



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 1901A -

ANNO: 2016

# **A P P U N T I**

STUDENTE: De Luca Alma

MATERIA: Meccanica delle macchine (teoria+esercizi) - Prof.  
Eula

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

5/03/2015

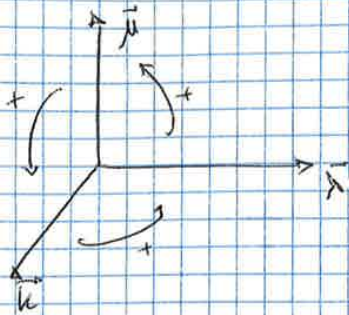
CINEMATICA

TEOREMA 1 -

$r$ : vettore posizione, rotante nel piano, di vettore  $\vec{\lambda}$  e con vel. angolare  $\omega k$

$$\Rightarrow \frac{d(\vec{r})}{dt} = \omega k \wedge r \vec{\lambda}$$

derivata della posizione: velocità  
 " " velocità: accelerazione } se rotante  $\Rightarrow$  angolare



prendo un terzo vettore ausiliario

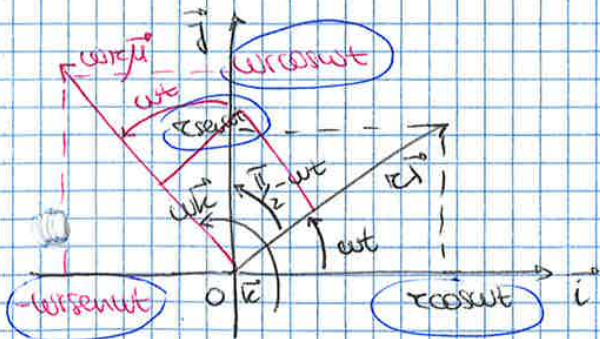
$$\begin{cases} \vec{\lambda} \wedge \vec{\mu} = \vec{k} \\ \vec{\mu} \wedge \vec{k} = \vec{\lambda} \\ \vec{k} \wedge \vec{\lambda} = \vec{\mu} \end{cases} \quad \text{sensu antiorario}$$

valgono anche i viceversa

$$\begin{cases} \vec{\lambda} \wedge \vec{k} = -\vec{\mu} \\ \vec{k} \wedge \vec{\mu} = -\vec{\lambda} \\ \vec{\mu} \wedge \vec{\lambda} = -\vec{k} \end{cases}$$

sensu orario

SIST. DI RIFERIMENTO



vettore rotante nel piano

prendo un 2° vettore  $\perp$  a  $r \vec{\lambda}$

$r \vec{\lambda}$  proiezione su  $Ox (i) \rightarrow r \cos wt$   
 " " "  $Oy (j) \rightarrow r \sin wt$

$\omega r j$  proiezione su  $i \rightarrow -\omega r \sin wt$   
 " " "  $j \rightarrow \omega r \cos wt$

le proiezioni sono le derivate

$$\frac{d(\vec{r})}{dt} = \omega r \vec{\mu}$$

rispetto la regola della derivata del vettore rotante

$$\vec{\mu} = \vec{k} \wedge \vec{\lambda} \Rightarrow \frac{d(\vec{r})}{dt} = \omega r \vec{\mu} = \omega r [\vec{k} \wedge \vec{\lambda}] = \omega k (\vec{k} \wedge \vec{\lambda})$$

$$\omega r \vec{\mu} = \frac{d(\vec{r})}{dt} = \omega k \wedge (r \vec{\lambda})$$

posso sempre esprimere la derivata come prodotto esterno (p. 132)

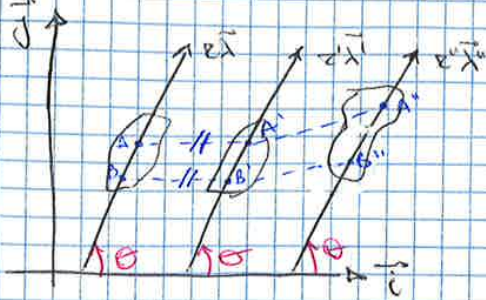
vel. vettore  $\perp$  a  $r$ , ruotato di  $90^\circ$  con modulo moltiplicato per  $\omega$   
 direzione? (rotazione nel senso di  $\omega$ )



MOTI DEL CORPO RIGIDO

- TRASLAZIONE
- ROTAZIONE intorno ad un punto fisso
- ROTOTRASLAZIONE (o moto piano generico)

1) TRASLAZIONE



C.R. si muove, con angolo  $\theta$  costante, lungo  $i$

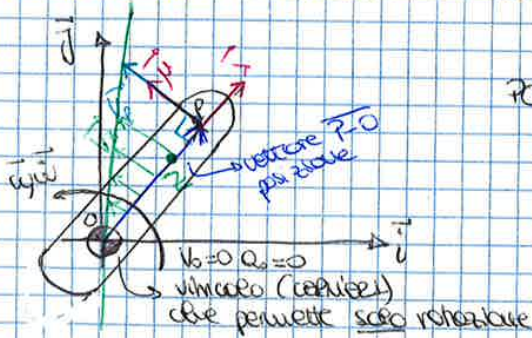
$\theta = \text{cost.}$     $\omega = 0$  (non 1 ruota)    $\dot{\omega} = 0$

$$\vec{v}_A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{AA}'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{BB}'}{\Delta t} = \vec{v}_B$$

Vel. lineare

Moto traslatorio:  $\vec{v}_A = \vec{v}_B$  (velocità)  
 $\vec{a}_A = \vec{a}_B$  (accelerazione)

2) ROTAZIONE INTORNO AD UN ASSE FISSO



$r = r = \text{cost}$  = vettore posizione

$\vec{v}_p$ ?  $\vec{a}_p$ ?

$$\vec{v}_p = \frac{d(\vec{r}_0)}{dt} = \frac{d(r \hat{x})}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{x} + r \frac{d\hat{x}}{dt} = r [\omega \hat{k} \wedge \hat{x}] = \omega r \hat{k} \wedge (\hat{x}) = \Delta$$

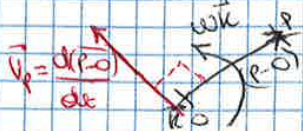
perché  $r = \text{cost}$

$\vec{v}_p = \omega r \hat{k} \wedge (\vec{P}-\vec{O})$

Modulo  $v_p = \omega r$   
 Direzione  $\perp \vec{r}$   
 Verso  $\omega r$   
 ↳ vettore che parte dall'origine o verso il punto P indicato (o centro di rotazione e origine del vettore)

dato che  $\vec{\omega}$  è in verso antiorario  $\rightarrow \rightarrow$  verso sx

$\vec{v}_p \perp (\vec{P}-\vec{O})$



se noto vettore  $(\vec{P}-\vec{O})$  trova la velocità

è punto più vicino all'asse rotazione  
 $(r = \text{cost.}, \frac{1}{2} \text{ valore di } v_p)$



$$\Delta \vec{r}_{A/B} = (\overline{AB}) \vec{n}_S$$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B}$$

↳  $V_A$  rispetto a B

FORMULA FONDAMENTALE DELLA CINEMATICA

$$\vec{V}_{A/B} = \vec{\omega} \times (\overline{A-B})$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B} = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B, \text{tr}} + \vec{a}_{A/B, \text{rot}} = \vec{a}_B - \omega^2 \overline{A-B} + \vec{\omega} \times (\overline{A-B})$$

teorema di Rivals

**RISUMMO**

a)  $\omega=0, \dot{\omega}=0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{V}_A = \vec{V}_B \\ \vec{a}_A = \vec{a}_B \end{cases}$  TRASLAZIONE

b)  $\begin{cases} V_B=0 \\ a_B=0 \end{cases}$  cioè B PTO fisso  $\Rightarrow \begin{cases} \vec{V}_A = \vec{V}_{A/B} = \vec{\omega} \times (\overline{A-B}) \\ \vec{a}_A = -\omega^2 \overline{A-B} + \dot{\omega} \times (\overline{A-B}) \end{cases}$

ROTAZIONE PER VETTORE o un punto fisso

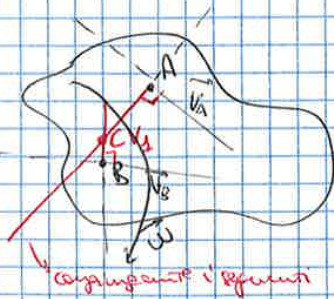
6/03/2015

**METODO ALTERNATIVO PER IL CALCOLO delle VELOCITÀ**

↳ centro di istantanea rotazione (o centro delle velocità)  $C_{CV}$

$\rightarrow V_{CV} = 0$  (in ogni istante)  $a_{CV} \neq 0$

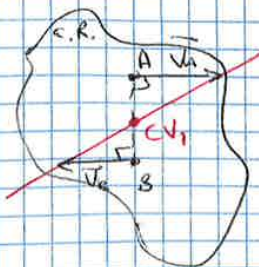
1)  $\vec{V}_A \parallel \vec{V}_B$   $\vec{V}_A \neq \vec{V}_B$   $\omega \neq 0$  solo direzionali (mi serve conoscere solo la loro direzione)



$$\vec{V}_A = \vec{V}_{C_{CV}} + \vec{V}_{A/C_{CV}} = \omega \times (\overline{A-C_{CV}})$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_{C_{CV}} + \vec{V}_{B/C_{CV}} = \omega \times (\overline{B-C_{CV}})$$

2)  $\vec{V}_A \not\parallel \vec{V}_B$   
 devo conoscere modulo, direzione e verso  
 $\vec{V}_A$  e  $\vec{V}_B$  direzionali (cioè ve. opposte)





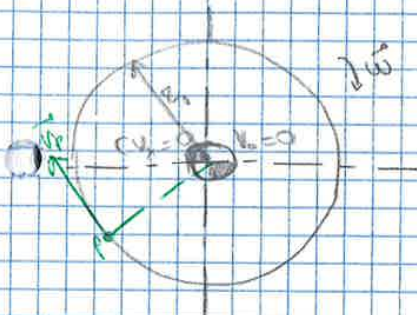
$$\vec{V}_G = \vec{V}_{G/O} + \vec{V}_{G/CV_G} = \omega \vec{k} \wedge (\vec{G} - CV_G)$$

$$\vec{V}_H = \vec{V}_{H/O} + \omega \vec{k} \wedge (\vec{H} - CV_H)$$

$$\vec{V}_P = \vec{V}_{P/O} + \vec{V}_{P/CV_P} = \omega \vec{k} \wedge (\vec{P} - CV_P)$$

$$\vec{V}_Z = \vec{V}_{Z/O} + \vec{V}_{Z/CV_Z} = \omega \vec{k} \wedge (\vec{Z} - CV_Z)$$

- M |  $V_p = \omega(PCV_P)$
- D |  $\perp PCV_P$
- N |  $\vec{\omega}$



$$\vec{V}_P = \vec{V}_{P/O} + \vec{V}_{P/O} = \omega \vec{k} \wedge (\vec{P} - O)$$

- M |  $\omega PO$
- D |  $\perp PO$
- N |  $\vec{\omega}$

**VINCOLI**

SIMBOLO	NOME	(gradi di libertà) GDL	MOTI PERMESSI
	CARRELLO	2	
	CERNIERA	1	
	PATINO	1	
	INCASTRO	0	ZERO

cerchio attaccato in due settori  
=> fissa quel corpo

**FORMULA di GRÜBLER**

Calcolo dei GDL di un meccanismo piano

$$x = 3(m-1) - 2C_1 - C_2$$

$x$ : n° gdl sistema

$m$ : n° di C.R. compreso il telaio

$C_1$ : n° di vincoli a 1 gdl

$C_2$ : n° di vincoli a 2 gdl

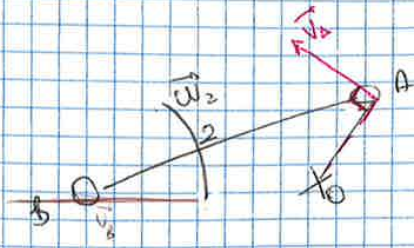


→  $\omega_1 = \frac{2\pi \cdot 60}{60} = 157,07 \text{ rad/s}$

$\omega = \frac{2\pi \cdot 60 \text{ giri/min}}{60 \text{ secondi}}$

→  $v = \omega \cdot AO = v_A = 32,98 \text{ m/s}$

AB:



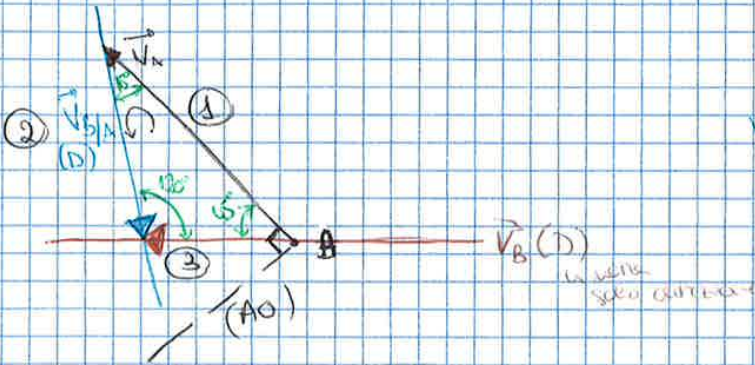
caso so la direzione di  $\vec{v}_B$   
→ ho la direzione

$\vec{\omega}_1 \neq \vec{\omega}_2$

$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} = \vec{v}_A + \omega_2 \vec{k} \wedge (\vec{B}-\vec{A})$

H	?	orizzontale	NON	$\omega_1, \omega_2 = ?$
D	?			$\perp BA$
v	?			$(\omega_2)?$

1 velocità nota in H, D, v  
e le altre due note almeno in D  
→ posso procedere con la risoluzione



