \Big|_0 r \cos \theta \right] e^{-\Sigma r}$$

NOTA:  $\int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0$

$$J_z^- dA_z = \frac{dA_z}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin \theta \cos \theta \int_0^{+\infty} dr \cdot \left[ \Psi(0,0,0, t) + r \cos \theta \frac{\partial \Psi}{\partial z} \Big|_0 \right] e^{-\Sigma r}$$

$$J_z^- dA_z = \frac{dA_z}{2} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin \theta \cos \theta \int_0^{+\infty} dr \Psi(0, t) e^{-\Sigma r} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin \theta \cos^3 \theta \int_0^{+\infty} dr \frac{\partial \Psi}{\partial z} \Big|_0 r e^{-\Sigma r} \right\}$$

$$J_z^- dA_z = \frac{dA_z}{2} \left\{ \Psi(0, t) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin \theta \cos \theta \int_0^{+\infty} dr e^{-\Sigma r} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \Big|_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin \theta \cos^3 \theta \int_0^{+\infty} dr r e^{-\Sigma r} \right\}$$

$$J_z^- dA_z = \frac{dA_z}{2} \left[ \frac{1}{2\Sigma} \Psi(0, t) + \frac{1}{3\Sigma^2} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \Big|_0 \right]$$

$$J_z^+ dA_z = \frac{dA_z}{2} \left[ \frac{1}{2\Sigma} \Psi(0, t) - \frac{1}{3\Sigma^2} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \Big|_0 \right]$$

$$J_{z, netto} = J_z^+ dA_z - J_z^- dA_z \Rightarrow -\frac{1}{3\Sigma^2} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \Big|_0$$

$$J_x = -\frac{1}{3\Sigma^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_0$$

$$J_y = -\frac{1}{3\Sigma^2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_0$$

$$\nabla \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \hat{e}_z$$

$$\vec{J}(0, t) = -\frac{1}{3\Sigma^2} \nabla \Psi \Big|_0 \Rightarrow \vec{J}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{3\Sigma^2} \nabla \Psi(\vec{r}, t)$$

Per determinare le due variabili arbitrarie servono due condizioni al contorno, oppure si sceglie un mezzo infinito ideale  $\equiv$  molto grande in modo che non abbia i contorni.

**IPOTESI:** supponiamo che nel mezzo infinito omogeneo non ci siano sorgenti e che le particelle nascano tutte dallo stesso punto. La sorgente quindi non dipende da  $x$  ma è in un solo punto che consideriamo come origine degli assi.

↳ Sorgente piana localizzata

$$\Delta \frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} - \sum_a \Phi(x) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} - \frac{\sum_a}{\Delta} \Phi(x) = 0 \quad \forall x \neq 0$$

↳ equaz. omogenea

$$\left[ \frac{\Delta}{\sum_a} \right] = \left[ \frac{\text{cm}}{\text{cm}^{-1}} \right] = [\text{cm}^2] = L^2$$

$$L^2 = \frac{\Delta}{\sum_a}$$

**LUNGEZZA DI DIFFUSIONE:**  $L = \sqrt{\frac{\Delta}{\sum_a}}$  stabilisce le scale spaziali del fenomeno diffusivo  $\rightarrow$  tanto più  $L$  è grande, maggiore è il fenomeno diffusivo.

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} - \frac{1}{L^2} \Phi(x) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \Phi}{dx^2} = \frac{1}{L^2} \Phi = \begin{cases} \nearrow e^{x/L} \\ \searrow e^{-x/L} \end{cases}$$

Si trovano 2 soluzioni indipendenti

Soluzione generale:  $\Phi(x) = A e^{x/L} + C e^{-x/L}$

• Per  $x > 0$ :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow \Phi = C e^{-x/L}$

Non ci sono particelle per  $x \rightarrow +\infty$ , la parte che diverge non ci deve essere.

• Per  $x < 0$ :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \Phi = A e^{x/L}$

Soluzione generale:  $\Phi(x) = B e^{-|x|/L} \quad \forall x \neq 0$

• Per  $x = 0$ : nella sorgente?

## DIFFUSIONE

Per quanto riguarda l'equazione di Fick, analizziamo il caso con sorgente stazionaria e sezioni d'urto costanti, quindi le variabili sono indipendenti dal tempo:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{D} \cdot \nabla \Phi(\vec{r}, t) - \sum_a \Phi(\vec{r}, t) + S(\vec{r}, t) \quad \text{diventa:}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} \cdot \nabla \Phi(\vec{r}) - \sum_a \Phi(\vec{r}) + S(\vec{r}) = 0$$

L'equazione (\*) contenente  $\mathcal{J}(x)$  permette di togliere la sorgente per tutti i punti diversi da zero. Risolvendo l'equazione omogenea associata del 2° ordine si ha:

$$\frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^2} - \frac{1}{L^2} \Phi(x) = 0 \Rightarrow \alpha^2 - \frac{1}{L^2} = 0 \Rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{L}$$

Le soluzioni dell'equazione caratteristica permettono di trovare due soluzioni dell'equazione LINEARMENTE INDIPENDENTI:  $e^{-x/L}$ ,  $e^{+x/L} \Rightarrow$

$$\boxed{\Phi(x) = A e^{x/L} + C e^{-x/L}} \quad \text{per trovare le costanti } A \text{ e } C \text{ bisogna}$$

imporre delle condizioni al contorno: supponiamo che il mezzo sia INFINITO e OMOGENEO  $\rightarrow$  ciò che accade a destra accade anche a sinistra, ossia il mezzo è simmetrico quindi anche la funzione sarà SIMMETRICA e PARI. Dopo che le particelle vengono emesse in  $x=0$  queste diminuiscono fino a diventare nulle per  $x \rightarrow \infty$ . Il mezzo è DISSIPATIVO.

Perché la funzione è pari si può analizzare il problema solo per  $x > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} A e^{x/L} + C e^{-x/L} = 0 \Rightarrow \boxed{A=0} \Rightarrow \boxed{\Phi(x) = C e^{-x/L}}$$

Si usa il grado di libertà  $C$  per costringere le soluzioni ad avere una sorgente in  $x=0$ . La sorgente ISOTROPA emette per  $x > 0$  la metà delle sue particelle e alcune di queste subiscono scattering. Il contributo dello scattering è uguale al numero di particelle da sinistra e destra.

$$\text{Se si calcola } \mathcal{J}(x) \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{J}(x) = \frac{S_0}{2}$$

La corrente netta è uguale a metà della sorgente, ma nel caso stazionario la corrente è data dalle legge di Fick:

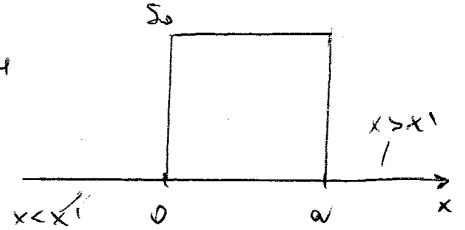
$$\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}, t) = -D \nabla \Phi(\vec{r}, t) \Rightarrow \mathcal{J}(x) = -D \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \Rightarrow \boxed{\mathcal{J}(x) = + \frac{CD}{L} e^{-x/L}}$$

$$\text{Ma per } \lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{J}(x) \rightarrow \frac{S_0}{2} = \frac{CD}{L} \Rightarrow \boxed{C = \frac{S_0 L}{2D}} \quad \text{Soluzione che concorda con la sorgente isotrope}$$

$$\boxed{\Phi(x) = \frac{S_0 L}{2D} e^{-x/L}} \quad \text{per } x=L \quad \Phi(L) = \frac{S_0 L}{2D} \cdot \frac{1}{e}$$



$$\int_0^a \frac{S_0 L}{2S} \cdot e^{-\frac{|x-x'|}{L}} dx' \quad \begin{cases} x' \text{ viaggia tra } 0 \text{ e } a \\ x \text{ può variare la sua posizione} \end{cases}$$



Si distinguono Tre casi: ①  $x < 0 \rightarrow x < x'$ ;  
 ②  $0 < x < a$ ; ③  $x > a \rightarrow x > x'$ ;

Supponiamo di trattare un problema di un mezzo NON OMOGENEO

II	I	1) per $x > 0$ $\frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} - \frac{1}{L_I^2} \Phi(x) = 0$ si considere ancora in $x=0$ una sorgente piana
		2) per $x < 0$ $\frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} - \frac{1}{L_{II}^2} \Phi(x) = 0$

due eq. differenziali  $\Rightarrow$  due costanti arbitrarie da determinare

1)  $\Phi(x) = A_1 e^{-x/L_I}$ ; 2)  $\Phi(x) = A_2 e^{+x/L_{II}}$

N.B. la soluzione deve essere continua!, ciò che trovo a destra = ciò che trovo a sx.

1]  $\Phi(0^+) = \Phi(0^-)$  FLUSSO CONTINUO

$\lim_{x \rightarrow 0^+} A_1 e^{-x/L_I} = \lim_{x \rightarrow 0^-} A_2 e^{+x/L_{II}} \Rightarrow \boxed{A_1 = A_2}$  1<sup>a</sup> condizione al contorno

2] La seconda condizione fisica coinvolge le correnti. In tal caso i contributi di scattering non sono più uguali come nel caso precedente.

Suppongo di avere un piano diviso in due piani, uno di destra e uno di sinistra

Ciò che entra + sorgente = ciò che esce

$J_s^+ + J_s^- + S_0 = J_s^- + J_s^+$  PROBLEMA STAZIONARIO

$S_0 = J_s^- + J_s^+ - J_s^- - J_s^+ = \underbrace{(J_s^+ - J_s^-)}_{\text{corrente netta a destra}} - \underbrace{(J_s^+ - J_s^-)}_{\text{corrente netta a sinistra}}$

$S_0 = J_s^- - J_s^+ \Rightarrow \boxed{S_0 = J(0^+) - J(0^-)}$

$J(0^+) = -\frac{A_1 D_I}{-L_I} \cdot e^{-0/L_I} = \frac{A_1 D_I}{L_I}$        $J(0^-) = -\frac{A_2 D_{II}}{L_{II}}$

$A_1 = A_2 \Rightarrow S_0 = \frac{A_1 D_I}{L_I} - \left( -\frac{A_2 D_{II}}{L_{II}} \right) = A_1 \left( \frac{D_I}{L_I} + \frac{D_{II}}{L_{II}} \right)$

Per  $x \neq x'$ :  $\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} - \frac{\phi(x)}{L^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = \frac{\phi(x)}{L^2}$

$\phi(x) = A_I e^{x/L} + C_I e^{-x/L}$  per  $x < x'$

$\phi(x) = A_{II} e^{x/L} + C_{II} e^{-x/L}$  per  $x > x'$

- Per  $x$  grande  $\phi(x) \rightarrow 0 \Rightarrow A_{II} = 0 \Rightarrow \phi(x) = C_{II} e^{-x/L}$

- Impongo che in  $x = 0$  la soluzione sia pari a zero:

$\phi(0) = 0 \Rightarrow A_I + C_I = 0 \Rightarrow A_I = -C_I$

$\phi(x)$  può essere rappresentato da un SENO IPERBOLICO che sappiamo essere la combinazione di due esponenziali e che si annulla in un punto.

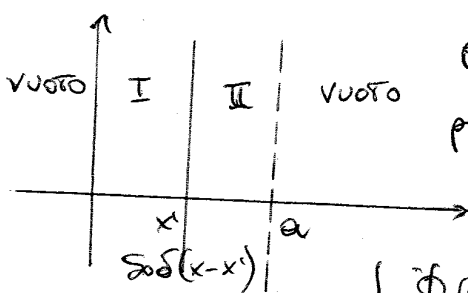
$\phi(x) = A_{II} e^{x/L} - A_I e^{-x/L} = \underbrace{2A_{II}}_{=E_I} \left( \frac{e^{x/L} - e^{-x/L}}{2} \right) = E_I \sinh\left(\frac{x}{L}\right)$

Imponendo le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \phi(x'^-) = \phi(x'^+) \\ J(x'^+) - J(x'^-) = S_0 \end{cases}$$

Si ricavano le costanti  $E_I$  e  $E_{II}$

Cerco la funzione di Green corrispondente alle configurazioni materiali e geometriche considerate:



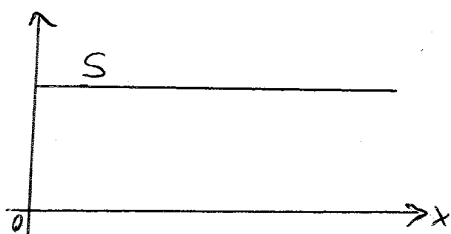
per  $x < x'$ :  $\phi(x) = A_I e^{x/L} + C_I e^{-x/L} = E_I \sinh\left(\frac{x}{L}\right)$

per  $x > x'$ :  $\phi(x) = E_{II} \sinh\left(\frac{a-x}{L}\right)$

imponendo in  $x'$  la continuità del flusso:

$$\begin{cases} \phi(x'^-) = \phi(x'^+) \\ J(x'^+) - J(x'^-) = S_0 \end{cases} \rightarrow \text{Trovo } E_I \text{ ed } E_{II}$$

• Considerando adesso un mezzo semi infinito con sorgente costante:

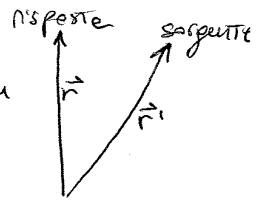


Considero la funzione di Green e moltiplico per  $S(x')$ :

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' S(x') \cdot G(x' \rightarrow x)$$

## Equazioni delle diffusioni in uno SPAZIO GENERICO

Supponiamo di avere una sorgente puntiforme nell'origine degli assi uguali e zero in ogni punto e così in 0, ossia una  $\delta$  di Dirac:  $S_0 \delta(\vec{r})$



$\phi$  dipende solo delle lunghezze di  $\vec{r}$ , cioè della distanza dalla sorgente:

$$\Delta \nabla^2 \phi(r) - \sum_a \phi(r) + S_0 \frac{\delta(r)}{4\pi r^2} = 0$$

$\int_0^{+\infty} (4\pi r^2) dr \frac{\delta(r)}{(4\pi r^2)} = 1$  Bisogna dividere per  $4\pi r^2$  affinché l'integrale delle  $\delta$  di Dirac sia 1 (per definizione) altrimenti in  $r=0$  verrebbe 0 e non 1  $\rightarrow$  in una generica geometria speciale

Al di fuori dell'origine si risolve l'equazione omogenea:

$$\Delta \nabla^2 \phi(r) - \sum_a \phi(r) = 0 \quad r \neq 0$$

in  $r=0$  introduco la sorgente che mi dà una soluzione con due costanti arbitrarie

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  senza cambiare variabili e derivando si ha

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} \frac{1}{r}$$

Operatore: "mangia" le funzioni e restituisce un'altra funzione.

