NUMERO: 1907A - ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Gaeta Alberto

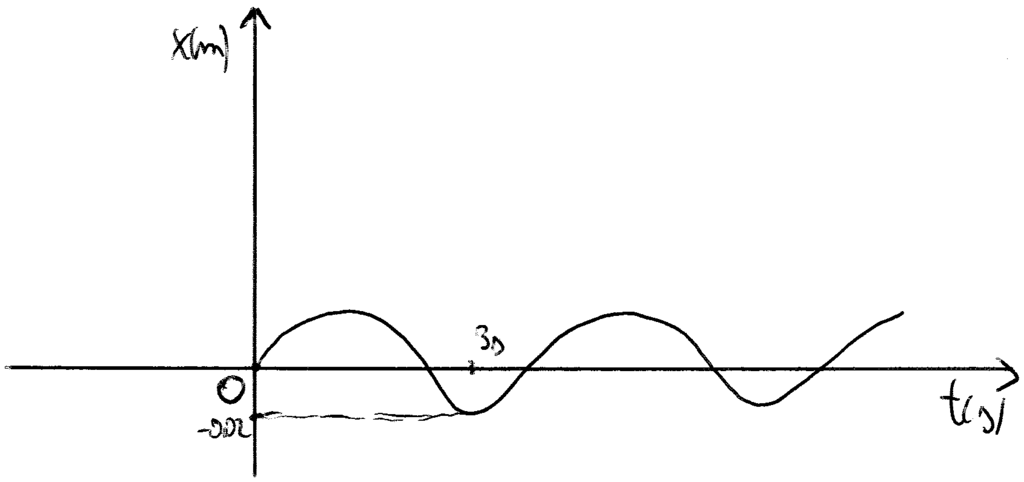
MATERIA: Meccanica delle Macchine - prof. Quaglia

MECCANICA DELLE MACCHINE

- ~~Cinematica~~

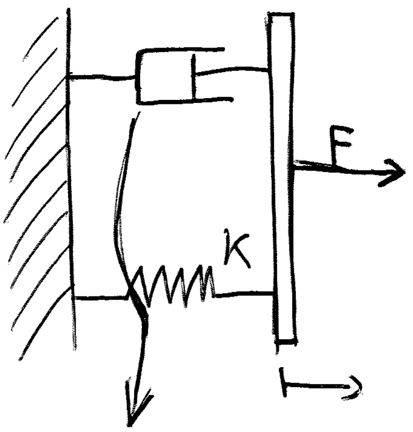
- **SISTEMA INTERNAZIONALE DELLE UNITÀ DI MISURA**

-



$$X = \underbrace{\{x\}}_{\text{VALORE NUMERICO}} [x] = 1 - 0{,}02\,m$$

-



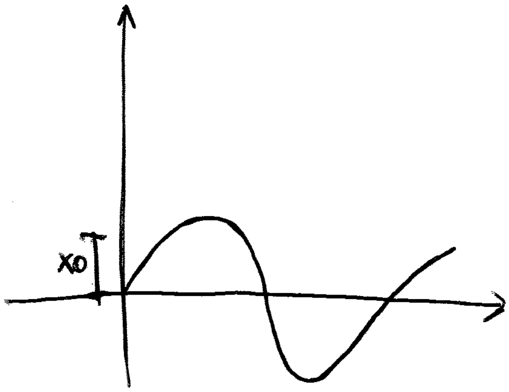
Ammortizzatore (smorza le oscillazioni)

SCHEMI FUNZIONALI

Sistemi semplificati che permettono di capire come può funzionare un elemento meccanico

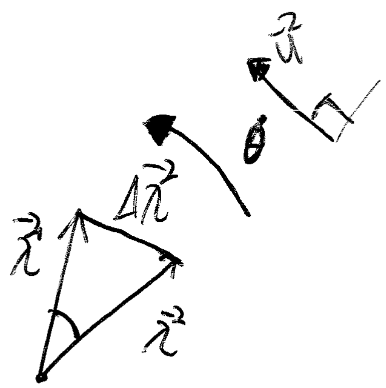
- $x = x_0 \sin(wt)$

$[w] = rad/s$



• DERIVATA DI UN VERSORE

– QUALITATIVA



$\alpha = \dot\theta \cdot \Delta t$

1 (perché è un versore)

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{|\vec r| \cdot (\dot\theta \cdot \cancel{\Delta t}) \cdot \vec u}{\cancel{\Delta t}} = \boxed{\dot\theta \cdot \vec u}$$

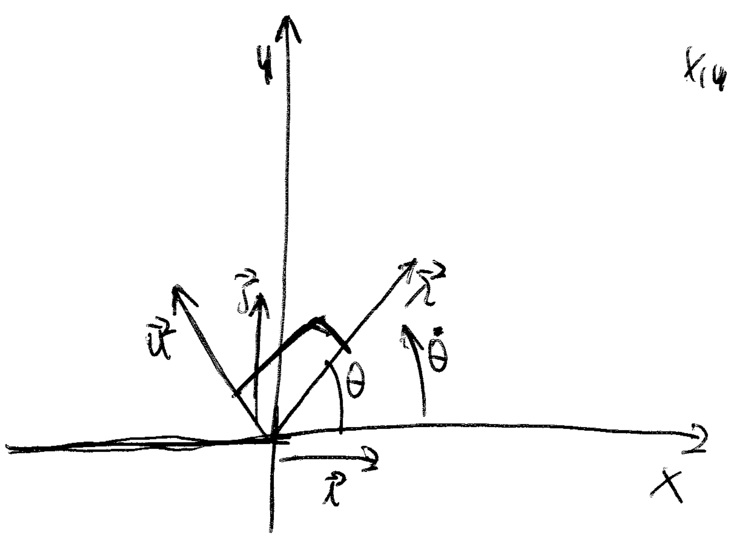
Versore ortogonale a r

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \boxed{\dot\theta \cdot \vec u}$$

DERIVATA DI UN VERSORE

– ANALITICA

x, y SISTEMA FISSO

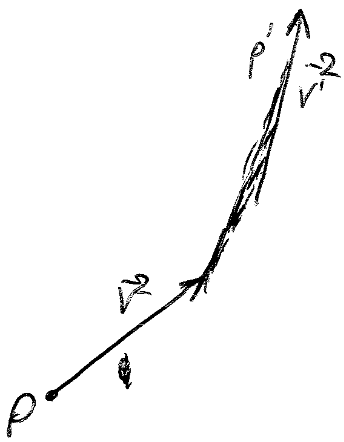


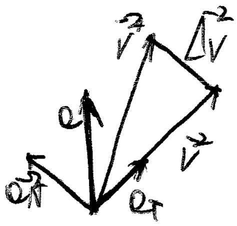
$\vec r = \cos\theta\, \vec i + \sin\theta\, \vec j$

$$\frac{d\vec r}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos\theta) \cdot \vec i + \frac{d}{dt}(\sin\theta)\, \vec j$$

$\Rightarrow$ Le velocità sono sempre tangenti alla traiettoria dei punti 7

• Accelerazione



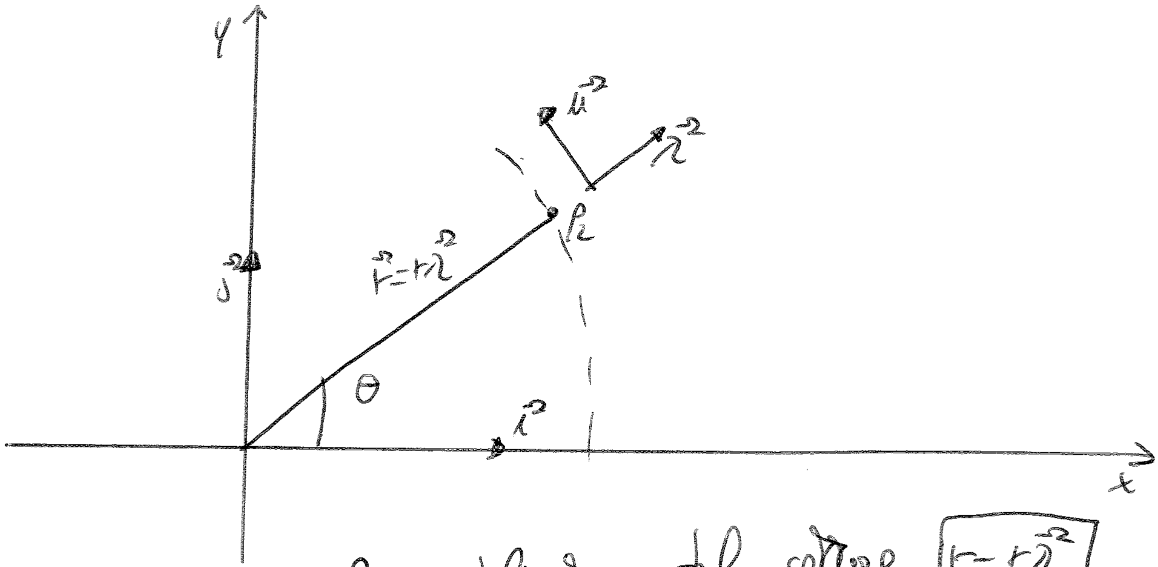


$$\boxed{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \boxed{\frac{d\vec{v}}{dt}} \rightarrow \text{ACCELERAZIONE}$$

La componente normale $\vec{a_N}$ esiste se e solo se la traiettoria è curva $\rightarrow$ accelerazione centripeta (effetto centrifugo)

Il vettore accelerazione giace sempre nel semipiano dove è contenuta la traiettoria

CINEMATICA DEL PUNTO IN COORDINATE POLARI

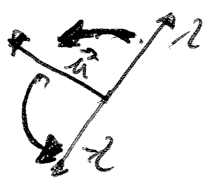


La posizione di P è definita dal vettore $\boxed{r = r\vec{\lambda}}$
la legge del moto di P nel piano x,y può essere definita dalle 2 funzioni $\begin{cases} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases}$

I versori $\vec{\lambda}$ e $\vec{\mu}$ sono mobili, cioè ruotano nel piano alla velocità angolare $\dot{\theta}$, per cui le loro derivate nel tempo sono

$\frac{d\lambda}{dt} = \theta \cdot \vec{\mu}$ $\quad \frac{d\vec{\mu}}{dt} = -\dot{\theta}\vec{\lambda}$ (Il meno è dovuto al fatto che, facendo la derivata di un versore, si muove in senso antiorario, quindi otteniamo $-\lambda$)

↳



POS: $\boxed{r = r\vec{\lambda}}$

VEL: $v = dr/dt$

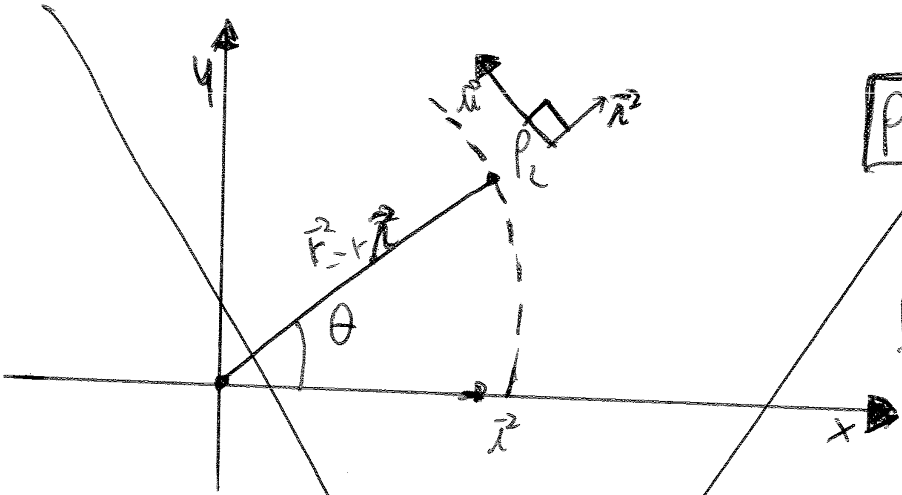
$$v = \dot{r}\lambda + r \cdot \frac{d\lambda}{dt} \Rightarrow \boxed{v = \underbrace{\dot{r}\vec{\lambda}}_{\text{COMPONENTE RADIALE}} + \underbrace{r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{\mu}}_{\text{COMPONENTE TANGENZIALE}}}$$

($\dot{\theta} > 0$ VERSO ANTIORARIO; $\dot{\theta} < 0$ VERSO ORARIO)

ACC:
$$a = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\vec{\lambda} + \dot{r} \cdot \dot{\theta}\vec{\mu} + \dot{r} \cdot \dot{\theta}\vec{\mu} + r \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{\mu} - r \cdot \dot{\theta}^2 \vec{\lambda}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = (\ddot{r} - \underbrace{r \cdot \dot{\theta}^2}_{\text{ACC. CENTRIPETA}})\vec{\lambda} + (\underbrace{2\dot{r}\dot{\theta}}_{\text{ACC. CORIOLIS}} + r \cdot \ddot{\theta})\vec{\mu}} = \underbrace{a_\lambda \vec{\lambda}}_{\text{COMPONENTE RADIALE}} + \underbrace{a_\mu \vec{\mu}}_{\text{COMPONENTE TANGENZIALE}}$$

• Cinematica del punto in COORD. POLARI



$\boxed{P(r,\theta)}$

La posizione di P è definita dal vettore $\boxed{\vec{r} = r\vec{\lambda}}$.