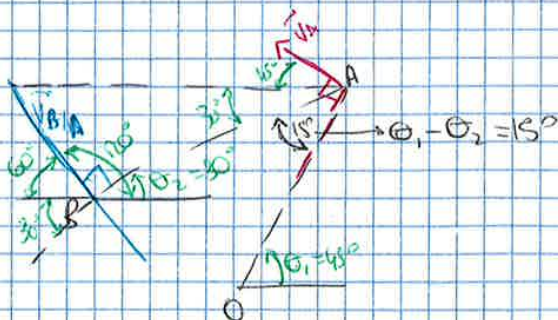
$v_{B/A} \perp BA$

$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$

$\textcircled{3} = \textcircled{1} + \textcircled{2}$

somma  $\textcircled{1}$  e  $\textcircled{2}$  (caso di vettore in serie)

$\vec{v}_B$  è la risultante



$v_{B/A} \perp AB$  (si conosce)

teo. dei seni

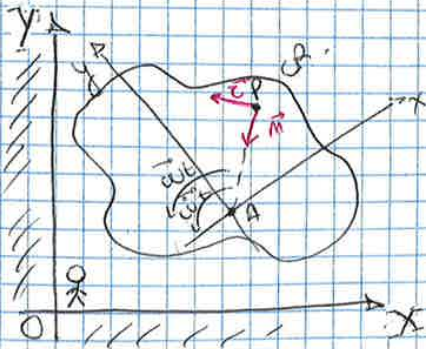
$\frac{v_A}{\sin 20^\circ} = \frac{v_{B/A}}{\sin 5^\circ} \Rightarrow v_{B/A} = 26,93 \text{ m/s}$

$\frac{v_A}{\sin 20^\circ} = \frac{v_B}{\sin 15^\circ} \Rightarrow v_B = 9,85 \text{ m/s}$



## MOTO COMPOSTO

12/03/2015



- 1) Nel moto semplice le distanze sono costanti  $\rightarrow$  solo corpi rigidi con vincoli esterni
- 2) Nel moto composto  $\neq$  distanze/ampiezze che cambiano dentro il sistema. (es:  $PA \neq \text{cost.} \Rightarrow$  moto composto)

MOTO COMPOSTO  $\rightarrow$  3 tipi di moti (rotatorio, di traslazione, assiale)

### 1. MOTO RELATIVO

Moto di P nel caso di corpi rigidi ( $PA \neq \text{cost.}$ )  
(es: passeggero P che sul treno si alza e cammina)

### 2. MOTO DI TRASLAMENTO

Moto di P con sist. di riferimento mobile  $[A; xy]$   
(es: passeggero P che si muove con il treno giacendo sul sedile)

### 3. MOTO ASSOLUTO

Moto di P come composizione dei moti relativo e traslazionale e quello che vede l'osservatore fisso su OXY

## FORMULE DEL MOTO COMPOSTO

$$\vec{v}_{P/iss} = \vec{v}_{P/rel} + \vec{v}_{P/tr.} \quad \text{velocità}$$

$$\vec{a}_{P/iss} = \vec{a}_{P/rel} + \vec{a}_{P/tr.} + \vec{a}_{co} \quad \text{accelerazioni}$$

$\hookrightarrow$  acc. di Coriolis

$$\vec{a}_{co} = 2\vec{\omega}_{tr} \vec{k} \wedge \vec{v}_{P/rel} \quad \text{ACCELERAZIONE COMPLEMENTARE (o di Coriolis)}$$

Il punto P risente dei moti rel. e di traslazione.  
Moto di traslazione  $\neq$  ANGOLARE (se no  $\vec{a}_{co} = 0!$ )



nel sistema (2)

$$\vec{V}_{PASS} = \vec{V}_{P/O_1} + \vec{V}_{P/O_2}$$

nel sistema (1)

$$\vec{V}_{PASS} = \vec{V}_0 + \vec{V}_{P/O_1} = \omega_1 \vec{k} \wedge (\vec{P}-\vec{O}_1)$$

rotazione attorno ad un p.to fisso

- H |  $\omega_{PO} = 47,3 \text{ rad/s}$
- D |  $\perp PO$  perché ricalcola di un p.lett.
- V |  $(\vec{\omega})$



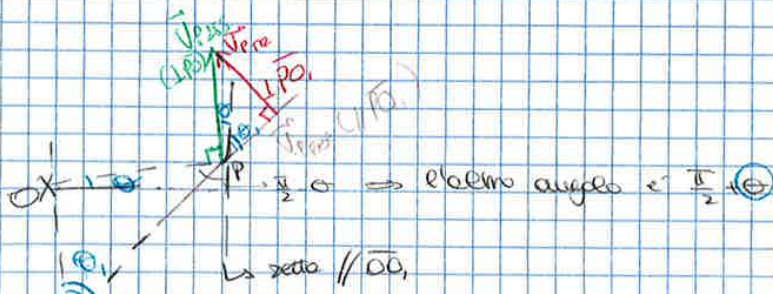
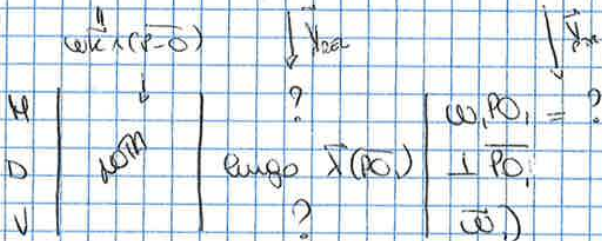
$\vec{v}_{P/O_1}$  forma di  $90^\circ$  nel senso di  $\vec{\omega}$  rispetto a  $(\vec{P}-\vec{O}_1)$

nel sistema (2)

$$\vec{V}_{P/O_1} = + \vec{V}_P \vec{x} \quad \text{traslazione di P lungo } \vec{x}$$

$$\vec{V}_{P/O_1} = \vec{V}_0 + \vec{V}_{P/O_1} = \omega_1 \vec{k} \wedge (\vec{P}-\vec{O}_1)$$

$$\vec{V}_{PASS} = + \vec{V}_{P/O_1} \vec{x} + [\omega_1 \vec{k} \wedge (\vec{P}-\vec{O}_1)]_{TR}$$

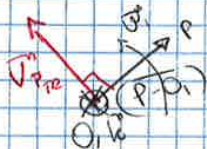


meccanica

$$V_{P/O_1} = V_{PASS} \cos(\theta + \theta_1) = 27,91 \text{ m/s}$$

$$V_{P/O_1} = V_P \sin(\theta + \theta_1) = 27,93 \text{ m/s}$$

$$\omega_1 = \frac{V_{P/O_1}}{O_1P} = 63,22 \text{ rad/s}$$

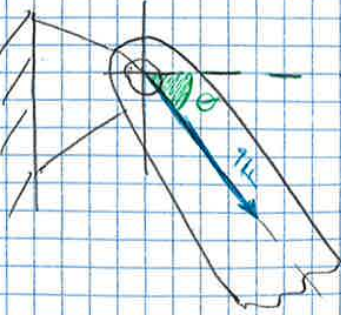


però  $(\vec{P}-\vec{O}_1)$  su  $V_{P/O_1}$  (di  $90^\circ$ )  $\Rightarrow$  stesso direzione  $\vec{\omega}_1$



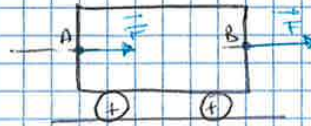
**FORZE**

13/03/2015



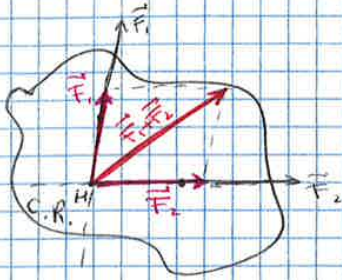
il vettore FORZA è descritto da  
MODULO, DIREZIONE, VERSO e  
PUNTO di APPLICAZIONE

Nei corpi rigidi vale il PRINCIPIO di  
TRASLATABILITÀ



posso traslare il  
vettore forza lungo  
la sua retta  
d'azione senza  
modificare l'esultato  
bravo del c.r.

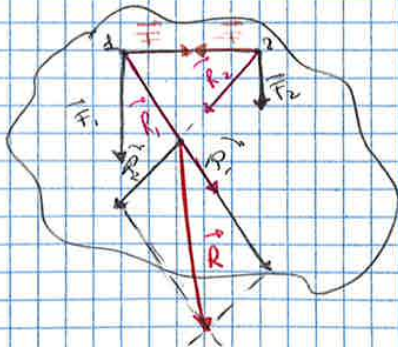
**COMPOSIZIONE di VETTORI FORZA**



prolungando i vettori fino al punto di  
intersezione e traccio le due forze in  
quel punto (H)

→ uso regola del parallelogramma per  
trovare la risultante

**COMPOSIZIONE di F //**



aggiungo e tolgo stessa forza F

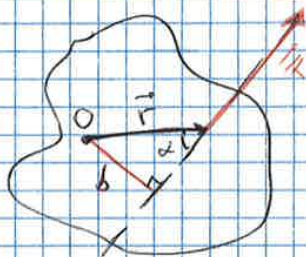
traccio  $\vec{R}_1$  e  $\vec{R}_2$  e poi trovo risultante  
fra queste due  $\vec{R}$

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

**MOMENTO di UNA F**

$$M_o = \vec{r} \times \vec{F}$$

momento di  $\vec{F}$  rispetto ad O



non dipende ma  
dal punto di  
applicazione  
a braccio della F

$$M_o = rF \sin \alpha \quad (\vec{k})$$

uscite dal piano  
(i'm O)

$$r \sin \alpha = b$$

con  $b \cdot F$

$$M_o = b F \vec{k}$$

$$[M_o] = N \cdot m$$

b = braccio di F rispetto ad O

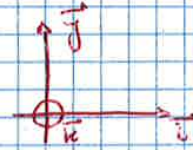
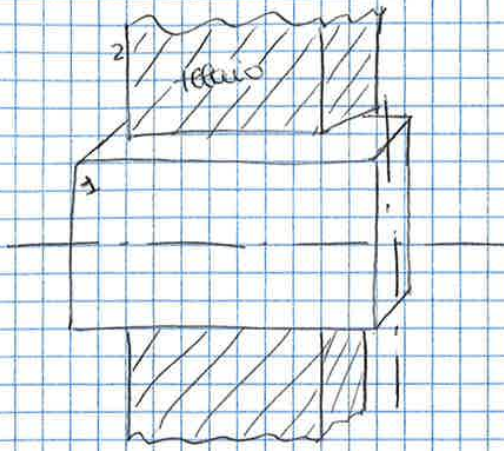
$M_o$  uscite



REAZIONI VINCOLARI

\* Vincoli  $\rightarrow$  coppie cinematiche  $\rightarrow$  moto relativo tra le parti che dipende dalle forme delle superfici

a) COPPIA PRISMATICA

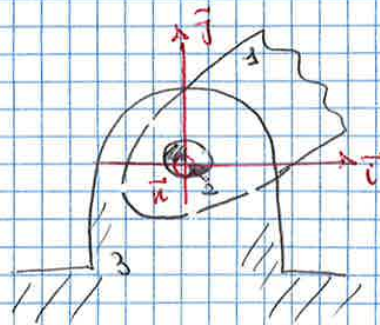
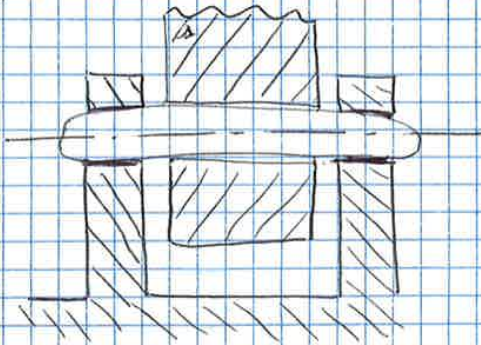


$\omega_i$  rotazione attorno ad  $i$   
il corpo uno TRASLA rispetto ad 2

$\begin{cases} V_x \neq 0 \\ V_y = 0 \\ \omega_i = 0 \end{cases} \Rightarrow$  spazio e vincolo e separa le parti  $\Rightarrow$  due c'è zero (vincoli netto e reaz vincolari) (in quei punti il corpo non è libero)

Reazioni vincolari della coppia prismatica (SENZA attrito)  $\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y \neq 0 \\ M_i \neq 0 \end{cases}$

b) COPPIA ROTAZIONALE o CERNIERA



SEZIONE

FRONTE

$\begin{cases} V_x = 0 \\ V_y = 0 \\ \omega_k \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_x \neq 0 \\ R_y \neq 0 \\ M_k = 0 \end{cases}$  Reazioni vincolari nella cerniera piana (SENZA attrito)

\* La forma delle superfici di contatto tra due corpi durante il moto relativo ne determina il tipo di moto che

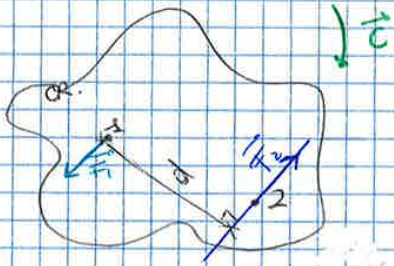
Superfici delle SUPERFICIE convergenti  $\rightarrow$  definiscono il vincolo cinematico tra 2 corpi accoppiati

Il contatto tra le superfici durante il moto è variabile e la loro forma  $\Rightarrow$  COPPIE cinematiche) o  $\times$  le forze risultanti  $\Rightarrow$  Accoppiamento di forze



2) C.R. soggetto a 2 FORZE e 1 coppia C

nota  $F_1 (H, D, V)$

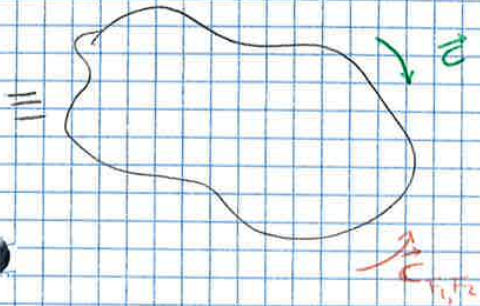


Coppia C dall'esterno

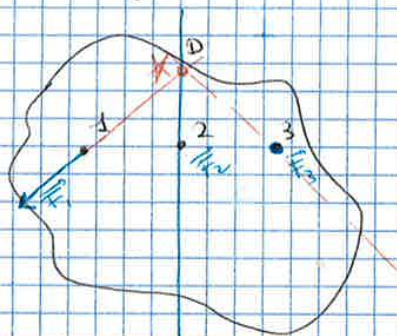
- N |  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$
- D |  $\vec{F}_1 \parallel \vec{F}_2$
- V |  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  verso opposto

equilibrio  $C = F_2 d$

$\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  formano coppia di forze uguali e opposte a  $\vec{C}$