NOTA - Successione: prende un numero intero e associa uno reale.

Funzione: è un'operazione matematica che associa ad ogni elemento di un insieme uno e un solo elemento di un altro insieme.

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r f(r)) \Rightarrow \nabla^2 \phi(r) - \frac{1}{L^2} \phi(r) = 0 \text{ derivate parziali}$$

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r \phi(r)) - \frac{1}{L^2} \phi(r) = 0 \text{ derivate TOTALI sempre con } r \neq 0$$

moltiplico per  $r$ :  $\frac{d^2}{dr^2} (r \phi(r)) - \frac{1}{L^2} (r \phi(r)) = 0 \Rightarrow$   $r \phi(r) = y(r)$  nuove incognite

$$\frac{d^2}{dr^2} y(r) - \frac{1}{L^2} y(r) = 0 \text{ stessa equazione risolta con 2 esponenziali}$$

$$y(r) = A e^{-\frac{r}{L}} + C e^{\frac{r}{L}} \Rightarrow \phi(r) = A \frac{e^{-\frac{r}{L}}}{r} + C \frac{e^{\frac{r}{L}}}{r}$$

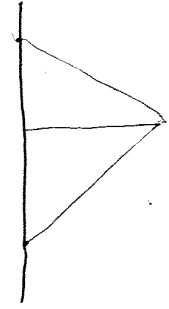
$\lim_{r \rightarrow +\infty} \phi(r) = 0$  perché è un mezzo dissipativo  $\Rightarrow C = 0$  ( $\frac{1}{r}$  non vince  $e^r$ )

$$\phi(r) = A e^{-\frac{r}{L}}$$

Solitamente, in geometria piana:

1) se c'è una sorgente simmetrica ciò che succede a destra è uguale a ciò che succede a sinistra.

Risolvendo con la F di Green Troviamo il contributo di ogni punto nel piano su  $x \Rightarrow$  integrando posso trovare la soluzione del piano.



### ESERCIZIO<sub>2</sub>

Problema del filo che emette delle particelle.

Integrando sul filo Trovo l'equazione della diffusione in geometrie lineare (integrali di linea)

NOTA - Con Green Tutti i problemi si risolvono integrando -

### FISSIONE

Equazioni della diffusione:

$$\frac{1}{N} \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \nabla^2 \phi(\vec{r}, t) - \Sigma_a \phi(\vec{r}, t) + \nu \Sigma_f \phi(\vec{r}, t) + S(\vec{r}, t)$$

ciò che viene emesso dalle fissioni

Per tenere conto delle variazioni temporale considero un volume vuoto in cui vengono introdotte delle particelle che poi si spengono: il reattore non produce energia perché non produce fissioni  $\rightarrow$  diventa stazionario. Se invece consideriamo un reattore in cui si auto producono neutroni con le fissioni: il reattore si scalda e non va bene.

Se il sistema produce energia in modo stazionario? Servono comunque dei sistemi per controllare le potenze. Le soluzioni stazionarie è quelle COSTANTE.

Supponiamo che il sistema sia stazionario e troviamo le soluzioni stazionarie dopodiché lo consideriamo dinamico con problema alle derivate parziali.

Caso stazionario per un mezzo omogeneo (parametri dei materiali non dipendono dallo spazio)

$$\Delta \nabla^2 \phi(\vec{r}) - \Sigma_a \phi(\vec{r}) + \nu \Sigma_f \phi(\vec{r}) + S(\vec{r}) = 0$$

Assumo che le mie macchine funzioni senza sorgente: OMOGENA! cambio la natura del problema

• Soluzione banali:  $\phi = 0$  senza particelle

• Soluzione non nulla: grazie al Teorema di Rouché-Capelli sappiamo che c'è una soluzione

- approssimando  $\nabla^2$  come differenze il problema diventa algebrico e si può usare Rouché-Capelli

- studiando il caso di MEZZO INFINITO con soluzioni COSTANTE:

$$\Sigma_a \phi + \nu \Sigma_f \phi = 0 \Rightarrow \phi (\nu \Sigma_f - \Sigma_a) = 0 \begin{cases} \phi = 0 \\ \nu \Sigma_f = \Sigma_a \end{cases}$$

$$D \frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} - \sum_e \Phi(x) + \frac{1}{k} K_{\infty} \sum_a \Phi(x) = 0 \quad \text{stessa discussione di prima}$$

Se  $k=1$ , caso CRITICO  $\rightarrow$  unico caso che ha senso altrimenti si deve aumentare o diminuire la produzione o l'assorbimento per ottenere le soluzioni stazionarie.

Dividendo per  $D$ :

$$\frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} + \frac{K_{\infty}/k - 1}{L^2} \Phi(x) = 0$$

- 1)  $\frac{K_{\infty}}{k} - 1 > 0$
- 2)  $\frac{K_{\infty}}{k} - 1 < 0$

L'equazione si divide in due casi ma le seconde non è accettabile:

2) Soluzione date delle condizioni al contorno in cui  $\Phi(-\frac{H}{2}) = 0$  e  $\Phi(\frac{H}{2}) = 0$

Si ottiene una combinazione di esponenziali che non si annulla mai, tanto meno in  $x = \pm \frac{H}{2}$  quindi la soluzione è da escludere

Nel 1° caso invece si ottiene:

$$1) \frac{K_{\infty}}{k} - 1 > 0 \Rightarrow K_{\infty} > k \text{ dove } k \text{ è la COSTANTE DI MOLTIPLICAZIONE DEL MEZZO FINITO}$$

$$k < K_{\infty}$$

Quindi la costante moltiplicata del mezzo finito è minore di quella nel mezzo infinito

$$\frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} + \alpha^2(k) \Phi(x) = 0 \quad \text{le soluzioni di queste equazioni è date dalle somme di esponenziali complessi, quindi di}$$

funzioni trigonometriche in  $\sin x$  e  $\cos x$  che sono due soluzioni LINEARMENTE

INDIPENDENTI  $\Rightarrow$  accettabili:  $\frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} = -\alpha^2 \Phi \Rightarrow$

$$\Phi(x) = A \cos(\alpha x) + C \sin(\alpha x)$$

Si possono trovare entrambe le costanti arbitrarie? NO, se  $\Phi(x) = M f(x)$  si riesce a trovare una sola costante quindi si nota come in un DOMINIO PARI anche le soluzioni  $\Phi(x)$  DEVE ESSERE PARI  $\Rightarrow C=0$  (si deve annullare il  $\sin \alpha x$  che è dispari)

METODO 2. Si può anche risolvere imponendo le condizioni al contorno  $\Phi(\pm \frac{H}{2}) = 0$

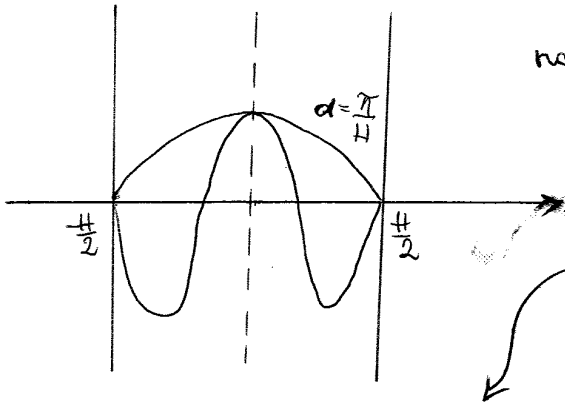
Quindi:

$$\begin{cases} \Phi(x) = A \cos(\alpha x) \\ \Phi(\frac{H}{2}) = 0 \end{cases} \Rightarrow A \cos(\alpha \frac{H}{2}) = 0 \begin{cases} A=0 \text{ soluzione banale} \\ \alpha \frac{H}{2} = \frac{\pi}{2} + \text{periodo} \end{cases}$$

Suppongo che  $\alpha \frac{H}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{H}$  dove  $\alpha^2 = \frac{K_{\infty}/k - 1}{L^2}$

$$\frac{K_{\infty}/k - 1}{L^2} = \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 L^2 + 1$$

$$\frac{K_{\infty}}{1 + \left(\frac{3\pi}{H}\right)^2 L^2} < \frac{K_{\infty}}{1 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 L^2}$$



Con  $\alpha = \frac{3\pi}{H}$  l'autofunzione è moltiplicata per 3: è un po' positive e un po' negative, ma fisicamente non può essere quindi le soluzioni dell'equazione può essere solo una: l'AUTOFUNZIONE

FONDAMENTALE che è l'unica che dà una soluzione stazionaria, le altre possono descrivere il transitorio.

TEORIA DELLA CRITICITÀ ELEMENTARE (1942)

Riassumendo: studiando il mezzo infinito si è trovato un autovalore  $K_{\infty}$  o coefficiente di moltiplicazione. Attraverso questo si è poi studiato il mezzo finito trovando il coefficiente di moltiplicazione effettivo:

### TEORIA DELLA CRITICITÀ ELEMENTARE (1942)

Riassumendo: studiando il mezzo infinito si è trovato un autovalore  $K_{\infty}$  o coefficiente di moltiplicazione. Attraverso questo si è poi studiato il mezzo finito trovando il coefficiente di moltiplicazione effettivo:

$$K_{eff} = \frac{K_{\infty}}{1 + L^2 B^2} \quad \text{con } B = \text{buckling} \quad K_{eff} = K_{\infty} \left( \frac{1}{1 + L^2 B^2} \right) < 1$$

Tiene conto delle fughe dei neutroni

Problema completo:  $\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \nabla^2 \Phi - \Sigma_e \Phi + \nu \Sigma_f \Phi + S$

Poiché vogliamo trovare una soluzione completa dell'equazione alle derivate parziali, anche nel caso piano si avrà  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}$ .

Informazioni su cosa accade durante il transitorio nel mezzo finito in cui avviene la fissione per arrivare alle soluzioni stazionarie.

Sorgenti di neutroni intrinseche come per la fissione spontanea dell' $^{235}\text{U}$ .

Neutroni che misurano lo stato del reattore (stato critico della macchina).

Risolviemo l'equazione completa:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \nabla^2 \Phi(\vec{r}, t) - \Sigma_e \Phi(\vec{r}, t) + K_{\infty} \Sigma_e \Phi(\vec{r}, t) + S(\vec{r}, t)$$

$S(\vec{r}, t)$ : sorgente dipendente del tempo  $\rightarrow$  si mette un materiale pesante colpito da protoni o neutroni in modo da produrre i neutroni. Se la sorgente è invece leggera e fenomeni radioattivi, per essere spenta la si tira fuori dal reattore.

Come un insieme di  $n$  vettori linearmente indipendenti costituiscono una base dello spazio vettoriale  $n$ -dimensionale.

L'insieme di autofunzioni ortogonali può essere rappresentato come una serie, ed ogni istante di tempo  $t$ :  $\sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \varphi_n(\vec{r}) = \phi(\vec{r}, t)$  ricordando che il prodotto scalare è la somma dei prodotti tra le  $n$  componenti.

$\varphi_n(\vec{r})$  sono delle quantità note che si ricavano come soluzioni del problema di Helmholtz, le uniche incognite sono quindi i coefficienti  $A_n(t)$  che sono infiniti ma dipendenti solo da  $t$  e non da  $\vec{r}$ , ossia non consideriamo più le derivate parziali! Riduco cioè il problema alle derivate ordinarie!

Quindi sostituisco  $\phi(\vec{r}, t)$  dell'equazione differenziale della diffusione con la serie e trovo un sistema di equazioni differenziali in  $A_n$  accoppiate tra loro.

$$\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} \sum_n A_n(t) \varphi_n(\vec{r}) = \Delta \sum_n A_n(t) \varphi_n(\vec{r}) + \sum_e (k_{ee}-1) \sum_n A_n(t) \varphi_n(\vec{r}) + S(\vec{r}, t)$$

Bisogna fare le derivate rispetto al tempo di una serie ricordando che la derivata di una somma è uguale alla somma delle derivate.

$$\frac{1}{V} \sum_n \frac{dA_n(t)}{dt} \varphi_n(\vec{r}) = \Delta \sum_n A_n(t) \varphi_n(\vec{r}) + \sum_e (k_{ee}-1) \sum_n A_n(t) \varphi_n(\vec{r}) + S(\vec{r}, t)$$

Ricordando che  $\Delta^2 \varphi(\vec{r}) = -B^2 \varphi(\vec{r})$  ( $B$  è solo un coefficiente)

Moltiplicando entrambi i membri per  $\varphi_m(\vec{r})$  si ha:

$$\frac{1}{V} \sum_n \frac{dA_n(t)}{dt} \varphi_n(\vec{r}) \cdot \varphi_m(\vec{r}) = -\Delta^2 \sum_n B_n^2 A_n(t) \varphi_n(\vec{r}) \cdot \varphi_m(\vec{r}) + \sum_e (k_{ee}-1) \sum_n A_n(t) \varphi_n(\vec{r}) \cdot \varphi_m(\vec{r}) + S(\vec{r}, t) \cdot \varphi_m(\vec{r})$$

Integrando rispetto a  $\vec{r}$  e ricordando che l'integrale delle serie è uguale alle

serie degli integrali:  $\frac{1}{V} \sum_n \frac{dA_n(t)}{dt} \int_{\mathcal{D}} \varphi_n(\vec{r}) \cdot \varphi_m(\vec{r}) \cdot d\vec{r} =$   
 $= -\Delta^2 \sum_n B_n^2 A_n(t) \int_{\mathcal{D}} \varphi_n(\vec{r}) \cdot \varphi_m(\vec{r}) d\vec{r} + \sum_e (k_{ee}-1) \sum_n A_n(t) \int_{\mathcal{D}} \varphi_n(\vec{r}) \cdot \varphi_m(\vec{r}) d\vec{r} + \int_{\mathcal{D}} S(\vec{r}, t) \varphi_m(\vec{r}) d\vec{r}$   $\rightarrow$  uso l'ortogonalità delle autofunzioni e la normalizzazione

$$\frac{1}{V} \frac{dA_m(t)}{dt} = -\Delta B_m^2 A_m(t) + \sum_e (k_{ee}-1) A_m(t) + S_m(t) \text{ per } m=1, 2, \dots$$

NOTA - L'integrale è sempre 0 tranne quando  $n=m$  in cui vale 1.