La legge del moto di P nel piano x,y può essere definita dalle 2 funzioni $\boxed{r = r(t),\ \theta = \theta(t)}$

POS $\boxed{\vec{r} = r\vec{\lambda}}$

DERIVATA DI UN VERSORE

VEL. $\vec{v} = \dot{r}\vec{\lambda} + r\cdot\frac{d\vec{\lambda}}{dt} = \boxed{\dot{r}\vec{\lambda} + r\cdot\dot{\theta}\cdot\vec{\mu}}$

$\dot{\theta} > 0 \Rightarrow$ SENSO ANTIORARIO

$\dot{\theta} < 0 \Rightarrow$ SENSO ORARIO

COMPONENTE RADIALE

COMPONENTE TANGENZIALE

versore ortogonale

ACC. $a = \ddot{r}\vec{\lambda} + 2\dot{r}\cdot\dot{\theta}\cdot\vec{\mu} + r\ddot{\theta}\vec{\mu} - r\dot{\theta}^2\vec{\lambda}$

$\Rightarrow \boxed{a = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{\lambda} + (2\dot{r}\dot{\theta}\cdot\vec{\mu} + r\cdot\ddot{\theta})\vec{\mu}}$

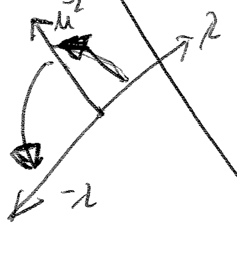
COMPONENTE RADIALE

COMPONENTE TANGENZIALE

a CENTRIPETA

accelerazione di Coriolis

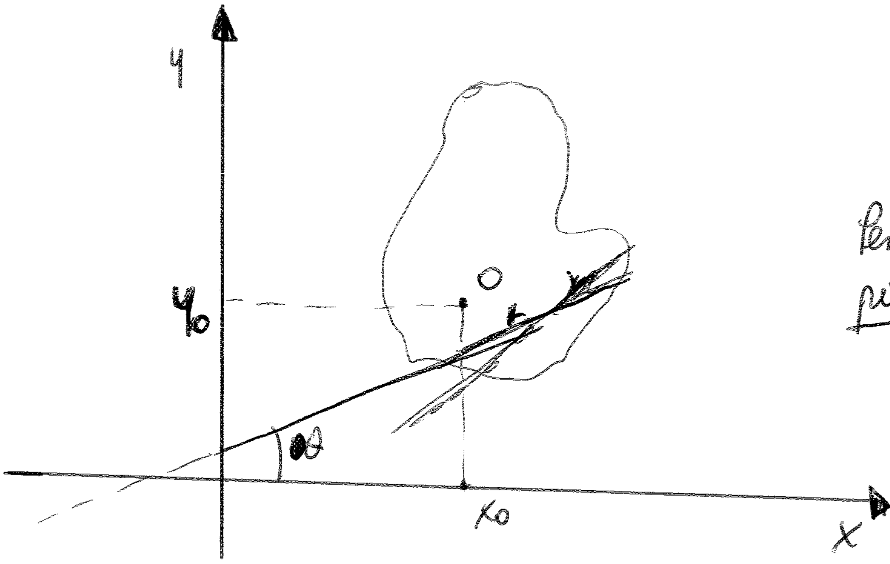
Il meno è dovuto al fatto che, facendo la derivata di un versore, si procede in senso antiorario, quindi otteniamo $-\lambda$



Posizione

Corpo rigido (PIANO)

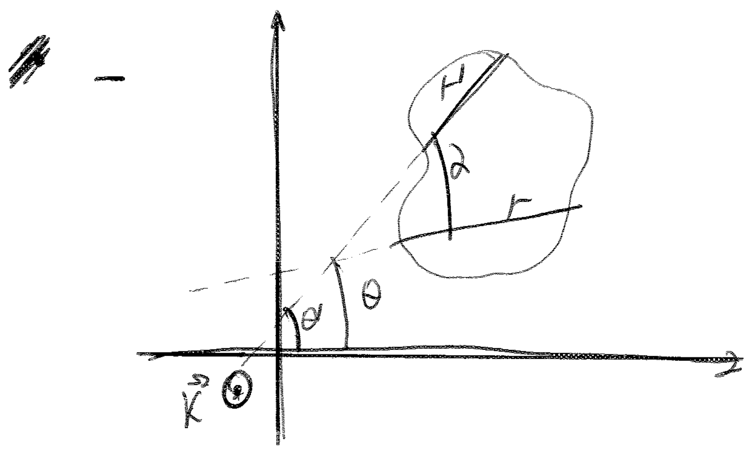
Per individuare la posizione del corpo nel piano occorrono 3 coordinate:



~~Coordinate x_0, y_0, θ~~

x_0, y_0: ~~Coordinate di un punto qualsiasi~~

θ: Angolo formato tra una retta orientata r, solidale al corpo, ed un asse fisso di riferimento. È detta coordinata angolare



$\theta' = \theta + \alpha \rightarrow \alpha$ è costante

$\downarrow d/dt$

$$\frac{d\theta'}{dt} = \frac{d\theta}{dt} + 0 = \boxed{w}$$

$\downarrow$

È una proprietà assoluta del corpo

La coordinata angolare θ dipende dalla retta di riferimento scelta, ma ciò non vale per le sue derivate nel tempo. $(\vec{w} = w\vec{k})$

Se consideriamo la retta orientata r', solidale col corpo, essa forma l'angolo $\theta' = \theta + \alpha$ con l'asse orizzontale

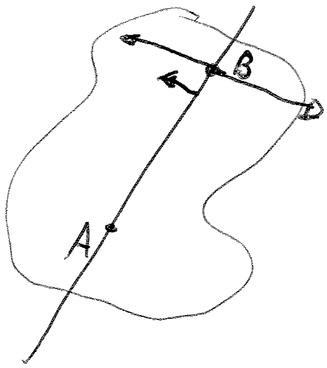
$$\Rightarrow \theta' = \theta + \underbrace{\alpha}_{\alpha = cost} \neq \theta \Rightarrow \frac{d\theta'}{dt} = \frac{d\theta}{dt} = w \Rightarrow \frac{d^2\theta'}{dt^2} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \dot{w}$$

$\Rightarrow$ La velocità angolare w e l'acc. angolare $\alpha(\dot{w})$ sono le stesse per qualunque retta di riferimento appartenente al corpo. $\Rightarrow$ In un dato istante, tutti gli elementi (come le linee r) di un corpo rigido in movimento hanno la stessa w e la stessa α

$\Rightarrow$ w e α sono proprietà assolute del corpo

$\boxed{\vec{V_B} = \vec{V_A} + \vec{V_{B/A}}}$ → FORMULA FONDAMENTALE DELLA CINEMATICA

Velocità di B intorno ad A (la velocità che avrebbe B se A fosse fermo)



$V_{B/A}$
- → MODULO ⇒ $\boxed{s \cdot \dot\theta = s \cdot w}$
- → DIREZIONE ⇒ $// \vec{u}$ ($\perp \vec{\lambda}$, $\boxed{\perp \vec{AB}}$)
- → VERSO ⇒ $\boxed{\text{Dipende da } \dot\theta}$

Nel sistema di corpi rigidi di mine

$V_A = \cancel{V_{A_0}} + V_{A/A_0}$

↳ modulo → $w \cdot l$

Dir. → $\perp \overline{A\text{-}A_0}$

Verso → antiorario

• $\boxed{\text{ACC}}$

d/dt ⇒ $a_B = a_A + i\ddot\theta \vec{AB} + \cancel{i\dot\theta \cdot 0} + i\dot\theta(i\dot\theta \vec{AB}) =$

$a_A + i\ddot\theta \vec{AB} - \dot\theta^2 \cdot \vec{AB}$

⇒ $\boxed{\vec{a_B} = \vec{a_A} + a_{B/A_T} + a_{B/A_N}}$ → TEOREMA DI RIVALS

a_{B/A_T} → COMPONENTE TANGENZIALE DELL'ACC. DI B INTORNO AD A

a_{B/A_N} → COMPONENTE NORMALE DELL'ACC. DI B INTORNO AD A

MODULI → $\boxed{a_{B/A_T}} = |\ddot\theta \cdot \vec{AB}| = \boxed{\ddot\theta \, s} = \dot w \, s$

$\boxed{a_{B/A_N}} = \dot\theta^2 \cdot \vec{AB} = \boxed{\dot\theta^2 \, s}$

→ Nel sistema di mine → $a_A = \cancel{a_{A_0}} + a_{A/A_T} + a_{A/A_{0N}}$

a_{A/A_T}: $\perp \vec{AB}$ → $\dot w \cdot \overline{A\text{-}A_0}$

$a_{A/A_{0N}}$: $// \vec{AB}$ → $w^2 \cdot l$

• CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE

∃ sempre un punto C | $\boxed{v_C = 0}$

(*)

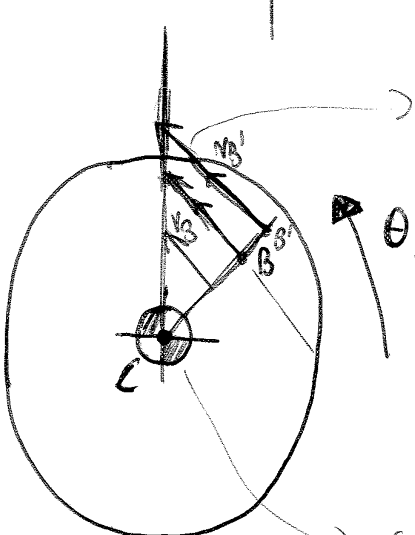
$\vec{v}_B = \underbrace{\vec{v}_C}_{=0} + v_{B/C}$

modulo → $D \cdot w \equiv \overline{BC} \cdot \dot{\theta}$

direzione $\perp \overline{BC}$, $/\!/ \vec{u}$

Come si individua il C.I.R.?
PAG 14

es:



→ Il modulo della velocità di B dipende dalla distanza da C

$\theta, \dot{\theta}$ (come $\odot \vec{w}$)

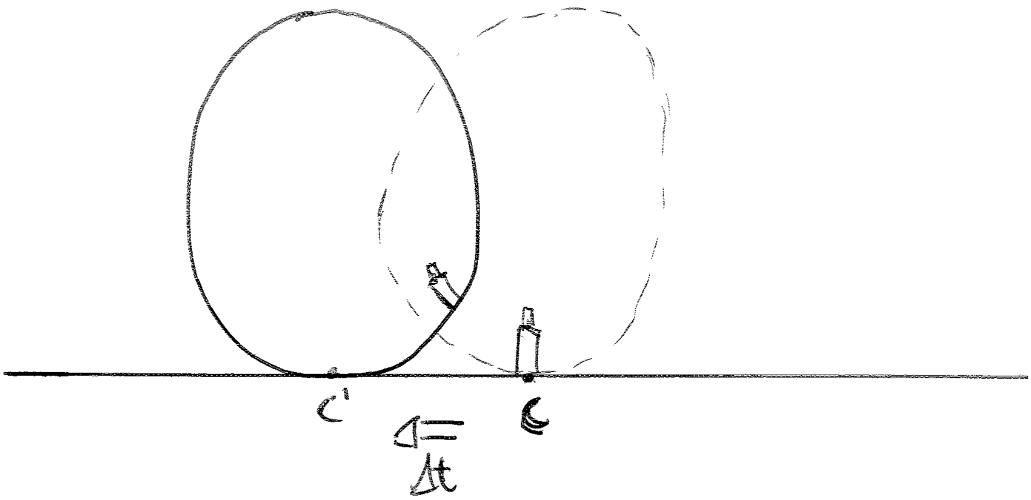
→ CERNIERA

$\dot{\theta} > 0$ ⇒ ROT. ANTIORARIA

$\dot{\theta}$ ($\otimes \vec{w}$)

$\dot{\theta} > 0$ ⇒ ORARIA

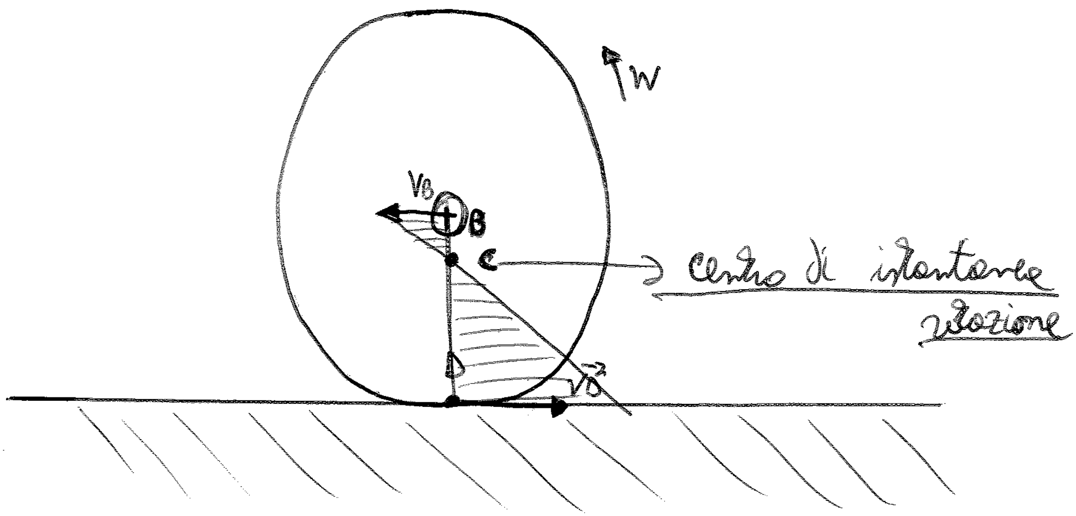
(*) Dato un corpo rigido animato da un moto piano generico, in ogni istante esiste un punto C del corpo in cui la velocità è nulla. Pertanto ogni punto del corpo può essere considerato rotante attorno a C ad una vel. angolare w. Il punto C è detto centro di istantanea rotazione



Il centro di istantanea rotazione è istantaneamente fermo, ma si muove nel tempo ($v=0$, $a \neq 0$)

Pertanto il C.i.r non può essere considerato il centro delle accelerazioni.