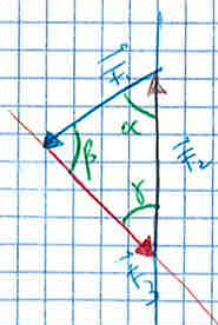
3) C.R. soggetto a 3 FORZE



- $F_1$  nota  $H, D, V$
- $F_2$  nota  $D$
- $F_3$  nota punto di applicazione

anche  $F_3$  deve passare per il punto di stella \* affinché si sia equilibrio per i momenti  $\sum_{i=1}^n M_i = 0$

\*  $F_1 \cdot 0 + F_2 \cdot 0 + F_3 \cdot 0$



opo aver trovato il punto di stella le tre direzioni  $\Rightarrow$  triangolo forze

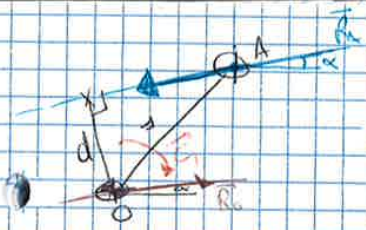
triangolo delle forze per avere equilibrio della macchina

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$$

con gli angoli noti  $\Rightarrow$  tre seni  $\Rightarrow$  ottengo i moduli di  $\vec{F}_2$  e  $\vec{F}_3$



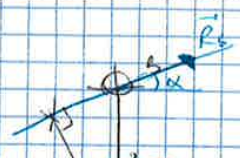


2° regola  
 soggetto a due F e un coppia  
 $\vec{R}_A$  inclinata di  $\alpha$   
 $|\vec{R}_A| = |\vec{R}_B|$   
 $\vec{R}_A // \vec{R}_B$  e opposte  
 $\vec{R}_B$  opposta a C  
 $C_1 = R_A d$



ASTA SCARICA  
 per due C.R. soggetto a due forze (massimando il peso)  
 1° regola  
 direzioni  $\vec{R}_A$  e  $\vec{R}_B$  noto

$|\vec{R}_A| = e$  opposta  $|\vec{R}_B|$   
 $\rightarrow$  asta in compressione



2° regola  
 $R_B$  e  $R_A$  uguali e opposte  
 $C_3$  opposta alla coppia di F  
 $C_3 = d_3 R_B$   
 $|\vec{R}_B| = |\vec{R}_A|$   $\vec{R}_B // \vec{R}_A$

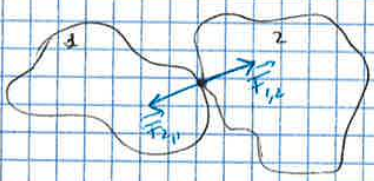
LEGGI DELLA DINAMICA (o di NEWTON)

- Una particella resta a riposo o continua a muoversi di moto rettilineo uniforme se la risultante di tutte le forze ad essa applicate è nulla
- L'accelerazione di una particella è proporzionale alla risultante di tutte le forze ad essa applicate

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{est,i} = m \vec{a}$$

[m] = kg, scelta, indica la resistenza del corpo a modificare lo stato relativo attuale  
 massa

- Le forze di azione e di reazione tra corpi che interagiscono sono uguali in modulo, stessa retta d'azione e verso opposto



due corpi a contatto  
 $\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$   $\vec{F}_{1,2} = F_{2,1}$  (moduli)  
 forze esercitate dal corpo 1 su 2

Riformulazioni

- C.R. massa e moto

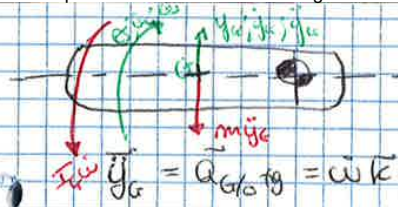
G = baricentro (centro di massa)

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{est,i} = m \vec{a}_G \quad (\times \text{vel. traslazionale spostamento del C.R. qualunque di un punto materiale})$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_{est,i} = I_G \vec{\omega} \quad (\times \text{vel. angolare})$$

$I_G$  = momento di inerzia baricentrico, indica la resistenza del corpo a variare lo stato rel. angolare  
 $[I_G] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$





$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \vec{a}_{G/O} + \vec{a}_{G/O} \times \vec{\omega}$$

$$I_G \ddot{\omega} = \vec{a}_{G/O} \times m \vec{r}_{GO} = \ddot{\omega} k \cdot l (\vec{r}_{GO})$$

$$\begin{matrix} M & | & \ddot{y}_G = \ddot{\omega} (l_0) \\ D & | & \perp \vec{r}_{GO} \\ V & | & \ddot{\omega} \end{matrix}$$

$$O) \uparrow I_G \ddot{\omega} + (m \ddot{y}_G) l_0 + \dots = 0$$

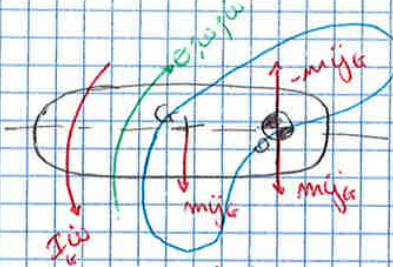
$$O) \uparrow I_O \ddot{\omega} + \dots = 0$$

$$O) \uparrow I_O \ddot{\omega} + \cancel{(m \ddot{y}_G) l_0} + \dots = 0$$

NO!!!

$I_G$  vettore libero

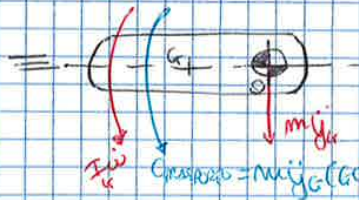
tenere sempre le azioni di inerzia riferite al baricentro G!



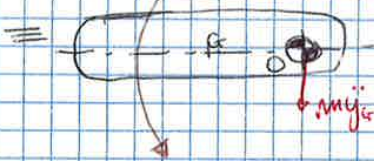
$$C_{traslato} = m \ddot{y}_G(t_0)$$

aggiungo il momento di trasporto

$$l \ddot{\omega} = \ddot{\omega} l_0$$



$$[I_G + m(l_0)^2] \ddot{\omega} = I_O \ddot{\omega}$$



$$C_{traslato} = m (\ddot{\omega} l_0) l_0 = m (l_0)^2 \ddot{\omega}$$



MOMENTI di INERZIA (di massa)

a) MASSA CONCENTRATA

$$I = m (PO)^2 \quad [I] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

b) SISTEMA DISCRETO

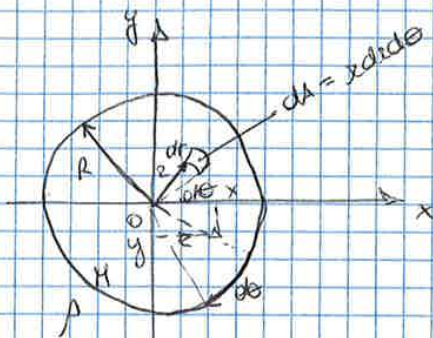
$$I_0 = \sum_{i=1}^n m_i (P_i O)^2$$

c) SISTEMA CONTINUO

$$I_0 = \int_V z^2 dm = \int_V z^2 (\rho dV) = \int_A z^2 (\rho dA)$$

$$\rho = \frac{dm}{dV} \text{ (densità)}$$

• DISCO SOTTILE (più minimo)



Momento di inerzia assiale:

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_V z^2 dm = \int_V z^2 (\rho dV) = \int_A z^2 (\rho dA) \\ &= \rho \int_0^R z^2 r dr \int_0^{2\pi} d\theta = \rho \left( \frac{R^4}{2} \right) 2\pi \\ I_0 &= \underbrace{\rho (\pi R^2)}_{\text{Area}} \frac{R^2}{2} = \frac{MR^2}{2} \end{aligned}$$

dz: incremento di z lungo il raggio

Momento di inerzia diametrale

$$I_x = \int_V y^2 dm \quad I_y = \int_V x^2 dm$$

$$I_x = I_y$$

↳ per simmetria

$$I_0 = \int_V z^2 dm = \int_V x^2 dm + \int_V y^2 dm = I_y + I_x$$

essendo  $I_x = I_y$

$$\Rightarrow I_x = I_y = \frac{I_0}{2} = \frac{MR^2}{4}$$



**POTENZA**

$$P = \frac{dL}{dt} \quad [W]$$

la potenza misura la capacità di una macchina di compiere lavoro o di trasportare energia

**POTENZA di UNA FORZA**

$$P = \frac{dL}{dt} = F_t \frac{ds}{dt} = F_t \cdot v \quad P > 0 \text{ se } F_t \cdot ds > 0$$

$\leftarrow \vec{F} \text{ lungo } d\vec{s}$

**POTENZA di UNA COPPIA**

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{H \cdot \omega}{dt} = H \cdot \omega \quad P > 0 \text{ se } H \cdot \omega > 0$$

$$P_{tot} = F_t \cdot v + H \cdot \omega \quad \text{se agiscono contemporaneamente forza e coppia}$$

**RENDIMENTO**

$$\eta = \frac{P_u}{P_e} \leq 1$$

$\leftarrow$  c'è sempre perdita di energia

$P_u$  = potenza utile (ottenuta da una macchina)  
 $P_e$  = potenza estratta (fornita alla macchina)  
 attrito  $\rightarrow L < 0 \rightarrow$  calore

**QUANTITÀ di MOTO**

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = m \vec{v}_G$$

$$\vec{F}_{inerzia G} = -m \vec{a}_G = -m \frac{d\vec{v}_G}{dt} = -\frac{d\vec{Q}}{dt}$$

diversa formulazione 2° legge di Newton  $\rightarrow$

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_{est i} = \frac{d\vec{Q}}{dt}$$

**TEOREMA della QUANTITÀ di MOTO**

Se un sist. isolato vede assenza di  $\vec{F}_{est}$  o  $\sum_{i=1}^N \vec{F}_{est i} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{Q}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{Q} = \text{cost.}$

$\Rightarrow$  definito anche **TEOREMA della CONSERVAZIONE della QUANTITÀ di MOTO**

$$\int \sum_{i=1}^N \vec{F}_{est i} dt = \text{IMPULSO UTERO}$$

**MOMENTO della QUANTITÀ di MOTO**

$$\vec{k}_G = I_G \vec{\omega}$$

$$\vec{k}_P = \vec{r} \wedge \vec{Q}$$

$\vec{r}$ : vettore posizione di  $m$  rispetto a  $P$   
 $\vec{Q}$ : quantità di moto di  $m$

MOTO PIANO  $\vec{H}_{in G} = -I_G \vec{\omega} = -I_G \frac{d\vec{\omega}}{dt} = -\frac{d\vec{k}_G}{dt}$

$\vec{k}_G \cdot dt = \text{IMPULSO ANGOLARE}$

$\rightarrow$  In equilibrio  $\sum_{i=1}^N H_{est i G} + H_{in G} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^N H_{est i G} = -H_{in G}$

$$\sum_{i=1}^N H_{est i G} = \frac{d\vec{k}_G}{dt}$$

diversa formulazione 2° legge di Newton

**TEOREMA della CONSERVAZIONE del MOMENTO di  $\vec{Q}$**

Se in un sistema isolato si ha assenza di  $H_{est}$  applicati o

$$\sum_{i=1}^N H_{est i G} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{k}_G}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{k}_G = \text{cost.}$$

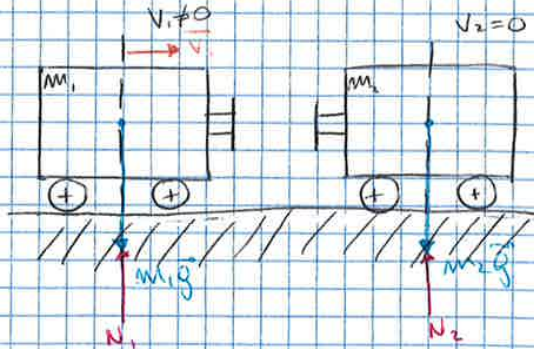
**CONSERVAZIONE di  $\vec{Q}$**

Se in un certo  $dt$  la risultante delle forze est. agenti è nulla

$\rightarrow \Delta \vec{Q} = 0 \Rightarrow \vec{Q} = \text{cost.}$  (PRINCIPIO di CONSERVAZIONE di  $\vec{Q}$ )



**URTO ANNELASTICO**



in seguito all'urto i due corredi si appiccicano e si muovono insieme (cioè produce perdita di energia!)

