



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1909A -

ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Giuffrè Esther

MATERIA: Controllo e strumentazione per i processi chimici -
Prof. Pisano

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

• LEZIONE 1:

- INTRODUZIONE AL CONTROLLO DI PROCESSO:

Ogni singolo unità di processo, o combinazione di unità di processo, usate per la conversione di materie prime in prodotti finiti è un processo chimico.

Condurre un impianto implica controllare il suo funzionamento in accordo con le condizioni operative di progetto (condizioni nominali).

Ogni impianto contiene almeno una decina di unità, quindi le operazioni non possono essere gestite manualmente; ogni unità dipende dalle altre.

Inoltre, il processo non è in equilibrio e le condizioni di ingresso sono sottoposte a fluttuazione; queste fluttuazioni vanno controbilanciate: da qui l'esigenza di controllare il processo.

Le unità di processo devono operare in: sicurezza, nel rispetto delle specifiche di produzione, tenendo conto degli aspetti economici, nel rispetto dei vincoli di legge e operativi.

- PROBLEMA DI REGOLAZIONE VS ASSERIMENTO:

Si possono distinguere 2 problemi di controllo: il problema di regolazione e quello di asserimento.

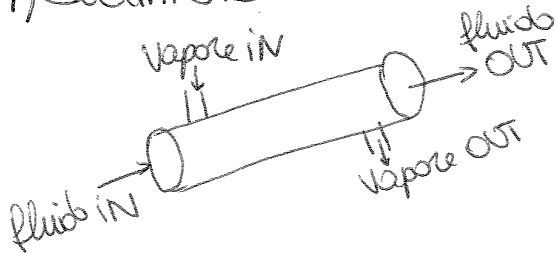
- Regolazione: l'obiettivo del controllo è lo stesso, ma il controllo è necessario perché ci sono dei disturbi sulle condizioni di ingresso.

- Asserimento: l'obiettivo del controllo è vuoto, cioè cambiamo le condizioni di progetto della corrente in uscita.

La differenza tra un regolatore e un controllore ad asserimento risiede quindi nel fatto che il valore desiderato della variabile che si vuole controllare (setpoint) è costante in un caso e variabile nell'altro.

- ESEMPLI :

1) Scambiatore di calore coassiale :



- Obiettivo : mantenere la temp. al vapore desiderato
- Attuatori : valvole sull' ingresso del vapore
- Elementi di misura : misuratore di temp. in uscite

1) Variabili IN : manipolebiti u
disturbo d

2) Variabili OUT : y

3) Variabili Di STATO : x

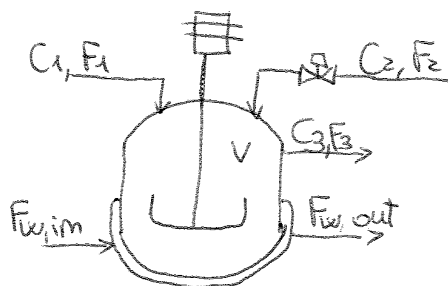
⇒ 1) $T_{f,im}, \phi_{f,im}, T_{v,im}, P_{f,im}, P_{v,im} \rightarrow d$
 $\phi_{v,im} \rightarrow u$

2) $T_{out} \rightarrow y$ misurabili

$\phi_{f,out}, \phi_{v,out}, P_{f,out}, P_{v,out} \rightarrow y$ non misurabili

3) T, P

2) Reattore chimico con reazione esotermica :



- Obiettivo : si vuole mantenere la corrente uscente ad una temp. fissa.

1) IN : $C_1, C_2, F_1, T_1, T_2, T_{w,im} \rightarrow d$
 $F_2, F_{w,im} \rightarrow u$

2) OUT : $C_3, T_3, F_{w,out}, T_{w,out}$

$C \equiv C_3, T \equiv T_3$ perché il sistema è perfettamente miscelato

3) Di STATO : T, V, C

Per regolare il grado di apertura delle valvole mi serve una legge di controllo, per esempio quella proporzionale:

$$W_2(t) = \bar{W}_2 + K_C (x_d - x(t))$$

↳ Costante di controllo

Si dice di retroazione perché misuro l'uscita e poi torno indietro a misurare la valvola.

- SOLUZIONE 2: controllo in anteazione: misuro x_1 e manipolo W_2

È chiamato anche feedforward. Mi serve una descrizione dinamica del processo. Il controllore misura il disturbo che può generare quella variazione e richiede che io abbia un modello che descrive il comportamento dinamico del processo. Comasco so le informazioni e monte e non è bello.

Uso un modello matematico:

$$W_2(t) = \bar{W}_1 \frac{x_d - x_1(t)}{1 - x_d}$$

- SOLUZIONE 3: misuro x_1 e x , manipolo W_2

Un'alternativa è quella di combinare le 2 strategie: auto 2 controllori, uno di retroazione e uno di anteazione, che passano le informazioni ad un blocco che decide come combinare queste azioni.

Questo mi permette di agire subito sulle concentrazioni x_1 (anteazione), ma ho la possibilità di correggermi se il modello non è corretto (retroazione).

Il difetto del sistema con controllo in retroazione è che il controllo entra in azione solo quando la variabile in uscita devia dal suo valore desiderato.

- SOLUZIONE 4: collaborazione tra ingegnere di controllo e ingegnere di processo:

Uso un serbatoio più grande in modo che un eventuale disturbo sulle concentrazioni in ingresso è smorzato da un più elevato volume di liquido.

• LEZIONE 2:

Analisi del comportamento dinamico di un processo e modellazione matematica (PARTE I):

- INTRODUZIONE ALL'ANALISI DINAMICA:

Studiare la dinamica di un processo significa studiarne il comportamento e fronte di una variazione delle condizioni in ingresso.

L'analisi dinamica ci permette di analizzare i processi in categorie di:

- sistemi del I° ordine: variazione e gradino \square
- sistemi in cui c'è una variaz. e gradino e una corrente costante \rightarrow processo a risposta inversa

• I modelli matematici sono cruciali per capire il comportamento dei processi, soprattutto se questi sono complessi.

Oltre a un modello matematico, necessitano le funzioni forzanti che descrivono l'evoluzione delle variabili in ingresso; si dicono forzanti perché forzano il sistema a spostarsi da uno stato stazionario ed entrare in uno stato dinamico.

Lo scelta del modello è il risultato di un compromesso tra accuratezza e complessità; in quanto non deve essere più complesso di quanto necessario.

I modelli matematici possono essere classificati in base a:

- metodo di derivazione
- variabile indipendente
- variabili di stato

• In base al metodo usato per la loro derivazione, i modelli si distinguono in:

- teorici: nessun esperimento
- empirici: non usano leggi fisiche, ma trovano e raccolgono i dati sperimentali
- semi-empirici: le leggi derivano dalla teoria, ma i parametri che entrano nelle leggi sono derivati sperimentalmente.

11.

- ANALISI DEI GRADI DI LIBERTÀ:

L'analisi dei gradi di libertà permette di stabilire se l'insieme di equazioni di cui si compone il modello ha soluzione e se tale soluzione è unica.

Il numero di gradi di libertà per un sistema di equaz. è

$$N_f = N_v - N_e$$

N_f : n° di gradi di libertà

N_v : n° di variabili dipendenti (incognite)

N_e : n° di equaz. indipendenti

Si possono distinguere 3 situazioni:

- $N_f = 0$: il problema è esattamente specificato;
- $N_f > 0$: il problema è sottospecificato $\rightarrow \infty$ soluzioni
- $N_f < 0$: il problema è sovranspecificato $\rightarrow \nexists$ soluzione

Occorre identificare tutte le grandezze fisiche che determinano il processo e sono costanti: parametri del processo.

• LEZIONE 4:

Strumenti matematici per l'analisi dinamica

- LE TRASFORMATE INTEGRALI:

Il modello matematico di un processo chimico è in genere composto da un sistema di equaz. differenziali. Per agevolare la soluzione, può essere utile trasformare il suddetto sistema in uno equivalente, ma composto da equaz. algebriche; a questo scopo si possono usare le trasformate integrali.

La trasformata integrale è un'applicazione, in genere lineare, di uno spazio di funzioni su un altro spazio di funzioni, che è realizzata per mezzo di un integrale:

$$T(f, s) = \int_a^b K(s, t) f(t) dt$$

$K(s, t)$: nucleo (kernel) della trasformazione e differenzia le varie trasformazioni.

- OPERAZIONI / FUNZIONI :

1) Derivato primo:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \hat{f}(s) \cdot s - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-st} dt = F(t) \cdot e^{-st} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} F(t) (-s) e^{-st} dt =$$

↑
integrazione per parti

$$= f(t) e^{-st} \Big|_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = 0 - f(0) + s \hat{f}(s) =$$

$$= s \hat{f}(s) - f(0)$$

2) Derivato seconda:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = \hat{f}(s) s^2 - f'(0) s - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f''(t) dt =$$

integrando per parti:

$$= F'(t) e^{-st} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -s e^{-st} f'(t) dt =$$

$$= F'(\infty) e^{-\infty} - f'(0) e^0 + s \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t) dt =$$

$$= -f'(0) + s \left[F(t) e^{-st} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} s e^{-st} F(t) dt \right] = \text{(per parti)}$$

$$= -f'(0) + s (F(\infty) \cdot 0 - f(0) \cdot 1 + s \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt) =$$

$$= -f'(0) - s f(0) - s^2 \hat{f}(s) = \hat{f}(s) s^2 - f'(0) s - f(0)$$

3) Integrale:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\theta) d\theta\right\} = \frac{1}{s} \hat{f}(s)$$

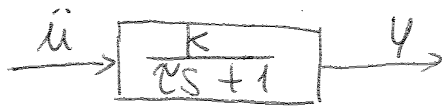
$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\theta) d\theta\right\} = \int_0^{+\infty} \left(e^{-st} \int_0^t f(\theta) d\theta \right) dt =$$

$$= \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \int_0^t f(\theta) d\theta \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{1}{s} e^{-st} F(t) dt = \text{(per parti)}$$

$$= -\frac{1}{s} \left(0 - \int_0^0 f(\theta) d\theta \right) + \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} F(t) e^{-st} dt =$$

$$= \frac{1}{s} \hat{f}(s)$$

(6)



Ci sono tante funz. di trasferimento quante sono le variabili di ingresso.

- Per antitrasformare occorre utilizzare l'espansione parziale in frazioni, che produce:

$$\hat{y}(s) = \frac{K}{s} + \frac{-K\tau}{(\tau s + 1)} \rightarrow \hat{y}(s) = \frac{K}{s} - \frac{K}{(s + \frac{1}{\tau})}$$

l'antitrasformato di Laplace produce:

$$y(t) = K(1 - e^{-t/\tau})$$

- TRASFORMATA DI LAPLACE DI FUNZIONI FORZANTI:

1) Funzione gradino:

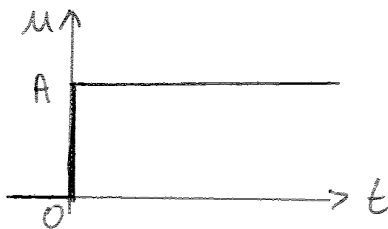
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A & t > 0 \end{cases}$$

$$F_{\text{gradino}} = A \cdot \underbrace{H(t)}_{\text{Heaviside} \equiv \text{gradino unitario}}$$

Heaviside \equiv gradino unitario

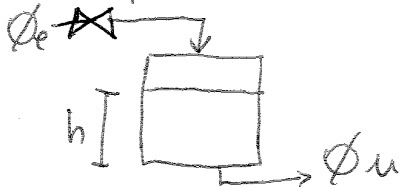
$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}\{1-A\} = \frac{A}{s} \rightarrow \hat{u} = \frac{A}{s}$$



Dal tempo 0 in avanti, ci si sposta sotto forma di gradino

- Esempio:



$$y = h - h s$$

$$u = \phi_e - \phi_e s$$

Apri la valvola e la lascio aperta rapidamente in modo da aumentare o diminuire le portate e manterrò quel valore per un tempo infinito.

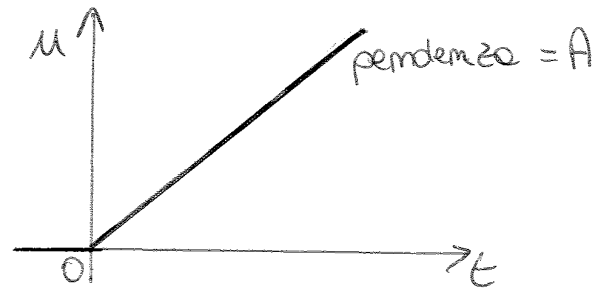
Tanto più è rapida l'apertura della valvola, tanto più mi avvicinerò ad ottenere una funzione gradino.

Ipotesi e ampiezza in valore istantaneamente, sono frequenti negli impianti e sono legati a cariche di corrente.

4) Funzione rampa:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ At & t > 0 \end{cases}$$

$$\hat{u}(s) = \frac{A}{s^2}$$



La rampa è l'integrale del gradino.

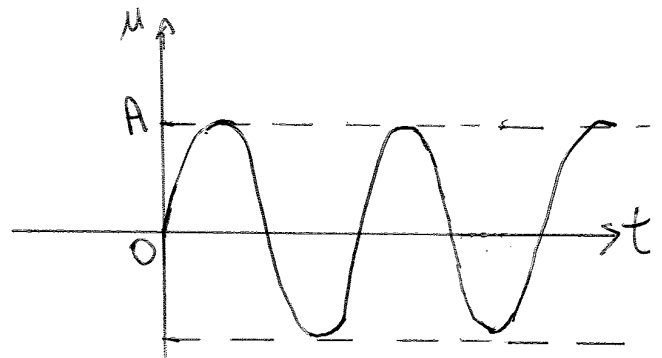
$$F_{\text{rampa}} = A \int_0^t H(t) dt; \quad A \cdot \frac{\hat{H}(s)}{1/s} = \frac{A}{s^2} = \hat{F}_{\text{rampa}}$$

Devo aprire la valvola in maniera graduale e regolare.

5) Funzione sinusoidale:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A \sin(\omega t) & t > 0 \end{cases}$$

$$\hat{u}(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$



- VARIE TIPOLOGIE DI RADICI:

Si distinguono 3 casi:

- 1) Radici reali e distinte;
- 2) Radici reali, ma con una certa molteplicità;
- 3) Radici complesse coniugate

La procedura di Heaviside è valida solo se le radici sono reali e distinte:

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \sum_{i=1}^d \frac{C_i}{s - p_i}$$

m : grado di N
 d : grado di D

$C_i \rightarrow$ generica costante

• LEZIONE 6:

COMPORTAMENTO DI SISTEMI NON LINEARI

- MODELLI PER PROCESSI NON LINEARI:

Il comportamento dinamico di un processo è descritto da equazioni differenziali che spesso non sono lineari.