Poiché ci sono integrali di superficie e di volume uso il Teorema di Gauss

$$P_L = \frac{\int_{\mathcal{D}} d\vec{r} \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r})}{\int_{\mathcal{D}} d\vec{r} \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}) + \int_{\mathcal{S}} d\vec{r} \Sigma_e \phi(\vec{r})} = \frac{-\int_{\mathcal{D}} d\vec{r} \Delta \nabla^2 \phi(\vec{r})}{-\int_{\mathcal{D}} d\vec{r} \Delta \nabla^2 \phi(\vec{r}) + \int_{\mathcal{S}} d\vec{r} \Sigma_e \phi(\vec{r})}$$

Supponiamo che  $\phi$  abbia la forma di un'autofunzione di Helmholtz

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = -B^2 \phi(\vec{r}) \Rightarrow \frac{\Delta B^2 \int_{\mathcal{D}} d\vec{r} \phi(\vec{r})}{\Delta B^2 \int_{\mathcal{D}} d\vec{r} \phi(\vec{r}) + \Sigma_e \int_{\mathcal{S}} d\vec{r} \phi(\vec{r})} = \frac{\Delta B^2}{\Delta B^2 + \Sigma_e}$$

$$P_L = \frac{\Delta B^2}{\Delta B^2 + \Sigma_e}$$

la probabilità che hanno le particelle di fuggire quando sono distribuite come una funzione di Helmholtz è

controllata dall'autovalore ( $-B^2$ ) = PROBABILITÀ DI LICKAGE

PROBABILITÀ DI NON LICKAGE:  $P_{NL} = 1 - P_L = 1 - \frac{\Delta B^2}{\Delta B^2 + \Sigma_e} = \frac{\Sigma_e}{\Delta B^2 + \Sigma_e} = \frac{1}{L^2 B^2 + 1}$

↳ è la probabilità delle particelle di non fuggire dal contenitore data dalla distribuzione dell' $n$ -esima funzione di Helmholtz.

$$\frac{1}{N \Sigma_e} \frac{1}{1 + L^2 B_n^2} = \ln \text{ LIFE TIME} \quad \text{con } \frac{1}{\Sigma_e} = \text{liberocaminio medio della nascita all'assorbimento}$$

$$\frac{1}{\frac{\Sigma_e}{N}} = \text{Tempo che trascorre tra nascita e assorbimento}$$

↳ le particelle scappano anche per fuga

$P_{NL}$  = probabilità di NO Lickage

$$k_n = \frac{1}{\Sigma_e} \cdot P_{NLn} \quad \text{associate a una precisa distribuzione}$$

La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n(t) e^{\frac{k_n-1}{l_n} t} + N \int_0^t dt' S_n(t') e^{\frac{k_n-1}{l_n} (t-t')} \right] \psi_n(\vec{r})$  ha una dipendenza dal tempo per ogni sorgente puntiforme  $n$ .

In realtà è una successione crescente con  $n$ :  $\frac{k_n-1}{l_n} = B_n^2 \uparrow$  cresce;

$P_{NL} \downarrow$  è una successione decrescente  $\Rightarrow k_n \downarrow, l_n \downarrow$

dato che le autofunzioni sono numerabili esso è  $B_n^2$  più piccolo il valore di  $l_n$

$$\frac{k_n-1}{l_n} = \left( \frac{k_{0n}}{1+L^2 B_n^2} - 1 \right) N \Sigma_e (1+L^2 B_n^2) = N \Sigma_e (k_{0n}-1-L^2 B_n^2) = -N \Sigma_e (1-k_{0n}+L^2 B_n^2)$$

la funzione risulta crescente ma in valore sempre negativo. Il contributo delle armoniche di ordine molto elevato decade però rapidamente.



Se  $k_2 > 1$  il sistema diverge con 2 armoniche

$$A_2(0) = \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{r} \Phi_0(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) \text{ l'armonica } \varphi_2 \text{ è un po' positiva e un po' negativa}$$

↳ il contributo di  $A_2(0)$  è più piccolo di  $A_1(0)$

• Se  $\Phi_0(\vec{r}) = 0$ ,  $S(\vec{r}, t) = S(\vec{r})$  è indipendente del tempo

Le componenti della sorgente  $S_n(t) = S_n = \int d\vec{r} S(\vec{r}) \varphi_n(\vec{r})$

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} N \int_0^t dt' S_n e^{\frac{k_n-1}{\lambda_n}(t-t')} \varphi_n(\vec{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} N S_n \varphi_n(\vec{r}) e^{\frac{k_n-1}{\lambda_n} t} \int_0^t dt' e^{-\frac{k_n-1}{\lambda_n} t'} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} N S_n \varphi_n(\vec{r}) e^{\frac{k_n-1}{\lambda_n} t} \frac{\lambda_n}{k_n-1} e^{-\frac{k_n-1}{\lambda_n} t} = \sum_{n=1}^{\infty} N S_n \varphi_n(\vec{r}) e^{\frac{k_n-1}{\lambda_n} t} \frac{\lambda_n}{k_n-1} \left[ 1 - e^{-\frac{k_n-1}{\lambda_n} t} \right] = \end{aligned}$$

$$\Phi(\vec{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} N S_n \frac{\lambda_n}{k_n-1} \left[ e^{\frac{k_n-1}{\lambda_n} t} - 1 \right] \varphi_n(\vec{r})$$

Se tutti i  $k_n$  fossero  $< 1$  per  $t \rightarrow \infty$  le esponenziali morirebbero tutte, ma il sistema mantiene uno stato asintotico non nullo in cui ciò che viene consumato eguaglia ciò che è emesso dalle sorgenti. Se  $k_n$  fosse vicino a 1 il sistema amplifica il segnale dato in input.

$$\Phi(\vec{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \varphi_n(\vec{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n(0) e^{\frac{k_n-1}{\lambda_n} t} + N \int_0^t dt' S_n(t') e^{\frac{k_n-1}{\lambda_n}(t-t')} \right] \varphi_n(\vec{r})$$

Le soluzioni senza sorgente ci fa identificare tre tipi di sistema:

-  $k_1 < 1$  sottocritico: il sistema si spegne iniziando a diminuire il contributo delle armoniche più elevate assestandosi su quelle fondamentali per poi decadere in modo stazionario fino a 0. Il sistema è stabile.

-  $k_1 > 1$  NON esiste una soluzione stabile: l'armonica fondamentale diverge nel tempo molto rapidamente e  $\frac{k_1-1}{\lambda_1} t$  con  $\lambda_1 = \frac{1}{N \sum_e (1 + L^2 B_e^2)}$  e  $N \approx 10^5 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$

$\lambda_1$  è la VITA EFFETTIVA dei neutroni secondo la 1ª armonica di  $10^{-4}$

$$e^{\frac{k_1-1}{\lambda_1} t} \approx e^{\frac{10^{-3}}{10^{-4}} t} = e^{100t} \text{ evoluzione molto rapida (arriva anche a } 1000t \text{)}$$

N.B. Le unità di  $k_1$  devono essere calcolate con grande accuratezza: un errore dell'1% non è accettabile! Per l'accuratezza si use il pcm = percentomile quindi un errore deve essere dell'ordine di  $10^{-5}$  con 5 cifre significative del  $k_{eff}$ . Il reattore si chiama sopercritico: le armoniche di ordine superiore vengono eliminate, mentre rimane quella fondamentale che cresce rapidamente.

Considero l'armonica fondamentale:

$$S(\vec{r}) = S_0 \varphi_1(\vec{r}) \Rightarrow S_n = \int_{\mathcal{V}} d\vec{r} S_0 \varphi_1(\vec{r}) \cdot \varphi_n(\vec{r}) = S_0 \delta_{1n} \begin{cases} = S_0 & \text{se } n=1 \\ = 0 & \text{se } n \neq 1 \end{cases}$$

Poiché le autofunzioni sono ortogonali, il loro prodotto scalare vale 0 tranne nel caso in cui  $n=1$  che vale 1 per la normalizzazione.

$\delta_{1n}$  è una matrice/operatore chiamato DELTA DI KRONECKER che vale 1 se  $n=1$  e 0 se  $n \neq 1$ .

$$\Phi_{As}(\vec{r}) = N S_0 \left( \frac{k_1}{1-k_1} \right) \cdot \varphi_1(\vec{r}) \quad \text{NOTA - } S_n = S_0 \text{ per } n=1$$

Se introduciamo una sorgente fissa come l'armonica fondamentale, anche la risposta sarà come l'armonica fondamentale.

$\frac{k_1}{1-k_1}$  è un coefficiente che quantifica le risposte: più  $k_1 \rightarrow 1$  e più la risposta diventa grande  $\rightarrow$  il segnale della sorgente viene AMPLIFICATO;

Se  $k_1 = 1$  la risposta diverge e diventa singolare!

$\rightarrow$  questi esperimenti venivano fatti da Fermi per "approcciare alla criticità": non mano su aumentare le concentrazioni di uranio avvicinando alle situazioni di divergenza in cui se il reattore non si spegne la sorgente continua ed alimenta i neutroni che diventano infiniti e scaldano il reattore. Le misure di sicurezza utilizzate da Fermi erano costituite da un piatto di Cadmio sospeso sul reattore e tenuto in bilico da una corda sorretta da un uomo il quale, al segnale di Fermi, lo lasciava cadere facendo assorbire i neutroni.

NOTA - Per aumentare il  $k_{eff}$  si fa diminuire la probabilità di non fuga

$$\text{variando il } B^2 \text{ di } k_1 = \frac{k_{00}}{1 + L^2 B^2}$$

\*  $k_1 > 1$ : la parte dovuta all'armonica fondamentale è divergente, quindi non esiste una soluzione stazionaria

\*  $k_1 = 1$ : separiamo dalle serie il caso di  $n=1$  con  $k_2 < k_1 = 1$

$$\Phi(\vec{r}, t) = N S_1 \left( \frac{k_1}{k_1 - 1} \right) \left[ e^{\frac{k_1 - 1}{\Lambda} t} - 1 \right] \varphi_1(\vec{r}) + \sum_{n=2}^{\infty} N S_n \frac{k_n}{k_n - 1} \left[ e^{\frac{k_n - 1}{\Lambda} t} - 1 \right] \varphi_n(\vec{r})$$

Per studiare la soluzione si può fare un limite di  $k_1 \rightarrow 1$  in cui viene una forma indeterminata  $\frac{0}{0}$  che è risolvibile con de L'Hôpital, cambi di variabili o sviluppi nell'origine:

L'equazione alle derivate ordinarie ha soluzione con  $\sin x$  e  $\cos x$  L.1.

$\varphi(x) = A \sin(Bx) + C \cos(Bx)$  soluzioni generali, ma riusciamo a trovare entrambe le costanti? In questo caso il  $\Delta$  delle soluzioni non è pari!

$$\begin{cases} A \sin\left(\frac{Bx}{2}\right) + C \cos\left(\frac{Bx}{2}\right) = 0 \\ -A \sin\left(\frac{Bx}{2}\right) + C \cos\left(\frac{Bx}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

imponendo le condizioni al contorno si ha un sistema di equazioni in 2 incognite, ma sono L.D.

NOTA - Il sistema è omogeneo perché il problema di Helmholtz è omogeneo. Questo significa che  $\exists$  soluzioni nulle per  $A = C = 0$ , ma per Rouché-Capelli  $\exists$  anche una soluzione non nulla:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases}$$

se il rango della matrice associata vale 1 il sistema è L.D. e il suo determinante è nullo

$$\text{rk} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \sin\left(\frac{Bx}{2}\right) & \cos\left(\frac{Bx}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{Bx}{2}\right) & \cos\left(\frac{Bx}{2}\right) \end{vmatrix} = \sin\left(\frac{Bx}{2}\right)\cos\left(\frac{Bx}{2}\right) + \sin\left(\frac{Bx}{2}\right)\cos\left(\frac{Bx}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{Bx}{2}\right)\cos\left(\frac{Bx}{2}\right)$$

$$\text{Se } 2 \sin\left(\frac{Bx}{2}\right)\cos\left(\frac{Bx}{2}\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{Bx}{2}\right) = 0 \vee \cos\left(\frac{Bx}{2}\right) = 0$$

1) Consideriamo il caso in cui  $\cos\left(\frac{Bx}{2}\right) = 0$

Si ottengono infinite soluzioni numerabili che ci danno le equazioni degli autovalori:

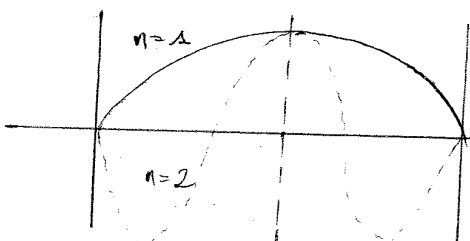
$$B_n \frac{H}{2} = (2n-1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow B_n = (2n-1) \frac{\pi}{H}$$

Perché le due equazioni del sistema sono L.D. se ne può buttare una:

$$A \sin\left(\frac{Bx}{2}\right) + C \cos\left(\frac{Bx}{2}\right) = 0 \Rightarrow A = 0$$

quando si annulla il coseno non si può annullare anche il seno quindi A deve necessariamente essere nulla.

In questo caso non si riesce a determinare le costanti e.



$$\varphi_n(x) = C \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{H}\right) \quad \forall C \neq 0 \quad n=1,2,\dots$$

se  $n=1$  si ha  $B_1 = \frac{\pi}{H} \Rightarrow$

$$\varphi_1(x) = C \cos\left(\frac{\pi}{H} x\right)$$

Bimestrazione -

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \cos(B_n x) \cos(B_m x) = 0$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \left\{ \cos[(B_n + B_m)x] + \cos[(B_n - B_m)x] \right\} = \frac{1}{B_n + B_m} \sin[(B_n + B_m)x] \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$(B_n + B_m) \frac{\pi}{2}$  e  $(B_n + B_m) \left(-\frac{\pi}{2}\right)$  sono numeri dispari di  $\frac{\pi}{2}$  quindi l'integrale vale 0.