⇒ si mantengono gli attriti!

$$\sum \vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = 0 \Rightarrow Q = \text{cost.}$$

$$Q_i = Q_f \Rightarrow m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2) v_f \quad \text{no hanno stessa } v_f \text{ perché si appiccicano}$$

$$\Rightarrow v_f = \frac{m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2}$$

c'è dissipazione di energia cinetica  $\Delta E_c = E_{c,f} - E_{c,i} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2$

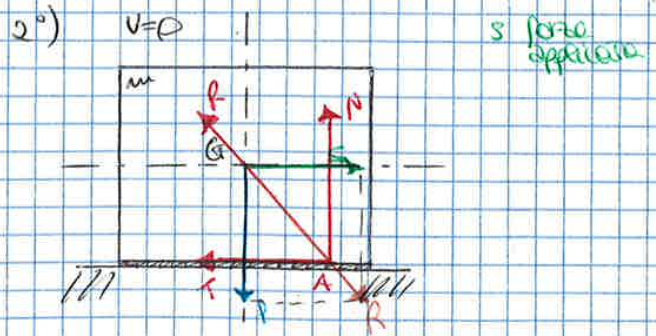
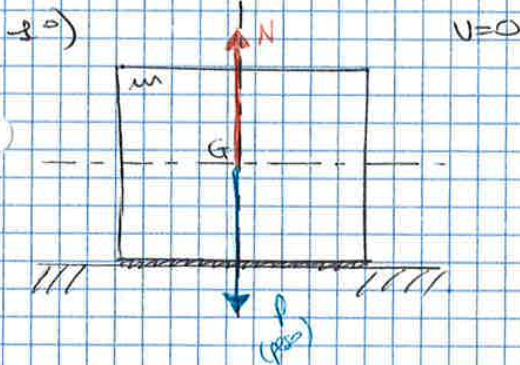
9/04/2015

**Attrito** (testo: Boffardi)

I fenomeni di attrito NON sono lineari

- 1) attrito di ADERENZA (o STATICO)
- 2) attrito di STRISCIO (o RADENTE)
- 3) attrito VOLVENTE

**1) Attrito di aderenza**

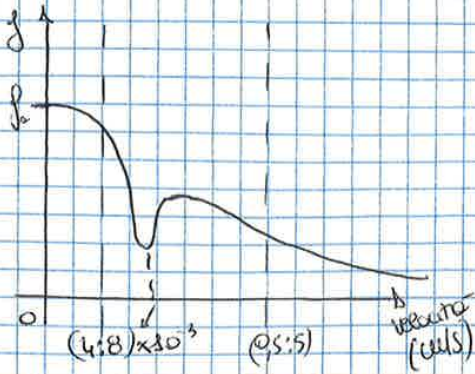


R risultante del piano opposto a R con ciò esercitata da P+S (R ha componente // e ⊥ piano)

- N: componente di R ⊥ al piano di appoggio
- T: componente di R // - - - - - appoggio
- T è opposta a S (direzionale)
- T = FORZA di ATTRITO
- se ↑ S ⇒ ↑ T

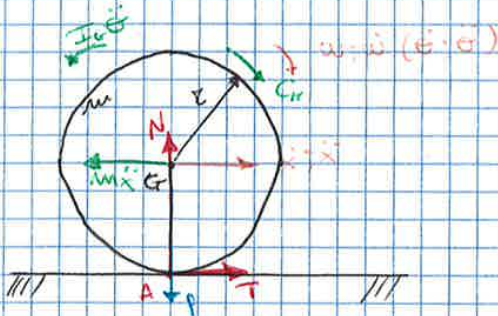
Tutto questo fenomeno che precede il moto è detto fenomeno di ADERENZA ed ha modello matematico  $T \leq f_0 N$





in realtà  $f$  positivo e velocità sono influenzati  $\rightarrow f$  considerato = cost.

RUOTA NEOPRICE



$$\begin{cases} G) & C \\ \uparrow & N = \\ \rightarrow & P - mx\ddot{x} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

**NERO**  
 $C_R$  e  $\omega$  CONCORDI  
 $C_R$  e  $\omega$  DISCORDI (in genere)  
 $C_R$  e  $\ddot{\theta}$  DISCORDI  
 $C_R$  e  $\ddot{\theta}$  CONCORDI  
 $T$  concorde a  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{x}$  nella zona anteriore (opposto a  $\omega$ )  
 $T$  discorde nella zona posteriore

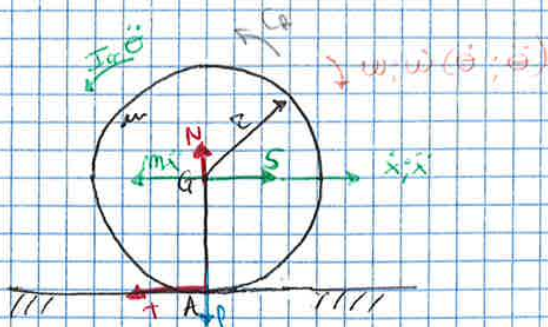
H<sub>p</sub> di ADERENZA:  $T < f_0 N \rightarrow$  puro rotolamento  $\rightarrow \ddot{x} = r\ddot{\theta}$  (4)

T opposto al moto!!  
 Il sistema ha 1 gdl

se  $T \leq f_0 N \Rightarrow \ddot{x} = r\ddot{\theta}$  (1 gdl)

se  $T > f_0 N \Rightarrow \ddot{x} \neq r\ddot{\theta} \Rightarrow$  la ruota scivola  $\Rightarrow$  2 gdl  $\Rightarrow \boxed{T > f_0 N}$  (4)  
 attenzione di strisciamento

RUOTA MASSIMATA



T opposto al moto!

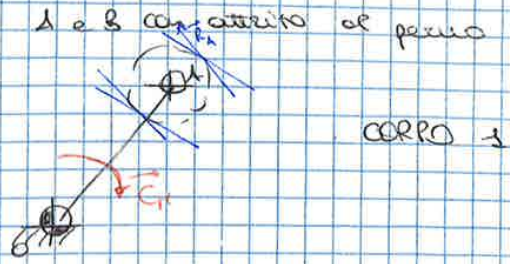
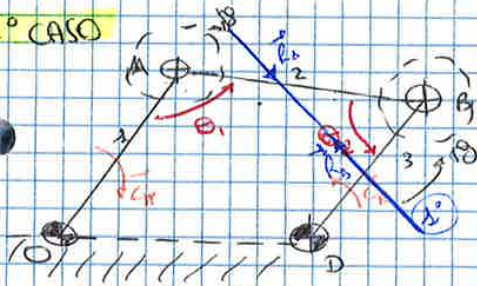
$$\begin{cases} G) & -I_G \ddot{\theta} + Tr = 0 & (1) \\ \uparrow & N - P = 0 & (2) \\ \rightarrow & S - T - mx\ddot{x} = 0 & (3) \end{cases}$$

H<sub>p</sub> ADERENZA (puro rotolamento) (1 gdl)  
 $\begin{cases} T < f_0 N \\ \ddot{x} = r\ddot{\theta} \end{cases} \quad (4)$   
 $A \equiv C_V$



QUADRILATERO ARTICOLATO CON APERTO AL PERNO

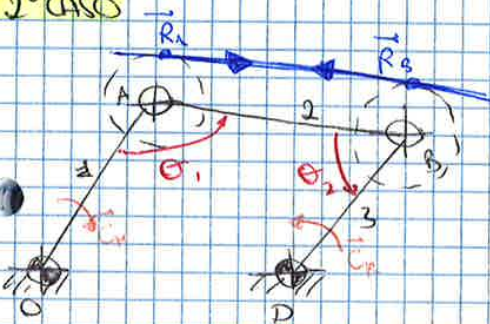
1° CASO



sul corpo 2  $R_1$  uguale e opposto

$R_3$  dal equilibrio delle forze scivolo

2° CASO

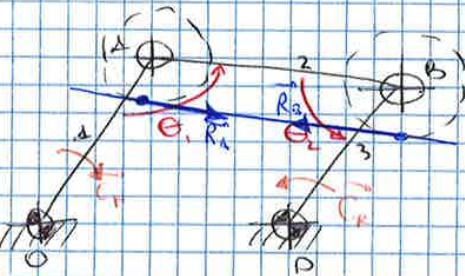


(NO)

questo caso NON va bene perché  $R_1$  è opposto a  $\theta_1$ , ma  $R_3$  NON è opposto a  $\theta_2$

→ NON vengono rispettate tutte le regole dell'attrito al perno

3° CASO

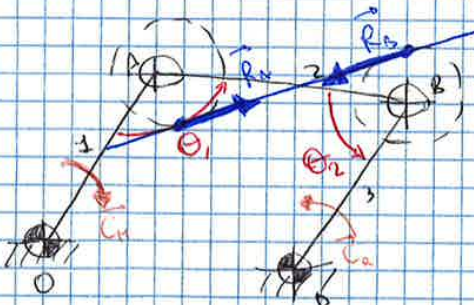


(NO)

$R_1$  concorde a  $\theta_1$

→ NON va bene

4° CASO



(NO)

se  $R_1$  e  $R_2$  sono concordi a  $\theta_1$  e  $\theta_2$

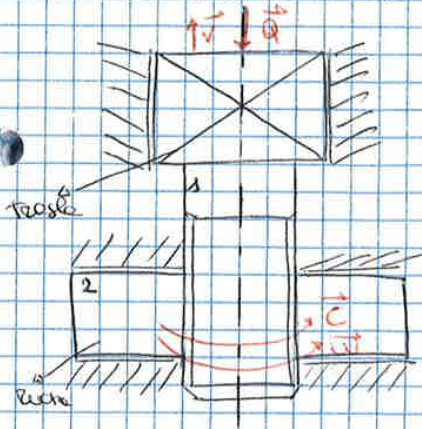
→ NON va bene

L'unico caso accettabile è il primo!



**SISTEMA VITE-MADREVITE**

10/04/2015



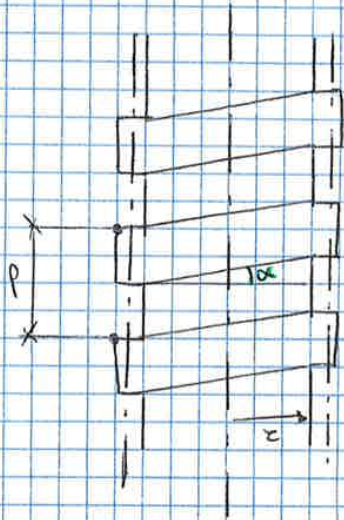
- 1 - vite
- 2 - madrevite

viti a profilo rettangolare con rendimento maggiore

$\vec{Q}$  = carico esterno

$\vec{C}$  = coppia da spezzare stesso madrevite per mettere in movimento  $\vec{Q}$

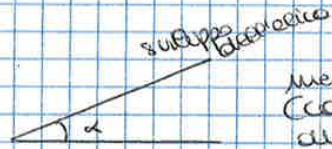
**VITE A PROFILO RETTANGOLARE**



$r$  = raggio dell'elica media

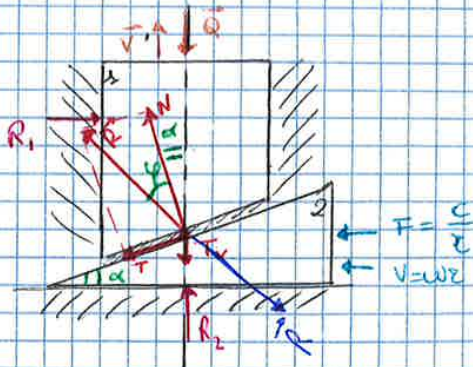
$\alpha$  = angolo di inclinazione

$p$  = passo della vite (distanza percorrea tra due punti successivi dello stesso filetto)



medio sul piano (considero un solo piano di cui se la vite, giacché un piano  $\neq$ )

**Studio il sistema tramite i cunei equivalenti**



$\mu_p = \tan \phi$  SENZA AFRITO (con  $R_1$  e  $R_2$ )

prendo la T con un certo verso poi la progetto lungo la verticale  $\rightarrow T_v$  opposta a  $\vec{v}$

$T = pN$

$\tan \phi = f$

(la madrevite ruota e la vite trasla)

sul capo 1

$\uparrow -Q + R \cos(\alpha + \phi) = 0$

$\rightarrow -R \sin(\alpha + \phi) + R_1 = 0$

sul capo 2

$\rightarrow R \sin(\alpha + \phi) - F = 0$

$\uparrow -R \cos(\alpha + \phi) + R_2 = 0$



Tipi di freno (tipologie base)

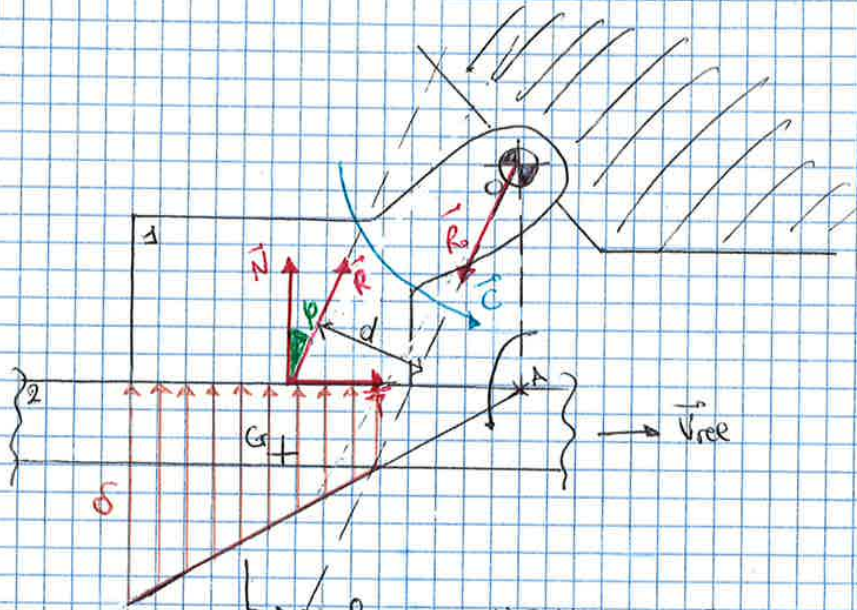
- 1) Freno a pattino ad accostamento rigido
- 2) Freno a pattino ad accostamento elastico
- 3) Freno a tamburo ad accostamento rigido
- 4) Freno a tamburo ad accostamento elastico
- 5) Freno a disco ad accostamento rigido
- 6) Freno a nastro

Tipi di frizioni

- 1) Frizione piana
- 2) Frizione piana a dischi multipli
- 3) Frizione conica

FRENI

1) FRENO A PATTINO PIANO AD ACCOSTAMENTO RIGIDO



- 1 - pattino (1 GDL)
- 2 - nastro (caviglia)

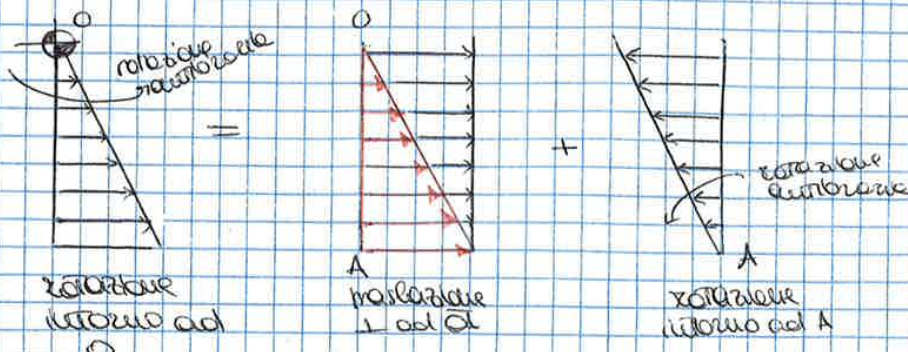
patino incrementato  
della velocità  
freno a nastro in  
momento