Le equaz. differenziali ordinarie lineari hanno soluzioni analitiche in forme chiuse, ovvero disponiamo di almeno una soluzione che può essere espressa in termini di una combinazione finita di funzioni elementari.

- la teoria alla base delle proiezioni dei sistemi di controllo è stata sviluppata per i sistemi lineari. Per studiare il comportamento dinamico di un processo non lineare, si può usare uno dei seguenti approcci:

1) Soluzione numerica: si parte da un'equaz. Ci sono una serie di metodi da cui deriva una serie di soluzioni che dovrebbe convergere ad un valore vicino alla soluzione esatta.

2) Trasformazioni di variabili: non sempre è fruttuoso, quindi è raramente utilizzabile. Premo la mia funzione non lineare, introduco una sostituzione di variabile e faccio diventare il sistema lineare.

3) Linearizzazione: approssimare l'equaz. del modello, linearizzandolo nell'intorno di un punto. L'operazione introduce un errore tra il modello originale (non lineare) e quello linearizzato; questo errore non è costante, ma è tanto più grande quanto più si è lontani dall'intorno di approssimazione.

- LINEARIZZAZIONE DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI:

Per trasformare un sistema non lineare di equazioni differenziali ordinarie in un sistema lineare, si può utilizzare lo sviluppo in serie di Taylor troncandolo al termine del primo ordine.

IL SISTEMA LINEARIZZATO è:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = g_1(y_{1,0}, y_{2,0}) + \left. \frac{\partial g_1}{\partial y_1} \right|_{(y_{1,0}, y_{2,0})} (y_1 - y_{1,0}) + \left. \frac{\partial g_1}{\partial y_2} \right|_{(y_{1,0}, y_{2,0})} (y_2 - y_{2,0}) \\ \frac{dy_2}{dt} = g_2(y_{1,0}, y_{2,0}) + \left. \frac{\partial g_2}{\partial y_1} \right|_{(y_{1,0}, y_{2,0})} (y_1 - y_{1,0}) + \left. \frac{\partial g_2}{\partial y_2} \right|_{(y_{1,0}, y_{2,0})} (y_2 - y_{2,0}) \end{cases}$$

• LEZIONE 7:

Dynamico di sistemi lineari del primo ordine

- SISTEMI DEL PRIMO ORDINE:

Un sistema è del primo ordine se il suo comportamento dinamico può essere descritto con un'equaz. differenziale ordinaria, lineare e del primo ordine.

$$\begin{cases} a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = bu \\ y(t=0) = 0 \end{cases}$$

y : variabile di stato/uscita di cui vogliamo descrivere l'evoluzione

u : variabile di ingresso

Se $a_0 \neq 0$, allora si può scrivere che:

$$\begin{cases} \tau \frac{dy}{dt} + y = k u \\ y(t=0) = 0 \end{cases} \quad \tau = \frac{a_1}{a_0} \quad k = \frac{b}{a_0}$$

- k : guadagno statico del processo \rightarrow stabilisce di quanto è amplificata la risposta del sistema e fronte di un disturbo in ingresso.

- τ : tempo caratteristico del processo \rightarrow stabilisce quanto rapida è la risposta del sistema e fronte di un disturbo in ingresso; mi dice quanto è reattivo il sistema.

- L'anzidetta equaz. nel dominio di Laplace è:

$$\begin{cases} \tau L \left\{ \frac{dy}{dt} \right\} + L \{ y \} = k L \{ u \} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Si osservi che:

- la sezione As del serbatoio è una misura della capacità del sistema di accumulare materia;
- il guadagno statico del processo è indicatore della resistenza del sistema al trasferimento di materia. Tale resistenza è definita dal condotto in usata, valvola e stamezzo;
- il tempo caratteristico del processo è il prodotto della capacità di stoccaggio e la resistenza al trasferimento di materia.

- Comportamento dinamico:

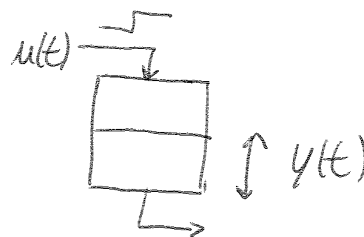
Studiare il comportamento dinamico di un generico sistema corrisponde a valutare l'evoluzione di y e fronte di una variazione di u e/o d .

Qual è la risposta di un generico sistema del I° ordine se $u(t) = 0$?

Se non si modificano le condizioni di ingresso, il processo non si sposta dal suo stato stazionario.

1) DISTURBO A GRADINO:

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{k}{\tau s + 1} \hat{u} \\ \hat{u} = \frac{A}{s} \end{cases}$$



Sostituendo \hat{u} si ottiene:

$$y = \frac{k}{\tau(s + 1/\tau)} \frac{A}{s} = \sum_{i=1}^2 \frac{\alpha_i}{s - p_i} =$$

$\begin{cases} p_1 = 0 \\ p_2 = -1/\tau \end{cases} \rightarrow$ sono le 2 radici reali distinte

$$= \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s + 1/\tau}$$

$$Xs|_{s=0}$$

$$C_1 = \frac{AK}{\tau(s + 1/\tau)} \Big|_{s=0} = AK$$

L'inerzia di un sistema è una misura su quanto si scosta il comportamento di un processo reale rispetto al processo ideale: è cioè la differenza tra il nostro comportamento e quello di un processo ideale che ha massima reattività e mi dice quanto è lento il mio processo portandosi subito al successivo stato stazionario.

Tanto più grande è l'area in verde, tanto più lento sarà il mio processo rispetto a quello ideale.

$$J = \int_0^{+\infty} \left\{ \underbrace{AK}_{\text{ideale}} - \underbrace{[AK - AK e^{-t/\tau}]}_{\text{reale}} \right\} dt =$$

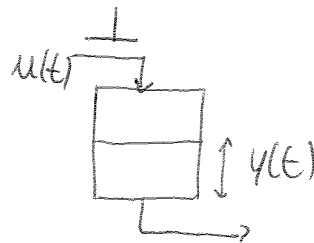
$$= \int_0^{+\infty} AK e^{-t/\tau} dt = -AK\tau e^{-t/\tau} \Big|_0^{+\infty} = AK\tau$$

⇒ per un sistema di 1° ordine l'inerzia è uguale a $AK\tau$.

2) DISTURBO A IMPULSO DI AREA A:

$$\begin{cases} \hat{y} = \frac{k}{\tau s + 1} \hat{u} \\ \hat{u} = A \end{cases}$$

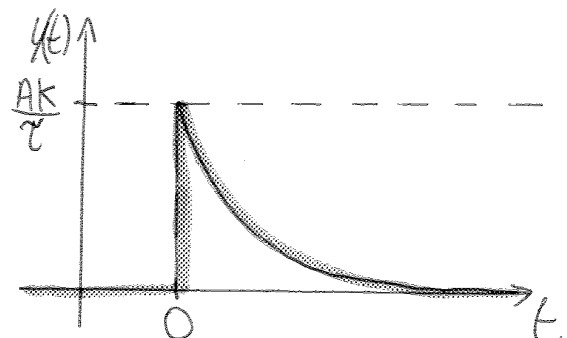
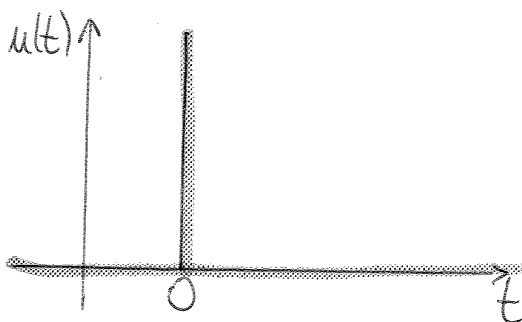
$$\hat{y} = \frac{AK}{\tau s + 1}$$



- Nel dominio del tempo:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\hat{y}\} = \frac{AK}{\tau} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 1/\tau}\right\}$$

$$y = \frac{AK}{\tau} e^{-t/\tau}$$



(12)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y = 0$$

C'è continuità sulla funzione, ma non sulle sue derivate.

$$\lim_{t \rightarrow 0} y = 0$$

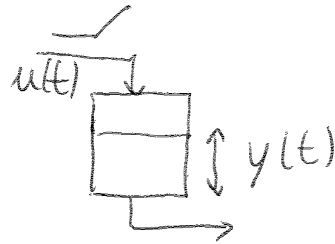
$$\lim_{t \rightarrow b} AK(1 - e^{-t/\tau}) \rightarrow \text{mi dà il massimo della curva}$$

Se riduco b e aumento A , la parte di area centrale si stringe ma aumenta ellungandosi, e può aumentare fino al massimo di AK .

La risposta del sistema è simile a quella osservata e fronte di un disturbo a gradino di ampiezza A , ma una volta che il livello di liquido ha raggiunto un valore massimo, pari a $AK(1 - e^{-t/\tau})$, il sistema ritorna al valore a cui si trovava prima del disturbo.

4) DISTURBO A RAMPA DI PENDENZA A :

$$\begin{cases} \hat{y} = \frac{k}{\tau s + 1} \hat{u} \\ \hat{u} = \frac{A}{s^2} \end{cases}$$

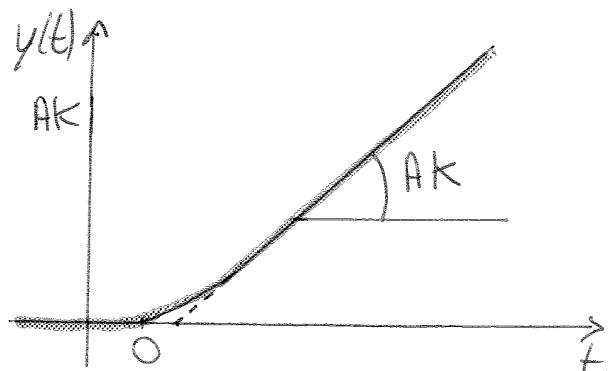
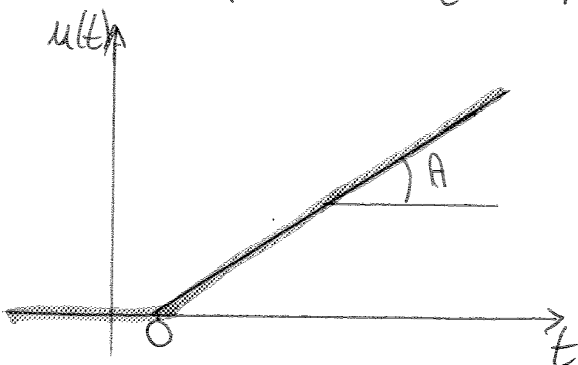


$$\hat{y} = \frac{AK}{\tau s + 1} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$\hat{y} = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s^2} + \frac{C_3}{s + \frac{1}{\tau}} \rightarrow \text{mi ricavo le costanti usando Heaviside modificata}$$

Nel dominio del tempo si ha:

$$y = AK\tau \left(e^{-t/\tau} + \frac{t}{\tau} - 1 \right)$$



$$\phi = \tan^{-1}(\omega\tau)$$

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\frac{\sin(A-B)}{\cos B} = \sin A - \operatorname{tg} B \cos A$$

$$A = \omega t$$

$$\operatorname{tg} B = \omega\tau \quad B = \operatorname{tg}^{-1}(\omega\tau)$$

$$\frac{\sin(A-B)}{\cos B} = \frac{\sin(\omega t - \operatorname{tg}^{-1}(\omega\tau))}{\cos(\operatorname{tg}^{-1}(\omega\tau))} =$$

$$\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(x)}}$$

$$\cos(\operatorname{tg}^{-1}(\omega\tau)) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg}^{-1}(\omega\tau))}{\omega\tau} \right]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$$

$$= \sin(\omega t - \operatorname{tg}^{-1}(\omega\tau)) \cdot \sqrt{1 + \omega^2\tau^2}$$

Moltiplico questo per $\frac{AK}{1 + (\omega\tau)^2}$

Si viene che la risposta è:

$$y = AK \left(\frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} e^{-t/\tau} + \frac{\sin(\omega t + \phi)}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \right)$$

$$\phi = -\tan^{-1}(\omega\tau)$$

Le principali caratteristiche della risposta sono:

1) Il primo termine è ^{un}transitorio che si riduce esponenzialmente e si annulla per $t \rightarrow +\infty$. Il contributo del secondo termine, invece, persiste.

2) La risposta ultima (UR) è ancora una funzione sinusoidale:

$$y|_{t \rightarrow +\infty} = \frac{AK}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \sin(\omega t + \phi)$$

Ha la stessa frequenza ω del disturbo in ingresso, ma è sfasata di un angolo ϕ .

- SISTEMA A GUINCHONO PURO:

Un sistema a guadagno puro è un sistema del I° ordine in cui $\tau = 0$, quindi la sua funzione di trasferimento include solo il parametro caratteristico k .

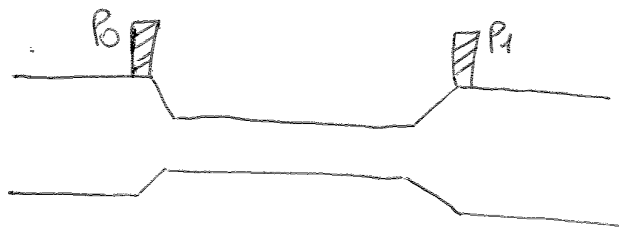
$$\hat{y} = k \hat{u}$$

A fronte di un disturbo il sistema si muove istantaneamente da uno stato stazionario ad un nuovo stato stazionario senza transitori.

La risposta di tale sistema a fronte di variazione delle condizioni in ingresso è direttamente proporzionale alla forzante in ingresso e la costante di proporzionalità è k .

-EX: Capillare con riduzione di sezione e resistori elettrici.