•

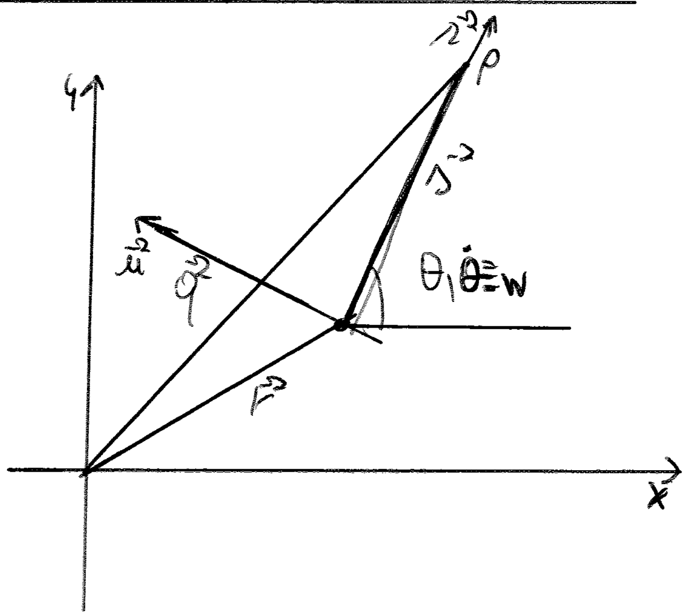


IPOTESI

- $\vec{V_B}$ // TERRENO
  $\neq 0$
- NO ADERENZA $\Rightarrow$ $V_D \neq 0$

• 1.4) CINEMATICA DEI MOTI RELATIVI

20



~~$\vec{i}, \vec{j}$~~ versori sist. di rif. fisso

$\vec{\lambda}, \vec{\mu}$ versori sist. di rif. mobile

- Sia dato un sist. di riferimento Axy.
Per un punto generico P giacente sul piano del moto può essere definita la sua posizione assoluta $\vec{r_P}$, rispetto al sistema fisso, e la sua posizione relativa $r = r\vec{\lambda}$ rispetto al sistema mobile.
Il moto del sistema mobile è definito da velocità ed accelerazione dell'origine A ($\vec{v_A}$ e $\vec{a_A}$) e dalla velocità angolare w_t e ~~da~~ dall'acc. angolare $\dot{w}_t$. ~~, versore dei versori $\vec{\lambda}$ e $\vec{\mu}$ ed esso solidali~~

POS: $\boxed{\vec{q}} = \boxed{\vec{r} + \vec{s}} = \boxed{\vec{r} + s\vec{\lambda}}$

$V_{rP} \Rightarrow$ VELOCITÀ RELATIVA DI P

VEL: $\boxed{\vec{v_P} = \vec{v_A} + s w \cdot \vec{\mu} + \dot{s}\vec{\lambda}} \Rightarrow \boxed{\vec{v_P} = \vec{v_t} + \vec{v_r}}$

VEL. ASSOLUTA DI P

VEL. DI TRASCINAMENTO v_t $\rightarrow$ Se P non fa un moto relativo rispetto al sistema di rif. mobile, allora si muove solo grazie al trascinamento

STATICA E DINAMICA

- Richiami ($\vec{F}$, $\vec{M}$, $\vec{R}$, ...)
- Esempi
- 3 Leggi Newton
- STATICA, DINAMICA (DIAGRAMMA CORPO LIBERO)

• Richiami

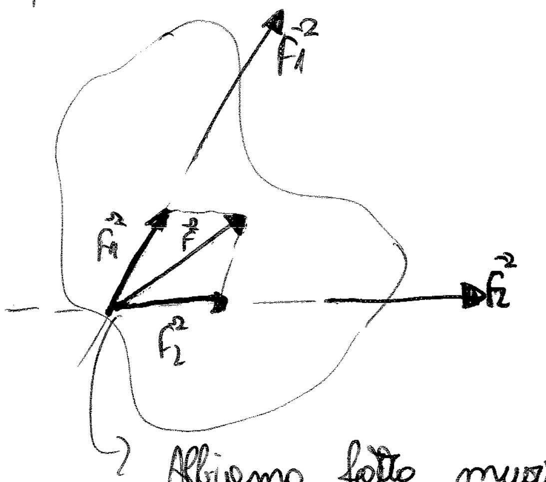
FORZE → Grandezze vettoriali →
- Modulo
- Direzione
- Verso
- Punto di applicazione

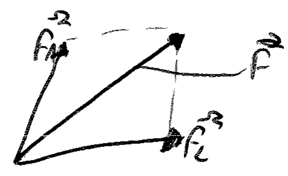
Si definisce forza l'azione di un corpo su un altro corpo.

Le forze sono un vettore mobile

- Operazioni sulle forze

COMPOSIZIONE

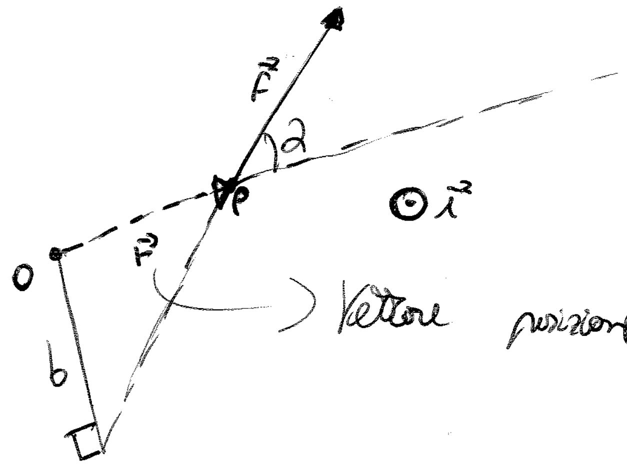




Abbiamo fatto muovere le forze lungo le loro rette d'azione, in modo da capire la retta d'azione anche della risultante.

- MOMENTO DI UNA FORZA (RISPETTO AD UN PUNTO O)

L'applicazione di una forza ad un corpo rigido, oltre che tendere a spostarlo nella direzione della forza stessa, può tendere a farlo ruotare.



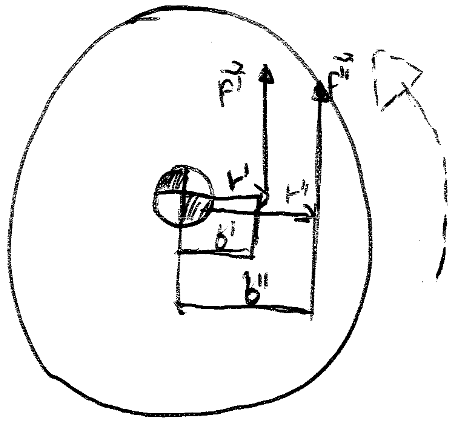
Si definisce momento di una forza

$$\boxed{\vec{M}} = \boxed{\vec{r}\times\vec{F}} = \boxed{\underbrace{r \cdot F \cdot \sin\alpha}_{r \sin\alpha = b} \, \vec{k}} = \boxed{M\vec{k}}$$

$\vec{k}$ versore perpendicolare al foglio di verso uscente

$r \sin\alpha = b$ → BRACCIO DELLA FORZA

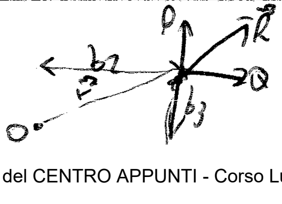
es:



Il verso si determina con la regola della mano destra

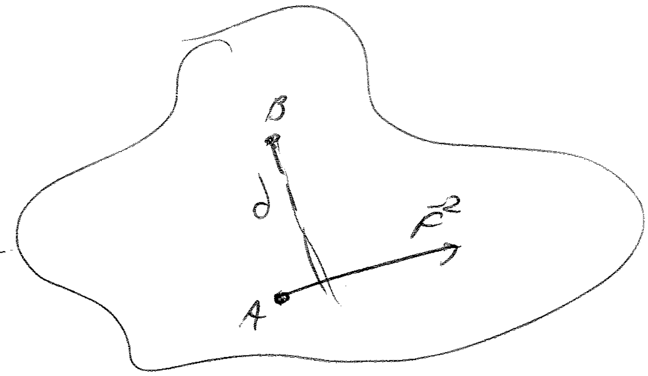
- Teorema di VARIGNON

Il momento di una forza attorno ad un punto è uguale alla somma dei momenti delle componenti di quella forza attorno allo stesso punto

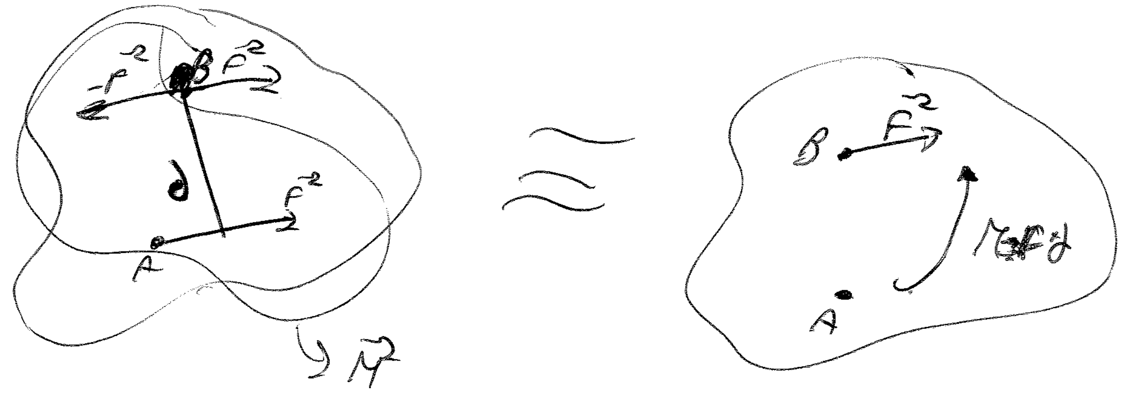


$M_O = r \wedge \vec{R} = r \wedge \vec{P} + r \wedge \vec{Q}$

• MOMENTO DI TRASPOSIZIONE

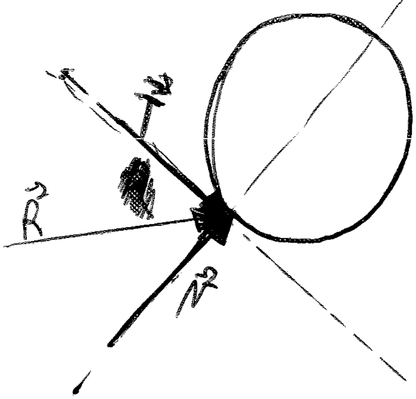


La forza F_1 applicata in A, può essere spostata in B aggiungendo in B il <u>momento di trasposizione</u> $\boxed{M = F \cdot d}$



In questo caso, l'effetto sul corpo di una forza applicata in A è lo stesso che si ha applicando la stessa forza in B più la coppia $\boxed{F \cdot d}$.
Tale operazione è nota come <u>trasposizione di una forza</u>.

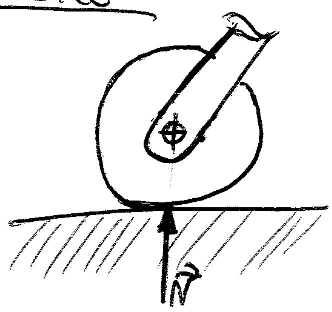
- SUPERFICI RUVIDE A CONTATTO



IP. SI ATTRITO

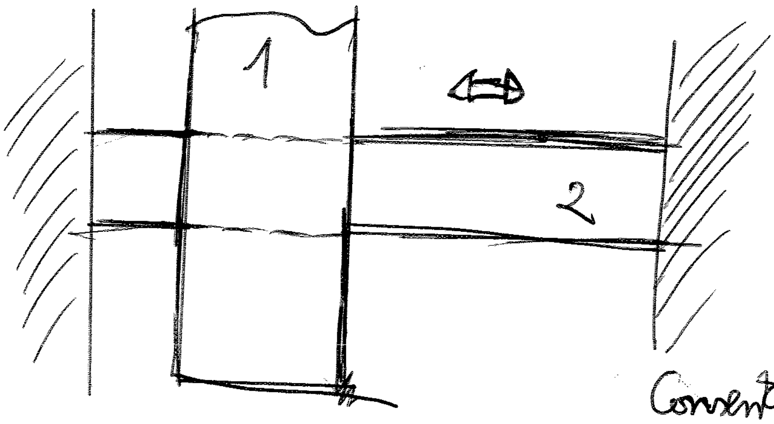
C'è anche una componente tangenziale che si oppone al moto del corpo.

- APPOGGIO SEMPLICE

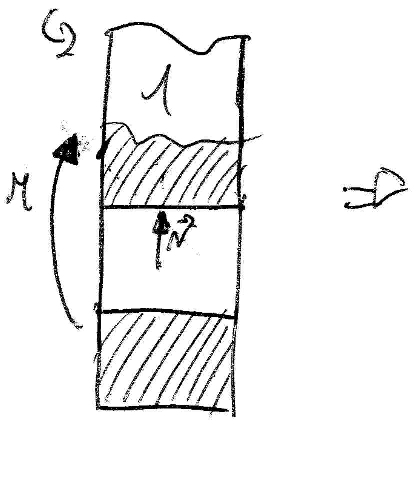


La forza è sempre presente e la direzione è normale alla sup. del supporto

- COPPIA PRISMATICA

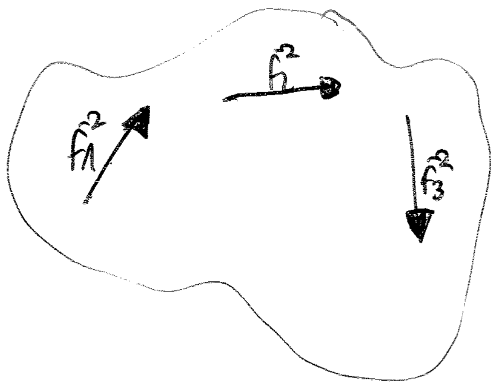


Consente nel piano solo una traslazione

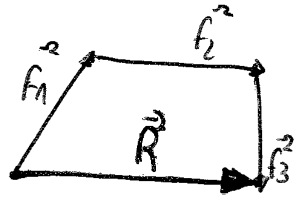


La forza è sempre normale alla sup. del supporto, il verso è da definire.
Il vincolo può fornire anche un momento