Spessore di usura consumata  
si ha una distribuzione TRAPEZIA di  $\delta$  essendo  $p$  o  $\delta$   
 $\Rightarrow$  anche  $p$  sarà data da una distribuzione trapezia

Applicando ipotesi dell'usura  $\Rightarrow \delta = k_f p v_{rel}$   
 $L_{cost. usura} \times usura$   
 $L_{cost.}$

$\Rightarrow p = k \delta$

La rotazione intorno ad O è ANTIORARIA e fa scivolare in una  
 direzione  $\perp$  ad OA. e una rotazione intorno ad A (che produce usura)

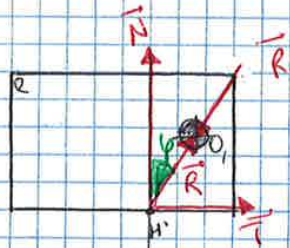


Sommando queste due ho rotazione effettiva  
 intorno ad O

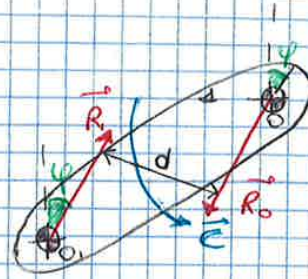


D.C.L

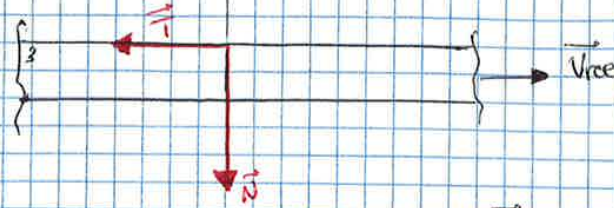
1<sup>a</sup> regola del DCL



partito  $\rightarrow$  DCL  
 il suo moto = rotazione attorno ad O + traslazione attorno ad O



2<sup>a</sup> regola del DCL



• Nel corpo 2 ho solo due risultanti  $\vec{R}$  (dette forze d'attrito)  $\vec{R}_1$  di  $O_1$   
 $\rightarrow$  Devono avere stessa direzione, so che  $\vec{R}$  deve passare in  $O$ , e  $\vec{R}$  è inclinata rispetto a  $\vec{N}$  di  $\varphi \rightarrow \varphi = \arctg f$

Il vettore è definito grazie alla retta che passa per  $O$ , e inclinata di  $\varphi$  rispetto alla verticale

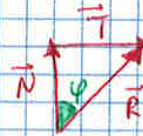
• Nel corpo 1 ho  $\vec{R}_1$  uguale e contrario a quello nel corpo 2, poi determino  $\vec{R}_0$  in modo che  $\vec{R}_1$  ed  $\vec{R}_0$  formino una coppia opposta a  $\vec{C}$  (e uguale)

$\rightarrow |\vec{R}_1| = |\vec{R}_0|, \vec{R}_1 \parallel \vec{R}_0$

Faccio equilibrio di rotazione intorno ad O

0)  $C - R_1 \cdot d = 0$

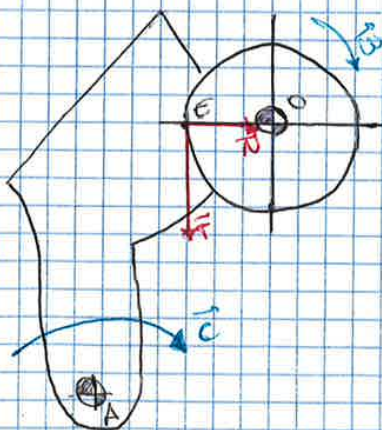
$|\vec{R}_1| = |\vec{R}_0| = |\vec{R}| = \frac{C}{\text{semp}}$



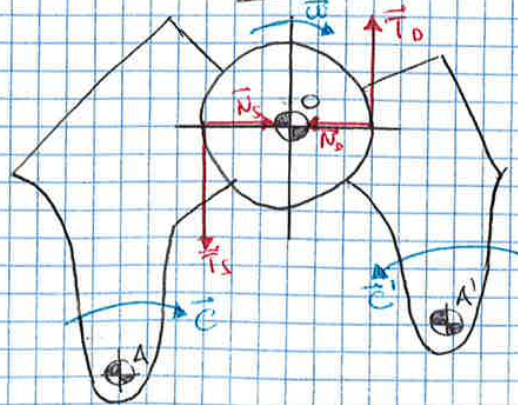
$C = \frac{T \cdot d}{\text{semp}}$

3) FRENO A TAMBURO (ceppo + tamburo)

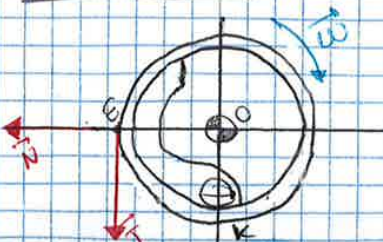
CEPPO ESTERNO



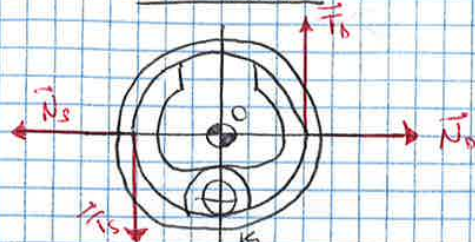
CEPPI ESTERNI



CEPPO INTERNO



CEPPI INTERNI

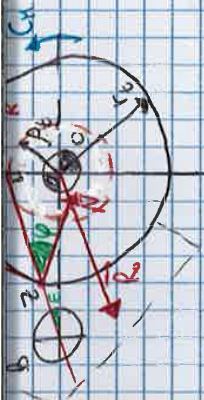




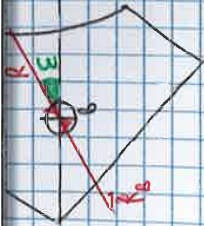
un punto e R  
 cello come una  
 bilocale

$A_t = \text{raggio del}$   
 sistema di  
 attrito

$$\Rightarrow \vec{A}_t = \vec{r}_t \text{ semp}$$



$$\vec{A}_t = (r_1 + r_2) \text{ semp} \Rightarrow \epsilon = \cos \text{sen} \left( \frac{A_t}{a + r_c} \right)$$



La  $\vec{R}$  deve essere  $\perp$  al vettore di attrito opposta a  $\vec{A}_t$  e passante per z  
 $\Rightarrow$  in questo modo trova z, in cui applico  $\vec{T}$  e  $\vec{N}$

sue cello mentre la  $\vec{R}_b$  eguale e opposta a  $\vec{R}$ , inclinata rispetto all'orizzontale di  $\epsilon$

$\rightarrow$  equazione di rotazione

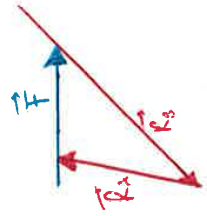
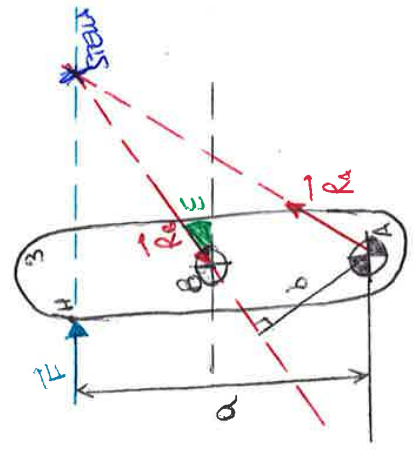
0)  $C_H - R_A = 0$  con  $\vec{R} // \vec{R}_b$ ,  $|\vec{R}| = |\vec{R}_b|$ ,  $T = fN = Tg \psi N$

$\rightarrow$  RELAZIONI DI MISURO

$$\|\vec{R}\| = \|\vec{R}_b\| \text{ RELAZIONI SUE CELLO}$$

D.C.L. stessa linea

3) regola



equazione di rotazione

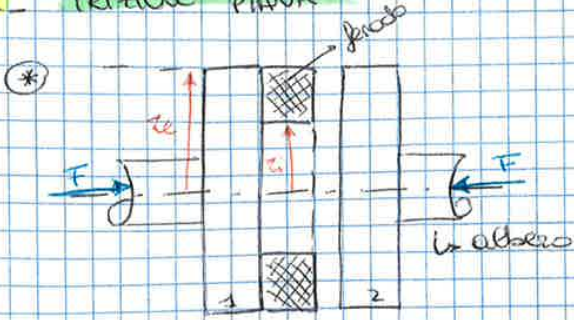
A)  $Fa - R_b b = 0$

RELAZIONI SULLA LINEA



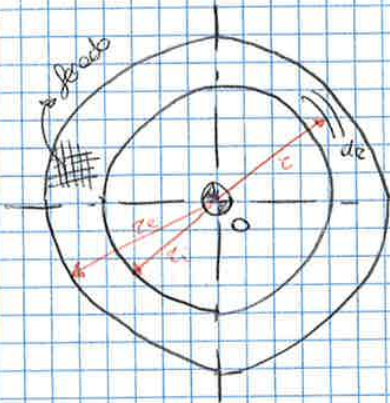
**FRIZIONE** (x trasmettere una coppia ma due alberi coassiali)

1. **FRIZIONE PIANA**



- una sola superficie attiva
- 1, 2 piatti
- forze opp. si spingono uno verso l'altro

fratido → materiale ad alto coeff. d'attrito



invece di avere il momento frenante ho il momento di inerzia

$$M_{frizione\ piana} = \int_{r_1}^{r_2} \rho k^2 r^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \rho k^2 \pi (r_2^3 - r_1^3) / 3$$

per la forza

$$\text{con } F = k^2 \pi (r_2 - r_1)$$

$M_{fr.}$  dipende dalle dimensioni dei dischi, dalla forza frenante, dal coefficiente di attrito ( $\mu$ )

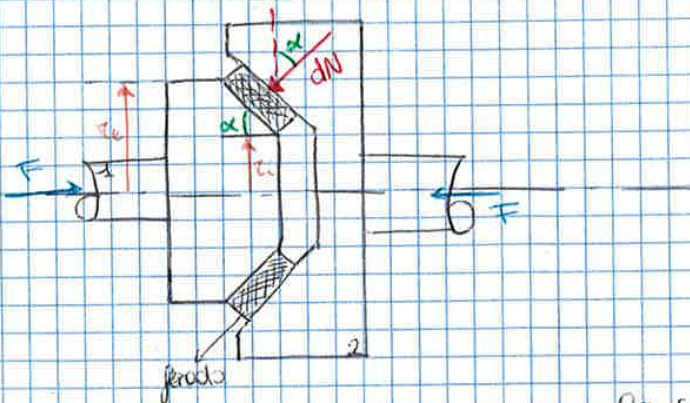
2. **FRIZIONE PIANA A DISCHI MORTALI**

stesso disegno MA m. morte

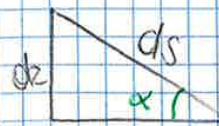
$m = m'$  superfici attive

$$M_{frizione\ piana\ a\ dischi\ mortali} = m \rho k^2 \pi (r_2 + r_1) / 2$$

3. **FRIZIONE CONICA**



$$dA = 2\pi r ds = 2\pi r \frac{dr}{\sin \alpha}$$



$$r_1 \leq r \leq r_2$$

$\alpha$  = angolo di conicità

per la forza

$\alpha$  può essere rispetto alla normale o alla tangente (come qui)

$$M_{frizione\ conica} = \left( \frac{\mu}{\sin \alpha} \right) F \left( \frac{r_2 + r_1}{2} \right)$$

ho variazione del coeff. di attrito

A parità di dimensioni radiali, materiale e forze d'input, una frizione conica trasmette un momento maggiore rispetto a quella piana



$$\left\{ \begin{aligned} dF_T &= T - T - dT = 0 \\ dF_N &= T \cdot \frac{d\theta}{2} - T \frac{d\theta}{2} - \frac{dT d\theta}{2} = 0 \rightarrow dF_N = 2T \frac{d\theta}{2} \Rightarrow dF_N = T d\theta \end{aligned} \right.$$

↳ mosso

$$dF_T = f dF_N$$

$$\left\{ \begin{aligned} dF_T &= dT \\ dF_N &= T d\theta \Rightarrow dT = f T d\theta \\ dF_T &= f dF_N \end{aligned} \right.$$

integrando

$$\frac{dT}{T} = f d\theta$$

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \int_0^{\theta^*} f d\theta$$

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = f \theta^* \Rightarrow \boxed{\frac{T_2}{T_1} = e^{f \theta^*}}$$

↳ per  $T_2 > T_1$

ma la tensione più piccola è quella più grande

$\theta^*$ : angolo che scende l'arco lungo cui c'è accoppiamento tra nastro e tamburo ( $= \theta_{max}$ )  
 $\theta$ : posizione angolare di un punto generico

$[\theta^*] = \text{rad}$   
 ANGOLO di SMR (SCORRIMENTO) (angolo di contatto tra le due pelli)

$\theta^* = \theta_{aw}$  SOLO NEL FRENO A NASTRO (angolo avvolgimento)

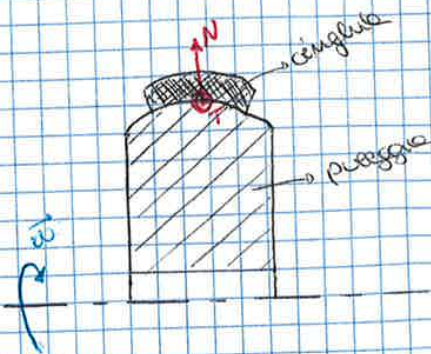
$$M_p = T_1 r (e^{f \theta^*} - 1)$$

## CINGHIE e FUNI (Beebrite)

### 1) TIPI di CINGHIE

- cinghia piana
- cinghia trapezoidale
- cinghia dentata

### 2) CINGHIA PIANA



metà cinghia tesa e simmetrica rispetto all'asse

$T \odot$  uscente (sulla puleggia)

T opposto a  $\odot$  nel senso che si muove

$$T = pN$$

coefficiente di attrito



EQUAZIONI di TENSIONI NELLE CINGHIE

$$\frac{T_1 - qv^2}{T_2 - qv^2} = e^{f\theta^*} \quad (f' \text{ se cinghia trapezoidale})$$

$v$  = velocità della cinghia  
 $q$  = massa per unità di lunghezza della cinghia

$$v = v_0 \left( 1 + \frac{T}{ES} \right)$$

$v_0$  = velocità cinghia a tensione nulla (ideale)  
 $E$  = modulo elastico  
 $S$  = sezione trasversale della cinghia

RENDIMENTO (di UNA TRASMISSIONE A CINGHIA)

$$\eta = \frac{P_u}{P_e} = \frac{C_R \omega_2}{C_R \omega_1} = \frac{(T_1 - T_2) R_1 \omega_2}{(T_1 - T_2) R_1 \omega_1}$$

$$\eta = \frac{R_2 \omega_2}{R_1 \omega_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{v_0 \left( 1 + \frac{T_2}{ES} \right)}{v_0 \left( 1 + \frac{T_1}{ES} \right)} = \frac{1 + \frac{T_2}{ES}}{1 + \frac{T_1}{ES}}$$

$$v_2 = \omega_2 R_2 \quad v_1 = \omega_1 R_1$$

$T_1, T_2 \Rightarrow$  essendo ML<sup>1</sup> ho  $T_1$  al numeratore

$\eta$  NON costante!