È raro incontrare un sistema del genere:



Se P_0 aumenta, la pressione a valle del mio capillare aumenta in maniera dirett. proporzionale che deriva dall'impostazione della legge di Poiseuille:

$$\Delta p = f(P_0) = k P_0$$

- SISTEMA ANTICIPO RITARDO:

Un sistema anticipo/ritardo è descritto dalle seguenti funzione di trasferimento:

$$\hat{y} = \frac{k(\beta s + 1)}{\tau s + 1} \hat{u}$$

↗ anticipo del I° ordine

↘ ritardo del I° ordine

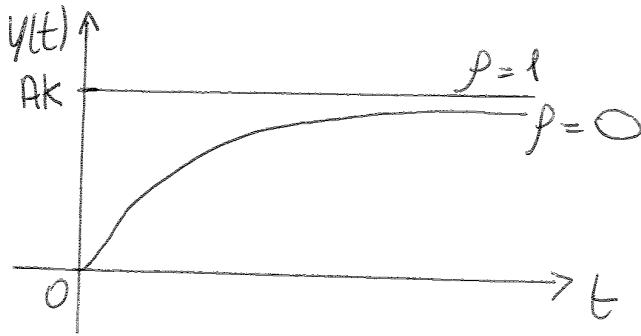
I parametri del sistema sono:

k : guadagno statico del sistema

$\beta = \frac{\tau}{\tau}$: rapporto anticipo/ritardo

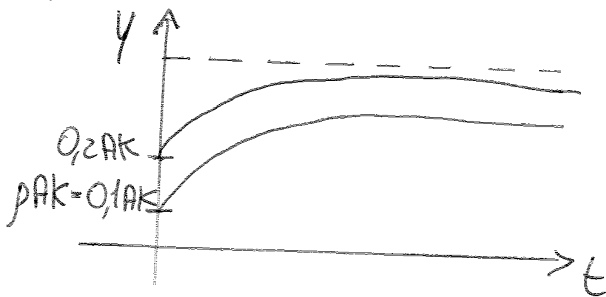
Si consideri un disturbo a gradino di ampiezza H .
 Qual è la risposta del sistema?

• $p = 1, \rho = 0$



• $0 < p < 1 \rightarrow p = 0,1$
 $\hat{y} = 0,1 \hat{y}_{GK} + 0,9 \hat{y}_{G1}$

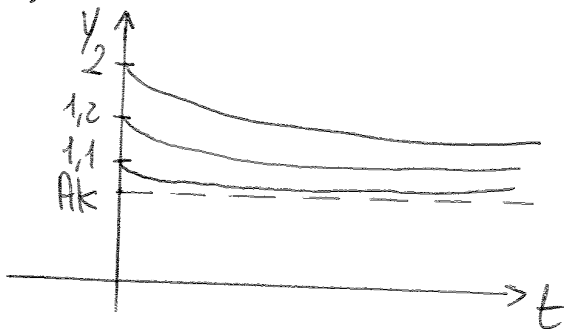
$y|_{t \rightarrow \infty} = 0,1 AK + 0$



Sommiamo il 90% della
 risposta \hat{y}_{G1}

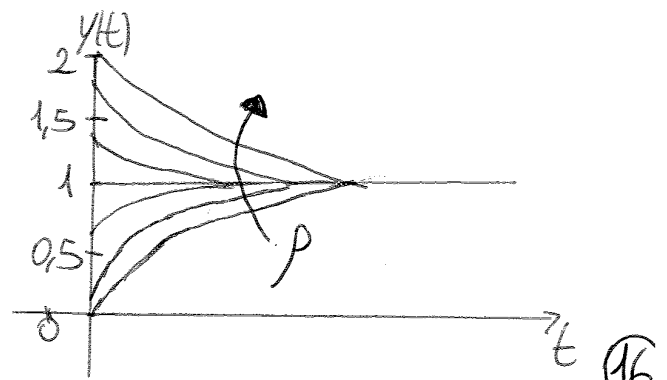
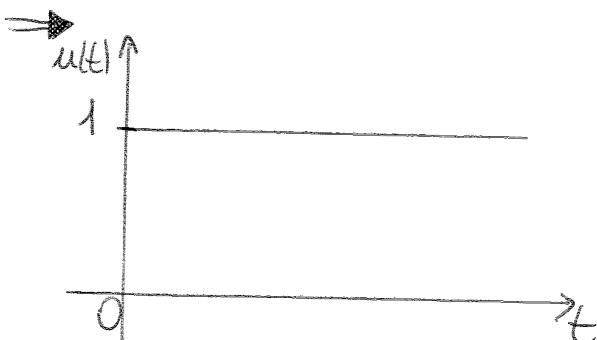
$y|_{t \rightarrow \infty} = 0,2 AK + 0,9 AK = AK$

• $p > 1$:



$p = 1,1 : \hat{y} = 1,1 \hat{y}_{GK} - 0,1 \hat{y}_{G1}$
 $y = 1,1 AK - 0,1 AK = AK$

$p = 2 : \hat{y} = 2 \hat{y}_{GK} - \hat{y}_{G1}$
 $y|_0 = 2AK - 0$
 $y|_{t \rightarrow \infty} = 2AK - AK = AK$



● LEZIONE 10:

Dynamico di sistemi lineari di ordine superiore al I°

- SISTEMA DEL SECONDO ORDINE:

d'equaz. differenziale che lo descrive è:

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b u$$

che, dividendo per a_0 , può essere scritta:

$$\frac{a_2}{a_0} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{a_1}{a_0} \frac{dy}{dt} + y = \frac{b}{a_0} u$$

$$\tau^2 = \frac{a_2}{a_0} \quad 2\zeta\tau = \frac{a_1}{a_0} \quad K = \frac{b}{a_0}$$

Si può facilmente ricavare che nel dominio di Laplace un sistema del II° ordine è descritto dal seguente modello:

$$\hat{y} = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1} \hat{u} \quad (1)$$

che ha 3 parametri caratteristici:

K : guadagno statico del processo

ζ : coeff. di smorzamento o damping coefficient

τ : tempo caratteristico del processo

da (1) deriva da:

$$\tau^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\zeta\tau \frac{dy}{dt} + y = K u$$

$$y(0) = 0$$

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = y'(0) = 0$$

$$\tau^2 \{ s^2 \hat{y} - \underbrace{s y(0)}_0 - \underbrace{y'(0)}_0 \} + 2\zeta\tau (s \hat{y} - \underbrace{y(0)}_0) + \hat{y} = K \hat{u}$$

$$(\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1) \hat{y} = K \hat{u}$$

$$\hat{y} = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1} \hat{u}$$

$\hookrightarrow G(s)$

$$Y = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s - \tau_1} + \frac{C_3}{s - \tau_2}$$

$$Y = C_1 + C_2 e^{\tau_1 t} + C_3 e^{\tau_2 t}$$

- Si possono distinguere 3 casi di risposta:

- 1) $\zeta > 1$: sovrasmorzato, τ_1 e τ_2 reali e distinte
- 2) $\zeta = 1$: criticamente smorzato, " reali e coincidenti
- 3) $0 < \zeta < 1$: sottosmorzato, " complesse e coniugate

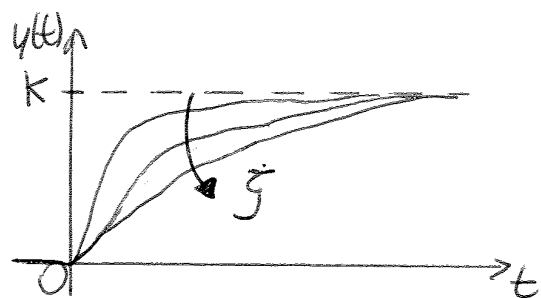
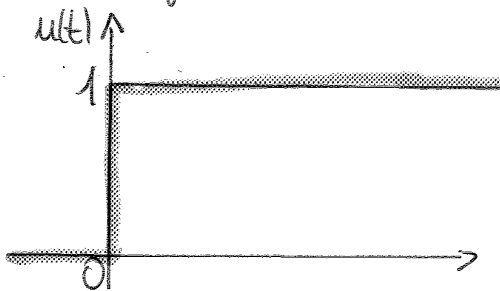
1) Sistema sovrasmorzato:

$$\tau_{1/2} = -\zeta/\tau \pm \beta/\tau \quad \beta = \sqrt{|\zeta^2 - 1|}$$

la risposta del sistema è:

$$Y = K \left\{ 1 - e^{-\zeta t/\tau} \left[\cosh(\beta t/\tau) + \frac{\zeta}{\beta} \sinh(\beta t/\tau) \right] \right\}$$

la risposta, dopo un transitorio in cui il segnale cresce in modo esponenziale, si porta a un nuovo stato stazionario. All'aumentare di ζ l'andò allo stazionario con l'abito minore, cioè aumenta l'inerzia del sistema. Questo dimostra perché le serie interagenti arriva allo stazionario con l'abito minore rispetto alle non interagenti.



2) Sistema criticamente smorzato:

$$\tau_{1/2} = -1/\tau$$

la risposta del sistema è:

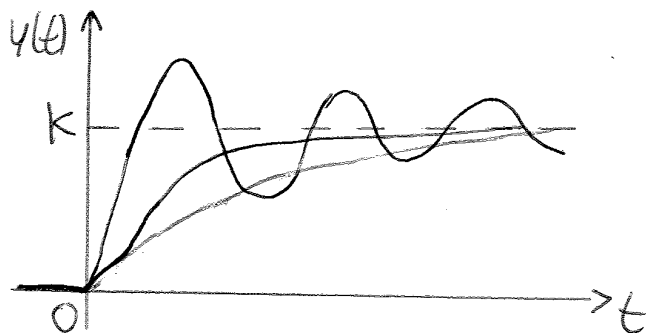
$$Y = K \left[1 - \left(1 + t/\tau \right) e^{-t/\tau} \right]$$

- tempo del primo picco, t_p : è il tempo impiegato per raggiungere il valore massimo del sistema.
- primo picco: rappresenta lo scostamento dallo stato stazionario
- tempo di assestamento, t_s : è il tempo richiesto affinché l'uscita del sistema raggiunga e resti entro un intervallo di ampiezza $\pm 5\%$ della variazione totale di y . È il tempo che la risposta impiega per ridurre le proprie oscillazioni entro una banda.
- periodo: distanza tra due picchi successivi
- overshoot, a/b : è l'escursione massima del sistema rispetto al valore ultimo
- rapporto di smorzamento, c/e : rappresenta la velocità con cui smorza le mie oscillazioni. "c" è l'escursione del II° picco dal valore del nuovo stato stazionario.

$$\Rightarrow t_r = \frac{\tau}{\beta} (k - \phi), \quad \frac{a}{b} = e^{-\frac{k\zeta}{\beta}}, \quad \frac{c}{e} = e^{-\frac{2\pi\zeta}{\beta}}, \quad p = \frac{2\pi\tau}{\beta}$$

$$t_p = \frac{\pi\tau}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Se $\zeta < 0$: il sistema è instabile e le oscillazioni crescono nel tempo



$$\zeta = 0,1$$

$$\zeta = 1$$

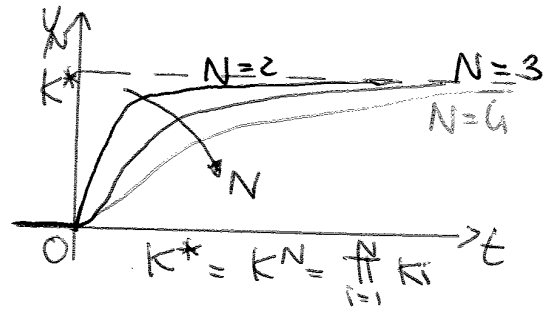
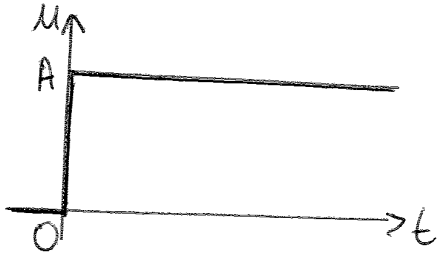
$$\zeta = 1,5$$

- da risposte manifeste oscillazioni e overshoot solo nel caso in cui $\zeta < 1$;
- un elevato valore di ζ produce una risposta più lenta del sistema;
- la risposta del sistema più veloce, e senza overshoot, è quella del sistema criticamente smorzato ($\zeta = 1$).

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (Ys) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K'}{(Ts+1)^N} = K'$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{dy}{dt} = \lim_{s \rightarrow +\infty} (Ys) s = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{s^2 K^N}{(Ts+1)^N} \cdot \frac{1}{s} = 0$$

Al $t=0$, la derivata del gradimento sarà sempre 0.
 Per tutti i sistemi di ordine maggiore di 2, la derivata sarà 0; i sistemi del 1° ordine hanno derivata $\neq 0$.



Si fa riferimento al sistema originario per capire come varia la funzione al variare di N :

$$Y = \prod_{i=1}^N \frac{K_i}{(T_i s + 1)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{C_0}{s} + \sum_{i=2}^N \frac{C_i}{(T_i s + 1)} = 0$$

$$y(t) = C_0 + \sum_{i=1}^N C_i e^{-t/T_i}$$

$$C_0 = \prod_{i=1}^N (K_i) = K^* \rightarrow \text{risolvendo i calcoli per } s=0$$

$$\rightarrow K^* + 0 = K^*$$

$$J = \int_0^{+\infty} [\underbrace{y^*}_{\text{ideale (la linea tratteggiata)}} - y(t)] dt$$

$$J_1 = K^* T$$

$$J_2 = K^* (T_1 + T_2) \quad K^* = K_1 K_2$$

$$J_N = K \sum_{i=1}^N (T_i)$$

d'inerzia aumenta in modo proporzionale alla somma dei tempi caratteristici delle unità che compongono il sistema.

- d'inerzia di un sistema di 2° ordine è:

$$J_2 = K_1 K_2 (T_1 + T_2)$$

- Quella di un sistema di 1° ordine è: $J = AKT$

(2)

da parte immaginaria influenza solo la forma delle risposte, cioè la presenza o meno della funzione trigonometrica.

$Re = 0$ e Im : complesso \rightarrow a saranno delle oscillazioni con ampiezza costante

$Re = 0 \rightarrow$ limite di instabilità

Un processo con un polo con radice nulla e un sistema capacitivo.

L'analisi della sub risposta visiva non mi dice nulla, ma devo andare più in fondo, cioè prendere le funz. di trasferimento e verificare che non ci sono poli con parte $Re > 0$.

- Il numeratore non influenza mai la stabilità del processo, ma influenza il comportamento nel transitorio; non influenza nemmeno il valore del moto stazionario.