Lo stesso ragionamento si può usare per  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(B_n x) \sin(B_m x) dx$  e per  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(B_n x) \cos(B_m x) dx$ , sfruttando le formule della Trigonometria:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

⇒

$$\text{con } B_n x = \alpha \text{ e } B_m x = \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

In geometrie piane le autofunzioni sono seni e coseni e possono quindi essere rappresentate in serie con le SERIE DI FOURIER per scrivere la soluzione:

$$\Phi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{2}{H}} \cos\left(\frac{2n-1}{H} \pi x\right)}_{= \varphi_n(x)} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m(t) \sqrt{\frac{2}{H}} \sin\left(\frac{2m}{H} \pi x\right)$$

Soppoiamo adesso di avere un sistema privo di neutroni dove vi è una sorgente del tipo

$$S(x, t) = S_0 \varphi_1(x) \delta(t) = S_0 \sqrt{\frac{2}{H}} \cos\left(\frac{\pi}{H} x\right) \delta(t)$$

$\delta(t)$  è la sorgente che emette tutte le particelle al tempo  $t=0$  e non emette niente per  $t > 0$ . Questa sorgente è chiamata **IMPULSO** distribuito come l'armonica fondamentale.

Per conoscere e studiare il sistema si fanno esperimenti impulsati oppure di tipo periodico, cioè oscillato. Le informazioni sul sistema vengono quindi ricavate attraverso le risposte all'impulso o all'oscillazione.

Integrando e moltiplicando per il seno la sorgente si ottiene sempre 0 tranne nel caso in cui  $n = m = 1$ :

$$S_1(t) = S_0 \delta(t) \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_1(x) \cdot \varphi_1(x) dx = S_0 \delta(t)$$

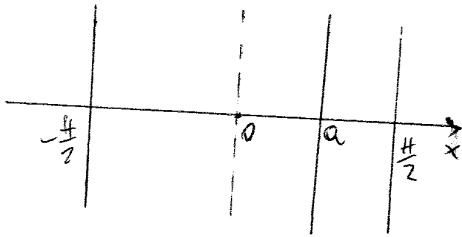
$$A_n^c(t) = N \int S_n^c(t') e^{\frac{k_n-1}{2n}(t-t')} dt' = N S_0 \sqrt{\frac{2}{H}} \int_0^t \delta(t') e^{\frac{k_n-1}{2n}(t-t')} dt'$$

$$A_n^c(t) = N S_0 \sqrt{\frac{2}{H}} e^{\frac{k_n-1}{2n}t} \quad \Phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \psi_n(x)$$

$$\Phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} N S_0 \sqrt{\frac{2}{H}} e^{\frac{k_n-1}{2n}t} \sqrt{\frac{2}{H}} \cos\left(\frac{2n-1}{H} \pi x\right)$$

↳ risposta a una sorgente impulsiva localizzata tutte in  $x=0$

VARIANTE<sub>1</sub>: Sorgente localizzata in  $a \neq 0$



$$S_n^c(t) = \sqrt{\frac{2}{H}} \int_{-H/2}^{H/2} S_0 \delta(t) \delta(x-a) \cos\left(\frac{2n-1}{H} \pi x\right) dx =$$

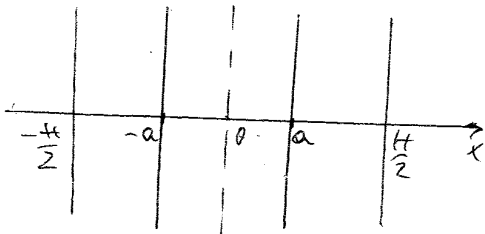
$$= \sqrt{\frac{2}{H}} S_0 \delta(t) \cos\left(\frac{2n-1}{H} \pi a\right)$$

*per trovare  $A_n^c(t)$  bisogna integrare!*

$$S_n^s(t) = \sqrt{\frac{2}{H}} \int_{-H/2}^{H/2} S_0 \delta(t) \delta(x-a) \sin\left(\frac{2n-1}{H} \pi x\right) dx = \sqrt{\frac{2}{H}} S_0 \delta(t) \sin\left(\frac{2n-1}{H} \pi a\right)$$

✶ In questo caso la sorgente non è più pari, quindi le soluzioni si trovano sommando i due contributi, sia con il coseno che con il seno.

VARIANTE<sub>2</sub>: due sorgenti localizzate in  $x=a$  e  $x=-a$



Anche in questo caso la sorgente è pari; basterà

aggiungere le parte di risposte a  $x=-a$

ricordando che  $\sin(-x) = -\sin(x)$  e  $\cos(-x) = \cos(x)$ .

$$S_n^c(t) = \sqrt{\frac{2}{H}} \int_{-H/2}^{H/2} S_0 \delta(t) [\delta(x-a) + \delta(x+a)] \cos\left(\frac{2n-1}{H} \pi x\right) dx$$

$$S_n^c(t) = 2 \sqrt{\frac{2}{H}} S_0 \delta(t) \cos\left(\frac{2n-1}{H} \pi a\right) \quad \text{ma } S_n^s(t) = \dots = 0$$

Si può concludere che se la sorgente è pari  $S_n^s(t) = 0$ .

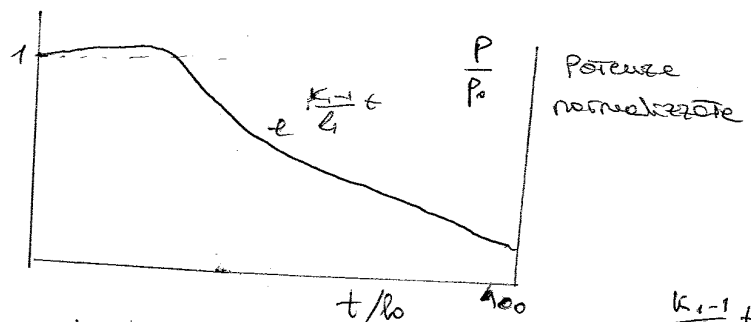
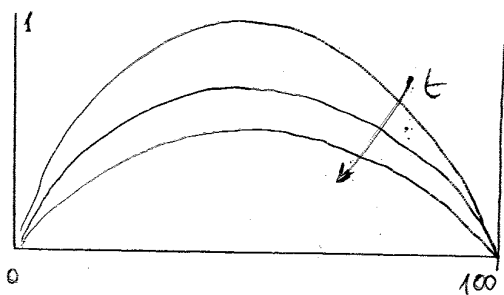
N.B. Una sorgente non può mai essere dispari perché si avrebbe una funzione un po' positiva e un po' negativa, ma non esistono i neutroni negativi!

Se la sorgente è pari rimane solo il coseno, se invece non è pari si deve sommare il contributo dei seni.

meno delle oscillazioni, chiamato fenomeno di Gibbs. Tali oscillazioni sono inevitabili. Se considero un numero di armoniche minore la frequenza dell'oscillazione diminuirà ma aumenterà l'ampiezza. Se invece sono 100 autofunzioni (l'ampiezza diventa molto piccola ma non si riesce a vedere il fenomeno di Gibbs perché si cerca di rappresentare una funzione che non soddisfa alle C.C. attraverso le autofunzioni (si ha un'approssimazione non buona con la rappresentazione di una funzione costante con una piccola somma di autofunzioni oscillanti). La scala dell'evoluzione del fenomeno è dettata dalle vite dei neutroni e non in secondi.

Time =  $100 l_0$  con  $l_0 = l_1 = \frac{1}{N \sum_{i=1}^N (1 + L^2 B_i^2)}$  vite dei neutroni secondo l'armonica fondamentale.

La funzione rappresentata è costante nello spazio ma non nel tempo (σ di direc → fenomeno di Gibbs)



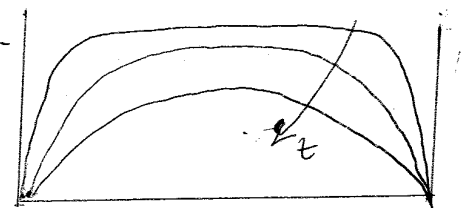
Le autofunzioni si spengono man mano che  $t$  aumenta perché evolvono come  $e^{\frac{k_1-1}{l_1} t}$ .

La potenza corrisponde all'integrale del flusso: se il flusso oscilla la potenza diminuirà.

Le autofunzioni superiori generano meno potenza e decadono più rapidamente. All'inizio il flusso è quasi costante, ma all'evolvere di  $t$  si incurva e si assesta sull'armonica fondamentale, quindi decade come un esponentiale puro. Nella prima parte la potenza aumenta per via delle fissioni che fa aumentare i neutroni.

Se considero 100 autofunzioni che 10 il contributo delle autofunzioni di ordine superiore decade molto rapidamente lasciando solo  $\psi_1(x)$ .

Le altre autofunzioni sono importanti solo per tempi molto piccoli, cioè all'inizio del transitorio.



Se considero un  $K_{eff} = 0,9$  o più piccolo la potenza scende molto più rapidamente e l'aumento dissipa molto prima (già a 20 vite) assestandosi subito sul coseno fondamentale. Più piccolo è  $K_{eff}$  e più rapidamente dissipa le  $\psi_n(x) > \psi_1(x)$ .

Considerando invece un  $K_{eff}$  molto vicino a 1, con differenze del perm, ad esempio  $K_{eff} = 0,9999$ , da una generazione all'altra manca solo l'1 per diecimila di neutroni: dopo ~40 vite il sistema non scende più e si assesta sul coseno.

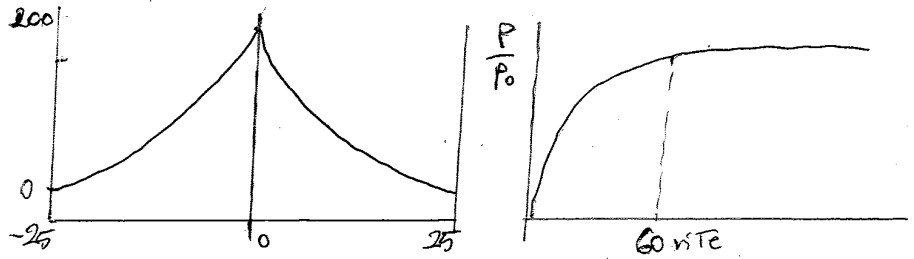
Il sistema si esiste quando su una soluzione stazionaria, ma la soluzione non può essere indipendente dalle altre armoniche. Ad esempio con:

numero armoniche = 100

$K_{eff} = 0,9$

Tempo finale = 200 (vite)

In  $x=0$  c'è una singolarità (punto di non derivabilità)



La sorgente è essenziale perché da una generazione all'altra si perde il 10% dei neutroni. Le potenze si esiste a un valore costante grazie al contributo delle sorgente che copre il 10%. In realtà in  $x=0$  non c'è una punta ma è curva come i coseni. In questo modo si simula la presenza delle dette di Birex.

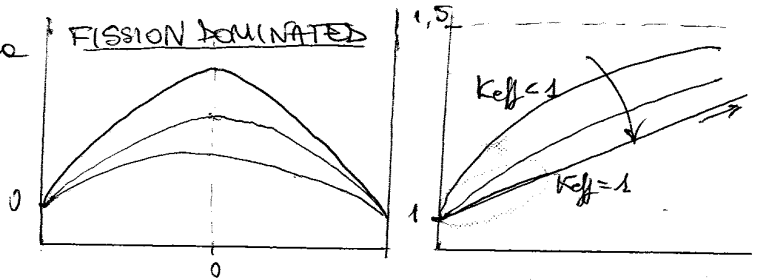
NOTA - La curvatura è dominata dalle sorgente: concavità verso l'alto!

Considero un  $K_{eff}$  più vicino a 1:  $K_{eff} = 0,99$ . In questo caso il transitorio dura molto più e lungo e si assiste con una

curvatura dominata dalle fissioni:

concavità verso il basso!  $\sim$  coseno

Le potenze a 200 vite non raggiunge



ancora l'asintoto e continua a crescere. Avvicinandosi sempre più a  $K_{eff} = 1$  il sistema è sempre più dominato dalle fissioni e la sorgente dà solo un piccolissimo contributo  $\rightarrow$  il sistema è critico. Ad esempio con  $K_{eff} = 0,999$  con perdite dell'1‰.

$\rightarrow$  Approccio alla criticità effettuato da Fermi.

Il sistema continua a crescere anche dopo 500 vite. Se  $K_{eff} = 1$  le potenze non raggiunge mai il valore costante dell'asintoto ma continua a crescere come  $t \Rightarrow$

LINEARMENTE (l'integrale di una costante in  $dt$  dà la retta  $t$ ).

Con  $K_{eff} = 1$  le potenze è una retta e cresce in modo lineare con  $t$ . Il flusso si mette dei secondi (tempo) a "cosinizzarsi". Il comportamento delle potenze si discosta dalla retta ALL'INIZIO del transitorio perché risente del contributo delle armoniche superiori.

Se consideriamo invece un  $K_{eff}$  molto piccolo, ad esempio  $K_{eff} = 0,5$  (ha senso, in alcuni reattori osservavo anche a  $K_{eff} = 0,01$  per facilitare gli esperimenti) il sistema è fortemente dominato dalle specialità.

Si ottiene la soluzione per qualunque tipo di sorgente -

Considero adesso una distribuzione iniziale  $\Phi^{(0)}$

$$\Delta \nabla^2 \Phi^{(0)}(\vec{r}) - \Sigma_a \Phi^{(0)}(\vec{r}) + S^{(0)}(\vec{r}) = 0$$

$\hookrightarrow S^{(1)}(\vec{r}) = K_{\infty} \Sigma_a \Phi^{(0)}(\vec{r})$  sorgente di particelle introdotte di 1<sup>a</sup> generazione,

sorgente generate dalle generazioni 0 -

$$\Delta \nabla^2 \Phi^{(1)}(\vec{r}) - \Sigma_a \Phi^{(1)}(\vec{r}) + S^{(1)}(\vec{r}) = 0$$

$$\hookrightarrow S^{(2)}(\vec{r}) = K_{\infty} \Sigma_a \Phi^{(1)}(\vec{r})$$

$$\Delta \nabla^2 \Phi^{(2)}(\vec{r}) - \Sigma_a \Phi^{(2)}(\vec{r}) + S^{(2)}(\vec{r}) = 0$$

$$\vdots$$

$$S^{(n+1)}(\vec{r}) = K_{\infty} \Sigma_a \Phi^{(n)}(\vec{r}) \rightarrow \Delta \nabla^2 \Phi^{(n+1)}(\vec{r}) - \Sigma_a \Phi^{(n+1)}(\vec{r}) + S^{(n+1)}(\vec{r}) = 0$$

$$\Delta \nabla^2 \Phi^{(n+1)} - \Sigma_a \Phi^{(n+1)} + K_{\infty} \Sigma_a \Phi^{(n)} = 0$$

Costante di moltiplicazione

Se la distribuzione evolve in modo costante definisco  $\frac{\Phi^{(n+1)}(\vec{r})}{\Phi^{(n)}(\vec{r})} = K$

Il livello di neutroni può cambiare ma la forma non cambia più:  $\Phi^{(n+1)}$  e  $\Phi^{(n)}$

dependono dal posto, ma il loro rapporto è costante - Di conseguenza, anche il loro

integrale è costante:  $\frac{\int \Phi^{(n+1)}(\vec{r}) d\vec{r}}{\int \Phi^{(n)}(\vec{r}) d\vec{r}} = K$

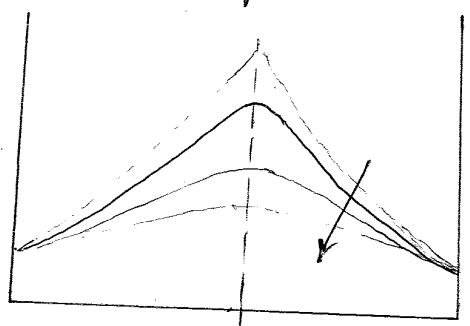
METODO DELLE POTENZE: metodo numerico per trovare le autofunzioni

Le sorgente si aggiuste fino a raggiungere una forma costante - Si può usare l'equazione differenziale per trovare la soluzione -

Consideriamo ad esempio un  $K_{eff} = 1$  con numero di armoniche 100 e numero di generazioni 10.