RAPPORTO di TRASMISSIONE (di UNA TRASMISSIONE A CINGHIA)

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \left( \frac{v_1}{R_1} \right) \left( \frac{R_2}{v_2} \right) = \frac{R_2}{R_1} \left( \frac{v_1}{v_2} \right) = \frac{R_2}{R_1} \left[ \frac{v_0 \left( 1 + \frac{T_1}{ES} \right)}{v_0 \left( 1 + \frac{T_2}{ES} \right)} \right] = \frac{R_2}{R_1} \left( \frac{1 + \frac{T_1}{ES}}{1 + \frac{T_2}{ES}} \right)$$

numero applicatore del carico

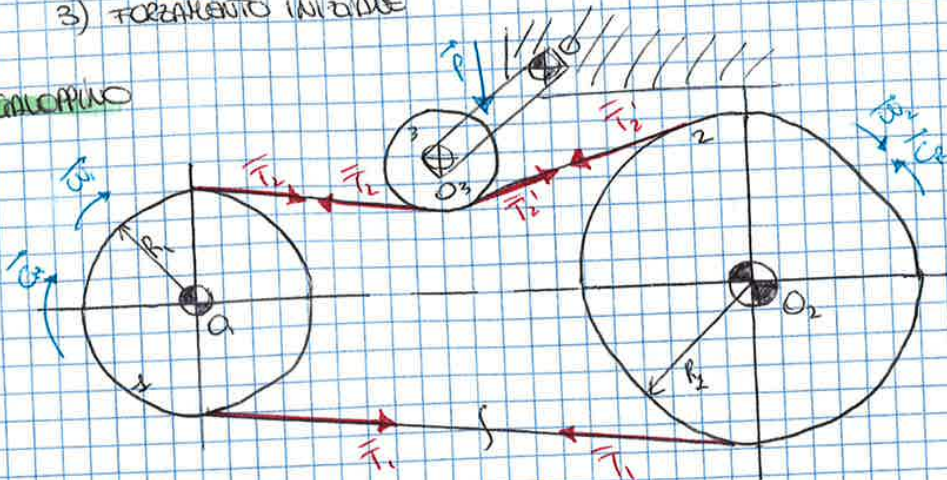
la tensione maggiore al numeratore ( $T_1$ )  $\Rightarrow i \geq 1$

$$\Rightarrow i = \frac{\omega_1}{\omega_2} \approx \frac{R_2}{R_1} \quad \text{approssimazione}$$

TRE PRINCIPALI MODI PER METTERE IN TENSIONE UNA TRASMISSIONE A CINGHIA

- 1) GALOPPINO
- 2) TENDITORE
- 3) FORZAMENTO INIZIALE

1) GALOPPINO



- 1 - puleggia motrice
  - 2 - puleggia conduttrice
  - 3 - galoppino
- (se si galoppino NON ci sono coppie esterne applicate, NON ci sono forze NON c'è attrito NEP perno  $\Rightarrow T_2 = T_2'$ )

POTENZA  $P = C_R \omega_1 = (T_1 - T_2) \omega_1 R_1$



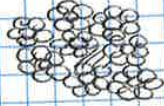
2]

TIPICI di FUNI

1) TRECCIA : più fili singoli ad elica



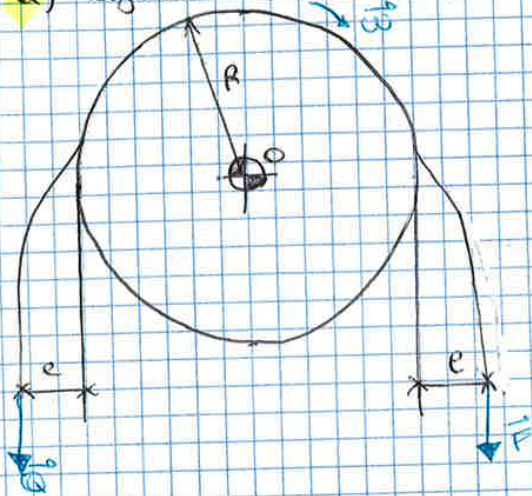
2) FUNI A TRECCIA : più noduli singoli ad elica



RIGIDEZZA della FUNE

Solo per la fune, non per la cinghia

a) rigidezza elastica ( $e$ ) : legata all'incapacità flessibilità della fune

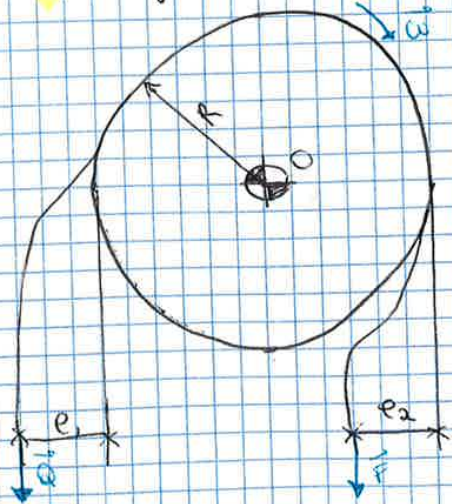


per avere aderenza si deve applicare un momento

$$M = F \cdot e = Q \cdot e$$

(con  $F = Q$ )

b) rigidezza anelastica ( $e_1, e_2$ ) : legata all'attrito tra i fili ed agli scostamenti interni



$e_1$  verso l'esterno in rapporto alla peggiora  
 $e_2$  verso l'interno in rapporto alla peggiora

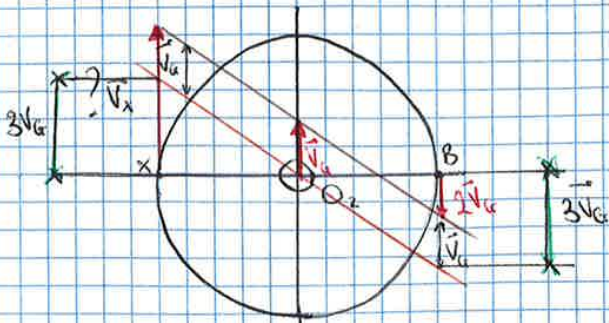
$$F = Q \frac{e_1 e_2}{e_1 - e_2}$$



ANALISI CINEMATICA

La puleggia 1 ruota senza strisciare sul tratto IZ

Puleggia 2



no dismbalace delle velocità  
sulla puleggia 2

Traccio una retta // a dismbalace  
reale passante per O2

La distanza tra le due rette vale Vg

→ come se regalaro velocità Vg  
del bozzello

I due tratti I sono uguali perché sono simmetrici

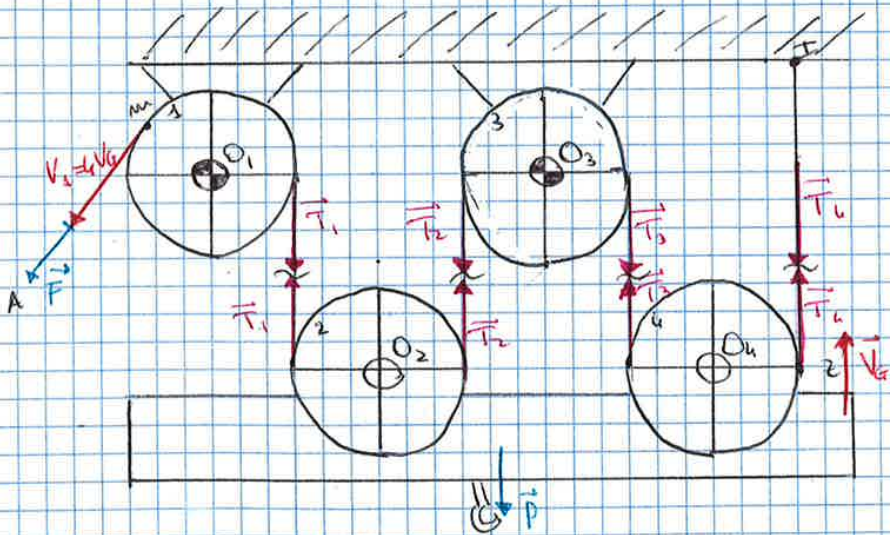
$$\Rightarrow N_x = 4V_g$$

Questo poi si risolve sulla puleggia 1

$$\Rightarrow N_A = m V_g$$

$m = m^0$  di rami di fune agganciati al bozzello

FORNITORI



$$m_c = m_{c1} = \frac{T_1 (4V_g)}{F (V_g)} = \frac{T_1}{F} \Rightarrow T_1 = m_c F$$

allo stesso modo  $T_2 = m_c T_1 = m_c^2 F$

$$T_3 = m_c T_2 = m_c^3 F$$

$$T_4 = m_c T_3 = m_c^4 F$$

$$\Rightarrow T_n = m_c^n F$$

Equilibrio verticale del bozzello

$$\uparrow T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = P$$

$$\textcircled{3} (m_c + m_c^2 + m_c^3 + m_c^4) F = P$$

$$\Rightarrow (m_c + m_c^2 + \dots + m_c^n) F = P$$

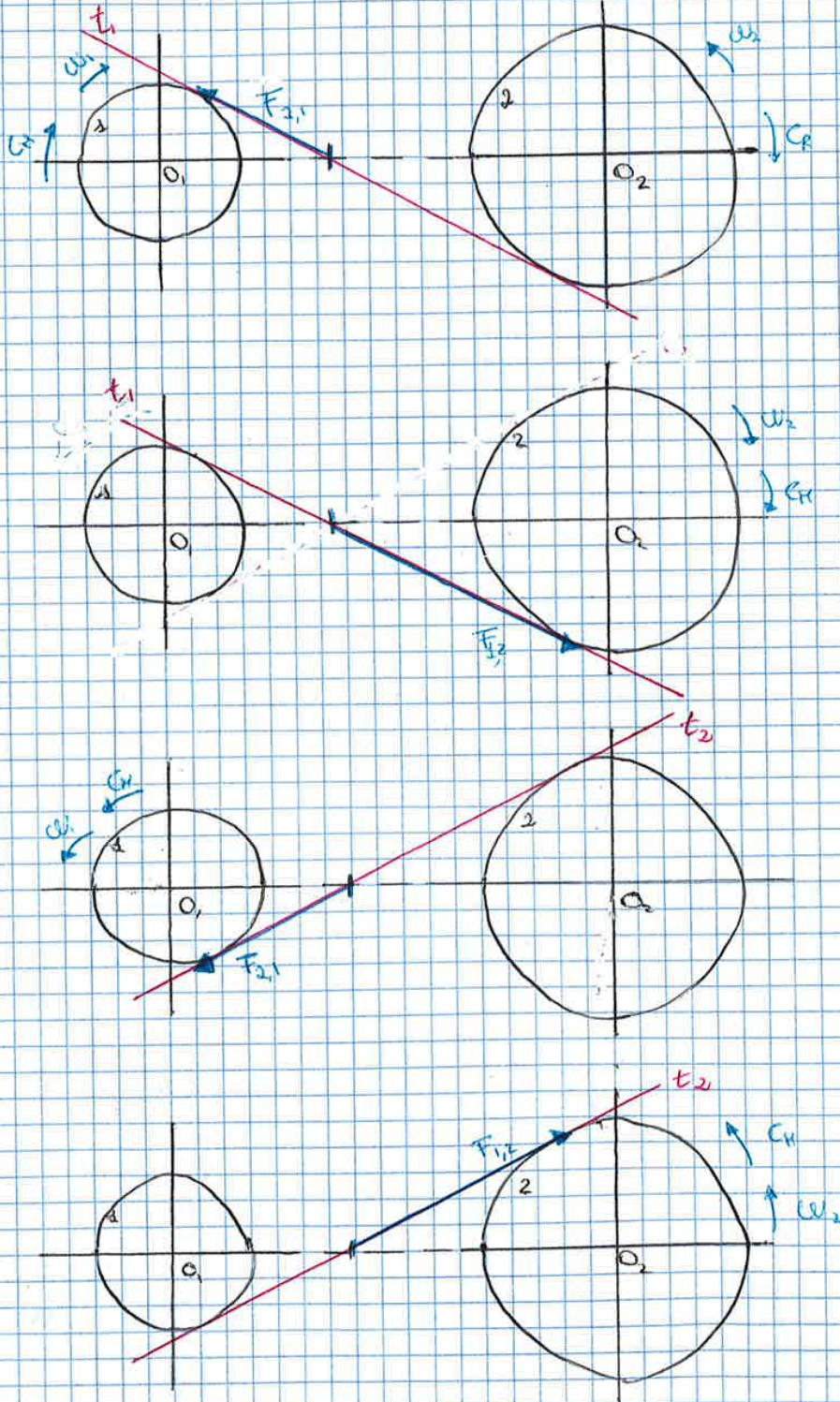


I denti a cuneo sono profili coniugati generati in rotazione delle circonferenze primitive