Per capire l'influenza del numeratore, confrontiamo le risposte di due processi di II° ordine:

$$\hat{y}_1 = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \hat{u}$$

$$\hat{y}_2 = \frac{K(\xi_1 s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \hat{u}$$

$$\hat{u} = \frac{A}{s} \rightarrow \text{gradino}$$

$$\hat{y}_1 = \frac{AK}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

$$\hat{y}_2 = \frac{AK(\xi_1 s + 1)}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

Si consideri il comportamento del sistema a $t=0$; si applica quindi il teor. del valore iniziale e finale:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \hat{y}_1 s = AK$$

- Come si comporta un sistema di ordine n con più zeri?

$$G = \frac{N(s)}{D(s)} \quad \begin{matrix} d \geq 3 \\ m \geq 2, m < d \end{matrix}$$

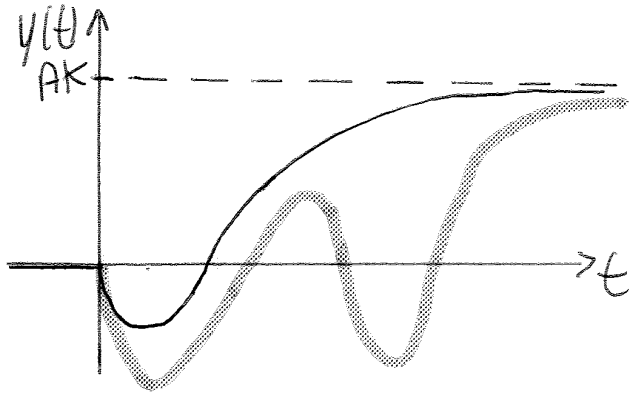
zeri positivi ($\xi_i < 0$) $\left\{ \begin{array}{l} \text{dispari} \rightarrow \text{risposta inversa} \\ \text{pari} \rightarrow \text{risposta non inversa} \end{array} \right.$

zeri negativi ($\xi_i > 0$) \rightarrow accelero la risposta

1) 1 zero positivo

2 zeri positivi \rightarrow la risposta cambia direzione tante volte quante il num. degli zeri.

3) 3 zeri positivi



- SISTEMI CON RITARDO:

Generica funzione di trasferimento G :

$$G = G^* e^{-\alpha s}$$

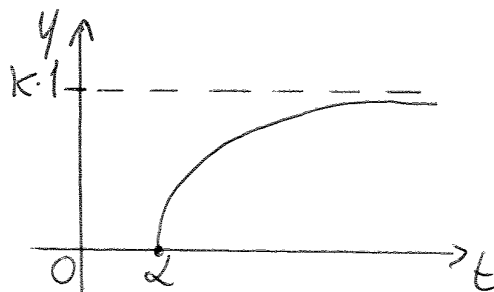
Risponde in maniera simile a come risponderebbe uno senza ritardo, ma traslato di α unità di tempo.

$$\hat{y} = G \hat{u}$$

$$G^* = \frac{k}{\tau s + 1}$$

$$\hat{y} = G \hat{u}$$

$$\hat{u} = \frac{1}{s}$$



- Il ritardo puro è un processo di ordine N , con $N \rightarrow +\infty$.

$$G = e^{-\alpha s} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{i=1}^N \frac{k_i}{\tau_i s + 1}$$

● LEZIONE 11:

Analisi della risposta in frequenza, parte I.

- INTRODUZIONE E PREMESSA:

La risposta di un sistema lineare a un disturbo in ingresso di tipo sinusoidale, $u = A_0 \sin(\omega t)$, è ancora una funzione sinusoidale che, rispetto al segnale in ingresso, ha la stessa frequenza ω , è sfasato di ϕ radianti e ha un'ampiezza pari ad A .

L'analisi della risposta in frequenza studia come il rapporto di ampiezze e lo sfasamento variano con la frequenza del disturbo sinusoidale in ingresso:

$AR = \frac{A}{A_0} \rightarrow$ rapporto di ampiezze, $\phi =$ sfasamento

Fare questa analisi è importante per il controllo e non per lo studio della dinamica.

- NUMERI COMPLESSI:

$z = a + bj$

$a, b \rightarrow$ coppia di num. reali

$j = \sqrt{-1} \rightarrow$ unità immaginaria

$a = \text{Re}\{z\} \rightarrow$ parte reale di z

$b = \text{Im}\{z\} \rightarrow$ parte immaginaria di z

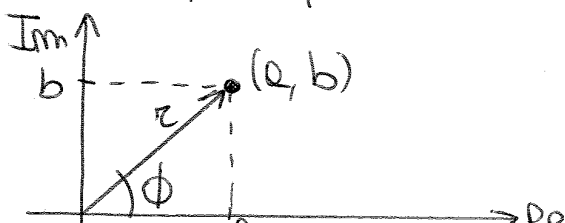
Siano $z_1 = a + jb$ e $z_2 = c + jd$ due numeri complessi, allora si ha che:

$z_1 + z_2 = (a + c) + j(b + d)$

$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + j(ad + bc)$

$1/z_1 = \frac{a}{a^2 + b^2} - j \frac{b}{a^2 + b^2}$

Un numero complesso è definito da una coppia di num. reali e può quindi essere rappresentato su di un piano:



$r = \text{modul}$
 $\phi = \arctg\left(\frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)}\right)$

$$\begin{cases} \hat{y} = G \hat{u} \\ \hat{u} = \frac{A_0 W}{s^2 + W^2} \end{cases} \quad \hat{y} = G \frac{A_0 W}{s^2 + W^2}$$

Espandendoci in frazioni semplici si ha:

$$\hat{y} = \sum_{i=1}^M \left(\frac{A_i}{s - \alpha_i} \right) + \frac{B_1}{s - jW} + \frac{B_2}{s + jW}$$

Questo è un approccio corretto, ma molto lungo e difficile quando trattiamo sistemi di ordine superiore al primo.

- Esiste un teorema che non usa l'approccio classico, ma considera solo la funzione G e sostituisce al posto di s la funz. jW :

$$G(s) \Big|_{s=jW} = G(jW)$$

Risposta ultima: risposta una volta esauriti i transienti:
resta solo il seno e via gli esponenziali:

$$\frac{AR_1}{A_0} = \frac{A_1}{A_0} = |G(jW)| = f_1(W)$$

↓
rapporto di ampiezza

$$\Phi = \angle G(jW) = f_2(W)$$

Dimostriamo che fare questo equivale a fare l'analisi dettagliata ed equivale proprio all'approccio tradizionale perché alla fine il risultato è uguale.

$$\hat{y} = G \hat{u} = \underbrace{G}_A \frac{A_0 W}{s^2 + W^2} \rightarrow B$$

$$\hat{y} = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s - \alpha_i} + \frac{B_1 W}{s^2 + W^2} + \frac{B_2 s}{s^2 + W^2}$$

poli della mio
funz. di trasferimento

$$y(t) = \sum_{i=1}^N A_i e^{\alpha_i t} + B_1 \sin(Wt) + B_2 \cos(Wt)$$

24

$$\begin{cases} p \sin(\theta + \psi) = p \sin\theta + q \cos\theta \\ p = \sqrt{p^2 - q^2} \\ \psi = \text{tg}^{-1}(q/p) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta = \omega t \\ p = \frac{A_0}{2} [G(-j\omega) + G(j\omega)] \\ q = j \frac{A_0}{2} [G(-j\omega) - G(j\omega)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} G(j\omega) = \text{Re}(\omega) + j \text{Im}(\omega) \\ G(-j\omega) = \text{Re}(\omega) - j \text{Im}(\omega) \end{cases}$$

$$G(-j\omega) + G(j\omega) = \text{Re}(\omega) - \cancel{\text{Im}(\omega)j} + \text{Re}(\omega) + \cancel{\text{Im}(\omega)j} = 2 \text{Re}(\omega)$$

$$p = \frac{A_0}{2} \cdot 2 \text{Re}(\omega) = A_0 \text{Re}(\omega)$$

$$G(-j\omega) - G(j\omega) = \cancel{\text{Re}(\omega)} - j \text{Im}(\omega) - \cancel{\text{Re}(\omega)} + \cancel{-j \text{Im}(\omega)} = -2j \text{Im}(\omega)$$

$$q = j \frac{A_0}{2} [-2j \text{Im}(\omega)] = A_0 \text{Im}(\omega)$$

$$p = \sqrt{p^2 + q^2} = A_0 \sqrt{\text{Re}^2(\omega) + \text{Im}^2(\omega)}$$

$$\psi = \text{tg}^{-1}(q/p) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{A_0 \text{Im}(\omega)}{A_0 \text{Re}(\omega)}\right) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{\text{Im}(\omega)}{\text{Re}(\omega)}\right)$$

$$p = A_0 |G(j\omega)|$$

$$G(j\omega) = \text{Re}(\omega) + j \text{Im}(\omega)$$

$$\psi = \angle G(j\omega)$$

$$y|_{t \rightarrow +\infty} = p \sin(\theta + \psi) = \frac{A_0 |G(j\omega)|}{A_1} \sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$

$$\begin{cases} A_R = \frac{A_L}{A_0} = |G(j\omega)| \\ \phi = \angle G(j\omega) \end{cases} \rightarrow \text{teorema di partenze}$$

- Via alternativa: lo stesso risultato può essere ottenuto senza ricorrendo alla forma cartesiana, ma lavorando direttamente sulla funzione:

$$G = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$G(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{|N|}{|D|} = \frac{\sqrt{Re^2 + Im^2}}{\sqrt{Re^2 + Im^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle N(j\omega) - \angle D(j\omega)$$

$$G_1(j\omega) = \frac{k}{1 + j\tau\omega}$$

$$N(j\omega) = k \rightarrow Re = k, Im = 0$$

$$D(j\omega) = 1 + j\tau\omega \rightarrow Re = 1, Im = \tau\omega$$

$$AR = |G| = \frac{|N|}{|D|} = \frac{\sqrt{k^2 + 0^2}}{\sqrt{1^2 + \tau^2\omega^2}} = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$$

$$\begin{aligned} \Phi = \angle G &= \angle N - \angle D = \text{tg}^{-1}(0/k) - \text{tg}^{-1}(\omega\tau) = \\ &= \text{tg}^{-1}(-\omega\tau) \end{aligned}$$

• Ci sono 2 grafici per rappresentare:

$$AR = f_1(\omega) \quad \Phi = f_2(\omega)$$

1) BODE: f_1 e f_2 sono rappresentate su due grafici distinti

2) NYQUIST: le informazioni contenute in f_1 e f_2 sono rappresentate su un solo grafico.

→ BODE: ①

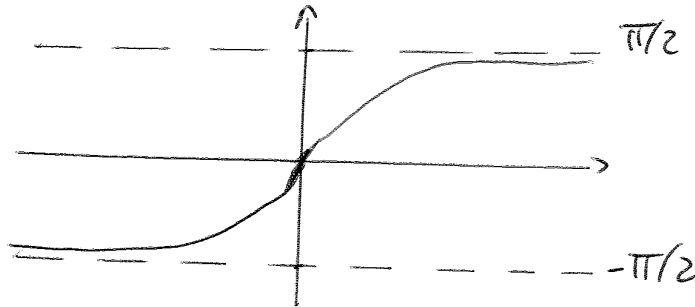
Nel grafico spesso non si riporta AR, ma MR, cioè magnitude ratio.

Le 2 scale non sono lineari, ma logaritmiche.

$$\Phi = \text{tg}^{-1}(-\omega C)$$

$$\omega \rightarrow 0 : \Phi = \text{tg}^{-1}(0) = 0$$

$$\omega \rightarrow +\infty : \Phi = \text{tg}^{-1}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

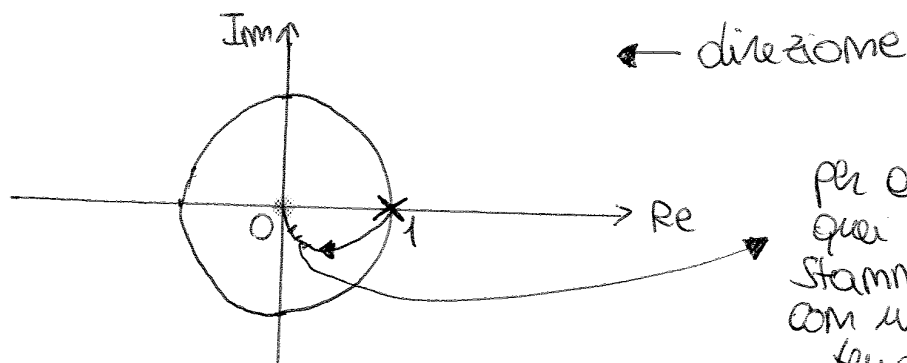
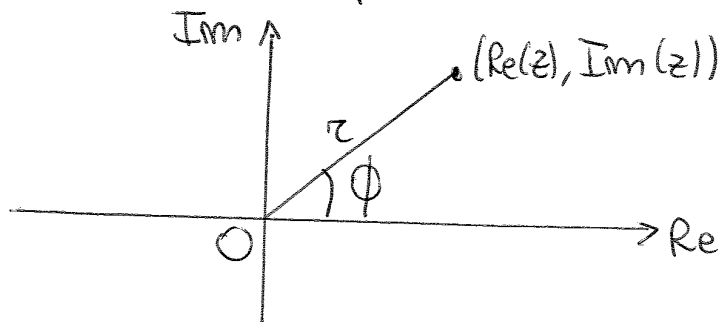


$$\omega \rightarrow 1/\tau : \Phi = \text{tg}^{-1}(1) = -45^\circ$$

Su sistemi di I° ordine, ad alte frequenze lo sfasamento tende sempre a -90° , almeno che non ci siano degli zeri.