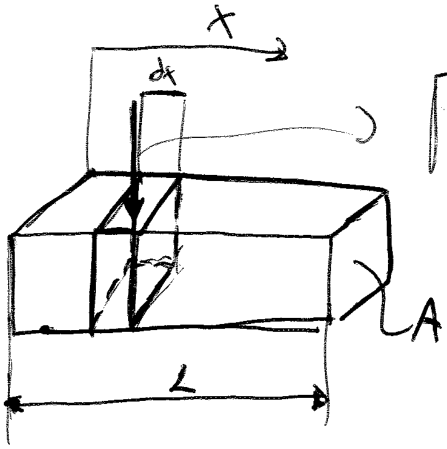
- **RISULTANTE** (di un sistema di forze)



$$\boxed{\vec R = \sum \vec f_i}$$



es:



$$\boxed{d\vec F_P} = dm\cdot\vec g = \boxed{\rho\cdot A\cdot dx\cdot\vec g}$$

↳ Forza peso dell'elementino

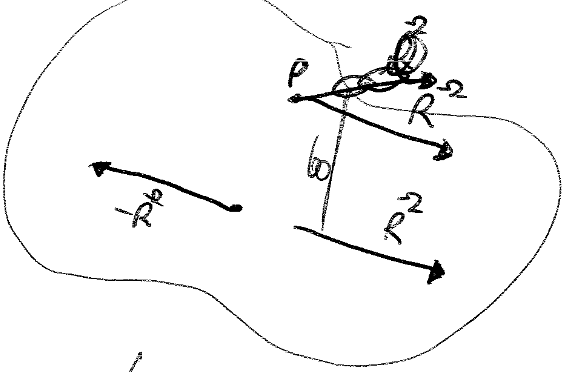
$$\vec P = \int d\vec F_P = \int_0^L \rho\cdot A\cdot dx\cdot\vec g$$

$$\rightarrow \boxed{\vec P} = \underbrace{\rho\cdot\underbrace{A\cdot L}_{V}}_{m}\cdot\vec g = \boxed{m\cdot\vec g}$$

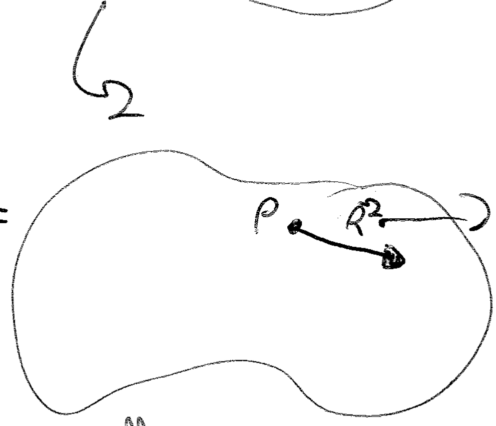
RISULTANTE DELLA FORZA PESO

$M_O = R \cdot b_O$

$b_O = \frac{M_O}{R}$

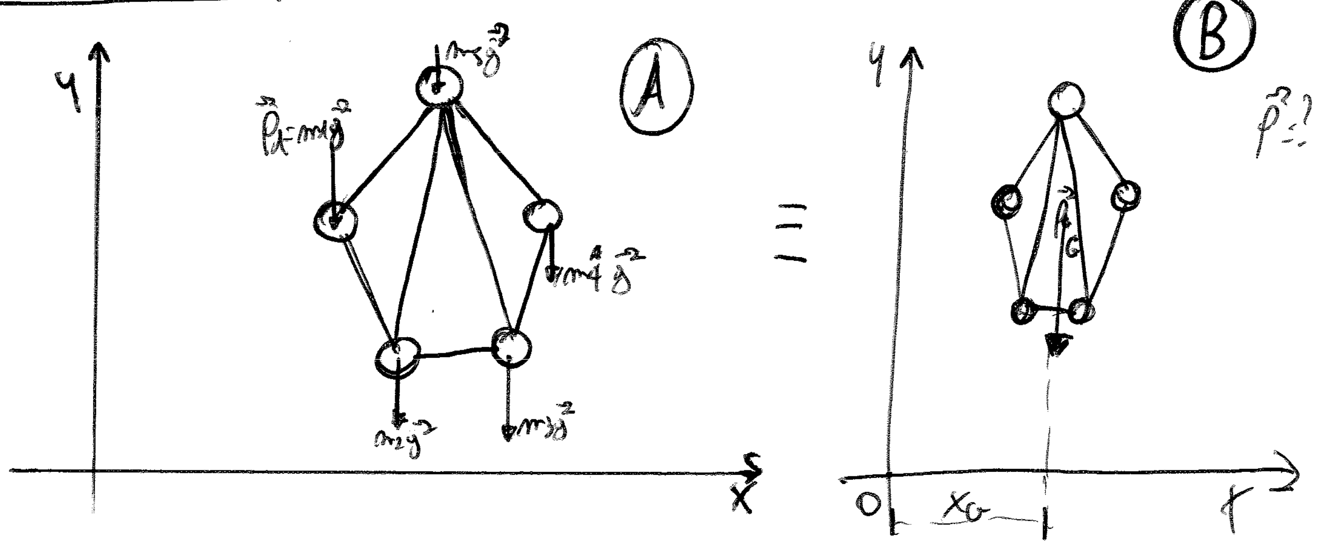


Questo significa che gli effetti congiunti di $\vec{R}$ ed $\vec{R}$ possono essere ottenuti equivalentemente applicando la sola risultante delle forze $\vec{R}$ in un altro punto opportunamente scelto.



Risultante tra le risultante forze e il momento risultante traslato

• RISULTANTE, BARICENTRO



G, il baricentro, è il punto di applicazione della forza peso

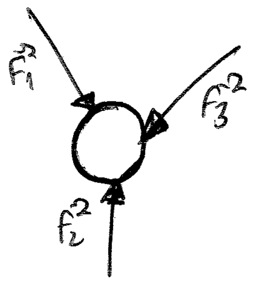
e) $P = \sum m_i \vec{g} = M\vec{g}$

• LE 3 LEGGI DI NEWTON (per PARTICELLE)

– PRIMA LEGGE

$$\boxed{\text{Se } \sum F_e = 0 \Rightarrow \vec{V} = \text{cost.}}$$

Una particella rimane a riposo o continua a muoversi di moto rett. uniforme se la risultante di tutte le forze agenti su di essa è nulla.



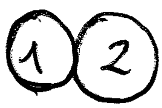
– SECONDA LEGGE

$\boxed{\sum F_e = ma}$ → Se la sommatoria delle forze è $\neq 0$ l'accelerazione è proporzionale alla forza risultante applicata ed è nella direzione e nel verso di tale risultante

– TERZA LEGGE

$\boxed{F_{12} = -F_{21}}$

Quando due corpi ~~si toccano~~ interagiscono, la forza che 2 applica ad 1 è uguale e contraria alla forza che 1 applica a 2

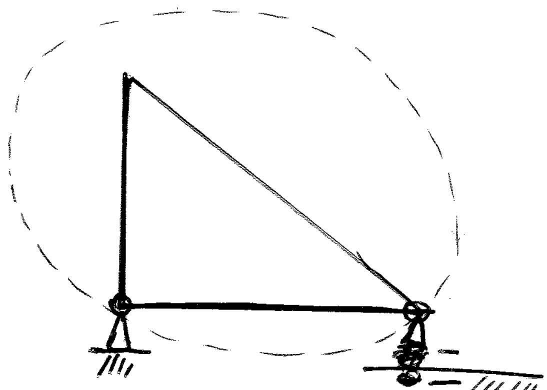


EQUILIBRIO STATICO DI CORPI ESTESI

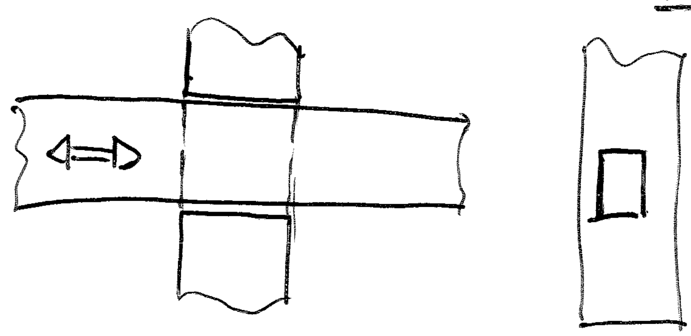
$$\boxed{\begin{gathered}\sum \vec{F_e} = 0 \\ \sum \vec{M_e} = 0\end{gathered}}$$

Esercizio:

SOLIDO PIANO OMOGENEO



-> COPPIA PRISMATICA (Può solo traslare)



$$\sum M_e = 0 \Rightarrow r_1 \wedge \vec{F_1} + r_2 \wedge \vec{F_2} + r \wedge \vec{P} = 0$$

$$d f_1 \cdot \vec{K} + (d + e) f_2 \vec{K} - \left(d + \frac{e}{3}\right) \vec{P} \vec{K} = 0$$

$$\rightarrow \cancel{d(f_1 + f_2 - P)} + f_2 e - P\frac{e}{3} = 0$$

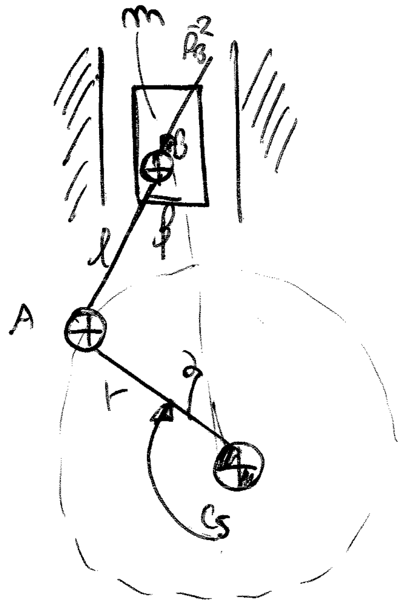
Le potevano scrivere come rotazione attorno al punto 1

$$\rightarrow f_2 e - P\frac{e}{3} = 0 \rightarrow \boxed{f_2 = \frac{P}{3}}$$

(Scegliamo come polo un punto da dove passano delle forze ~~incognite~~ in modo da avere più equazioni e quindi risolverle)

$$f_1 + f_2 - P = 0 \rightarrow \boxed{F_1} = P - f_2 = P - \frac{P}{3} = \boxed{\frac{2P}{3}}$$

Es:



Note geometrie m $C_s = ?$

EQUAZIONI DI EQUILIBRIO DINAMICO

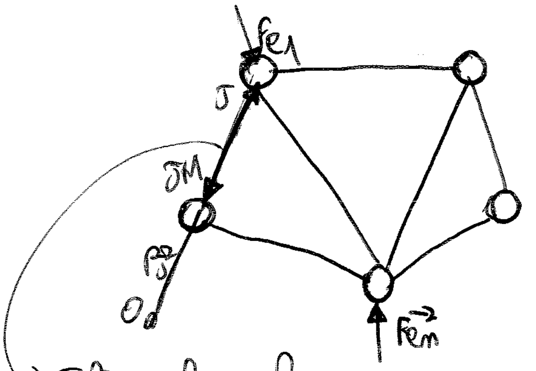
FORZE ESTERNE

$$\boxed{\begin{array}{l}\sum F_e + \vec{F}_i = 0 \\ \sum M_e + \vec{M}_i = 0\end{array}}$$

$\vec{F}_i$ → Somma delle forze d'inerzia applicate nel baricentro

$\vec{M}_i$ → Coppia d'inerzia baricentrica

$\sum M_e$: MOMENTI DOVUTI ALLE FORZE ESTERNE



→ Tutte le forze interne sono uguali ed opposte e si annullano a vicenda

⇒

N particelle

J PART.: $\boxed{\sum F_{e_J} = m \cdot \vec{a}_J}$

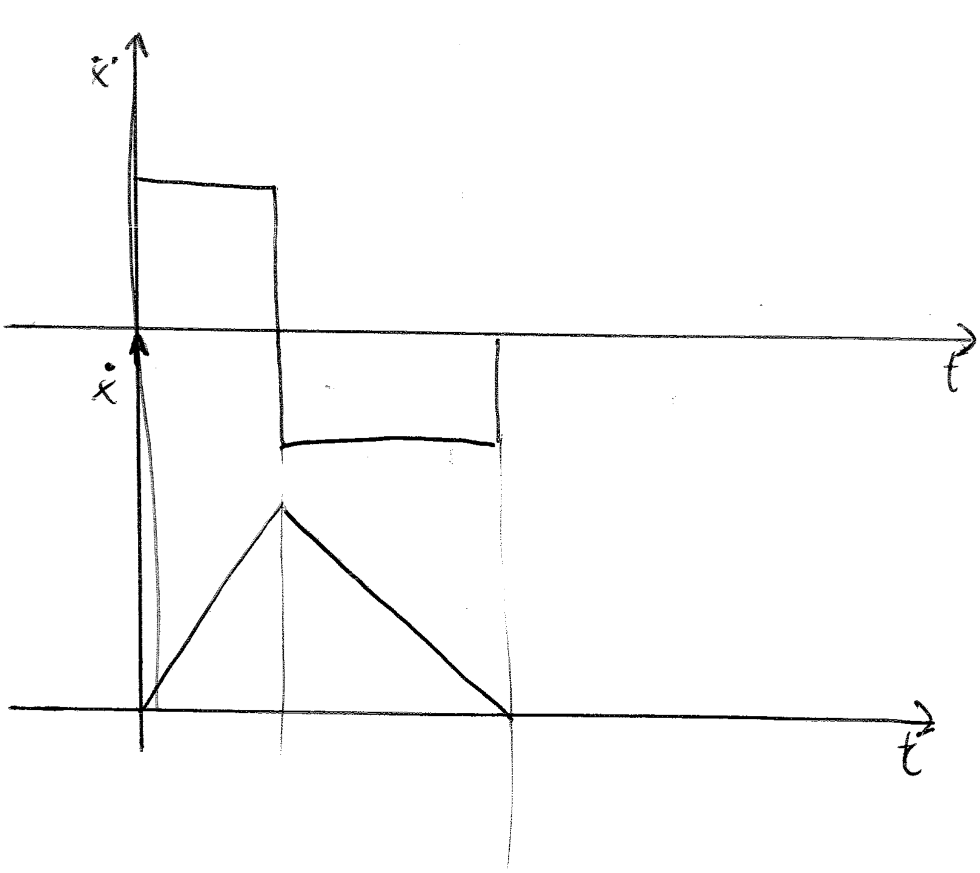
N PART.: $\sum_{J=1}^{N} \left(\sum F_{e_J} \right) = \sum_{J=1}^{N} m \cdot \vec{a}_J$