- hanno la stessa componente normale di velocità
- $\exists$  una velocità di smiscelamento

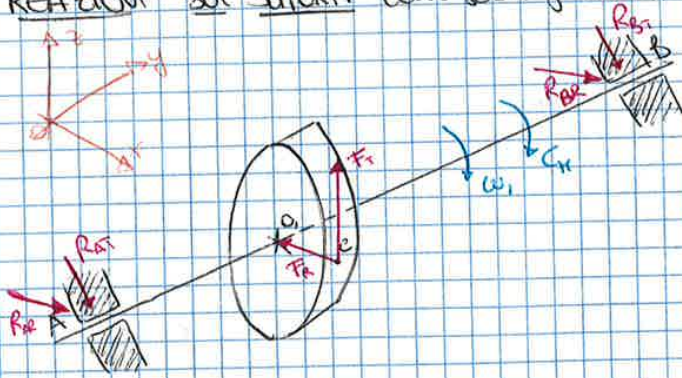
TANGENTI AI CERCHI DI BASE (= rette d'azione)

lungo le rette d'azione è scambiata la forza tra le ruote

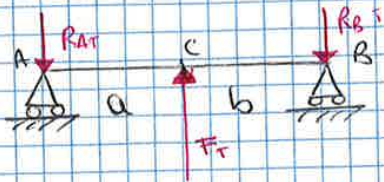




• REAZIONI SUI SUPPORTI (che sostengono le ruote)

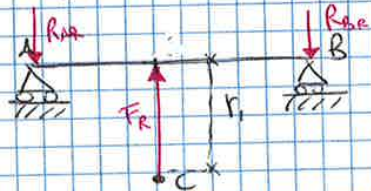


• nel piano (y,z)



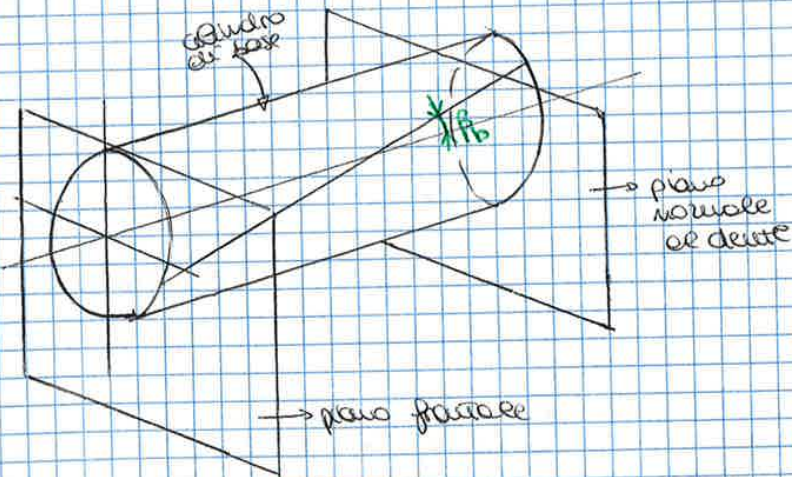
$$\begin{cases} \uparrow F_T = R_{Az} + R_{Bz} \\ \text{A)} \uparrow -R_{Bz}(a+b) + F_T a = 0 \end{cases}$$

• nel piano (x,z)



$$\begin{cases} \uparrow F_T = R_{Ax} + R_{Bx} \\ \text{A)} \uparrow F_T a = R_{Bx}(a+b) \end{cases}$$

2) RUOTE DENTATE CILINDRICHE A DENTI EUCOIDALI



$\beta$  = angolo di inclinazione dell'asse sul cilindro di base

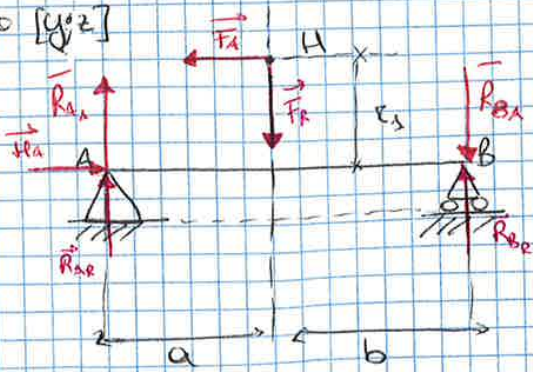
IR proporzionalmente modulare si fa nel piano normale al dente

- $\cos \beta = \cos \alpha$
- $p_m = p \cos \beta$
- $m_m = m \cos \beta$
- $\cos \alpha_m = \cos \alpha$

- $\beta$  = angolo di inclinazione dell'asse sul cilindro primitivo
- $p_m$  = passo della ruota nel piano normale
- $p$  = passo della ruota nel piano frontale
- $\alpha_m$  = angolo di pressione nel piano normale
- $\alpha$  = " " " " " " frontale
- $m_m$  = modulo del piano normale
- $m$  = " " " " " " frontale



• Piano  $[y, z]$



$F_A =$  coppia parallela

A → cerniera  
B → carrelli

$F_T$  lungo  $-z$

$F_A$  nel piano  $y$

La  $F_A$  genera su A una reazione vincolare uguale e opposta

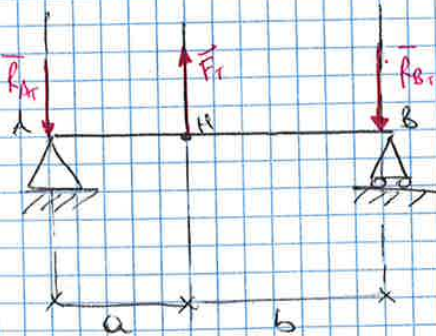
sui supporti nasce anche un coppia di forze legate ad  $F_A$  ( $R_{Ay}$  e  $R_{By}$  verticali, no legate alle componenti assiale  $F_A$ )

$$\begin{cases} |F_A| = |H_A| \\ |R_{Ay}| = |R_{By}| = \frac{|F_A| \cdot e_1}{(a+b)} \end{cases}$$

$R_{Az}$  e  $R_{Bz}$  legate alle componenti ridotte

$$\begin{cases} \uparrow R_{Az} + R_{Bz} = F_T \\ \sum \vec{M}_A = -F_T a + R_{Bz} (a+b) = 0 \end{cases}$$

• Piano  $[x, y]$  → vista dall'alto



$F_T$  lungo  $-x$

$$\begin{cases} \uparrow F_T = R_{Ax} + R_{Bx} \\ \sum \vec{M}_A = -R_{Bx} (a+b) + F_T a = 0 \end{cases}$$

⇒ vd. disegno in 3D

$$\begin{aligned} \textcircled{A} \quad & \begin{cases} |H_A| = |F_A| \\ R_A = \sqrt{(R_{Ay} + R_{By})^2 + (R_{Az})^2} \end{cases} \\ \textcircled{B} \quad & R_B = \sqrt{(R_{Bx} + R_{Ax})^2 + (R_{By})^2} \end{aligned}$$

Tutte le R sono risultanti: al supporto (anche se poi dipende da  $F_T$  o  $F_A$ )  
Le componenti assiale al supporto



Particolarmente dette ruote caucile ad assi 1

La componente rotabile sotto ruota 2 → direzione assiale sotto 2  
 assiale " " 2 → " " rotabile " 1

14/05/2015

**ROTTORI**

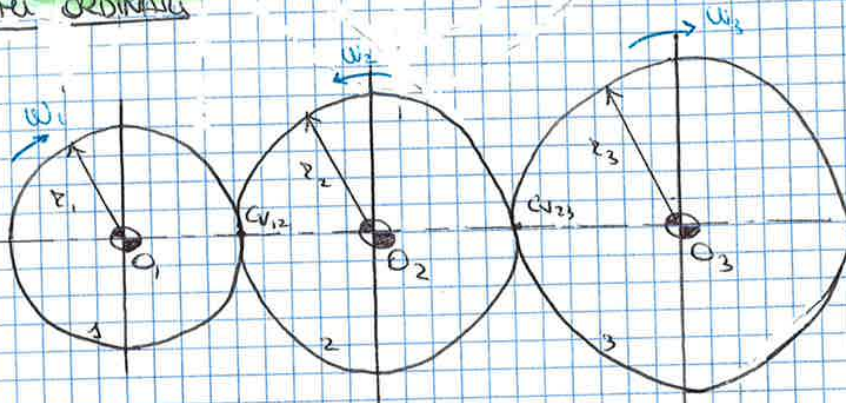
Quando si fanno più di due ruote in presa

$$i = \pm 0,5 \dots 1000$$

**TIPI DI ROTTORI**

- 1) ROTTORI ORDINARI: quando le ruote hanno tutte asse fissa
- 2) ROTTORI SPIRICOIDALI: quando almeno in un caso delle ruote presenta la  
 asse mobile

**1. ROTTORI ORDINARI**

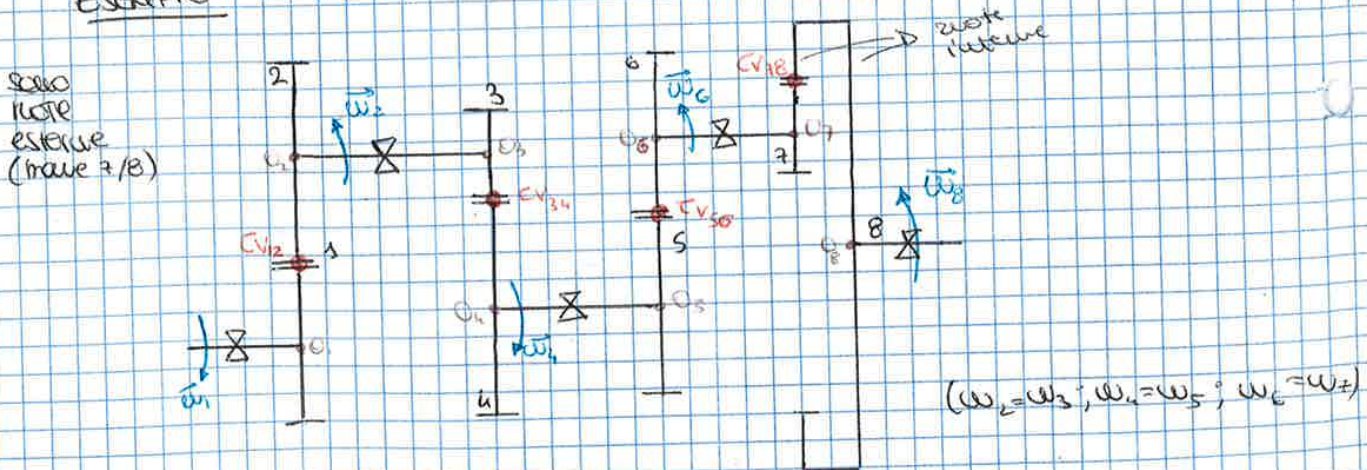


Il rapporto di trasmissione globale è pari al prodotto dei singoli rapporti di indagine

Il rendimento rot. è pari al prodotto dei rendimenti dei singoli ingranaggi

$$i_{1,3} = (i_{1,2})(i_{2,3}) = \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3}\right) = \left(\frac{\omega_1}{\omega_3}\right) = \left(-\frac{r_2}{r_1}\right) \left(-\frac{r_3}{r_2}\right) = \left(\frac{r_3}{r_1}\right)$$

**ESEMPIO**



$$i_{1,8} = \frac{\omega_1}{\omega_8} = (i_{1,2})(i_{2,3})(i_{3,4})(i_{4,5})(i_{5,6})(i_{6,7})(i_{7,8}) = \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \left(\frac{\omega_2}{\omega_3}\right) \left(\frac{\omega_3}{\omega_4}\right) \left(\frac{\omega_4}{\omega_5}\right) \left(\frac{\omega_5}{\omega_6}\right) \left(\frac{\omega_6}{\omega_7}\right) \left(\frac{\omega_7}{\omega_8}\right) =$$

$$= \left(-\frac{r_2}{r_1}\right) \left(-\frac{r_4}{r_3}\right) \left(-\frac{r_6}{r_5}\right) \left(+\frac{r_8}{r_7}\right)$$

↳ ruote libere

in base al fatto che ω2, ω3 sono uguali



DEL ROTAZIONE EPICICLOIDALE  $\omega_0 = \Omega$

(\*)  $i_{1,2} = \frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_2 - \Omega}$

$i_{1,3} = \frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_3 - \Omega}$

$i_{3,2} = \frac{\omega_3 - \Omega}{\omega_2 - \Omega}$

velocità relative

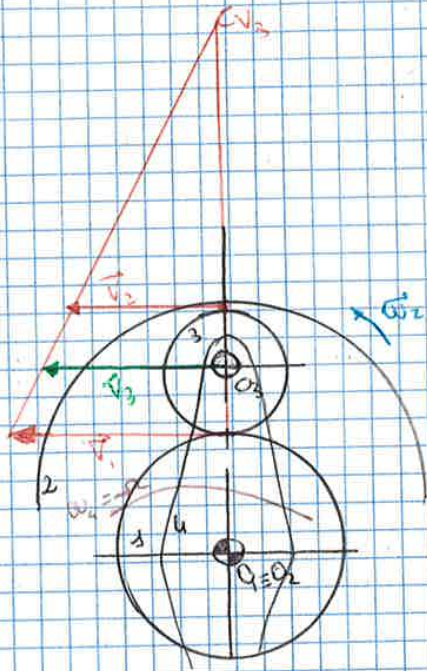
$i_{1,4} = \frac{\omega_1}{\Omega}$

velocità assoluta

(\*) rapporto di trasmissione TORQUE (x UNITS), se altre sono partenti

15/05/2015

CONSIDERAZIONI CINEMATICHE



Unifichiamo il centro di istantanea rotazione del planetario 3

$v_1 = \omega_1 r_1$

$v_2 = \omega_2 r_2$

$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2}{2} = \Omega (r_1 + r_3)$