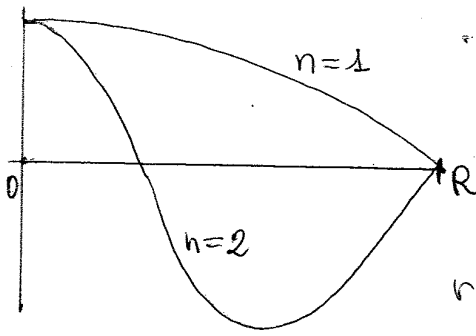
Si hanno 3 tipi di K:  $K_{fond} = K_{eff} = 1$ ;

$$K_{spez} = \frac{\Phi^{(10)}(0)}{\Phi^{(0)}(0)} = 0,98309; \quad K_{int} = \frac{\int \Phi^{(10)} d\vec{r}}{\int \Phi^{(0)} d\vec{r}} = 1,0012$$



La  $K_{int}$  è più precisa perché considera una sommatoria totale e tende di più al  $K_{eff}$ , quindi a 1, rispetto alla  $K_{spez}$ . La differenza è molto grande in entrambi i casi: 120 pcm per il  $K_{int}$  e 2000 pcm per il  $K_{spez}$ . Più le generazioni aumentano, più  $K_{int}$  e  $K_{spez}$  si avvicinano a 1 e la distribuzione delle particelle tende al coseno fondamentale. L'evoluzione del problema è vista in termini generazionali.





• **NOTA** - Se ci si allontana da  $r=0$  la soluzione viene attenuata da un fattore  $\frac{1}{r}$  come la funzione di Green. Se supponiamo di avere una sorgente in  $r=0$ , più ci si allontana e più diminuisce. Anche se

non avvenisse l'assorbimento, l'attenuazione sarebbe garan-

tite per effetto geometrico in quanto l'area attraversata aumenta e quindi anche l'area in cui si disperdono i neutroni ( $r$  aumenta).

→ storia delle aringhe: controprove del fenomeno basato sulle diffusioni delle puzze delle aringhe

### CRITICITÀ E POTENZA

$k_{eff}$  cambia con la potenza? Il flusso neutronico che c'è in un reattore critico si può scrivere con l'autofunzione fondamentale come  $\Phi(\vec{r}) = A \psi_1(\vec{r})$ . Anche per i reattori reali con geometrie complesse, non omogenei, si può trovare le loro autofunzioni attraverso dei metodi numerici che considereremo dei fattori equivalenti.

POTENZA 
$$P = \int_V dV \sum_f A \psi_1(\vec{r}) \cdot E_f \Rightarrow A = \frac{P}{\sum_f E_f \int_V dV \psi_1(\vec{r})}$$

Una volta fissata la potenza si può trovare il coefficiente  $A$  e quindi il flusso.

Lo stato di criticità è una proprietà del sistema e non dipende dalla potenza.

Aumentando la potenza di un reattore senza però aumentare l'esportazione di calore, si aumenta la temperatura e la densità dei materiali diminuiscono, compreso quello degli assorbitori  $\Rightarrow$  aumenta la  $\Sigma_a$  e quindi anche il  $k_{eff}$ .  $\rightarrow$  EFFETTO DOPPLER

**NOTA** - La CRITICITÀ è uno stato del sistema; la POTENZA è un valore di input.

N.B. Se si chiede di trovare la potenza in un reattore critico bisogna trovare  $A$ . Le variazioni di potenza può essere fatte solo in situazioni stabili.

### PROBLEMA IN GEOMETRIA CILINDRICA

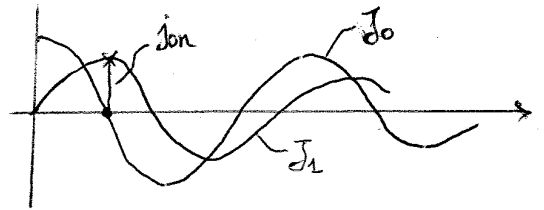
Laplaceano in forme cilindriche: 
$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$$

in geometria cilindrica con un cilindro infinito il problema dipende solo dalla distanza dell'asse, quindi lo si scrive con le derivate ordinarie in funzione di  $r$ .

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = -B^2 \phi(\vec{r})$$
 equazione generale

Bisogna verificare che le autofunzioni siano **ORTOGONALI** fra loro:

$$\int_0^R dr \underbrace{2\pi r}_{\text{fattore di integrazione sulla geometria cilindrica}} \varphi_n(r) \varphi_m(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ c & \text{se } n = m \end{cases}$$

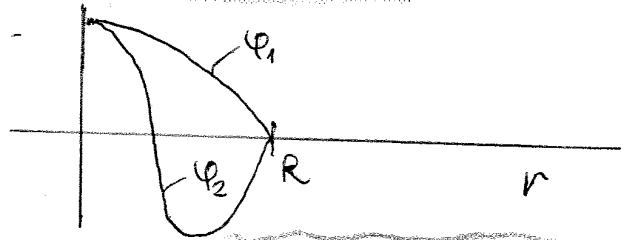


Si trova quindi la costante di normalizzazione (che varrà con  $n$ ) in modo tale che

$$c=1: A = \frac{1}{R\sqrt{\pi} |J_1(j_{0n})|} \Rightarrow \varphi(r) = \left( \frac{1}{R\sqrt{\pi} |J_1(j_{0n})|} \right) J_0\left(\frac{j_{0n}}{R} r\right)$$

Cerchiamo adesso l'autofunzione fondamentale.

$$\varphi_1 = J_0\left(\frac{j_{01}}{R} r\right), \varphi_2 = J_0\left(\frac{j_{02}}{R} r\right), \dots$$



$\varphi_1$  è l'autofunzione TUTTA POSITIVA e quindi

è quella **FONDAMENTALE**, cioè quella per cui il buckling vale  $B^2 = \left(\frac{j_{01}}{R}\right)^2 = \left(\frac{2,4048}{R}\right)^2$

Consideriamo invece l'equazione modificata di Bessel:

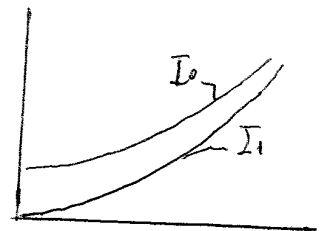
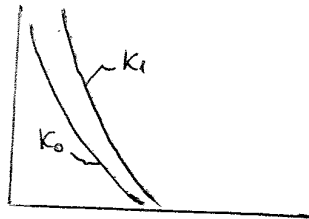
$$z^2 \frac{d^2 W}{dz^2} + z \frac{dW}{dz} - (z^2 + \nu^2) W = 0 \quad \text{eq. MODIFICATA di Bessel}$$

Nelle diffusioni siamo interessati al caso con  $\nu=0$  e dividendo per  $z^2$  si ha:

$$\left( \frac{d^2 W}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dW}{dz} \right) - W = 0 \quad \text{equazione delle diffusioni in geometrie cilindriche (in un mezzo diffusivo)}$$

Le soluzioni sono le funzioni **MODIFICATE** di Bessel:  $K_0, I_0$

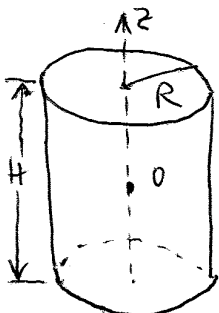
$$W(z) = A K_0(z) + C I_0(z)$$



NOTA - Sia lo slab che il cilindro considerato sono mezzi infiniti o semiinfiniti.

L'unico mezzo reale analizzato è la sfera.

### PROBLEMA SUL CILINDRO FINITO



Problema omogeneo. Le funzioni di Helmholtz dipendono sia da  $r$  che da  $z$ :  $\varphi(r, z) \Rightarrow$  equazione alle derivate **PARZIALI**!

$$\frac{\partial^2 \varphi(r, z)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi(r, z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi(r, z)}{\partial r} + B^2 \varphi(r, z) = 0$$

$$\varphi_{n,m}(r,z) = \sqrt{\frac{2}{H}} \frac{1}{R \sqrt{\pi} |J_1(j_{0m})|} \underbrace{\cos\left(\frac{2n-1}{H} \pi z\right)}_{\text{oppure } \sin\left(\frac{2n\pi}{H} z\right)} \cdot J_0\left(\frac{j_{0m}}{R} r\right)$$

Problema dell'esistenza dell'autofunzione fondamentale:

$$\varphi_{\text{fond}}(r,z) = \varphi_{1,1}(r,z) = \left(\dots\right) \cos\left(\frac{\pi}{H} z\right) J_0\left(\frac{j_{01}}{R} r\right)$$

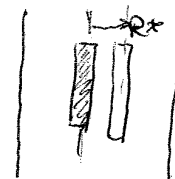
↳ coeff. di normalizzazione

L'autofunzione fondamentale è l'unica funzione che deve rimanere in un reattore cilindrico finito. Se ci si muove lungo il raggio si ha una distribuzione come un coseno, mentre lungo l'asse come la funzione di Bessel.

Se considero ad esempio la potenza generata solo lungo l'asse in un determinato

$$\frac{P(0)}{P(R^*)} = \frac{J_0(0)}{J_0\left(\frac{j_{01}}{R} \cdot R^*\right)}$$

punto  $r=R^*$ , si ha:



ESERCIZIO: risolvere il problema di Helmholtz in un parallelepipedo

$$\varphi(x,y,z) \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -B^2 \varphi$$

va risolto con il metodo di separazione delle variabili, quindi considerando

$$\varphi(x,y,z) = f(x) \cdot g(y) \cdot h(z)$$

PROCESSO LOGICO EDI CALCOLO PER LA

PROGETTAZIONE DI UNA STRUTTURA CRITICA

Affinché il reattore sia critico deve avere  $\frac{k_{\text{eff}}}{1 + L^2 B^2} = 1$ , ma se si progettasse con il  $k_{\text{eff}} = 1$  non funzionerebbe perché gli assorbitori porterebbero subito il  $k_{\text{eff}} < 1$  e il reattore si spegnerebbe. Quindi lo si progetta con  $\frac{k_{\text{eff}}}{1 + L^2 B^2} = k_{\text{in}}$ .

Si vuole progettare un reattore omogeneo. Nel caso reale si trasformano gli elementi eterogenei con proprietà equivalenti che lo rendono omogeneo; si trasforma quindi il reattore reale eterogeneo in uno ideale omogeneo con le stesse proprietà.

Con le formule dei 4 fattori si tiene conto anche delle fissioni veloci.

Bisogna tener conto anche di quelli che sfuggono dal contorno.

Probabilità di non fuga th:  $\frac{1}{1+L^2B^2}$  valide per i neutroni termici nella teoria monocinetica della diffusione

Probabilità di non fuga fast:  $P_{NL}^{(fast)}$

$$K_{in} = (\eta \cdot f \cdot p \cdot \epsilon) \cdot \left( \frac{1}{1+L^2B^2} \right) \cdot P_{NL}^{(fast)}$$
 FORMULA DEI 6 FATTORI

Se si acquista del combustibile solitamente si conoscono raggio (R) e altezza (H) del reattore quindi si può calcolare subito il buckling per le probabilità di fuga -

Nel cilindro  $B^2 = \left( \frac{\pi}{H} \right)^2 + \left( \frac{j_{01}}{R} \right)^2$

PROBLEMA

- \* Bisogna capire che tipo di miscela è migliore per un determinato reattore, una volta capito come i fattori  $\eta, f, \epsilon, p$  e  $P_{NL}$  dipendono dalla concentrazione.
- \* Se si ha invece una miscela già pronta di (combustibile + moderatore) tale per cui il  $K_{oo} > 1$ , per costruire un reattore critico bisogna trovare  $B^2$  che ci dà informazioni sulle forme e sulle dimensioni ottimali del reattore - si deve, cioè, trovare una funzione da massimizzare (ed esempio minimizzando le fughe...).