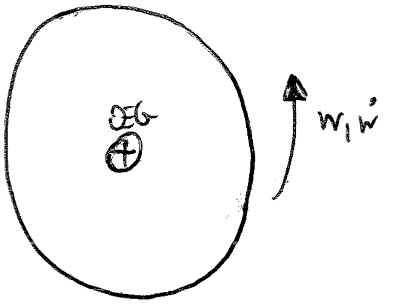
$\left(F_{i_J} = - m \cdot a_J \right)$

$$\boxed{\sum F_{EST}} = - \sum F_{I_J} = \boxed{-F_I}$$

$-F_I$: RISULTANTE DELLE FORZE D'INERZIA

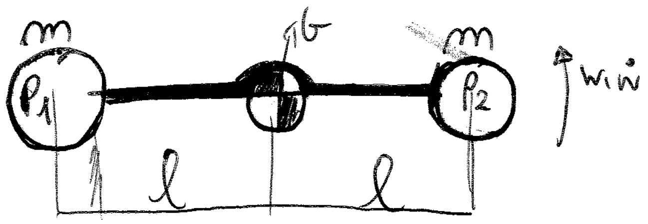
Poiché la sommatoria delle forze interne di un corpo è nulla, la forza applicata è solo la risultante delle forze esterne → F_{EST}



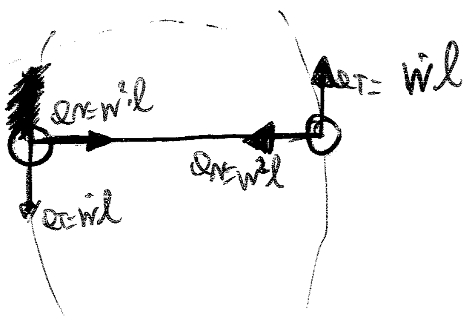


$\boxed{a_G = 0}$ → perché G è fisso

Esempio:



Studio cinematico:



$F_{i_j} = -m \cdot \vec{a}_j$

↳ Componenti delle forze d'inerzia

$$M_{i_G} = \sum P_j \wedge F_{i_j} = -\sum l \cdot m \cdot \dot\omega l \, \vec{k} = -\left(\sum m l^2\right) \dot\omega \, \vec{k}$$

($m\omega^2 l$ ha braccio 0)

↳ $\boxed{I_G}$

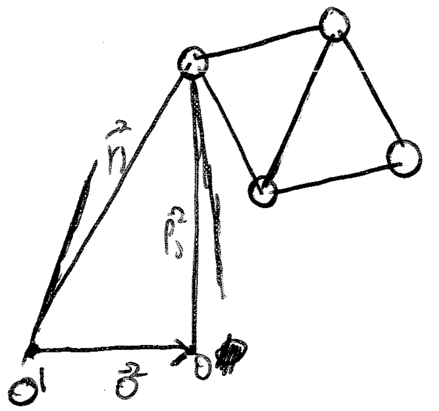
$\boxed{I_G = \sum m l^2}$

$$\Rightarrow \boxed{M_{i_G} = -I_G \cdot \vec{\dot\omega}} \qquad \left(\sum F_i = -m \cdot \vec{a}_G\right)$$

→ $\boxed{I = \int r^2 \, dm}$

↳ ~~MOMENTO D'INERZIA~~ PER CORPI DI FORMA QUALUNQUE

- Problema M_i?



O → MOBILE

O' → FISSO

DEF.

Momento Risultante delle forze d'Inerzia

$$M_{i_O} = \sum \vec\rho_j \times \vec F_{i_j} = \boxed{\sum (\vec r_j - \vec o) \times \vec F_{i_j}}$$

$\vec F_{i_j} = -m_j \cdot \vec a_j$

$$\vec r_j = \vec o + \vec\rho_j$$

$$\vec\rho_j = \vec r_j - \vec o$$

VETTORE POSIZIONE

Momento Risultante quantità di moto →

$$\boxed{\vec K_O = \sum \vec\rho_j \times m_j \vec v_j} = \boxed{\sum (\vec r_j - \vec o) \times m_j \vec v_j}$$

$$\frac{d\vec K_O}{dt} = \underbrace{\sum \vec v_j \times m_j \vec v_j}_{=0} - \sum \vec v_O \times m_j \vec v_j + \sum \vec\rho_j \times m_j \vec a_j$$

$$\underbrace{\vec v_O \times m \vec v_G}_{=0}$$

se • O≡G oppure
• $\vec v_O // \vec v_G$ oppure
• O fisso

$$x_G = \frac{1}{m} \sum m_j x_j$$

$$\vec v_G = \frac{1}{m} \sum m_j \vec v_j$$

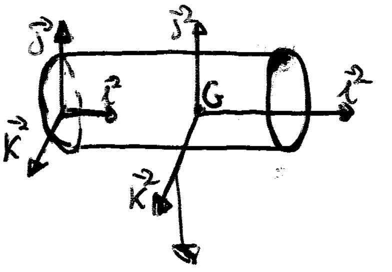
$$\frac{dK_O}{dt} = \sum \vec\rho_j \times m \cdot \vec a_j \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec K_O}{dt} = -\vec M_{i_O}}$$

L'equazione stabilisce che il momento risultante di tutte le forze agenti sulla particella, calcolato rispetto al punto fisso O, è pari alla derivata rispetto al tempo del momento della quantità di moto assoluta. 47

→ ANALOGIA con $\boxed{\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}}$

- SISTEMI PIANI (Moto piano di un corpo rigido)
  - $\boxed{K_G = I_G \cdot \vec{\omega}}$
  - $\boxed{M_{iG} = -I_G \dot{\omega}}$ $\left(-\frac{dK_G}{dt}\right)$

- SISTEMI TRIDIMENSIONALI



TERNA CENTRALE D'INERZIA

$$\boxed{K_G = A p \vec{i} + B q \vec{j} + C r \vec{k}}$$

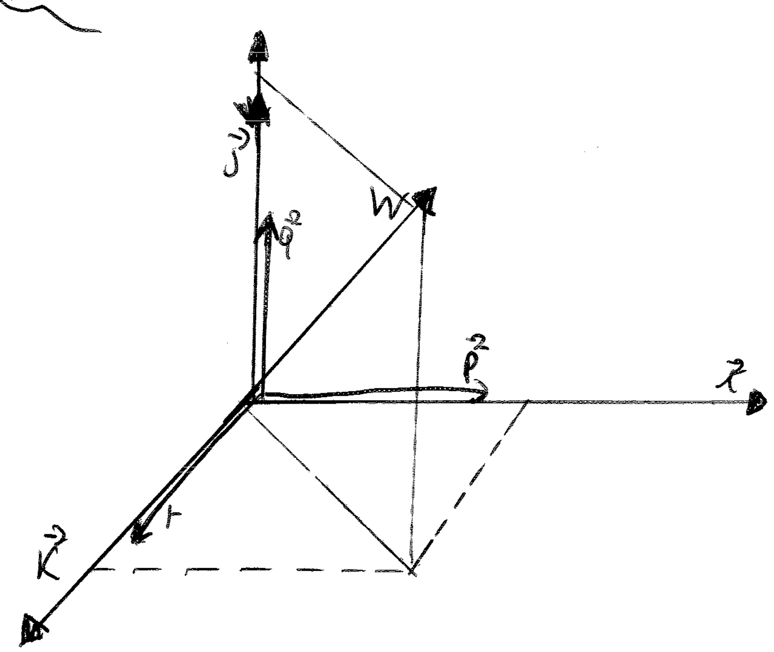
→ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sono i versori di una terna principale d'inerzia

→ A, B, C → sono i MOMENTI D'INERZIA (I_x, I_y, I_z) ($kg \cdot m^2$) calcolati rispettivamente rispetto a $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$

p, q, r → sono le COMPONENTI DELLA VELOCITÀ ANGOLARE ω rispetto a $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

Una terna è detta principale d'inerzia se il momento d'inerzia assume il valore massimo per uno dei versori, il valore minimo per un altro versore ed il terzo versore è definito dalla normale ai primi due.
La terna è detta anche CENTRALE d'inerzia quando ha l'origine coincidente con il baricentro

p, q, r → COMPONENTI DELLA VELOCITÀ ANGOLARE ω rispetto a $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$



$$p = \vec{\omega} \cdot \vec{i}$$
$$q = \vec{\omega} \cdot \vec{j}$$
$$r = \vec{\omega} \cdot \vec{k}$$

- $\sum M_{e_G} + M_{i_G} = 0$

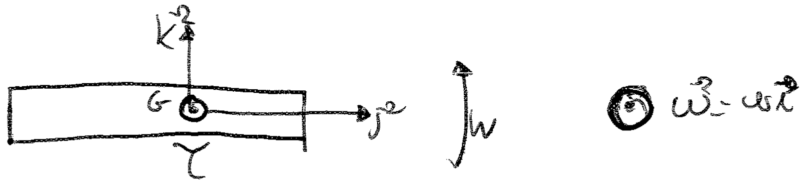
$$M_{i_G} = -\frac{dK_G}{dt} \Rightarrow \sum M_{e_G} = -M_{i_G} = \frac{dK_G}{dt}$$

$$\boxed{\text{se } \sum M_{ext_G} = 0 \Rightarrow \frac{dK_G}{dt} = 0 \Rightarrow K_G = cost}$$

↓

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DEL MOMENTO RISULTANTE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

A] Riduzioni azioni d'inerzia in baricentro



$\vec{\omega} = \omega \vec{i}$

$$\vec{K_G} = \underbrace{A}_{I_G}\,\underbrace{p}_{\omega}\,\vec{i} + \cancel{Bq}\,\vec{j} + \cancel{Cr}\,\vec{k}$$

C'è solo la componente di ω orientata secondo $\vec{i}$

$$\begin{cases} \boxed{M_{iG}} = -\dfrac{dK_G}{dt} = -I_G \cdot \dot{\omega}\,\vec{i} = \boxed{-I_G\,\dot{\vec{\omega}}} \\ \vec{F_i} = -m\,\vec{a_G} \end{cases}$$

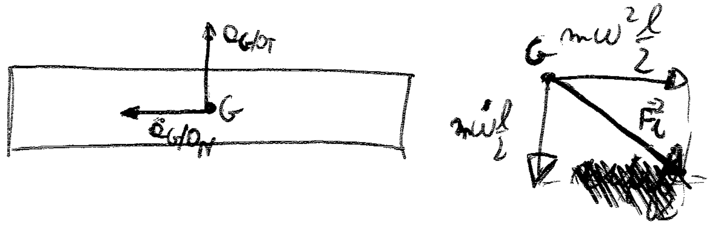
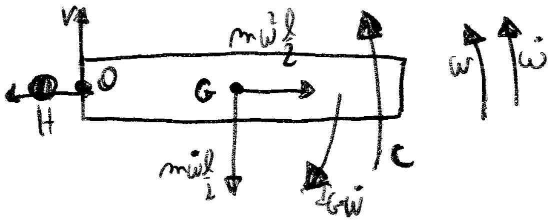
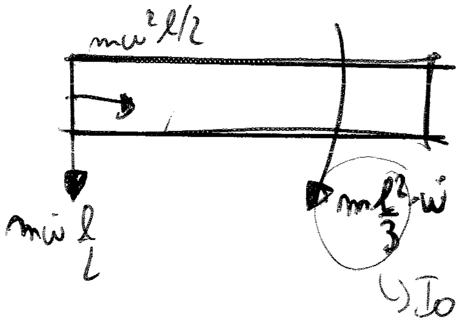


DIAGRAMMA CORPO LIBERO



O) $C - I_G \cdot \dot{\omega} - m\dot{\omega}\frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{C}\left(\frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4}\right)\dot{\omega} = \boxed{\frac{ml^2}{3} \cdot \dot{\omega}}$

← $\boxed{H = m\omega^2 \frac{l}{2}}$ ↑ $\boxed{V = m\dot{\omega}\frac{l}{2}}$

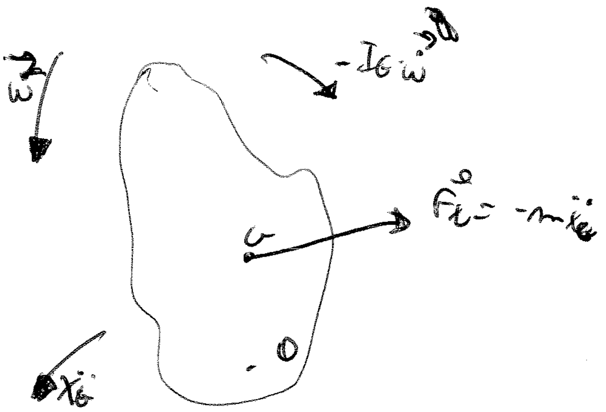


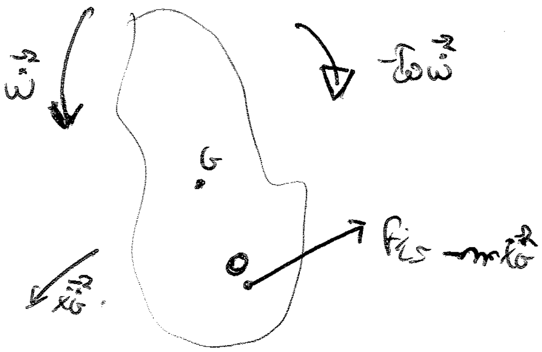
$\boxed{B}$

Sommo i due momenti della quantità di moto 52

C] RIDUZIONE AZIONI D'INERZIA NEL PIANO

???