⇒ NYQUIST :

Viene tracciato sul piano di Gauss :



per alte ω , avremo quei punti che stiamo vicino a 0 con un angolo che tende a -90° .

$$\omega \rightarrow 0 : MR = 1 \rightarrow \Phi = 0 \text{ (punto x)}$$

$$\omega \rightarrow +\infty : MR = 0 \text{ (punto 0)}$$

Nel sistema di I° ordine questo diagramma si sviluppa sempre all'interno del cerchio unitario

- SISTEMI CHIRICI:

da funzione di trasferimento \bar{e} :

$$G(s) = \frac{k}{s}$$

$$G(s=j\omega) = \frac{k}{j\omega}$$

$$N(j\omega) = k + j0 \rightarrow \text{Re}_N = k, \text{Im}_N = 0$$

$$D(j\omega) = 0 + j\omega \rightarrow \text{Re}_D = 0, \text{Im}_D = \omega$$

$$AR = \frac{|N(j\omega)|}{|D(j\omega)|} = \frac{k}{\omega} \rightarrow MR = \frac{1}{\omega}$$

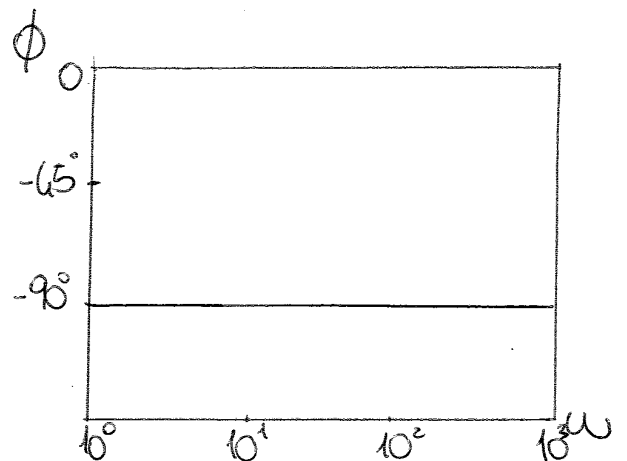
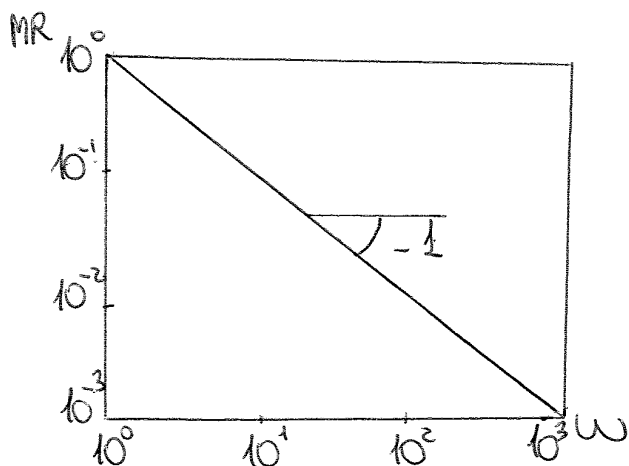
$$\phi = \angle N - \angle D = \text{tg}^{-1}\left(\frac{0}{k}\right) - \text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{0}\right)$$

$$\phi = 0 - 90^\circ = -90^\circ$$

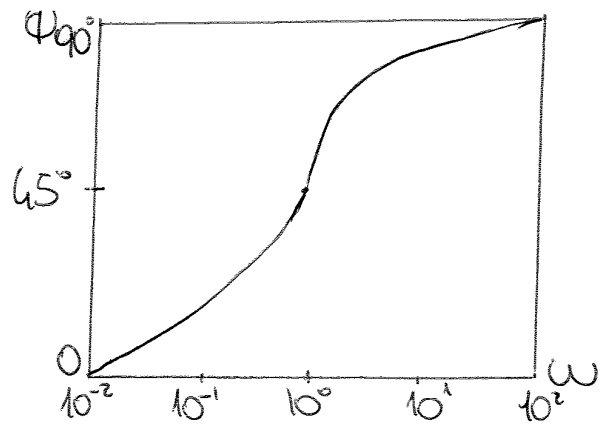
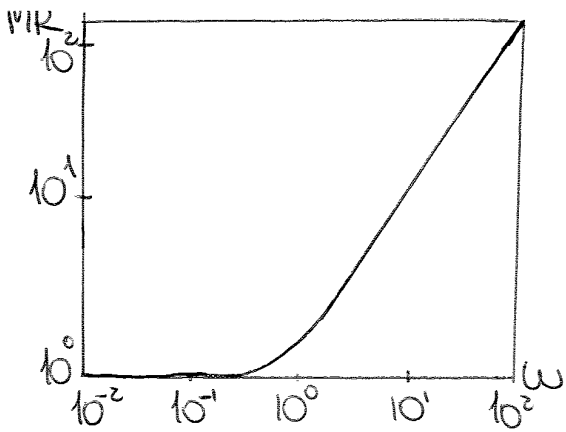
$$\omega \rightarrow 0 : MR|_{\omega \rightarrow 0} = \frac{1}{\omega}|_{\omega \rightarrow 0} = +\infty$$

$$\omega \rightarrow +\infty : MR|_{\omega \rightarrow \infty} = \frac{1}{\omega}|_{\omega \rightarrow \infty} = 0$$

$$\text{lg}\left(\frac{AR}{k}\right)|_{\omega \rightarrow +\infty} = \text{lg}\left(\frac{1}{\omega}\right)|_{\omega \rightarrow +\infty} \sim -\text{lg}(\omega)|_{\omega \rightarrow +\infty}$$

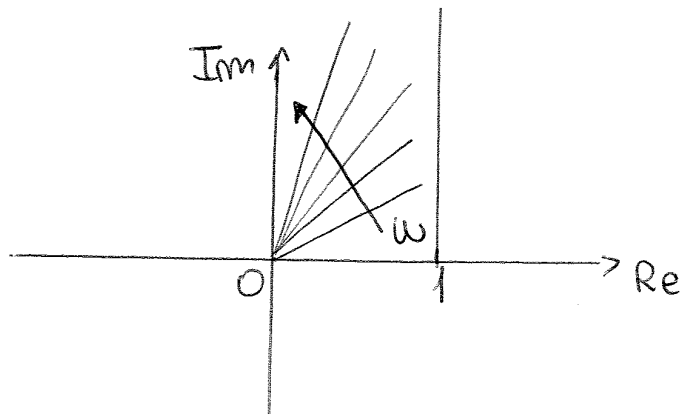


BODE



BODE: andro agli estremi sempre con asintoti orizzontali.

NYQUIST:



Se $\omega \rightarrow +\infty$: $\phi = 90^\circ \rightarrow$ arriviamo a $+90^\circ$ in maniera non chiusa.

- SISTEMA ANTICIPO-RITARDO:

da funzione di trasferimento \bar{e} :

$$G(s) = \frac{K(\xi s + 1)}{\tau s + 1}$$

$$G(s=j\omega) = \frac{K(\xi j\omega + 1)}{\tau j\omega + 1}$$

$$N(j\omega) = K + K\xi\omega j \rightarrow \text{Re}_N = K \quad \text{Im}_N = K\xi\omega$$

$$D(j\omega) = 1 + \tau\omega j \rightarrow \text{Re}_D = 1 \quad \text{Im}_D = \tau\omega$$

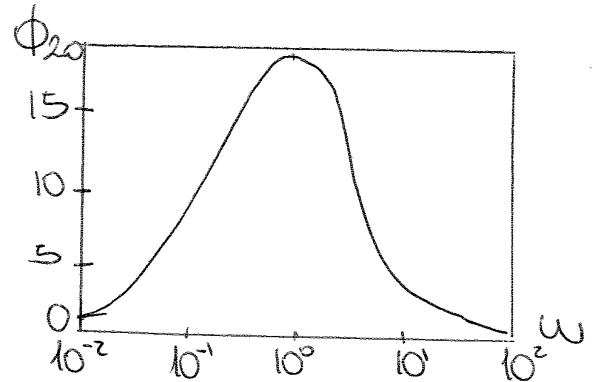
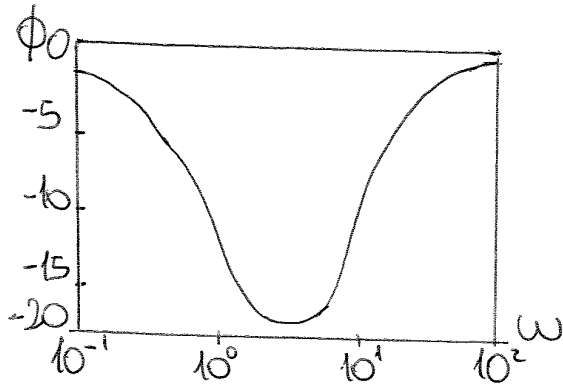
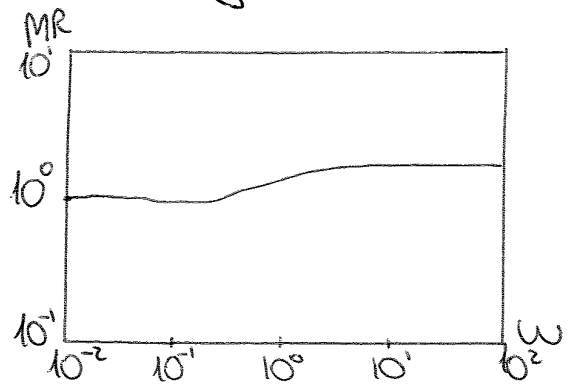
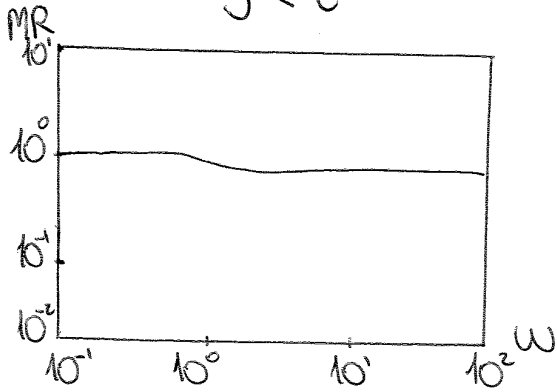
$$AR = \frac{|N(j\omega)|}{|D(j\omega)|} = \frac{\sqrt{K^2 + K^2\xi^2\omega^2}}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} = \frac{K\sqrt{1 + \xi^2\omega^2}}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}}$$

$$MR = \frac{AR}{K} = \frac{\sqrt{1 + \xi^2\omega^2}}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}}$$

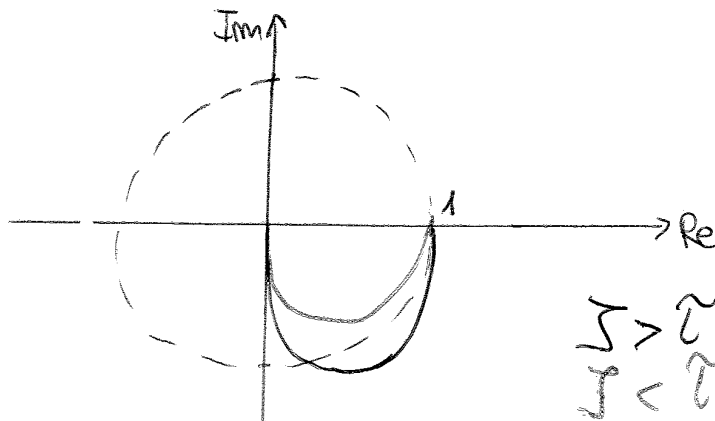
$\xi < \zeta$

BODE :

$\xi > \zeta$



NYQUIST :



- SISTEMA A RITARDO PURO :
 la funzione di trasferimento è :

$$G(s) = e^{-\alpha s}$$

$$G(j\omega) = e^{-\alpha j\omega} = |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)}$$

$$|G(j\omega)| = 1 \quad \rightarrow \quad AR = 1 \quad |e^{-\alpha j\omega}| = \sqrt{\cos^2(-\alpha\omega) + \sin^2(-\alpha\omega)} = 1$$

$$\angle G(j\omega) = -\alpha\omega \quad \arg(G) = \text{tg}^{-1} \left(\frac{\sin(-\alpha\omega)}{\cos(-\alpha\omega)} \right) = \text{tg}^{-1} \text{tg}(-\alpha\omega) = -\alpha\omega$$

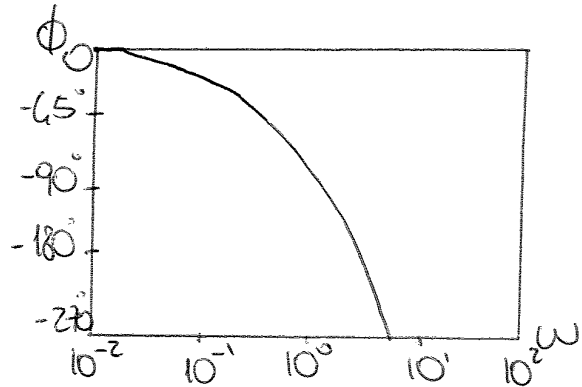
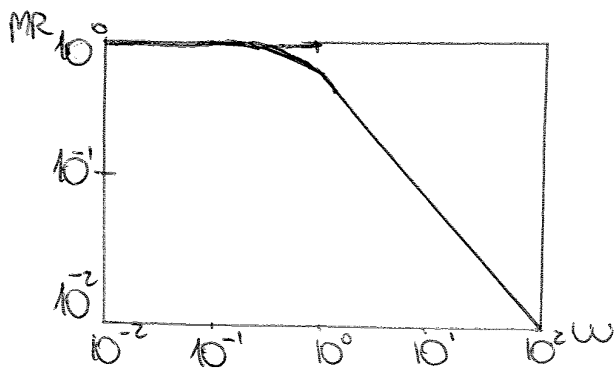
$$K=1 \rightarrow MR=1$$

(30)

Immagino lo sfasamento è diverso:

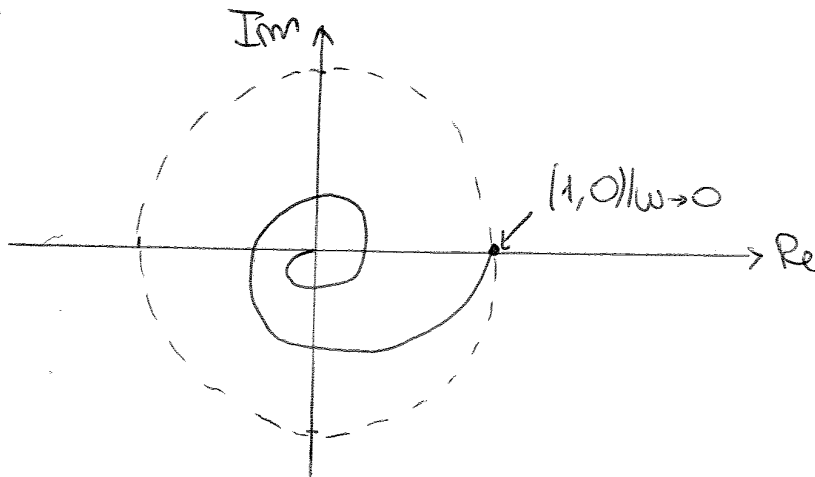
$$\angle G = \angle G^* + \underbrace{\angle e^{-2\omega}}_{=-2\omega}$$

non tende ad un valore asintotico, ma anche sempre $\rightarrow -\infty$.



BODE:

NYQUIST:



Aumentando ω , l'angolo cresce negativamente; la distanza dall'origine non rimane costante, ma anche essa decresce.