REATTORE CRITICO TERMICO

Generalizzazione di  $K_{oo}$  che tiene conto del fenomeno del rallentamento:

$K_{oo} = \eta f p \epsilon$  formule dei quattro fattori

$K_{eff} = \frac{K_{oo}}{1+L^2B^2}$  generalizzato in  $K = K_{oo} \frac{1}{1+L^2B^2} \cdot P_{NL}^{(F)}$  formule dei 6 fattori

Inizialmente si progetta un reattore con  $K > 1$  per poi introdurre dei materiali per il sistema di controllo che non meno vengano estratti:  $K_{in} > 1$ ,  $K_{funzionamento} = 1, \dots$

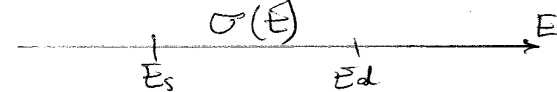
Per dimensionare il reattore con  $K > 1$  bisogna fissare una certa geometria e il

relative buckling:  $B^2 = \left( \frac{\pi}{R} \right)^2$  slab  $B^2 = \left( \frac{\pi}{H} \right)^2 + \left( \frac{j_{01}}{R} \right)^2$  cilindro  $B^2 = \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{c} \right)^2$  parallelepipedo

Note la geometria del reattore,  $B^2$  è fissato per le formule dei 6 fattori

$$\eta = \frac{\nu \sigma_f(U_{235}) N_f \cdot e}{N_f (\sigma_a(U_{235}) e + \sigma_a(U_{238}) (1-e) + 2\sigma_{a0}) N_f} = \frac{\nu \sigma_f(U_{235}) e}{\sigma_a(U_{235}) e + \sigma_a(U_{238}) (1-e) + 2\sigma_{a0}}$$

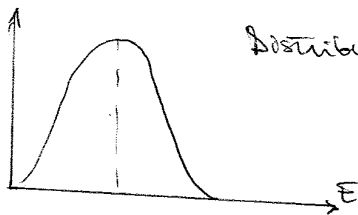
NOTA - Sezione d'urto mediata: dare lo stesso numero di interazioni:

$$(N \bar{\sigma}) \bar{\Phi} = \int_{E_s}^{E_d} dE \Phi(E) \sigma(E) N$$


$$\bar{\sigma} = \frac{\int_{E_s}^{E_d} dE \Phi(E) \sigma(E)}{\bar{\Phi}}$$

Normalmente il flusso non lo conosciamo perché è la soluzione del problema

Questa definizione di medie preserva il numero di interazioni, piuttosto che l'area



Distribuzione dell'energia come una maxwelliana  
il valore medio dipende da T

NOTA2 - Effetto doppler nucleare: le risonanze aumentano le  $\sigma_a$  dei nuclei

**F** - FATTORE DI UTILIZZAZIONE TERMICA

$$f = \frac{\sum_a^{(F)} / \sum_a^{(M)}}{\sum_a^{(F)} / \sum_a^{(F)} + \sum_a^{(M)} / \sum_a^{(M)}} = \frac{z}{z+1} = \frac{\# \text{ neutroni termici assorbiti dal fuel}}{\# \text{ neutroni assorbiti a totale}}$$

moderatore: è un materiale in grado di assorbire i neutroni

z: probabilità che un neutrone venga assorbito nel reattore piuttosto che nel moderatore ("dice come si deve mescolare il combustibile nel reattore ma non indica la ricchezza")

$$\sum_a^{(F)} = [\sigma_a(U_{235}) e + \sigma_a(U_{238}) (1-e) + 2\sigma_{a0}] N_f$$

Sezione d'urto efficace del combustibile  $= \sigma_a^{(F)}$

$$f = \frac{\sigma_a^{(F)} N(F)}{\sigma_a^{(F)} N(F) + \sigma_a^{(M)} N(M)} = \frac{\sigma_a^{(F)}}{\sigma_a^{(F)} + \sigma_a^{(M)} \left(\frac{N_M}{N_F}\right)}$$

$\frac{N_M}{N_F}$  = concentrazione molecolare mod =  $\theta$  / comb

$\frac{N_M}{N_F}$  = RAPPORTO DI MODERAZIONE MOLECOLARE, oggetto del nostro problema -  $\theta$

$\theta$  = PARAMETRO DI PROGETTO  $N_M/N_F$

$L^2$  = lunghezze di diffusione, parametro che dipende dalla presenza del combustibile che influenza la probabilità di non fuga dei neutroni termici

efficienze di moderatore dipendente dallo scattering  $\exp\left[-\frac{\dots}{\Sigma_s \xi}\right]$

$\xi$ : QUANTITÀ DI LETARGIA, energie guadagnate ad ogni urto misurate su scala logaritmica, definite come il logaritmo di  $\frac{E_{max}}{E}$

$\log\left(\frac{E_{max}}{E}\right) > 1$  sempre positive =  $\mu$ :  $\mu$  aumenta ed diminuire dell'energia

$\xi$  è il guadagno letargico medio

Quanto più alto è  $\Sigma_s$  e  $\xi$  tanto più alto è  $\rho$ !  $\rho$  diminuisce all'aumentare dell'assorbitore di risonanze (dipendente della densità del combustibile U238)

$\rho = \exp\left[-\frac{NA I}{\Sigma_s \xi}\right]$  dove  $I = \text{integrale di risonanze}$   
 $NA = N(U238) = N_F(1-e)$

Cambiando il rapporto di moderazione cambio  $\rho$

$I^{238} = 2,73 \left[\frac{\Sigma_s \cdot 10^{24}}{NA}\right]^{0,486}$  misura la virulenza delle risonanze

Sezione d'urto di scattering =  $\Sigma_{SM} + \Sigma_{SF}$

$I = 2,73 \left[\frac{(\sigma_{SM} NA + \sigma_{SF} N_F) \cdot 10^{24}}{N_F(1-e)}\right]^{0,486} = 2,73 \left[\frac{(\sigma_{SM} \theta + \sigma_{SF}) \cdot 10^{24}}{(1-e)}\right]^{0,486}$

$\Sigma_s = \Sigma_{SF} + \Sigma_{SM}$

$\xi = \left(\frac{\Sigma_{SM}}{\Sigma_{SM} + \Sigma_{SF}}\right) \xi_M + \left(\frac{\Sigma_{SF}}{\Sigma_{SM} + \Sigma_{SF}}\right) \xi_F$  considero le medie dei due e le peso sulle sezioni d'urto di scattering

↳ probabilità che uno scattering avvenga nel moderatore

$\xi = \frac{\Sigma_{SM} + \xi_M + \Sigma_{SF} \xi_F}{\Sigma_{SM} + \Sigma_{SF}} = \frac{\sigma_{SM} N_M \xi_M + \sigma_{SF} N_F \xi_F}{\sigma_{SM} N_M + \sigma_{SF} N_F} = \frac{\sigma_{SM} \theta \xi_M + \sigma_{SF} \xi_F}{\sigma_{SM} \theta + \sigma_{SF}}$

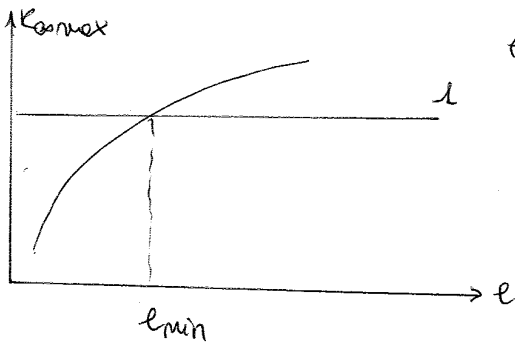
$\frac{NA}{\Sigma_s} = \frac{N_F(1-e)}{\sigma_{SM} N_M + \sigma_{SF} N_F} = \frac{(1-e)}{\sigma_{SM} \theta + \sigma_{SF}}$

$\rho = \frac{1 + 0,690 N(U238)/N_M}{1 + 0,563 N(U238)/N_M} = \frac{1 + 0,690 N_F(1-e)/N_M}{1 + 0,563 N_F(1-e)/N_M} = \xi(M)$

Facciamo il  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \rho(\theta)$   $\frac{N_F}{N_M}$  cresce molto e il rapporto diventa:

$\rho = \frac{0,690 N_F(1-e)/N_M}{0,563 N_F(1-e)/N_M} = \frac{0,690}{0,563} = 1,227$

**ESERCIZIO:** studiare l'andamento di  $K_{eff}$  in funzione di  $e$



esiste un valore minimo di  $e$  al di sotto del quale non è possibile costruire un reattore critico

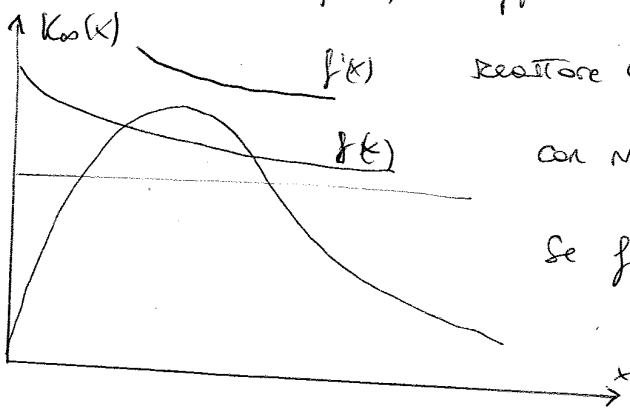
NOTA - Il valore di arricchimento dell'Urat è maggiore dell' $e_{min}$ , quindi si possono costruire i reattori critici con Uranio naturale -

L'arricchimento minimo per quanto riguarda le grafite non serve: se l'arricchimento dell'Urat è già sufficiente a garantire la costruzione di un reattore critico non ha senso arricchire le grafite con Uranio naturale.

Se acqua + Uranio naturale  $\Rightarrow K_{eff} < 1 \rightarrow$  non va bene. Deve essere:

$$K_{eff} = K_{eff} \left( \frac{1}{1 + L^2(x) B^2} \right) P_{NL}^{(F)} \Rightarrow K_{eff} = K_{eff} \cdot \frac{(1 + L^2(x) B^2)}{P_{NL}^{(F)}}$$

Si ha che  $K_{eff} = f(x)$ : supponiamo di avere una certa  $f(x)$ . Per fare un



reattore critico abbiamo 2 opzioni: la prima è con molto combustibile, la seconda con poco.

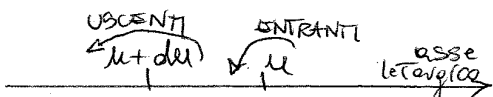
Se  $f(x) = f'(x)$  allora non si può costruire un reattore critico, bisogna quindi cambiare  $B^2$ . In conclusione,  $B^2$  non

garantisce la criticità del reattore!

## TEORIA DEL RALLENTAMENTO DI FERMI

$$K_{eff} = K_{eff} \cdot \frac{1}{1 + L^2 B^2} P_{NL}^{(F)}$$

Fermi usava la grandezza "l'età" piuttosto che l'energia. Quindi, consideriamo un asse l'etario contando il # di neutroni che attraversa le doglie l'etargico  $\frac{\text{tempo} \cdot \text{volume}}{\text{volume}}$ . Otteniamo così la densità di rallentamento (al di sopra del valore di  $l$ )



Guadagno letargico medio per urto

$q(\vec{r}, u) = \xi \sum_s(u) \Phi(\vec{r}, u)$  numero di urti per unità di volume ed energia

$\Phi(\vec{r}, u) = \frac{1}{\xi \sum_s(u)} q(\vec{r}, u)$

$\frac{\partial q(\vec{r}, u)}{\partial u} = \frac{D(u)}{\xi \sum_s(u)} \nabla^2 q(\vec{r}, u) \Rightarrow \frac{\partial q(\vec{r}, u)}{\partial u} = D(u) \nabla^2 \Phi(\vec{r}, u)$

$\int_0^u \frac{D(u')}{\xi \sum_s(u')} du' = \tau(u) = \text{ETÀ DELLE PARTICELLE alla letargia } u$   
[lunghezza<sup>2</sup>]

Tanto più  $\tau$  è grande, tanto più le particelle sono "invecchiate" perché hanno guadagnato in letargia (più è grande le distanze che abbiamo percorso avendo guadagnato  $u$ )

$\tau(u, u_0) = \int_0^{u-u_0} \frac{D(u')}{\xi \sum_s(u')} du'$

$\tau$  ricorda l'AREA di diffusione  $L^2$ : quanto si sono mosse le particelle -

Le distanze medie percorse è la radice quadrata di  $\tau$

$\sqrt{\tau}$  = lunghezza di diffusione che tiene conto delle collisioni

$\frac{\partial \tau(u)}{\partial u} = \frac{D(u)}{\xi \sum_s(u)} \quad \frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial u}$

$\frac{\partial q(\vec{r}, \tau)}{\partial \tau} - \frac{D(u)}{\xi \sum_s(u)} = \frac{D(u)}{\xi \sum_s(u)} \nabla^2 q(\vec{r}, \tau)$  ETÀ DI FERMI  $\tau$

$\frac{\partial q}{\partial \tau}(\vec{r}, \tau) = \nabla^2 q(\vec{r}, \tau)$

equazione differenziale nello spazio ed età di Fermi

$\nabla^2 q(\vec{r}, \tau) = -B^2 q(\vec{r}, \tau) \Rightarrow \frac{\partial q(\vec{r}, \tau)}{\partial \tau} = -B^2 q(\vec{r}, \tau)$  eq. differenz. del 1° ordine

$q(\vec{r}, t) = q(\vec{r}, 0) e^{-B^2 \tau}$  dove  $q(\vec{r}, 0)$  è la densità di rallentamento a  $\tau=0$ , cioè con energie massime

$\frac{q(\vec{r}, t)}{q(\vec{r}, 0)} = \frac{\text{densità di rallentamento all'età } \tau}{\text{densità di rallentamento all'età "0"}} = \frac{\# \text{ particelle rallentate @ } \tau}{\# \text{ particelle partite}}$



Se moltiplico per il volume del reattore ottengo le masse di combustibile necessarie per fare un reattore critico: MASSA CRITICA

$$X = \frac{N_f}{N_M}, \text{ se } X_{1\text{critico}} < X_{2\text{critico}} \Rightarrow N_{f2} > N_{f1}$$

Per scegliere il valore di progetto non si prende quello che produce le masse minime di combustibile, ma la  $X_{\text{critica}}$ !

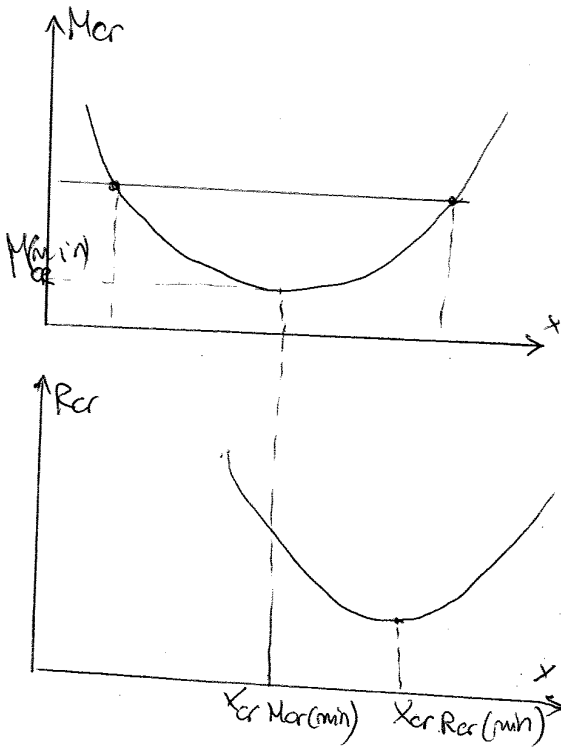


Grafico  $M_{cr} = f(x)$

Esiste un valore delle masse critica minime al di sotto delle quali non si può costruire un reattore critico.