ATTRITO

• TIPI
- ATTRITO SECCO (Coulombiano) → Attrito tra i corpi a contatto su superfici non lubrificate
- ATTRITO VISCOSO → Si manifesta sulle superfici di due corpi in moto relativo tra i quali sia interposto un velo di lubrificante
- ATTRITO INTERNO → Non perfetta elasticità dei corpi reali quando vengono deformati

ATTRITO SECCO
- → STATICO
- → DINAMICO (C'è un movimento relativo tra i corpi)

• ATTRITO STATICO

- Dipende - dalla coppia di materiali a contatto
  - dalla rugosità
- Non dipende dalla estensione della superficie
- L'attrito statico si oppone al moto relativo

Le forze di attrito sono quindi delle forze reattive.

es:

→

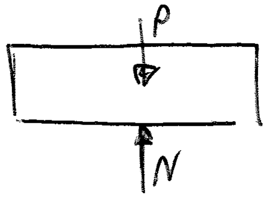
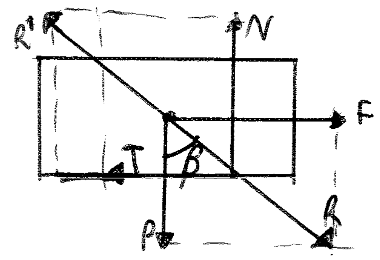


Diagramma di corpo libero

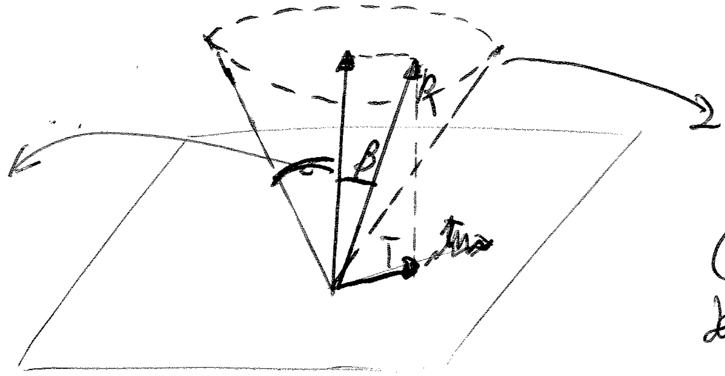
$R = R'$
$(\Sigma F = 0)$



Al crescere della forza F applicata cresce in ugual misura una reazione tangenziale di attrito T, dando origine ad una successione di situazioni di equilibrio statico.

La reazione complessiva del piano non sarà più verticale, ma inclinata di un angolo β. Questa inclinazione è dovuta alla presenza di asperità sulle sup. e contatto.

φ_A
(ANGOLO DI ADERENZA)



CONO D'ATTRITO STATICO

(La risultante R' sarà dentro questo cono)

↓

Fin quando $\boxed{\beta < \varphi_A}$ il corpo rimane fermo e non c'è moto relativo tra le 2 superfici (C'È ADERENZA)

Quando si raggiunge un valore limite di F, tale da determinare una rottura delle asperità che esercita R', il corpo si mette in movimento:

$T \leq T_{lim} \Rightarrow \boxed{T \leq f_A \cdot N}$ CONDIZIONE LIMITE

f_A → COEFFICIENTE DI ATTRITO STATICO

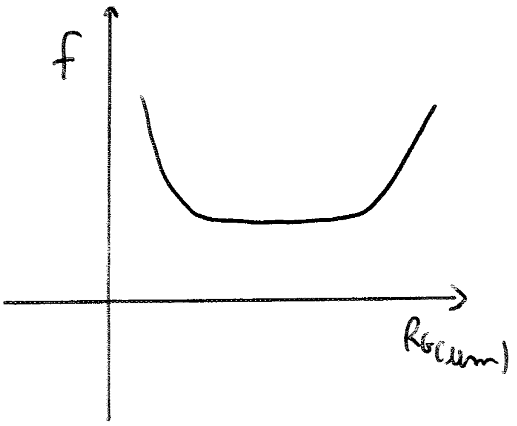
$(f_A = tg(\varphi_A))$

→ $\beta_{lim} = \arctan(f_A) = \varphi_A$

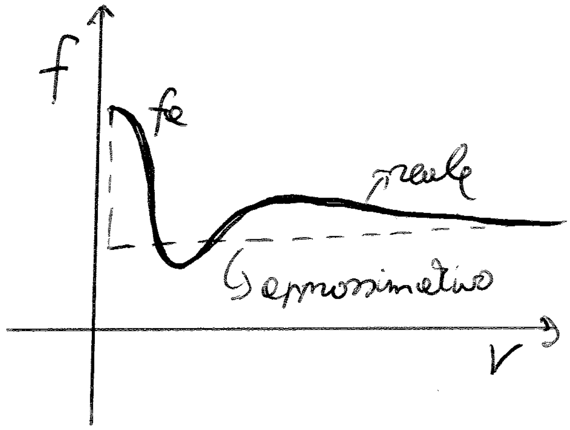
$$\boxed{f = \tan\varphi}$$

L'attrito dinamico dipende dalle stesse caratteristiche dell'attrito statico ed inoltre vale

$$\boxed{f < f_e}$$



Coefficiente d'attrito in funzione della rugosità



Coefficiente d'attrito in funzione della vel. relativa

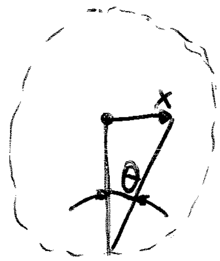
(a pressione relativa è più alto)

$\rightarrow$ $T - m\ddot{x} = 0$ ⇒ motrice l'accelerazione del rullo

$\uparrow$ $N - mg = 0$ ⇒ **INCOGNITE**

G ↻ $T \cdot r + I_G \cdot \ddot{\theta} - M = 0$

Ip.
ADERENZA



$x = r\theta$ (C_x θ piccolo)

$\dot{x} = r \cdot \dot{\theta}$

$\ddot{x} = r \cdot \ddot{\theta}$

↳ 4ª equazione $\boxed{\ddot{x} = r \cdot \ddot{\theta}}$ (Ip. ADERENZA)

⇓

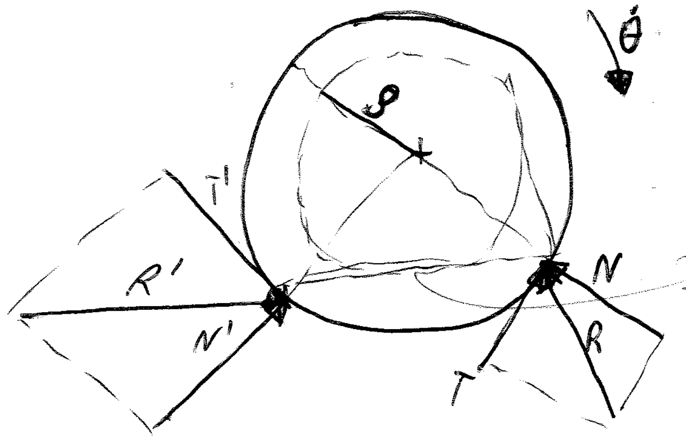
VERIFICA A=D $T \leq f_a \cdot N$

Se Ip. ADERENZA non verificata ⇒ $\cancel{\ddot{x} = r \cdot \ddot{\theta}}$ ⇒ $\boxed{T = f \cdot N}$ (STRISCIAMENTO)

CERCHIO DI ATTRITO:

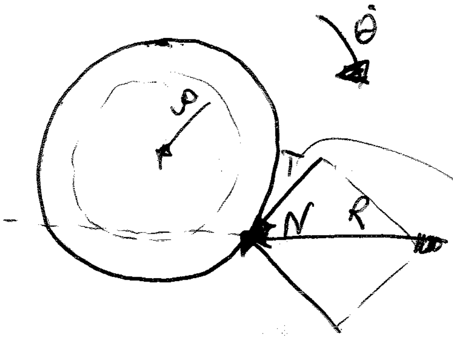
$\rho = r \sin\varphi$

RAGGIO PERNO — ANGOLO D'ATTRITO



se $\dot\theta > 0$

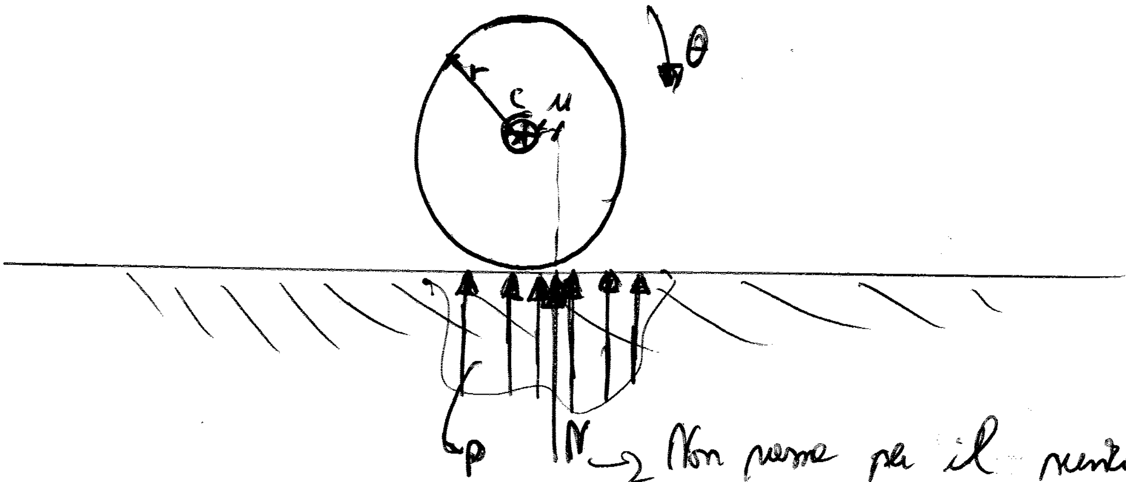
TANGENTE



$\dot\theta < 0$ (RIAPRIAMO LA PORTA)
(ANTIORARIO)

La forza tangenziale cambia verso

ATTRITO VOLVENTE



N → Non passa per il punto di contatto ideale

u → PARAMETRO DI ATTRITO VOLVENTE

$[u] = m$ → È UNA DISTANZA

$[f] = \frac{[T]}{[N]} = \frac{N}{N}$ → adimensionato

N → Newton

[N] → Forza normale

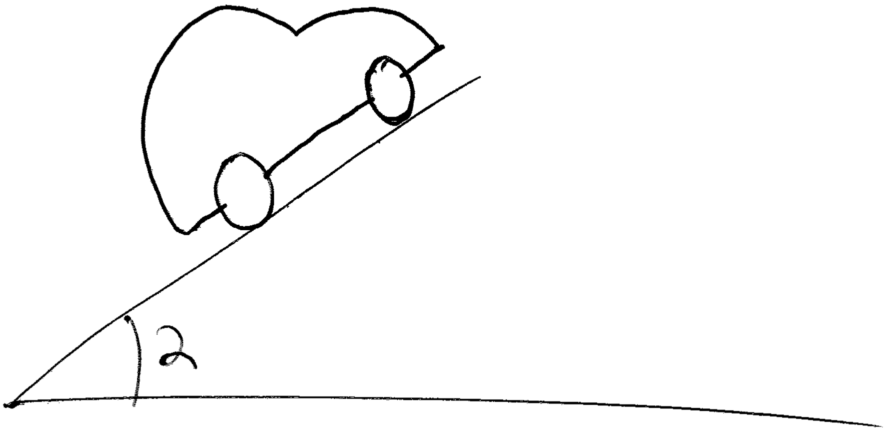
$\boxed{f_r = \frac{u}{r}}$ → COEFF. DI ATTRITO VOLVENTE (adimensionale)

Es. (3)

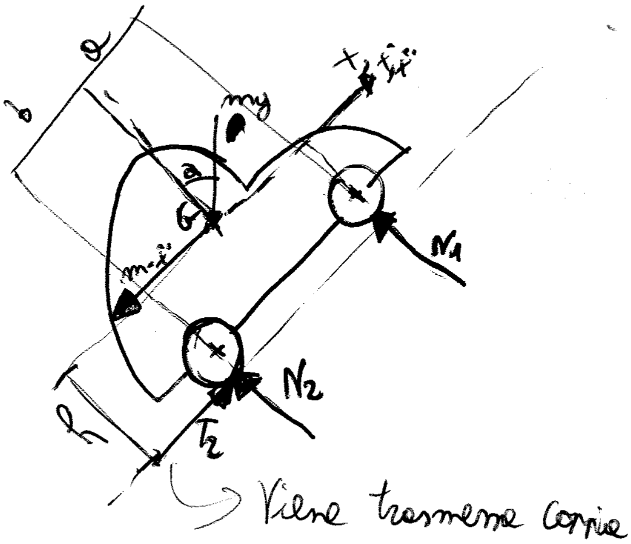
AUTO A TRAZIONE POSTERIORE IN SALITA

(No attrito volvente)

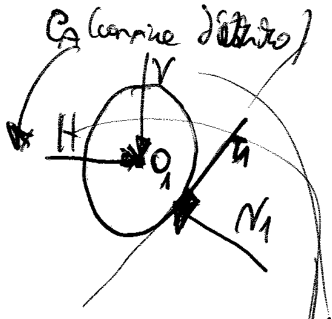
NO ATTRITO SU CUSCINETTI (che sostengono le ruote)



$F_i = m \cdot \ddot{x}$



Viene trasmessa coppia



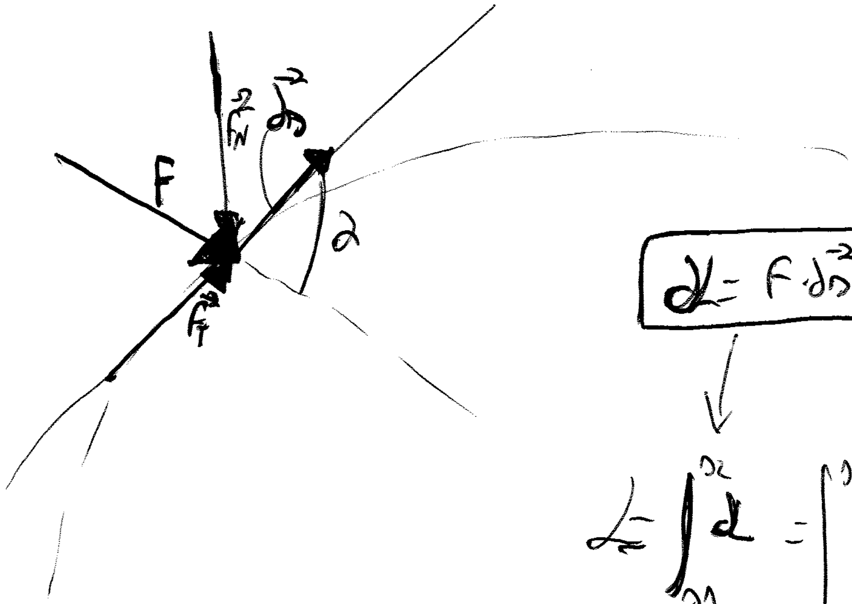
O_1 ↺ $\quad C_A - T_1 \cdot r = 0$ $\rightarrow$ $\boxed{T_1 = \frac{C_A}{r}}$