- SISTEMA DEL 2° ORDINE:

$$G(s) = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}$$

$$G(j\omega) = \frac{K}{\tau^2 j^2 \omega^2 + 2\zeta\tau j\omega + 1} = \frac{K}{(1 - \omega^2\tau^2) + j2\zeta\tau\omega}$$

$$N(j\omega) = K \rightarrow \text{Re}_N = K \quad \text{Im}_N = 0$$

$$D(j\omega) = (1 - \omega^2\tau^2) + j2\zeta\tau\omega \rightarrow \text{Re}_D = 1 - \omega^2\tau^2 \quad \text{Im}_D = 2\zeta\tau\omega$$

Rapporto di ampiezze :

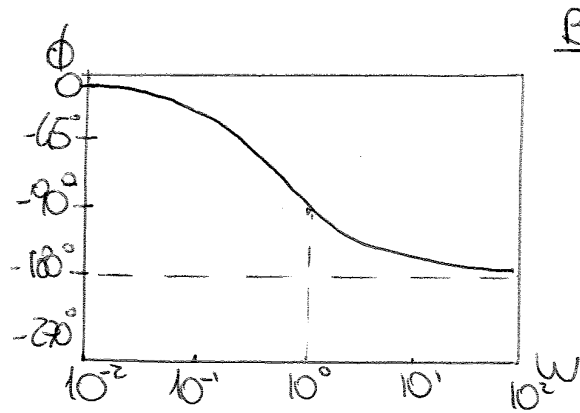
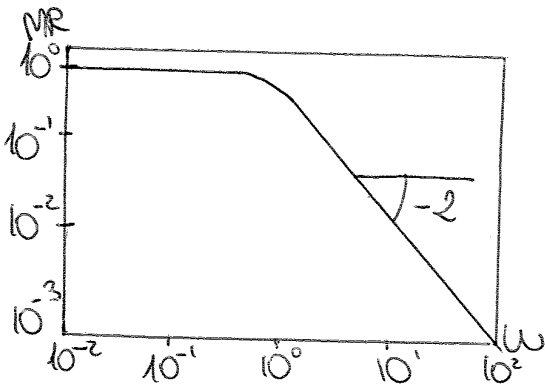
$$\omega \rightarrow 0 : MR = 1$$

$$\omega \rightarrow +\infty : MR = 0$$

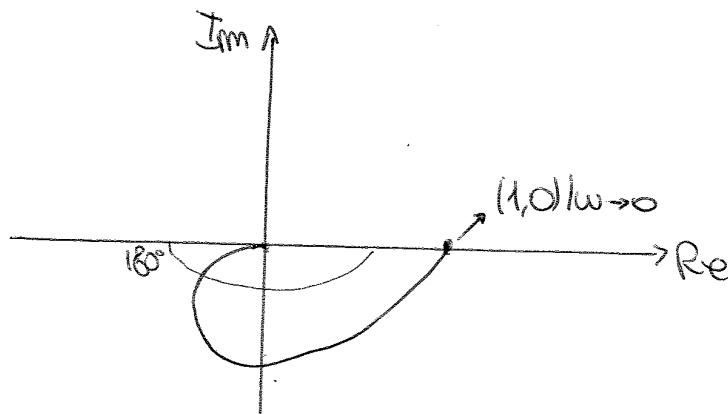
$\lg\left(\frac{AR}{K}\right)_{\omega \rightarrow 0} \approx \lg(1) \approx 0 \rightarrow$ andiamo a basse frequenze con una retta orizzontale

$$\lg\left(\frac{AR}{K}\right)_{\omega \rightarrow +\infty} \approx \lg\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \approx \lg(-\omega^2) = -2 \lg \omega$$

Uadi con una retta con pendenza -2. Rispetto ad un sistema del primo ordine qui cambia proprio il fatto che andiamo a 0 con una retta con questa pendenza.



NYQUIST:

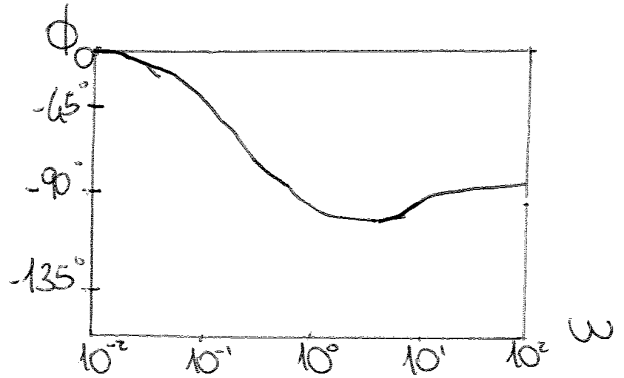
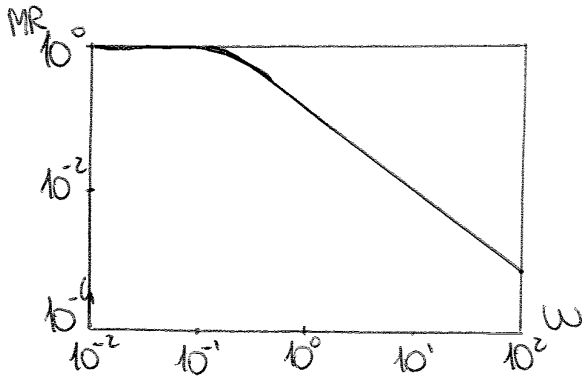


Al crescere di ω , ϕ diminuisce o aumenta negativamente fino a quando tenderà a -180° .
 la distanza dal centro diminuisce progressivamente.
 Debbo guardare l'angolo e cui uadi in modo tangente.

(2)

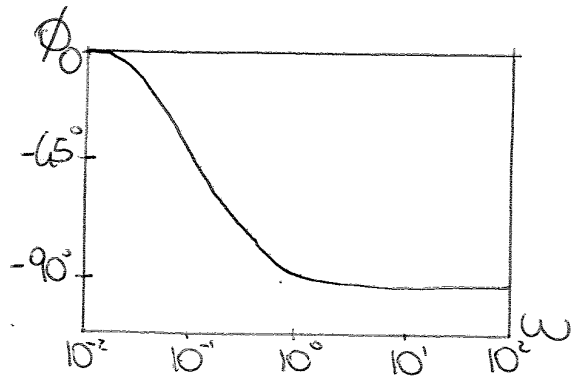
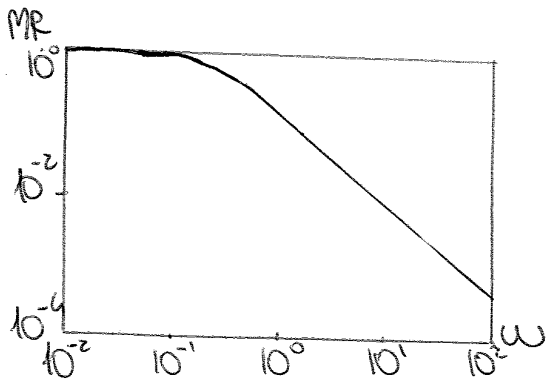
da un punto in frequenza di questo sistema viene con il valore di ξ . In particolare si possono distinguere 3 casi:

1) $\xi < \tau_1 < \tau_2$



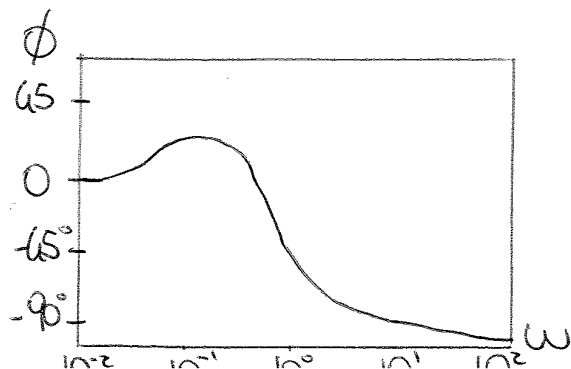
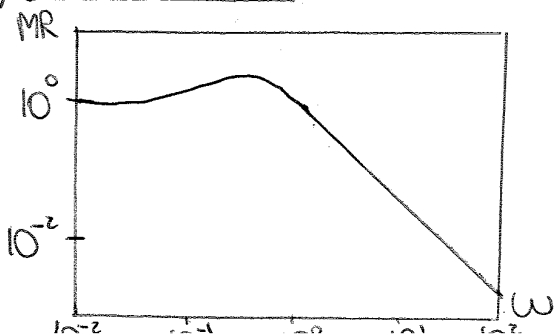
Il diagramma di MR è identico a quello del I° ordine perché la pendenza della retta è -1; nel diagramma di ϕ c'è un picco di minimo e ciò ci fa capire che è un sistema del II° ordine.

2) $\tau_1 < \xi < \tau_2$



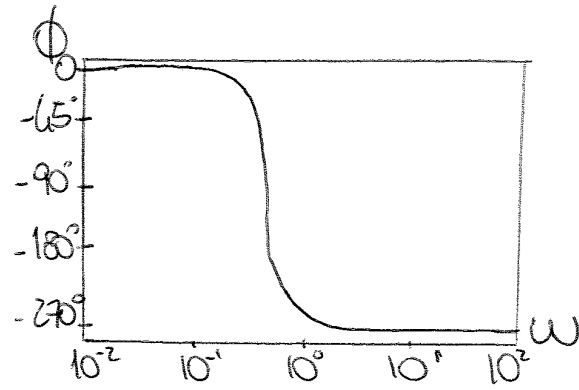
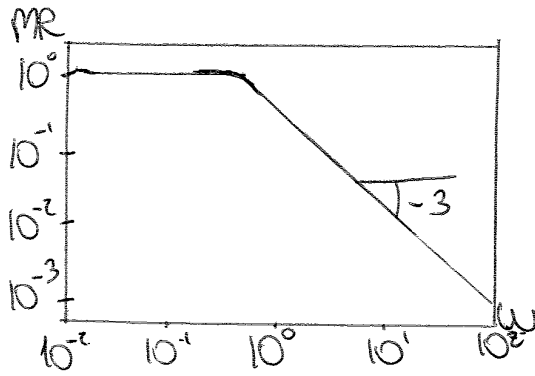
È identico a quello del primo ordine e, man essendoci differenze per distinguere, oltre per forza conoscere qual è la funz. di trasferimento che lo ha generato.

3) $\tau_1 < \tau_2 < \xi$

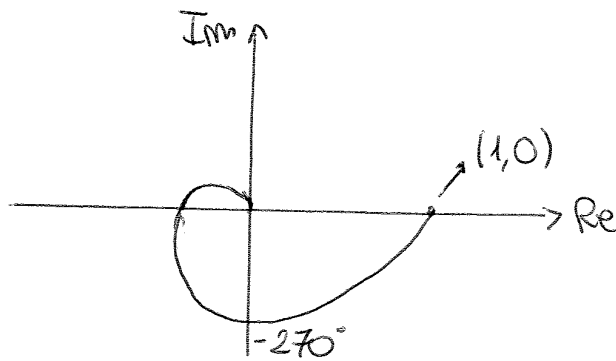


- SISTEMA DEL III ORDINE :

BODE :



NYQUIST:



Ad alte frequenze andro tangente a -270

per descrivere bene i dati sperimentali raccolti.

- In generale si possono usare 2 approcci per la derivazione di un modello empirico:

1) Regressione lineare (o non lineare) di dati sperimentali; il modello è un polinomio, la linearità non dipende dalle variabili di ingresso e di uscita.

2) Analisi della risposta del sistema a fronte di un disturbo a gradino sulle variabili di ingresso; il modello è in genere un'equaz. differenziale ordinaria del I° o del II° ordine.

- REGRESSIONE LINEARE PER UN MODELLO STAZIONARIO:

Si consideri un sistema che mostri una dipendenza lineare tra la variabile d'uscita y e quella di ingresso u . Il sistema reale è descritto dal seguente modello:

$$y = \beta_1 + \beta_2 u + \varepsilon$$

dove β_1 e β_2 sono i parametri del modello e ε è una variabile stocastica che definiamo errore.

Si vuole derivare un modello empirico che permetta di predire il comportamento dell'anzidetto sistema al variare di u :

$$\tilde{y} = \tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2 u$$

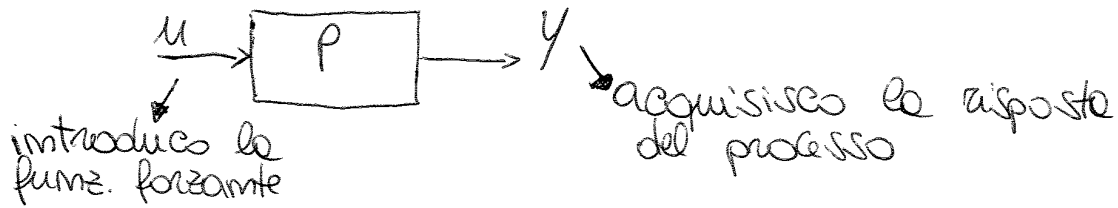
dove $\tilde{\beta}_1$ e $\tilde{\beta}_2$ sono le stime sperimentali dei parametri del processo (β_1 e β_2), mentre \tilde{y} è la predizione del modello.

Sia y_i la misura sperimentale di y : allora ciascuna misura soddisfa la seguente equazione:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 u_i + \varepsilon_i$$

da primo caso da verificare è che i dati cambino in maniera lineare:

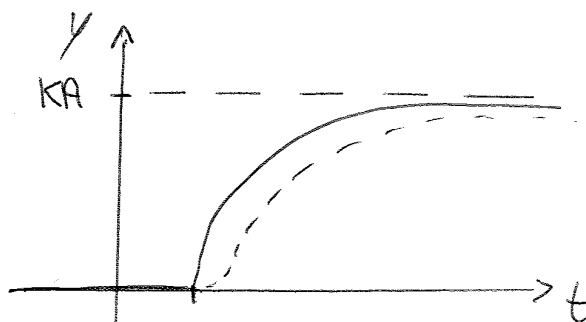
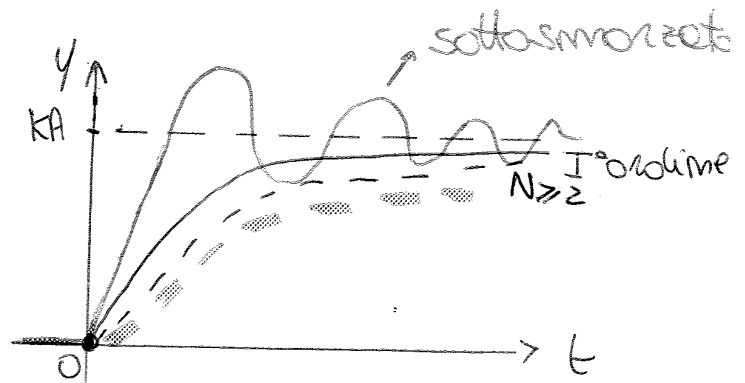
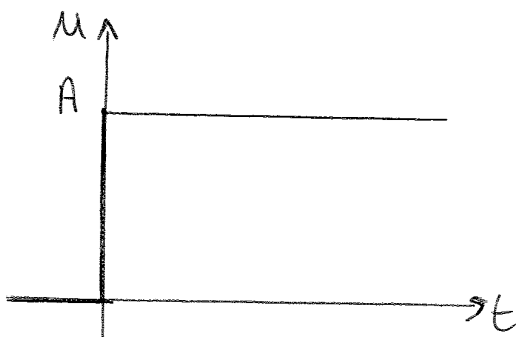
- REGRESSIONE CON FUNZIONE DI TRASFERIMENTO:
 Il comportamento dinamico di un sistema può essere approssimato con quello di un sistema lineare del I° o del II° ordine.