Si nota come il valore di  $X$  che produce  $M_{cr}(\min)$  non è lo stesso di quello che produce  $R_{cr}(\min)$   $B^2 = \left(\frac{\pi}{R}\right)^2$

$R_{cr}$  segue l'aumento delle  $M_{cr}$ , ma risulta traslato.

Il valore di  $x$  che produce il minimo delle  $M_{cr}$  non è lo stesso che produce il minimo del raggio critico.

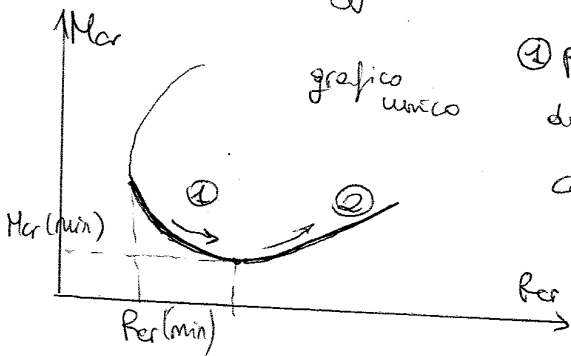


grafico unico

① partendo da  $R_{cr}(\min)$ , se  $R_{cr}$  aumenta bisogna diminuire la  $M_{cr}$ : la diminuzione della concentrazione di masse è compensata dalla diminuzione di perdite per leakage.

② partendo da  $M_{cr}(\min)$ , se  $R_{cr}$  aumenta

anche  $M_{cr}$  aumenta: per aumentare  $R_{cr}$ , ossia il volume, bisogna aumentare le masse che altrimenti verrebbe diluite per mantenere la concentrazione.

Otengo che: nella prima fase ho un beneficio nell'aumentare le dimensioni del reattore perché si può introdurre un combustibile meno concentrato e favorisce le PNL, successivamente, perché il volume cresce con il cubo del raggio critico.

# INTRODUZIONE ALLA FUSIONE NUCLEARE (9 ore)

Prof. Roberto ZANINO

"La più promettente reazione di fusione sulla Terra..."

Le reazioni di fusione nucleare che avvengono nel Sole e che permettono la vita sulla

Terra sono nelle forma semplificate:  $4p^+ \rightarrow {}^4\text{He}^{2+} + 2e^+ + 2\nu + \text{energia}$

dove  $p$  sono i protoni,  $e$  gli elettroni e  $\nu$  i neutroni.

A differenza delle reazioni di fissione che avvengono tra neutroni e nuclei, nelle

fusione le reazioni avvengono direttamente tra nuclei, quindi tutti di carica

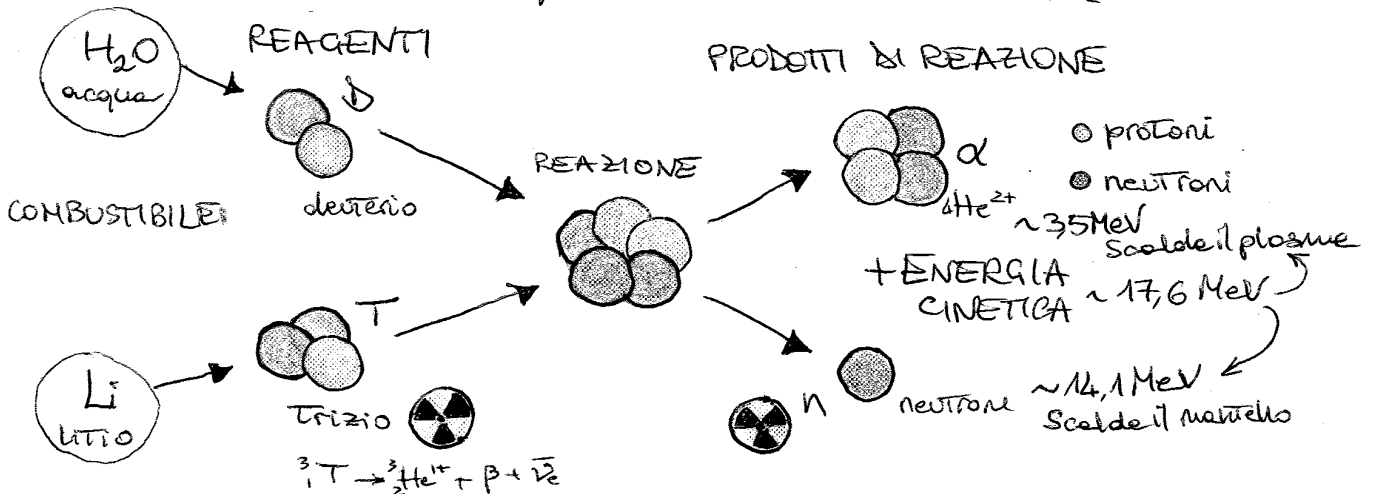
positiva. Per far avvenire tali reazioni, facendo quindi prevalere le forze attrattive

su quelle di repulsione coulombiana, bisogna superare una barriera di potenziale

molto alta e ciò è molto difficile. Nel Sole la forza attrattiva che si oppone

è quella repulsiva è la forza gravitazionale.

Sulla Terra invece si cerca di far avvenire un'altra reazione:



La reazione di fusione è una reazione ESOTERMICA perché libera energia. Una

volta avvenute le fusione il nucleo si spezza immediatamente in un nucleo di

elio4 o particelle  $\alpha$  e un neutrone:  $D + T \rightarrow \alpha + n$

Perché la reazione produce energia? Si può verificare in 2 modi:

1) Relazione di Einstein  $\Delta m \cdot c^2 = E$

Si verifica che esiste un **DEFETTO DI MASSA**  $\Delta m$  tra reagenti e prodotti che

è trasformata in energia calcolabile con la relazione di Einstein

• Come sono ripartiti i 18 MeV tra  $\alpha$  e n?

La reazione è un URTO ANELASTICO dove NON viene conservata l'energia cinetica, ma si conserva la quantità di moto. Calcolando il centro di masse viene fuori che l'energia cinetica sarà ripartita in modo **INVERSAMENTE PROPORZIONALE** alla MASSA dei prodotti di reazione:

$$n = \frac{1}{5} \text{ massa Totale} \Rightarrow \text{prende i } \frac{4}{5} \text{ dell'energia cinetica}$$

$$\alpha = \frac{4}{5} \text{ massa Totale} \Rightarrow \text{prende } \frac{1}{5} \text{ dell'energia cinetica}$$

In realtà, l'energia prodotta è di 17,6 MeV e la suddivisione è quindi di 3,5 MeV per  $\alpha$  e 14,1 MeV per n.

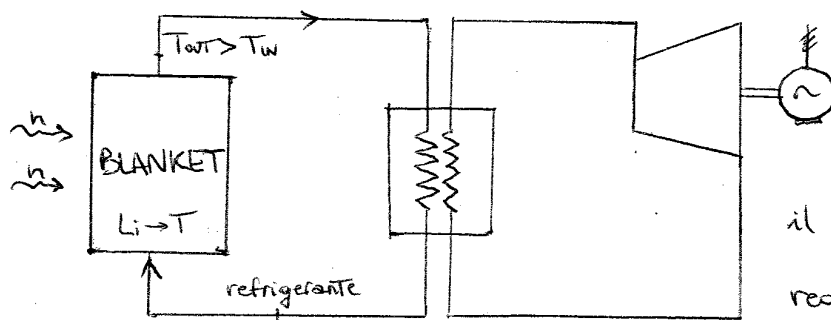
### OSSERVAZIONE

Il neutrone prodotto da fissione  $\sim 2,5 \text{ MeV}$  è molto meno energetico del neutrone prodotto da fusione  $\sim 14,1 \text{ MeV}$ . Questa osservazione è molto importante per i MATERIALI usati nella costruzione del reattore perché energie diverse hanno diverse interazioni con i materiali relative alle sezioni d'urto. Bisogna infatti capire come i materiali usati rispondono ai flussi neutronici.

• Come si fa a produrre energia elettrica per le base line, supponendo di far avvenire le reazioni sufficienti?

NOTA - base line = carico di base per le utenze elettriche.

Ciò che si deve fare è sfruttare adeguatamente il neutrone di 14,1 MeV, ossia si prendono i neutroni per mandarli su un muro dove sono obbligati a rallentare e termalizzarsi. Poiché si aumenta l'agitazione nel reticolo del muro, la traduzione macroscopica del fenomeno è l'innalzamento delle temperature del muro.




Il circuito che trasforma il calore in energia elettrica è semplice da realizzare, il problema è nel far avvenire le reazioni di fusione iniziali.

Talmente piccole che l'elettrone  $\beta$  viene fermato da un foglio di carta o dal primo strato di pelle, ma essendo T un gas, se lo si respira è molto pericoloso perché le particelle non riescono a uscire. Quindi anche se il cammino libero medio è piccolo, bisogna fare molta attenzione.

- Problema 1: produzione e riserve del litio nel mondo.

↳ le riserve di litio sono DISCONTINUE nel mondo: le grandi riserve presenti in Sud America (Cile, Bolivia) e quelle in Cina vengono interamente utilizzate per la costruzione di batterie. Se la fusione dovesse aver successo ci sarebbe un cambiamento nel mercato globale del litio.

- Problema 2: il neutrone  $n$   prodotto è anch'esso radioattivo. Oltre che rallentare eccitando e scaldando il blanket, viene assorbito dal litio per produrre il trizio in situ, ma può anche essere "mangiato" da altri elementi del blanket SENSIBILI alla possibile ATTIVAZIONE. Gli elementi che costituiscono il blanket sono stabili, ma se assorbono il neutrone vengono ATTIVATI ed emettono radiazioni in tempo breve. Il flusso di neutroni che scivola dalla camera di reazione attiva i materiali, ma questo problema è molto più pericoloso nei reattori a fissione!

↳ i calcoli matematici dimostrano che dal momento di fine vita dell'impianto a fusione, in ~100 anni si riporta alle sue radioattività naturali (come le ceneri del camin) mentre negli impianti a fissione servono centinaia di migliaia di anni.

⇒ ENERGIA (QUASI) PULITA! POTENZIALE: ENERGIA PRESSOCHÉ ILLIMITATA!

• A che serve la particella  $\alpha$ ? In che senso è difficile far avvenire la reazione?

SEZIONI D'URTO:  $\sigma$  → quanto grande il proiettile vede il bersaglio, dimensioni del bersaglio. Unità di misura:  $10^{-28} \text{ m}^2 = \text{barn}$

NOTA - Nelle fissioni le sezioni d'urto sono quelle macroscopiche  $\Sigma$ , mentre nella fusione si intende quella microscopica  $\sigma$ .

La reazione è tanto più facile quanto più  $\sigma$  è grande.

GRAFICO GENERAZIONE DI POTENZA DA FUSIONE

- ordinate: effetti - quanto variano le cose; scala logaritmicamente
- ascisse: driver - reazioni; scala logaritmicamente

L'energia ai reagenti è fornita sotto forma di energia termica -

Per la Teoria cinetica dei gas, le temperature si possono infatti misurare in KeV attraverso la costante di Boltzmann:  $K_B T = 1 \text{ eV}$  dove  $T = 10^4 \text{ K}$

$$1 \text{ eV} \cong 11400 \text{ K} \cong 10^4 \text{ K} \Rightarrow 10 \text{ KeV} = 10^4 \cdot 10^4 \text{ K} = 100 \text{ milioni di gradi!}$$

- Se la reazione D-T è a 100.000.000 di gradi a che stato della materia si trova? E come si fa a portar la a quelle temperature?

NOTA. Il POTENZIALE DI IONIZZAZIONE dell'idrogeno H è  $\cong 13 \text{ eV}$  (il più alto)

$\Rightarrow$  prima che D-T avvenga a  $10^8 \text{ K}$ , gli atomi sono stati completamente IONIZZATI!

Lo stato della materia ionizzato a quelle temperature è il PLASMA che è il 4° stato della materia nonché il più frequente nell'universo  $\sim 99\%$ . Il plasma è uno stato fluido, ma con proprietà diverse dal gas e dal liquido -

Il combustibile del reattore a fusione è quindi allo stato di plasma -

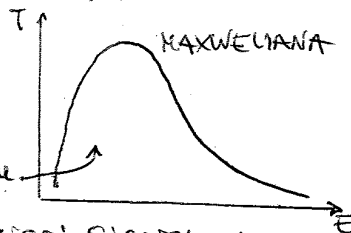
- Come si fa a scaldarlo fino a  $10 \text{ KeV} = 10^8 \text{ K}$ ?

Ovviamente, non esistono scambiatori di calore in grado di raggiungere  $10^8 \text{ K}$ . Si sfrutta quindi l'energia della PARTICELLA  $\alpha$  prodotta con  $3,5 \text{ MeV} \gg 10 \text{ KeV}$ .

Infatti, con le velocità raggiunte da  $\alpha$  è come se le molecole di D e T fossero ferme e quindi li colpisce scaldando i reagenti -

NOTA. Questa è la teoria sviluppata in quanto non c'è nessun principio che lo impedisce, ma ancora non si è riusciti a realizzarla né quindi a dimostrarla sperimentalmente. Se si riuscisse a realizzare questo sistema, il guadagno sarebbe infinito in quanto non servirebbe cedere nulla all'esterno -

Dalla Teoria cinetica dei gas, ad ogni energia è associata una temperatura che è la misura delle distanze delle distribuzioni



Si definisce il TASSO DI REAZIONE per capire quante reazioni si verificano a far avvenire nell'unità di tempo e di volume. Introduco la relazione binaria  $\langle \sigma v \rangle$  data dal prodotto mediato della sezione d'urto per le velocità relative delle particelle; ossia la velocità relative viene mediata su tutta la distribuzione Maxwelliana delle particelle - Il tasso di reazione R è misurato in

$$\frac{\# \text{ reazioni}}{\text{m}^3 \cdot \text{s}} \text{ quindi per le densità dei reagenti:}$$

## RISERVE PER DIFFERENTI RISORSE - Freidberg, 2007

RISORSA	SE TOTALE	AL TASSO 2001	- SE TOTALE: se fosse utilizzato la risorsa da sole per soddisfare il fabbisogno al 2001
Petrolio	(anni) 20	(anni) 60	
Gas naturale	20	100	
U 235	20	100	- AL TASSO 2001: se fosse utilizzate con le proporzioni di utilizzo al 2001
Carbone	200	900	
U 238, Th 232	2000	-	• Risorse fossili
Fusione (D-T)	20.000	-	• Risorse per fissione
Fusione (D-D)	2.000.000.000	-	• Risorse per fusione

## CARATTERISTICHE DEL PLASMA

Il plasma è un gas completamente ionizzato ad alte temperature e presenta una:

LUNGHEZZA DI DEBYE e la QUASI-NEUTRALITÀ.