Coppia d'attrito sui cuscinetti

se $C_A \simeq 0 \Rightarrow T_1 = 0$

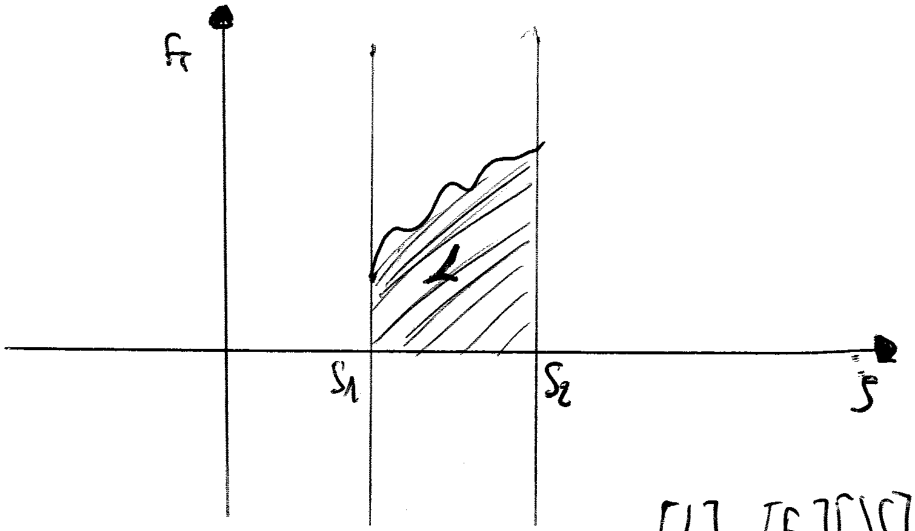
Per questo non disegniamo T_1 nel disegno complessivo, perché abbiamo posto no attrito sui cuscinetti

LAVORO ED ENERGIA



$$\boxed{dL = \vec{F}\cdot d\vec{s}} = \boxed{F\cdot ds\cdot \cos\alpha} = \boxed{F_T\cdot ds}$$

$$L = \int_{s_1}^{s_2} dL = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_{s_1}^{s_2} F_T\cdot ds$$



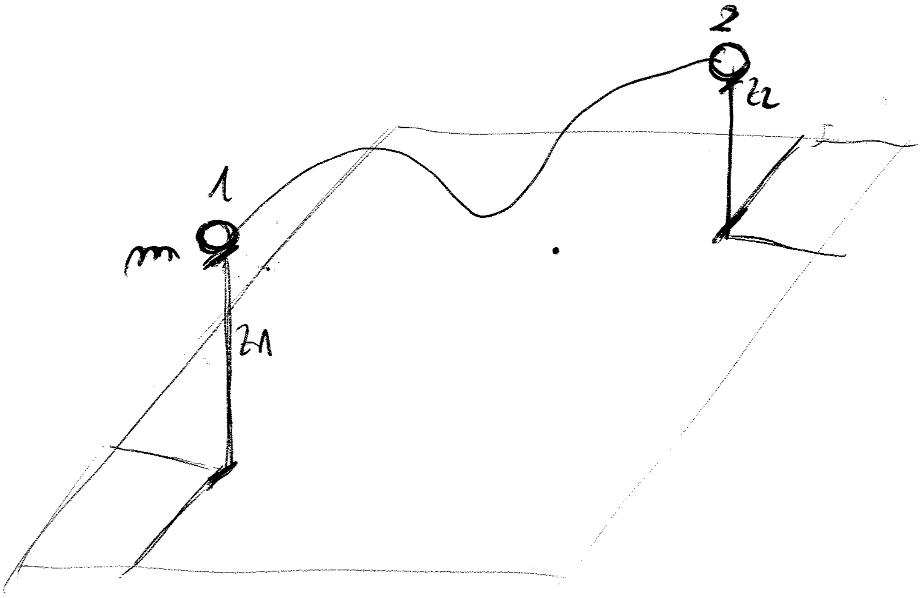
$$[L] = [F_T][ds] = N\cdot m = kg\cdot\frac{m}{s^2}\cdot m = J$$

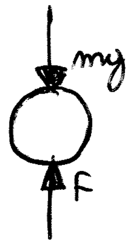
$$dL = M\cdot d\theta \rightarrow \boxed{L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\, d\theta}$$

$$\mathcal{L} = \int_1^2 dL = \int_{x=0}^{x} F \cdot dx = \int_0^x Kx \cdot dx \Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{2} K x^2} \rightarrow$$ ENERGIA ELASTICA

$$\boxed{\Delta E = \frac{1}{2} K (x_2^2 - x_1^2)} \rightarrow$$ VARIAZIONE DI ENERGIA ELASTICA

x_2: FIN. x_1: INI





$L_F = ?$

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \cancel{F_x dx} + \cancel{F_y dy} + F_z dz \rightarrow L = \int_1^2 dL = \int_{z_1}^{z_2} F_z \, dz = \int_{z_1}^{z_2} mg \, dz$$

$$\Rightarrow \boxed{L = mg(z_2 - z_1)} \Rightarrow \boxed{mgh} \qquad (h = z_2 - z_1)$$

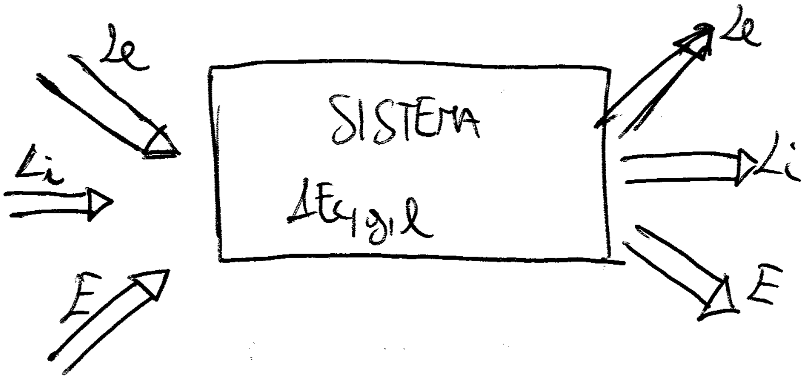
$$\Downarrow$$

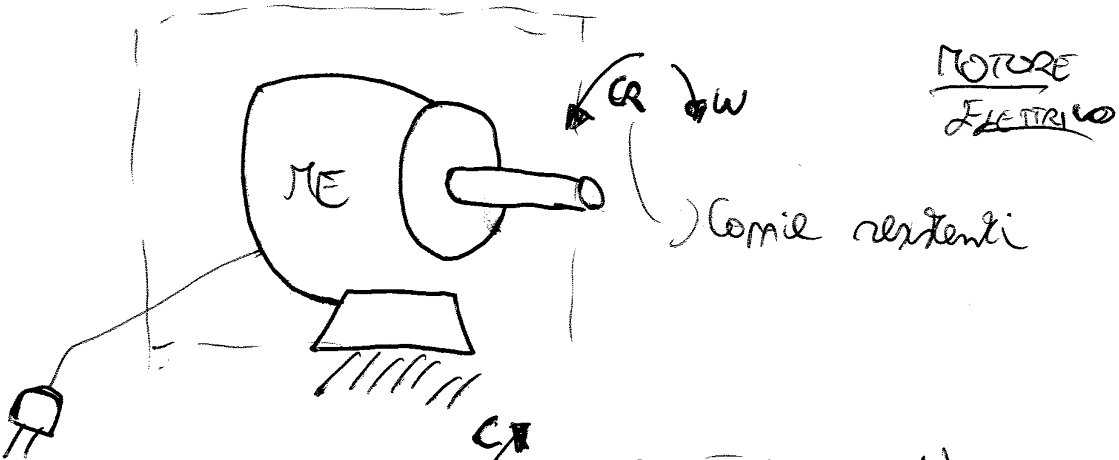
$$\boxed{\Delta E_g = mg \Delta z} \Leftarrow$$ ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

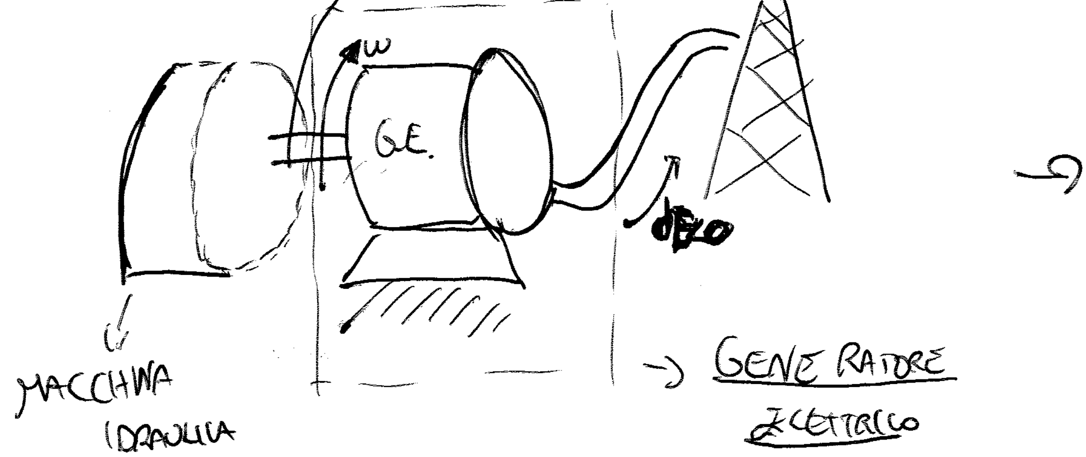
$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} I \omega^2}$$
→ ROT.

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

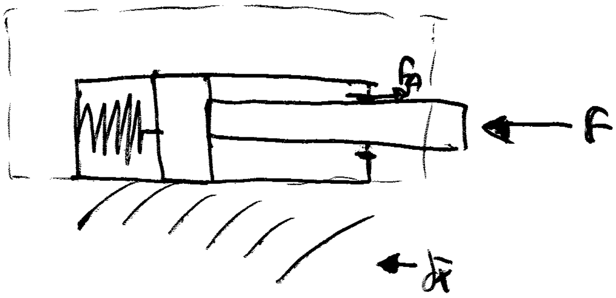
$$\boxed{E + L_e + L_i = \Delta E_c + \Delta E_g + \Delta E_e}$$







<u>es:</u> L_i



$dL_e = F \cdot dx$

$dL_i = -F_A \cdot dx \quad < 0$

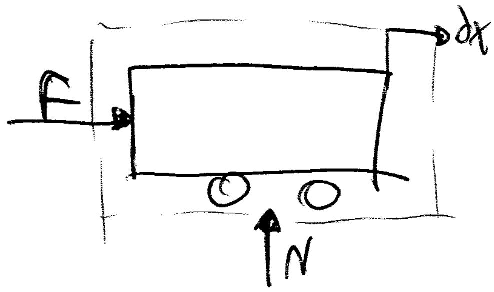
$dE_{el} = \frac{1}{2} K dx^2$

$dL_e + dL_i = dE_{el}$

$dL_e > 0$, $dL_i < 0$, $dE_{el} > 0$

→ se e solo se $F > F_A$ (attrito) potrò comprimere alla molla

$\boxed{1-2}$



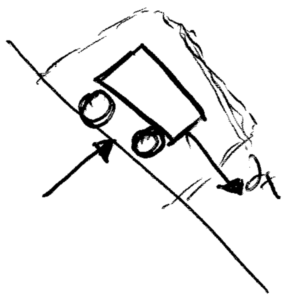
$$\cancel{L_?}+L_e+\cancel{L_i}=\Delta E_c+\cancel{\Delta E_g}+\cancel{\Delta E_{el}}$$

$$L_e = F \cdot S$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}m(v_2^2-v_1^2)$$

$$\underbrace{F \cdot S}_{>0} = \underbrace{\frac{1}{2}m(v_2^2-v_1^2)}_{>0}$$

$\boxed{2-3}$



$$\cancel{L_?}+\cancel{L_e}+\cancel{L_i}=\Delta E_g+\Delta E_c+\cancel{\Delta E_{el}}$$

Non ci sono forze esterne (c'è solo N che è ortogonale allo spostamento)

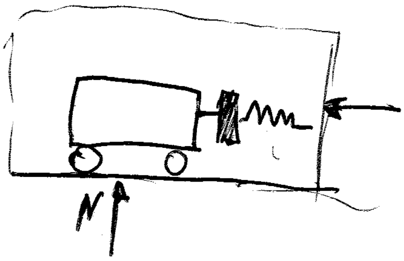
$$\Delta E_c = \frac{1}{2}m(v_3^2-v_2^2)$$

$$\Delta E_g = \underbrace{mg(h_3-h_2)}_{<0}$$

$$\Delta E_g + \Delta E_c = 0$$

$\hookrightarrow \Delta E_c = -\Delta E_g \Rightarrow \frac{1}{2}m(v_3^2-v_2^2) = mg(h_2-h_3)$

$\boxed{5\text{-}6}$



forza del muro

$$\cancel{\mathcal{L}} + \cancel{L_i} + L_e = \Delta E_c + \cancel{\Delta E_g} + \Delta E_e$$

$L = 0$ perché la forza F_m non cambia punto di applicazione

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m (\underbrace{v_G^2}_{=0} - v_S^2)$$

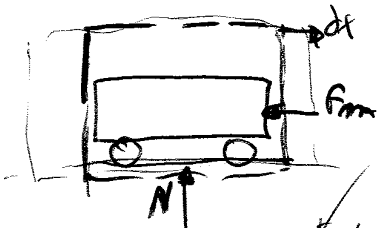
$$\Delta E_e = \frac{1}{2} K \cdot \Delta x^2$$

$$\underbrace{\Delta E_c}_{<0} + \underbrace{\Delta E_e}_{>0} = 0$$

$$-\frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} K x_G^2 = 0 \Rightarrow$$