Con questo approccio faccio variare u in modo continuo introducendo la funz. forzante e poi vedo e studio la risposta del processo.

da dinamica ci fa capire di che ordine è il sistema e con esse sono in grado di definire l'equaz. del nostro processo.

In genere, i parametri del modello empirico (K, τ, ζ) sono ottenuti studiando la risposta del sistema a fronte di un disturbo e guardando sulle variabili di ingresso. Tale risposta è nota come curva di reazione del processo.

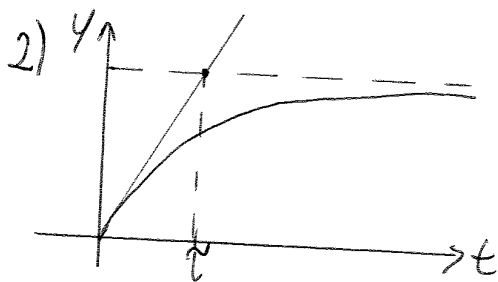
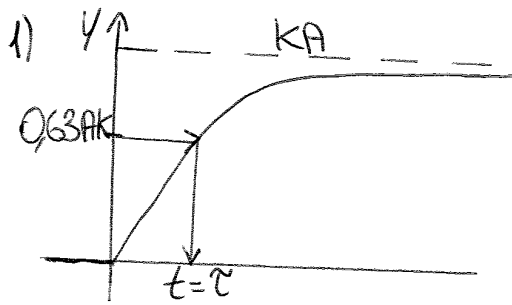


Ritardo del I° e II° ordine

KA: stazionario

- Il valore K lo valuto dal valore del nuovo stazionari
 e cui si porta il processo dopo la sollecitazione.

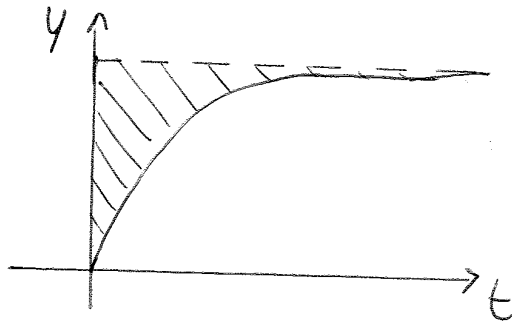
Per trovare τ ci sono 4 modi:



Traccio la tangente alla
 curva, la interseco con KA
 e il punto che trovo sarà
 τ .

3) Calcolo la derivata della curva al tempo 0 che è
 uguale a $\frac{AK}{\tau}$

4) Calcolo l'inerzia:



L'area è uguale
 all'inerzia

Per un sistema del I° ordine: $J = AK\tau$

Quest'ultimo metodo non si usa perché è complesso.

- In generale non usare un sistema del I° ordine
 puro perché il modello non riesce a catturare i
 parametri caratteristici K e τ .

3) Usando le formule di Sundaresam e KrishnaSwamy:

- Stimare il tempo t_1 e t_2 , che corrispondono al tempo al quale y raggiunge il 35,3% e l'85,3% del suo valore finale (K_A)

Le costanti di tempo α e τ sono:

$$\alpha = 1,3 t_1 - 0,29 t_2$$

$$\tau = 0,67 (t_2 - t_1)$$

Tali relazioni sono state ottenute minimizzando lo scarto quadratico tra la predizione della risposta e la sua misura per un elevato numero di processi.

- In generale una migliore approssimazione del processo è ottenibile utilizzando un modello del II° ordine:

$$G(s) = K, \tau, \zeta$$

$$G(s) = K, \tau, \zeta, \alpha$$

Il modello avrà la seguente forma:

$$Y = \frac{K e^{-\alpha s}}{\tau^2 s^2 + 2 \zeta \tau s + 1}$$

I parametri del modello sono determinati per via grafica utilizzando il metodo di Smith.

I parametri devono minimizzare le distanze tra la risposta di un modello ideale e quella del modello del II° ordine.

• Determinare t_{20} e t_{60} , ovvero il tempo al quale la risposta del sistema raggiunge il 20% e il 60% del suo valore finale (K_A);

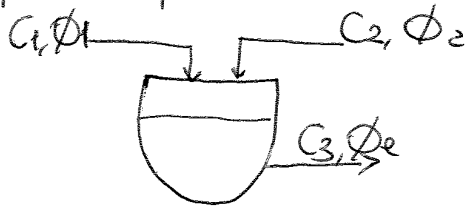
• Determinare il coefficiente di smorzamento ζ e il tempo caratteristico τ dal grafico di Smith; prima identifico i due tempi e ne calcolo il rapporto $\frac{t_{20}}{t_{60}}$.

● LEZIONE 14:

Sistemi di controllo in retroazione:

- INTRODUZIONE:

Si vuole gestire un miscelatore, garantendo che la composizione della corrente in uscita sia costante nel tempo e pari a:

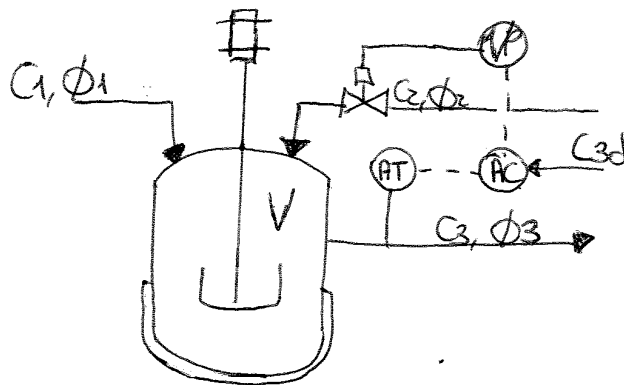


Posso svolgere 2 attività:

- 1) monitoraggio;
- 2) agire sul processo: prendo una delle variabili in ingresso e la modifico; lo scelgo in modo che la sua variazione influenzi la variabile in uscita.

- Progetto un sistema automatico che monitora la concentrazione in uscita e interviene in caso di scostamenti dal valore desiderato.

⇒ Controllare in retroazione la composizione della corrente in uscita da un serbatoio agitato.



AT: misura la composizione
 AC: controllo
 TP: trasduttore

L'obiettivo del sistema di controllo è mantenere la concentrazione in uscita ($y = C_3 - C_{3,s}$) al valore desiderato o di set-point ($y_d = C_{3d} - C_{3d,s}$). A questo scopo il controllore deve:

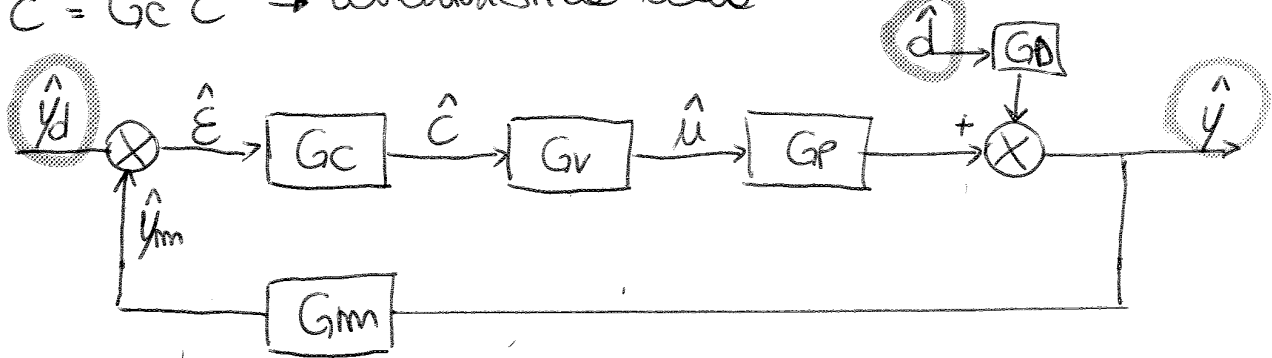
- 1) Misurare la concentrazione del liquido in uscita dal serbatoio ($y_m = C_{3m} - C_{3m,s}$);

- FUNZIONE DI TRASFERIMENTO A CICLO CHIUSO:
 Il mio generico processo è dato da un modello descritto come:

$$\hat{y} = G_p \hat{u} + G_d \hat{d}$$

$\hat{u} = G_v \hat{c}$ → attuatore: la legge descrive come cambia la variabile che voglio manipolare, \hat{u} :

$\hat{c} = G_c \hat{e}$ → caratteristica della dinamica del controllore



$\hat{y}_m = G_m \hat{y}$ → è il risultato dell'operazione di misura fatta dal misuratore

Input: \hat{y}_d, \hat{d}
Output: \hat{y}

- \hat{y}_d : in generale è una variabile, ma dipende se siamo davanti ad un problema di:
 - 1) asseveramento: le variabili rimangono al valore desiderato ma se cambia l'obiettivo del mio sistema di controllo devo cambiare le condizioni in ingresso.
 - 2) regolazione: devo modificare le variabili in ingresso perché c'è un contributo di tipo disturbo.

la relazione che descrive la dipendenza tra \hat{y} , \hat{y}_d e \hat{d} è:

$$\hat{y} = \underbrace{\psi_s}_{\text{regolazione}} \hat{d} + \underbrace{\psi_p}_{\text{asseveramento}} \hat{y}_d$$

ψ_s e ψ_p sono funzioni di trasferimento a ciclo chiuso (CLTF).

CC

$$= \frac{G_d}{1 + G_p G_v G_c G_m} \hat{d} + \frac{G_p G_v G_c}{1 + G_p G_v G_c G_m} \hat{y}_d$$

- L'espressione "G_c G_v G_c G_m" al denominatore è definita funzione ad anello aperto ed è il risultato del prodotto delle funz. di trasferimento dei blocchi interni all'anello di controllo.

Il prodotto si chiama "open loop, G_{OL}".

- Il numeratore di $\Psi_p (= G_p G_v G_c)$ è il risultato del prodotto delle funz. di trasferimento di quei blocchi che si trovano sul percorso diretto che misce \hat{y} e \hat{y}_d .

- Il numeratore di $\Psi_d (= G_d)$ è il risultato del prodotto delle funz. di trasferimento di quei blocchi che si trovano sul percorso diretto che misce \hat{y} e \hat{d} .

- Se interrompo il collegamento tra G_m e l'operatore \otimes , il modello è: $\hat{y}_m = G_{OL} \cdot \hat{y}_d$

In generale, l'espressione della funz. di trasferimento a ciclo chiuso è il risultato della seguente formula:

$$\Psi_p = \frac{\Pi_{y_d \rightarrow y}}{1 + G_{OL}}$$

$$\Psi_d = \frac{\Pi_{d \rightarrow y}}{1 + G_{OL}}$$

Questa regola vale sempre qualsiasi sia lo schema a blocchi di partenza.

- LEGGE DI CONTROLLO:

In generale, l'obiettivo di un controllore in retroazione è ridurre l'errore E a zero:

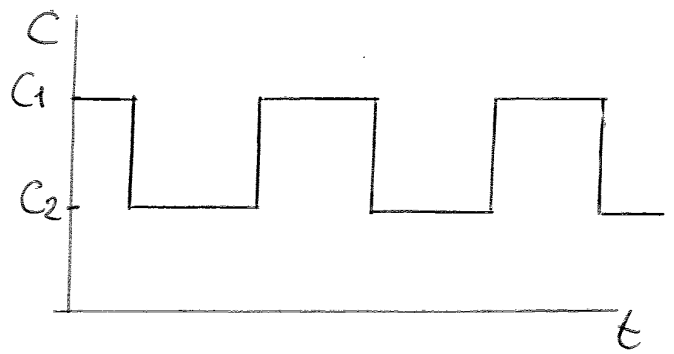
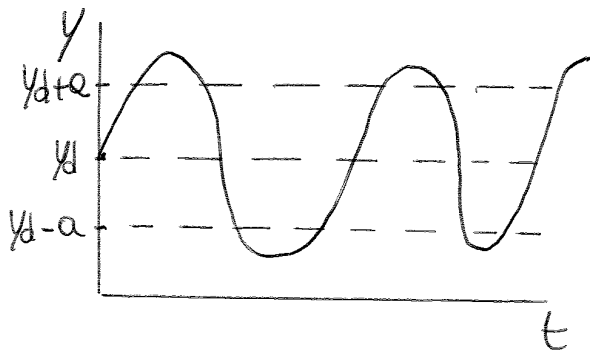
$$\hat{C} = G_c \cdot \hat{E} \quad \hat{E} = \hat{y}_d - \hat{y}_m$$

↓
legge di controllo

\hat{y}_d : valore desiderato (o set-point) per la variabile controllata
 \hat{y}_m : valore misurato per la variabile controllata

(41)

- Come cambia la temperatura nel tempo?



$C_1 = \text{off}$ $C_2 = \text{on}$

Se applico C_1 , la temperatura continua a crescere; ad esempio, se spengo i termosifoni, ci sarà ancora l'inerzia e quindi T aumenterà.

Se scendo sotto T_d , vuol dire che sono sotto i 20°C e devo riaccendere i termosifoni, ma non è così perché mantengo la vecchia azione correttiva dato che ϵ non è $> a$. Quando lo supero accendo i termosifoni, quindi T prima continua a decrescere e poi comincia a crescere; ciò avviene in maniera periodica nel tempo.

⇒ Il sistema controllato ha una propria inerzia, quindi dopo una variazione sulla variab. di ingresso, la variab. d'uscita tende dapprima ad allontanarsi dal valore desiderato e poi inverte il proprio cammino verso il proprio set-point. L'errore massimo raggiunto è detto overshoot.

La variab. d'uscita oscilla intorno al valore desiderato entro una banda che è sempre maggiore del margine di errore impostato, ma non lo raggiunge mai.

-Vantaggio: la logica di controllo è semplice e facile da applicare;

-Svantaggio: la variabile di uscita non si porta ad un modo valore stazionario, ma oscilla intorno al valore desiderato.