È un gas fatto di particelle cariche con i nuclei che girano e le cariche staccate dal nucleo. Ma girano a caso o con dei vincoli?

### Esperimento.

Supponiamo di avere del plasma al posto dell'aria e prendiamo una particella di idrogeno H che teniamo sospesa nella stanza. Come interagisce H con il plasma?

Nel plasma ci sono tante particelle cariche e ci si aspetta che la carica TEST che viene introdotta nella stanza è percepita da tutte le altre cariche presenti per attrazioni coulombiane. In realtà non è così:

le particelle che costituiscono il plasma si accumulano come una nuvola intorno alla carica, schermandola dalle particelle poste oltre una certa distanza. A causa dello schermaggio delle cariche opposte si modifica il potenziale elettrostatico secondo un'esponenziale. Il campo generato dalla carica è percepito solo entro una breve distanza chiamata LUNGHEZZA DI DEBYE ( $\approx 10 \mu\text{m}$ ).

Da qui segue la QUASI-NEUTRALITÀ del plasma: se si osserva il plasma con una lente si riesce a vedere la carica H entro la lunghezza di Debye, ma se si guarda oltre 10-100 lunghezze di Debye, nel volume si vede le condizioni di neutralità. Quindi per quasi neutralità si intende che si vede il plasma neutro, tranne molto vicino alle lunghezze di Debye, che è molto piccole, ma non trascurabile. Di conseguenza la vera definizione di plasma è un gas completamente ionizzato ad alte temperature che se guardato a lunghezze maggiori di quelle di Debye risulta neutro.

- con plasmi di densità molto piccole, estremamente rarefatti, quindi se si ha

$$n \hat{=} 10^{20} \text{ m}^{-3} \Rightarrow \tau_E \hat{=} 1 \text{ s}$$

↳ il confinamento del plasma è ottenuto per mezzo di un CAMPO MAGNETICO

- con densità del plasma  $\gg$  densità del solido  $\Rightarrow \tau_E$  molto più breve  $\hat{=} \text{ns, ps}$  (picosecondo)

↳ il confinamento del plasma è INERZIALE (usato per le armi nucleari) ↘

Essendo  $\tau_E$  molto piccolo (nanosecondi) e dipendente della massa, si comprime il combustibile così tanto che riesce a restare confinato per tempi molto limitati.

## CONFINAMENTO DEL PLASMA - tipologie di reattori

### MAGNETICO

### INERZIALE

• Tokamak: acronimo russo che significa  
Macchine a Confinamento Magnetic

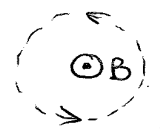
• National Ignition Facility (NIF)

• Stellarator: W7X (Wendelstein 7-X)

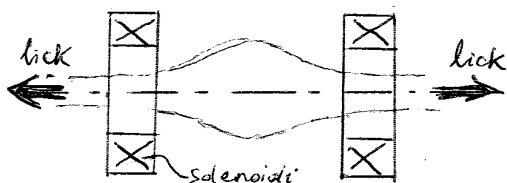
## CONFINAMENTO MAGNETICO (TOKAMAK)

Confinare un plasma significa che lo si deve contenere in un volume finito e per un tempo relativamente lungo.

In 2D (Fisica II), se consideriamo un campo magnetico uscente, le cariche restano confinate nel moto microscopico dovuto all'agitazione termica e si distribuiscono intorno al campo (sul foglio 2D). Ma cosa succede sopra il foglio?

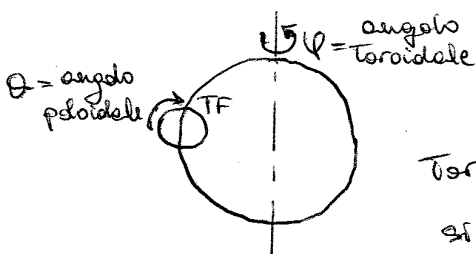


In 3D è molto più complesso confinare le cariche in uno spazio. Inizialmente si è pensato di prendere due solenoidi e far scorrere le cariche all'interno in modo da confinarle: MAGNETIC MIRROR. Le particelle in parte si riflettono, ma il



concetto soffre del difetto di ORIGINE: all'inizio e alle fine del cilindro ci sono delle perdite di plasma che quindi non è del tutto confinato.

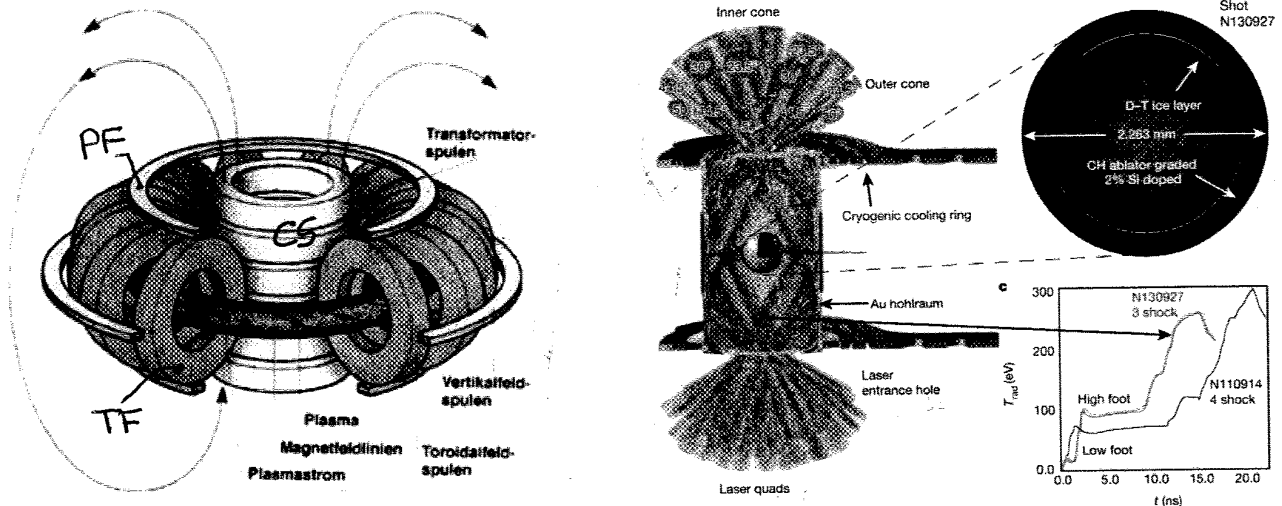
Si è pensato quindi di unire i bordi dando una forma toroidale al campo.



TF coils = Toroidal Field Coils

Il problema è riuscire a generare una componente toroidale del campo magnetico, ma con dei magneti non si riesce, a meno che si usino forme strane.

Negli Stellarator non c'è il problema delle correnti pulsate, ma i magneti hanno forme molto strane e hanno performance molto più scarse -



### CONFINAMENTO INERZIALE (NIF)

Per il confinamento inerziale del plasma si usano centinaia di laser che vengono incanalati con adeguate simmetrie in una regione molto piccola - Questa regione è costituita da una cavità cilindrica chiamata "hohlraum", che in tedesco significa "spazio cavo", con pareti in oro dove all'interno ricevono i fasci laser in modo da far diventare il cilindro un corpo nero che emette raggi X opportunamente pulsati e con simmetrie quasi perfette. I raggi X colpiscono per riflessione una pallina in Teflon di 25mm ricoperta da uno strato molto sottile di una miscela D-T solida e con del gas all'interno. I laser quindi colpiscono le pareti che indirettamente colpiscono la pallina con centinaia di TW la quali esplodono verso l'esterno per azione-reazione e comprimono il D-T all'interno. Le forti onde d'urto con pressioni dell'ordine di 100 Mbar portano la densità del D-T a densità molto maggiori della densità del solido. Se si riesce a comprimere il D-T prima che il gas si scaldi troppo e si espanda, la reazione si accende e si ottiene la fusione.

Questa strada è stata intrapresa dalle ricerche sulle armi militari per via delle micro-esplosioni che avvengono nel cilindro.

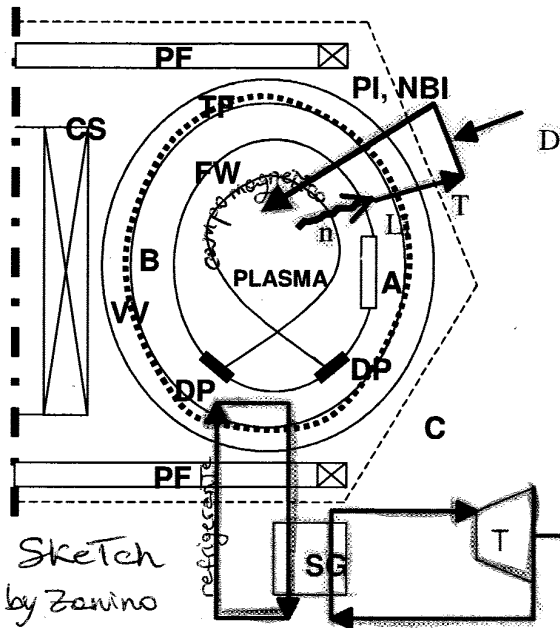
Problemi: la fisica a questi livelli di compressioni con densità molto alte è estremamente complicata e i laser utilizzati sono unici al mondo, quindi si deve fare attenzione alle prestazioni dei materiali.

Nel 2013 si è riusciti a superare il breakeven con  $Q = 1,2 - 1,3$  quindi con il 20% di potenze prodotte in più rispetto a quelle assorbite dalle palline, ma i rendimenti



ASDEX Upgrade (Axially Symmetric Divertor Experiment), FTU (Frascati Tokamak Upgrade), IGNITOR (project by ENEA in Frascati)

## COMPONENTI DI UN REATTORE TOKAMAK A FUSIONE



VV = Vacuum vessel → nelle camere del reattore deve esserci un vuoto molto spinto per evitare ogni tipo di impurezza.

FW = First Wall, DP = Divertor Plate

A = Antenna per riscaldatori ausiliari del plasma

B = blanket, C = Criostato

PI = pellet injector, NBI = neutral beam injector

D = deuterio, T = trizio, Li = litio, n = neutrone

SG = Stream Generator, T = Turbine

Magnet system: CS = central solenoid, TF = Toroidal field coil, PF = poloidal field coil

• Sistemi ausiliari (A): il riscaldamento del plasma è intrinseco; ma ad un certo punto si satura poiché le correnti generate  $I_p$  sono molto grandi (per avere dei campi magnetici molto forti), quindi la piccolissima resistenza del plasma non è più trascurabile e ne satura il riscaldamento. Il plasma infatti è un conduttore quasi perfetto per via della piccola resistenza. Per questo motivo servono dei sistemi ausiliari di riscaldamento come, ad esempio, le radio frequenze che cerca la risonanze con le frequenze proprie del plasma → FREQUENZA DI GIRAZIONE  
Nota: Anche le lunghezze di Debye ha una frequenza associate chiamate frequenze del plasma.

• DIVERTORE (DP): il campo viene deformato in modo da creare un punto X in modo da convogliare il plasma che sta fuori uscendo sulle piastre del divertore.  
↳ i carichi dovuti al plasma sono dell'ordine di  $20 \frac{MW}{m^2}$

• ULTRA ALTO VUOTO (VV): la regione di ultra vuoto viene applicato a tutto il B.

• CRIOSTATO (C): i magneti superconduttori funzionano a temperature molto basse a 5K, quindi l'intero macchina è chiusa in un criostato con He liquido che la mantiene a 5K senza farla scambiare con l'esterno.

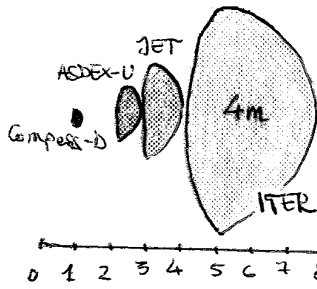
mise le proprie parti di denaro che viene gestito da un unico centro organizzativo. Per ITER invece, i partecipanti devono costruire e procurarsi i singoli pezzi distribuiti e loro, quindi i componenti delle macchine derivano da tutto il mondo e la difficoltà principale è assemblerli e far sì che stiano bene insieme. Per questo motivo ITER ha già diversi anni di ritardo nella costruzione. Ad esempio, i TF coils arrivano da diverse parti nel mondo, come anche i 9 settori del vacuum vessel diviso in parte all'Europa e in parte alla Corea del Sud.

SITO: Cadarache (Francia), a 300 Km da Torino. Secondo le previsioni attuali ci vorranno 20 anni di operazione e il primo plasma arriverà nel 2025. (?)

### OBIETTIVI DI ITER

Si vuole far bruciare il plasma con fattore  $Q$  di almeno 5-10  $\rightarrow$  non basta e raggiungere le condizioni di ignizione ( $Q \rightarrow \infty$ ) ma vuole produrre potenza. Il blanket è un componente per lo schermaggio neutronico che verrà testato in modo da dare soluzioni performanti per la macchina DEMO. ITER vuole sperimentare le nuove tecnologie dei magneti superconduttori, i divertori per l'interazione plasma-parete e le pompe che ottengono il torus vacuum.

### DIMENSIONI DELLE SEZIONI



il salto di dimensioni previsto è enorme  $\rightarrow$  rischio dell'estrapolazione di tipo lineare

DIFFERENZE con la LEGGE DI MOORE  $\rightarrow$

Sulla legge di Moore si ottenevano oggetti direttamente utilizzabili sul mercato, mentre con gli esperimenti si sono ottenuti risultati solo per la fisica del plasma.

### REATTORI IBRIDI FUSIONE-FISSIONE

Dagli anni '50 si è iniziato a pensare di mettere insieme fusione e fissione. Questi reattori sfrutterebbero la fusione come sorgente di neutroni di un reattore a fissione sottocritica. In questo modo non si avrebbero problemi di scorie e di divergenze di potenza legate alla criticità del reattore, oltre che di produzione di combustibile. Il problema è l'enorme difficoltà nel mettere insieme le due tecnologie già complesse singolarmente.