Oppure

$\boxed{56}$



Consideriamo solo il sistema carrello

$$\cancel{\mathcal{L}} + L_e + \cancel{L_i} = \Delta E_c + \cancel{\Delta E_g} + \Delta E_e$$

$L = 0$

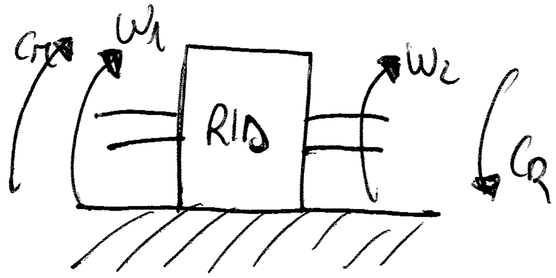
$F_m = Kx$ $\quad dL = -F_m \cdot dx = -Kx \cdot dx$

$$\underbrace{\boxed{L_e}}_{<0} = \int_0^{x_G} -Kx \, dx = \boxed{-\frac{1}{2} K x_G^2}$$

$$\underbrace{L_e}_{<0} = \underbrace{\Delta E_K}_{<0}$$

es:

Riduttori (riducono la velocità)

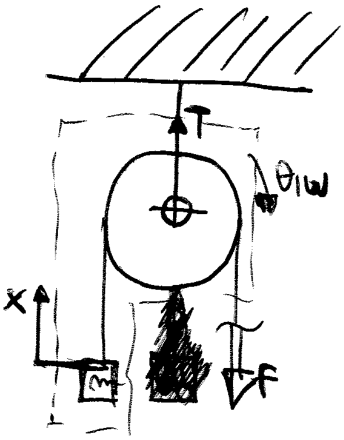


$P_E = C_m \cdot \omega_1$

$P_U = C_R \cdot \omega_2$

$\rightarrow \eta = \frac{C_R \cdot \omega_2}{C_m \cdot \omega_1}$

es:



$v_1 = 0$

$F = \text{cost}$

NO $\mathcal{L}_i$

J, m, R, F

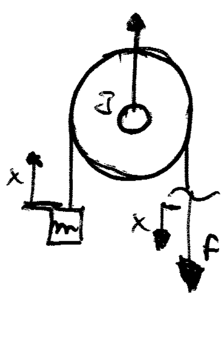
$v_2(x = 1m) = ?$

$$\mathcal{L}_e + \mathcal{L}_i + \cancel{\mathcal{L}} = \Delta E_c + \Delta E_g + \cancel{\Delta E_e}$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m (v_2^2 - \cancel{v_1^2}) + \frac{1}{2} I (\omega^2) = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \frac{v_2^2}{R^2}$$

$$\Delta E_g = mg(h_2 - h_1) = mg(h_2)$$

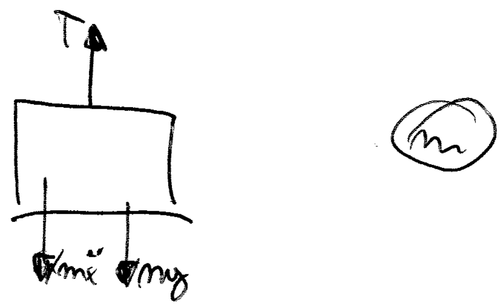
~~$\mathcal{L}_e = F - mg + L = 0$~~



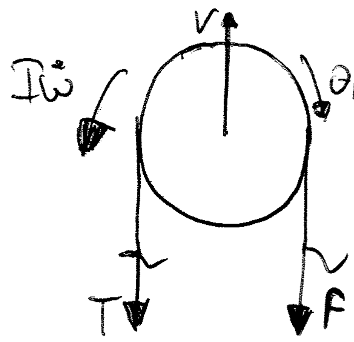
1

$\mathcal{L}_2$

Oppure



$$\boxed{T = mg + m\ddot{x}}$$



$$\boxed{T \cdot R - F \cdot R + I\dot{\omega} = 0}$$

$$\boxed{\ddot{x} = R \cdot \dot{\omega}}$$

$\hookrightarrow \boxed{\ddot{x}} = \boxed{\dfrac{F - mg}{m + \dfrac{I}{R^2}}}$

$a = \dfrac{dv}{dt} \rightarrow \int_0^t a\,dt = \int_0^{v_2} v \rightarrow$

$$\boxed{a t = v}$$

$v = \dfrac{dx}{dt} \rightarrow \int_0^t v\,dt = \int_0^x dx \Rightarrow \int_0^t a t\,dt = \int_0^x dx$

$$\boxed{x = \frac{a t^2}{2}}$$

$\hookrightarrow \boxed{t = \sqrt{\dfrac{2x}{a}}}$

m R Q M
(PIANO)

$K_G = I_G \cdot \vec{\omega}$

$\sum \vec{M}_e = I_G \cdot \dot{\omega} = \frac{dK_G}{dt}$

Se $\sum \vec{M}_e = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{K}_G}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{K}_G = \text{cost}}$

Esercizi

1)

(Principio di conservazione quantità di moto)

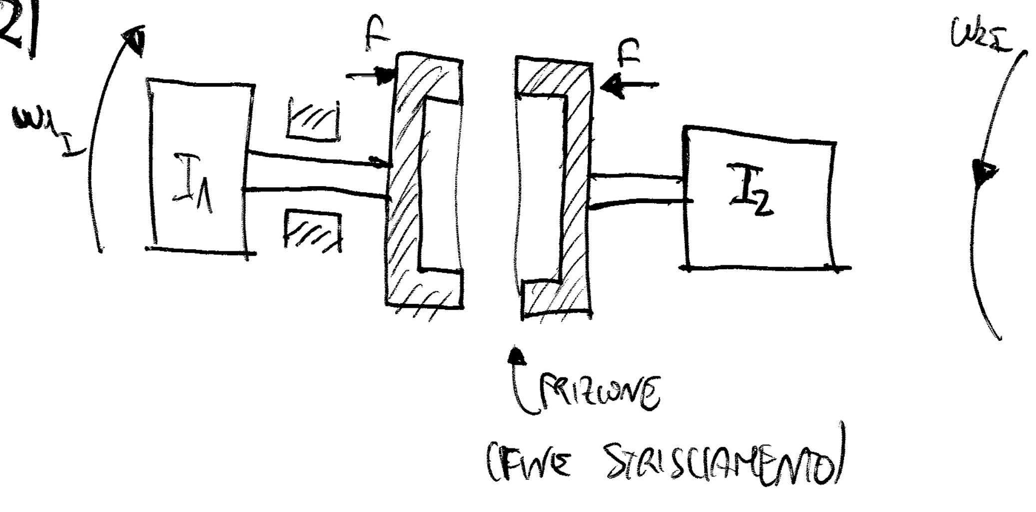
a) Urto elastico I PRIMA II DOPO

$v_{1II} = ?$
$v_{2II} = ?$

b) Urto anelastico
(aggancio)

2)

ω_{1I} ω_{2I} $\omega_{II} = ?$



$$\Delta E_c = \left(\frac{1}{2} m_1 v_{1_I}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2_I}^2\right) - \left(\frac{1}{2} m_1 v_{1_{II}}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2_{II}}^2\right) = 0$$

$$E_{c_I} - E_{c_{II}}$$

URTO ANELASTICO

(con aggancio)

$$\boxed{v_{1_{II}} = v_{2_{II}} = v_{II}}$$

$$\hookrightarrow v_{II} = \frac{m_1 v_{1_I} - m_2 v_{2_I}}{m_1 + m_2}$$

$$\cancel{\mathcal{L}_e} + \cancel{L_{e}} + L_i = \Delta E_c + \cancel{\Delta E_{pA}} + \Delta E_e$$

$$\hookrightarrow \Delta E_c = L_i - \Delta E_e$$

Una quota dell'energia viene dissipata a causa dell'attrito interno

FRENI E FRIZIONI

FRENI

- Un freno è un dispositivo atto a rallentare il moto di un corpo, sfruttando i fenomeni dell'attrito.

Nei freni ci sono sempre due corpi a contatto che strisciano l'uno rispetto all'altro e che sono indicati come elemento frenante ed elemento frenato

- TIPI DI ACCOSTAMENTO

Occorre conoscere però la distribuzione delle pressioni sull'area di contatto.
Possiamo adottare 2 ipotesi:

a) Pressione uniforme ⇒ $p = cost$

b) Ipotesi dell'usura ⇒ IPOTESI DI REYE

→ Il volume di materiale asportato in un dato intervallo di tempo a causa dell'usura è proporzionale al lavoro compiuto dalle forze di attrito nello stesso intervallo di tempo

⇓

coeff. attrito dinamico → area di contatto

$$dV = \delta \cdot dA = K \cdot \underbrace{f \cdot \underbrace{p \cdot dA}_{dN}}_{dT \text{ (forza d'attrito)}} \cdot v_r$$

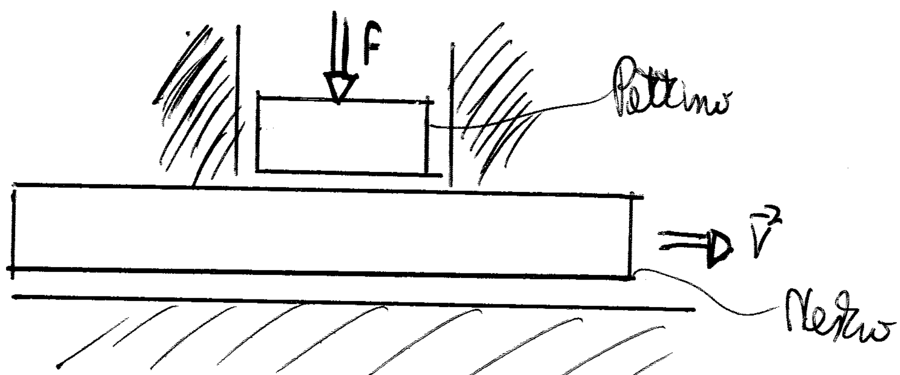
Volume e spessore di materiale asportato

cost. di proporzionalità

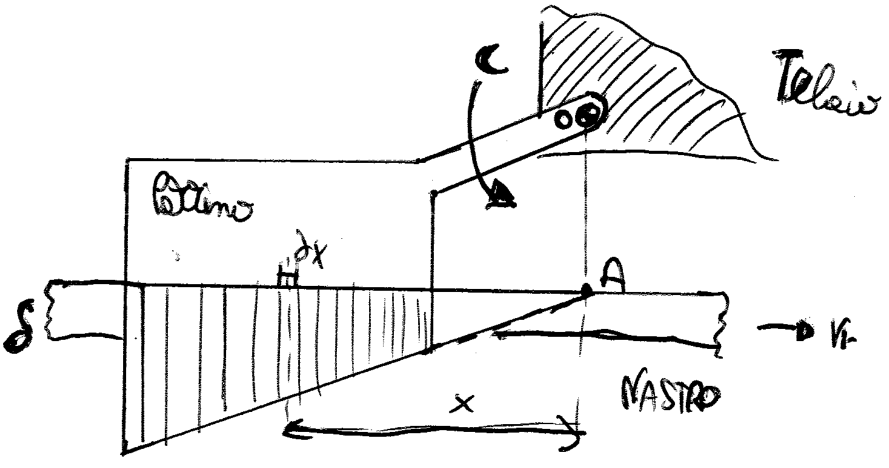
vel. relativa di strisciamento

TIPI DI FRENI

1 Freni a PATTINO



- **Freni a pattino ad ACCOSTAMENTO RIGIDO**



Il pattino è incernierato ad un telaio fisso, e viene usato per frenare il moto di un nastro.

Il moto del pattino è costituito da una rotazione intorno al punto O di collegamento col telaio.
Il sistema ha quindi 1 grado di libertà. Il pattino è premuto contro il nastro applicando una coppia C.

$\Rightarrow$

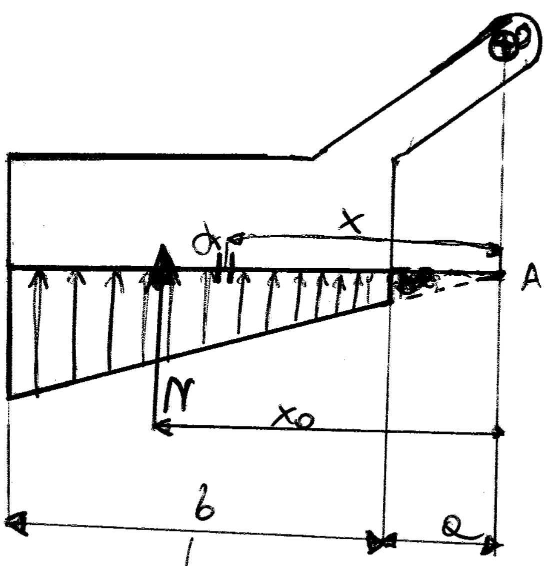


DIAGRAMMA DELLE PRESSIONI

$N = ?$

$x_0 = ?$

(punto di applicazione di N)

↳ Lunghezza del pattino

Distanza cerniera spigolo - pattino

a)

$$N = \int \underbrace{p\cdot dA}_{dN}$$

$$dN \rightarrow dN = p\cdot dx\cdot w = Kx\cdot dx$$

↳ spessore lo supponiamo unitario

$$\hookrightarrow N = K\int_e^{e+b} x\,dx = K\cdot \frac{x^2}{2}\Big|_e^{e+b}$$

$$\Rightarrow \boxed{N = K\cdot\frac{1}{2}\left[(e+b)^2 - e^2\right]}$$

)

$$N\cdot x_0 = \int_e^{e+b} \underbrace{p\cdot dx}_{dN}\cdot x = \int_e^{e+b} Kx^2\,dx = K\frac{x^3}{3}\Big|_e^{e+b} = K\frac{1}{3}\left[(e+b)^3 - e^3\right]$$

$$\frac{\cancel{N}\cdot x_0}{\cancel{N}} = \frac{\frac{1}{3}\cancel{K}\left[(e+b)^3 - e^3\right]}{\cancel{K}\cdot\frac{1}{2}\left[(e+b)^2 - e^2\right]} \rightarrow$$