Le ampiezze delle oscillazioni sono sempre più grandi del gap perché ci sono i fattori d'inerzia.

(42)

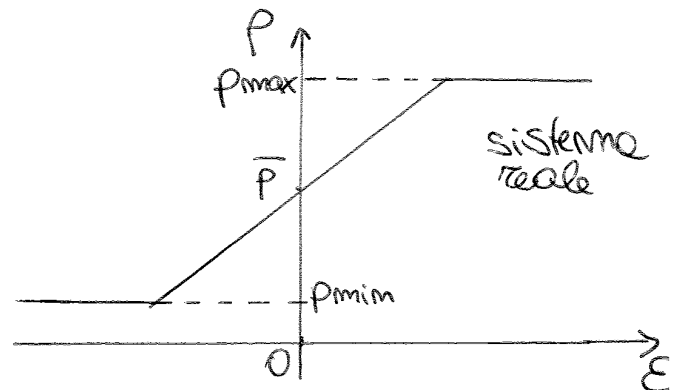
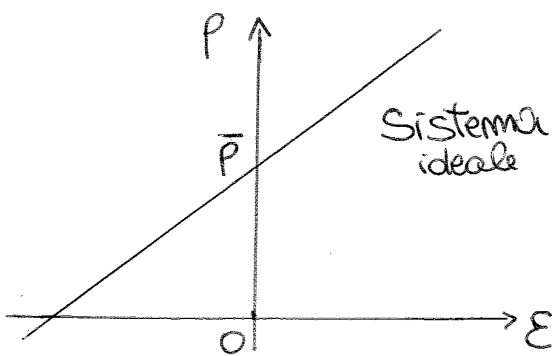
DA $C(t) = K_C \epsilon(t)$, VIE CERCA $C(t) =$

- K_C può essere modificata in modo da rendere la variazione dell'uscita del controllore (C) più sensibile a variazioni dell'errore.
- se $K_C > 0$, l'uscita del controllore aumenta con l'aumentare dell'errore
- se $K_C < 0$, l'azione correttiva sarà tanto più grande negativamente, quimoli più piccola.

• A fronte di una variazione, o un disturbo, sulle variabile di ingresso, il sistema si porta ad un nuovo stato stazionario diverso dal valore desiderato ($\epsilon \neq 0$ allo stazionario). La differenza tra il valore allo stazionario e quello desiderato è detto OFFSET.

• In un sistema reale lo stato di un attuatore, ad esempio il grado di apertura di una valvola, non può cambiare in modo indefinito.

Ne consegue che anche l'uscita del controllore deve variare entro un ben definito intervallo.



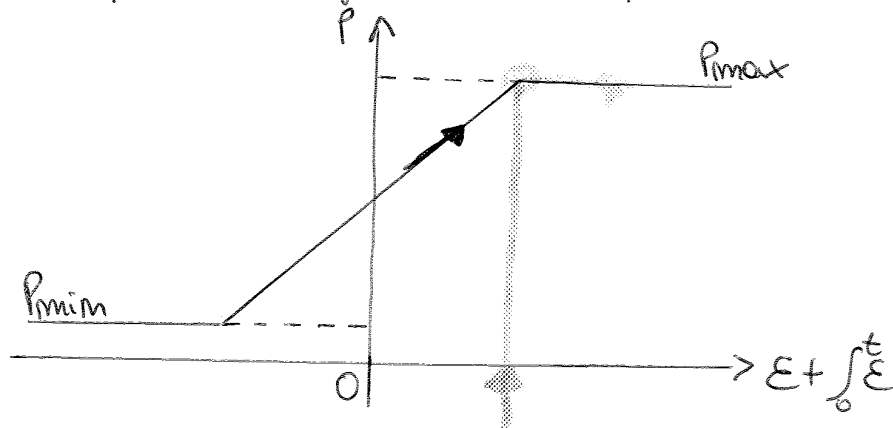
I valori di P_{max} e P_{min} sono dettati dal controllore d'uscita (non in variabili di stato) ha errore ^{non} nullo ed è sempre diverso da zero; in questo modo, se è zero vuol dire che c'è qualcosa che non va.

parto dall'errore massimo, poi lo diminuisco e piano piano aggiungo un termine e \int_0^t si sposta in avanti: ciò definisce l'intervallo di tempo entro cui calcolo l'integrale dell'errore $e^{-\lambda t}$.

→ l'azione correttiva diminuisce e \int_0^t sarà più piccolo.

- Nel punto X la temp. aumenta ancora un po', ma l'azione correttiva diminuisce; poi dopo la prima curva la temp. comincia a decrescere e l'importanza dell'integrale diminuisce.

4) Il termine integrale cresce con l'errore fino a raggiungere un valore di saturazione oltre il quale non cambia più; questo fenomeno è noto come reset windup o integral windup.



- tempo 0 : errore nullo

- tempo 0^+ : o c'è stato un disturbo o ho cambiato l'obiettivo → $E \neq 0$

- Se $E > 0$, incremento una nuova azione correttiva e mi muovo in questa direzione →

- Se E è grande e si prolunga per un tempo lungo, raggiungo il punto \bullet e mi allontano dal valore critico nel tempo spostandomi sull'asse delle ascisse.

- Anche se l'integrale dell'errore diminuisce, il controllore non è in grado di applicare un'azione correttiva fino a quando non sono sceso al di sotto del valore limite.

(lu)

3) L'antitipo dell'azione di controllo stabilizzato il processo controllato, tuttavia il controllore PD ideale non è realizzabile nella pratica poiché il segnale dell'errore è rumoroso.

- Per eliminare l'errore, la funz. di trasferimento è così modificata:

$$G_c = K_c \left(1 + \frac{1}{2\tau_D s + 1} \tau_D s \right) \quad 0,05 < \alpha < 0,2$$

$2\tau_D$ → tempo caratteristico della funz. del I° ordine correttiva



$$\hat{E}_{\text{mod}} = G_1 \hat{E}$$

per $\omega \rightarrow \infty$, $AR \rightarrow 0$ e vale ad eliminare le oscillazioni.

Tale modifica introduce un filtro (sistema del primo ordine) sul termine derivativo, che riduce la sensibilità dell'azione di controllo a un rumore ad alte frequenze sul segnale misurato.

Infatti, abbiamo visto che la risposta di un sistema del I° ordine a fronte di una variazione sinusoidale in ingresso è ancora una sinusoidale la cui ampiezza si riduce con la frequenza del segnale in ingresso.

• Nel controllore PID, proporzionale integrale derivativo, l'azione di controllo è così definita: $G_c = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s \right)$

$$p(t) = K_c \left(e(t) + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t e(t') dt' + \tau_D \frac{de}{dt} \right) + P_s$$

- VANTAGGI: - elimino l'offset (per l'azione integrale);
- ha un carattere predittivo

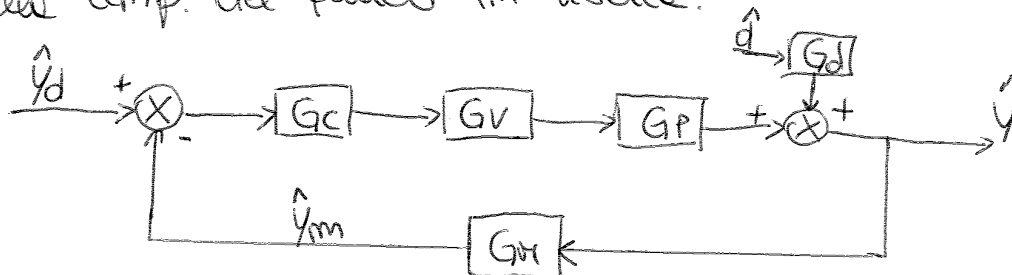
- SVANTAGGI: - se c'è un segnale troppo rumoroso lo filtra senza sfasare l'azione correttiva;
- la saturazione:

● LEZIONE 15 :

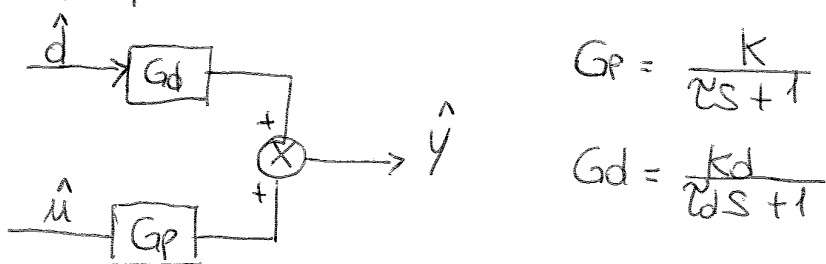
Dinamica di un processo controllato in retroazione

- DESCRIZIONE DEL PROCESSO :

Si consideri un serbatoio miscelato e riscaldato avente un sistema di controllo in retroazione per la regolazione della temp. del fluido in uscita.



Il modello matematico che descrive il comportamento del processo non controllato è:



$$G_p = \frac{K}{\tau_s s + 1}$$

$$G_d = \frac{k_d}{\tau_d s + 1}$$

$$\hat{y} = \psi_p \hat{y}_d + \psi_d \hat{d}$$

$$\psi = \frac{\tau_{in} \rightarrow out}{1 + \tau_{ex}}$$

$$\psi_p = \frac{G_c G_v G_p}{1 + G_c G_v G_p G_m}$$

$$\psi_d = \frac{G_d}{1 + G_c G_v G_p G_m}$$

Si assume che la dinamica dell'attuatore sia trascurabile e che la misura della temperatura (ottenuta per mezzo di una termocoppia) sia istantanea:

$$G_v = 1, G_m = 1$$

- SISTEMA I° ORDINE + P:

Si assume che il processo sia controllato con un controllore avente logica proporzionale:

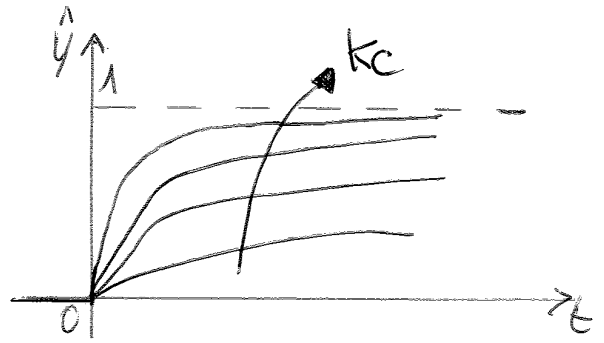
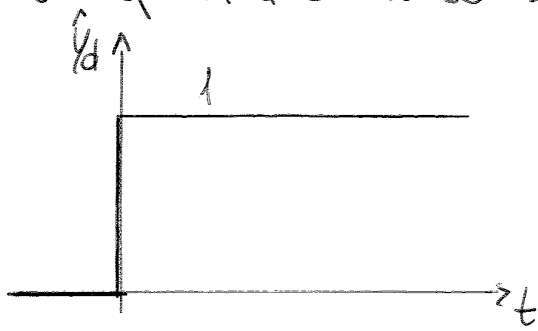
$$G_c = k_c$$

CASO 1: Problema di assestimento:

debbo intervenire perché ho cambiato l'obiettivo, quindi altro:

(16)

Se K_c aumenta, l'offset diminuisce e le curve si spostano verso l'alto:



CASO 2: Problema di regolazione:

Intendiamo perché c'è stato un disturbo all'ingresso, ma non cambia l'obiettivo:

$\hat{y}_d = 0 \rightarrow$ perché \hat{y}_d è una variabile di scarto e ha lo stesso valore allo stazionario

$\hat{d} \rightarrow$ funzione forzante

$$\hat{y} = \psi_d \hat{d}$$

$$\begin{aligned} K_d &= K \\ \tau_d &= \tau \end{aligned}$$

$$\hat{y} = \psi_d \hat{d} = \frac{G_d}{1 + G_c G_P} \cdot \frac{1}{s} = \frac{\frac{K}{\tau s + 1}}{1 + \frac{K K_c}{\tau s + 1}} \cdot \frac{1}{s} =$$

$$= \frac{K}{\tau s + 1 + K K_c} \cdot \frac{1}{s} = \frac{\frac{K}{1 + K K_c}}{\frac{\tau}{1 + K K_c} s + 1} \cdot \frac{1}{s} =$$

$$= \frac{K^*}{\tau^* s + 1} \cdot \frac{1}{s}$$

$$y(t) = K^* (1 - e^{-t/\tau^*})$$

- le caratteristiche delle risposte sono:

1) Valore allo stazionario, $y|_{t \rightarrow +\infty} = K^* = \frac{K}{1 + K K_c}$

2) Il sistema si riporta al nuovo stato stazionario (con un andamento esponenziale) che non corrisponde al valore desiderato:

$$K^* = \frac{K}{1 + K K_c} \neq 0$$

quindi l'offset è:

$$\text{offset} = y_d - y(t)|_{t \rightarrow +\infty} = 0 - \frac{K}{1 + K K_c} = - \frac{K}{1 + K K_c}$$

(17)

$$Y = \frac{K K_c (\tau_I s + 1)}{\tau_I \tau s^2 + (K K_c + 1) \tau_I s + K K_c} \cdot \frac{1}{s}$$

• OSSERVAZIONI :

- Se il controllore ha logica PI, la funz. di trasferimento e ciclo chiuso ha uno zero e 2 poli;
- Se il controllore ha logica P, la funzione non ha zeri e ha un solo polo;
- Si evince che l'effetto del controllore P è solo quello di modificare i parametri caratteristici del processo. L'effetto di un controllore PI, invece, è quello di aggiungere un polo e uno zero alla funz. di transf. che descrive la dinamica del processo, l'effetto è cioè modificare l'ordine del processo che è diventato di 2° ordine e di conseguenza la natura del sistema.

- Siamo $p_0 (=0)$, p_1 e p_2 le radici del denominatore, allora si ha che:

$$Y = \frac{K K_c (\tau_I s + 1)}{\tau \tau_I (s - p_1)(s - p_2)} \cdot \frac{1}{(s - 0)}$$

la risposta nel dominio del tempo è:

$$Y = A_0 + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

- Caratteristiche delle risposte:

- 1) Il sistema è del II° ordine, quindi la risposta del sistema potrebbe esibire un overshoot;
- 2) Se i due poli (p_1 e p_2) sono reali e negativi, il sistema si porta ad un nuovo stato stazionario in modo esponenziale;
- 3) Se i due poli (p_1 e p_2) sono complessi e coniugati, con parte reale negativa, la risposta è quella di un sistema del II° ordine sottosmorzato;
- 4) Se almeno uno delle due radici ha parte reale positiva, la risposta del sistema cresce indefinitamente