(marcia retta per  $O_1, O_3$  e la congiungente) delle velocità  $\Rightarrow v_3$

$r_2 = r_1 + r_3$

$r_3 = \frac{r_2 - r_1}{2}$

$r_1 + r_3 = r_1 + \left(\frac{r_2 - r_1}{2}\right) = \frac{r_1 + r_2}{2}$

$\Rightarrow v_3 = \Omega (r_1 + r_3) = \Omega \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right) = \frac{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2}{2}$

$\Rightarrow \Omega = \frac{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2}{r_1 + r_2}$

$m = \frac{r_2}{r_1}, r_1 \propto z_1 \Rightarrow \Omega = \frac{\omega_1 z_1 + \omega_2 z_2}{z_1 + z_2}$



DEFINIZIONE:

$$C_R = 2R(z_1 + z_3)$$

$$z_2 = z_1 + 2z_3 \Rightarrow z_3 = \frac{z_2 - z_1}{2}$$

$$\left[ z_1 + \frac{z_2 - z_1}{2} \right] = \frac{z_1 + z_2}{2} = \left[ \frac{z_1 + z_3}{2} \right]$$

$$\Rightarrow C_R = 2R(z_1 + z_3) = 2R \left( \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

$$F = \frac{R}{2 \cos \alpha} \Rightarrow C_H = \cancel{2} \left( \frac{R}{\cancel{2 \cos \alpha}} \right) \cos \alpha = R \cos \alpha$$

$$R = \frac{C_H}{\cos \alpha}$$

$$\Rightarrow C_R = 2R \left( \frac{z_1 + z_2}{2} \right) = 2 \frac{C_H}{\cos \alpha} \left( \frac{z_1 + z_2}{2} \right) = \frac{C_H}{\cos \alpha} (z_1 + z_2)$$

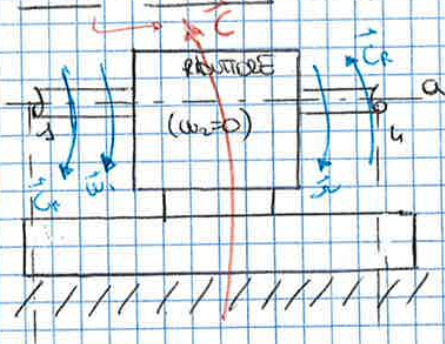
$$i_{1,4} = i_{2,3} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2 z_3}{z_1 z_3}$$

$$C_R = \frac{C_H}{\cos \alpha} (z_1 + z_2) = C_H \left( \frac{z_1 + z_2}{\cos \alpha} \right)$$

$$m = \frac{z_2}{z_1}, \quad z_2 \propto z_1 \Rightarrow C_e = C_H \left( \frac{z_1 + z_2}{z_1} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{C_R = C_H i_{1,4}}$$

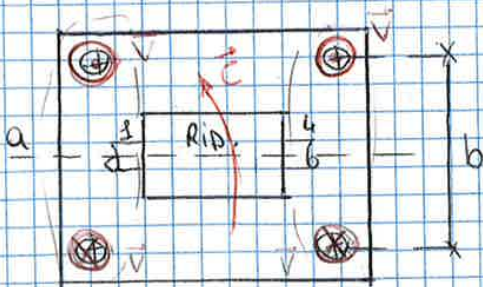
COPPIA TRASMESSA AL TELAI



albero di ingresso (1) e di uscita (4) sono indipendenti!

$$i_{1,4} = \frac{\omega_1}{\omega_4}$$

a)  $C_H - C_R - C = 0$



i bracci reagiscono con due forze uguali e opposte

La coppia C si ripartisce sui 4 bracci

Le uguaglianze opposte ai bracci a e b

$$V = \frac{C}{2b}$$



$$c_{1,2} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} = -\frac{\omega_2}{\omega_1} = -1 \implies \text{calcolo } \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

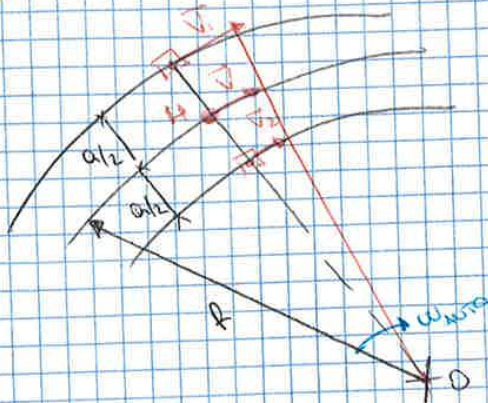
$\omega_1 = \omega_2$  essendo strutture simmetriche

a) In rettilineo

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega = \frac{V}{r}$$

↳ raggio della ruota

b) In curva



a = carreggiata auto  
R = raggio di curva

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{1/O} + \vec{v}_{O/O} = \omega_{wheal} \vec{k} \wedge (\vec{s} - \vec{O}) \implies v_1 = \omega_{wheal} (R + a/2)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{O/O} + \vec{v}_{O/O} = \omega_{wheal} \vec{k} \wedge (\vec{H} - \vec{O}) \implies v = \omega_{wheal} (R)$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{2/O} + \vec{v}_{O/O} = \omega_{wheal} \vec{k} \wedge (\vec{z} - \vec{O}) \implies v_2 = \omega_{wheal} (R - a/2)$$

$$v_1 = \frac{V}{R} (R + a/2) = \omega_1 R$$

$$v_2 = \frac{V}{R} (R - a/2) = \omega_2 R$$

$$\implies \omega_1 = \frac{v_1}{R} \quad \omega_2 = \frac{v_2}{R}$$

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{v_1/2 + v_2/2}{2} = \frac{1}{2R} \frac{V}{R} \left( R + \frac{a}{2} + R - \frac{a}{2} \right) = \frac{1}{2R} \frac{V}{R} (2R) = \frac{V}{R}$$

$$\implies \omega = \frac{V}{R}$$

$\implies R$  parametrato (in curva e in rettilineo) ha sempre stesso valore

se differenziale e un parametro di coppia

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad (1)$$

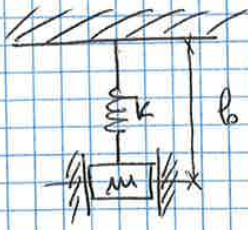
$$c_1 + c_2 + c = 0 \quad (\text{equilibrio di coppie}) \quad (2)$$

↳ tre parametri

$$c_1 \omega_1 + c_2 \omega_2 + c \omega = 0 \quad (\text{equilibrio di potenze}) \quad (3)$$

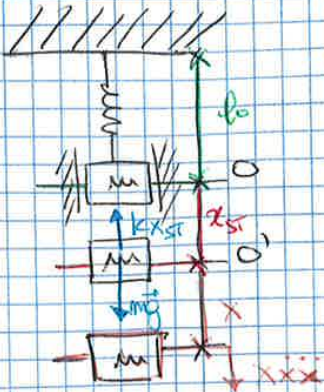
↳ misura punto





$b =$  lunghezza a riposo della molla  
 $\rightarrow$  GDL  $\rightarrow$  massa solo concentrica

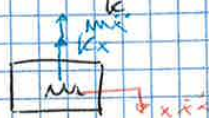
$$\vec{F}_k = -k\Delta x$$



$x_{sr} = x_{statico} =$  spostamento statico

$$kx_{sr} = mg$$

$$x_{sr} = \frac{mg}{k}$$



$x_{sr} =$  offset

$\uparrow +$   $m\ddot{x} + kx = 0$  EQ. SPARTATO

$\uparrow +$   $\ddot{x} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0$  EQ. CANONICA

$\uparrow +$   $\ddot{x} + (\omega_m^2)x = 0$  EQ. GENERALIZZATA

$\omega_m =$  pulsazione naturale del sistema non smorzato

Calcolo 2° e 3°  $\omega_m = \sqrt{\frac{k}{m}}$  SOLO per alcuni sistemi

$\Rightarrow$  la ricavo sempre applicando eq. canonica e generalizzata per gli argomenti di  $x$  !!!

$\Rightarrow x_g(t) \Rightarrow e^{\lambda t}$  (eq. diff. lineare omogenea)  
 la generale

$$(x^2 + \omega_m^2)e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega_m$$

stessa sostituendo  $e^{\lambda t}$  nelle eq. generali radice negativa  $\Rightarrow e^{-\omega t}$

$$x_g(t) = a e^{i\omega_m t} + b e^{-i\omega_m t}$$

per Eulero  $e^{\pm i\omega_m t} = \cos(\omega_m t) \pm i\sin(\omega_m t)$

$$x_g(t) = a (\cos(\omega_m t) + i\sin(\omega_m t)) + b (\cos(\omega_m t) - i\sin(\omega_m t)) =$$

$$= \underbrace{(a+b)}_A \cos(\omega_m t) + \underbrace{(a-b)}_B i\sin(\omega_m t) =$$

$A, B = \text{cost.}$

$$a = \frac{1}{2}(A - iB)$$

$$b = \frac{1}{2}(A + iB)$$

$$= A \cos(\omega_m t) + B \sin(\omega_m t) = x_{og} \sin(\omega_m t + \varphi_0)$$



$\beta$  critico: valore di  $\beta$  che fa tendere a zero la risposta del sistema nel minor tempo possibile senza oscillare

coefficiente di smorzamento in  $x$

$\Rightarrow \zeta = \frac{\beta}{2m\omega_n}$  e  $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$  (in questo caso)

Cerco un solutore del tipo  $e^{\lambda t}$

$\lambda^2 + (2\zeta\omega_n)\lambda + (\omega_n^2) = 0$  eq. quadratica

$\lambda_{1,2} = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{4\zeta^2 - 4}}{2}$

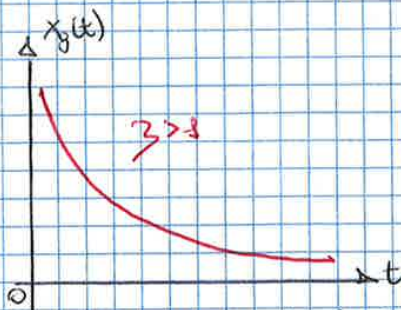
- $\zeta > 1 \Rightarrow$  sistema sovrasmorzato ( $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$  e distinte)
- $\zeta < 1 \Rightarrow$  sistema sottosmorzato ( $\lambda_{1,2}$  complesse coniugate)
- $\zeta = 1 \Rightarrow$  sistema a smorzamento critico ( $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$  e coincidenti)

1)  $\zeta > 1$

$\lambda_{1,2} = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{4\zeta^2 - 4}}{2}$

$x(t) = a e^{(-\zeta\omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})t} + b e^{(-\zeta\omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})t}$

o.k.  $x(t) = 0$   
 $t \rightarrow \infty$   
 caso aperiodico  $\Rightarrow$  tende a zero senza oscillare



2)  $\zeta < 1$

$\lambda_{1,2} = \frac{-2\zeta\omega_n \pm i\omega_n \sqrt{4 - 4\zeta^2}}{2}$   $r$  parte reale e radice (con  $r < 0$ )  $\Rightarrow$  aggiunto  $i$

$x(t) = a e^{(-\zeta\omega_n + i\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2})t} + b e^{(-\zeta\omega_n - i\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2})t}$

$x(t) = x_{ing} e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t + \varphi_0)$  FORMULA di EUREKA

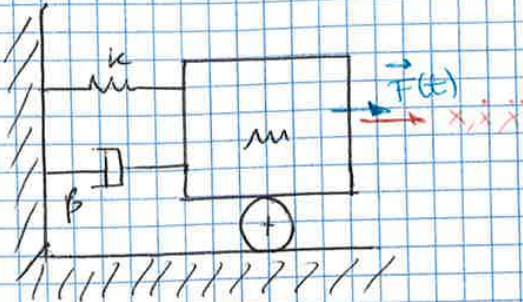
$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$  pulsazione propria del sistema smorzato



$$\delta = \zeta \omega_n T_s = \zeta \omega_n \left( \frac{2\pi}{\omega_s} \right) = \zeta \omega_n \left( \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \right) = \frac{2\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{2\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \text{dipende solo da } \zeta!$$

**VIBRAZIONI FORZATE SMORZATE**



$\vec{F}(t)$  forzante esterna

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t)$$

$\omega$  = pulsazione della forzante  
della molla

$$F_{re} = -kx$$

$$F_{sm} = -\beta \dot{x}$$

della smorzatore

$$F_{in} = -m\ddot{x}$$

di inerzia

$$x_{tot}(t) = x_g(t) + x_p(t)$$

↳ integrale particolare

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_g(t) = 0$$

$$x(t) = x_p(t)$$

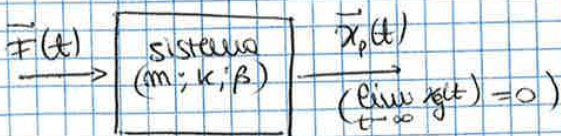
$$F(t) = F_0 \cos(\omega t) \quad (\text{ingresso del sist.})$$

$$x(t) = x_p(t) = x_0 \cos(\omega t - \varphi) \quad (\text{uscita del sist.})$$

↳ indice in ritardo di fase

$x_0$  = ampiezza di oscillazione a regime  
 $\varphi$  = sfasamento dovuto allo smorzamento

(riguarda l'integrale particolare, non generale g)



Per il calcolo di  $x_0$  e  $\varphi$  utilizzeremo il metodo dei valori rettilinei che vale se:

- 1 - il sistema è lineare
- 2 - la forzante è armonica
- 3 - la soluzione è a regime (può applicarsi solo per l'integrale particolare)



$$\frac{F_0}{m} = \sqrt{(2\zeta \omega_n x_0)^2 + (\omega_n^2 x_0 - \omega^2 x_0)^2} \Rightarrow \text{non forzato } x_0$$

$$x_0 = \frac{F_0/m}{\sqrt{(2\zeta \omega_n \omega)^2 + (\omega_n^2 - \omega^2)^2}}$$

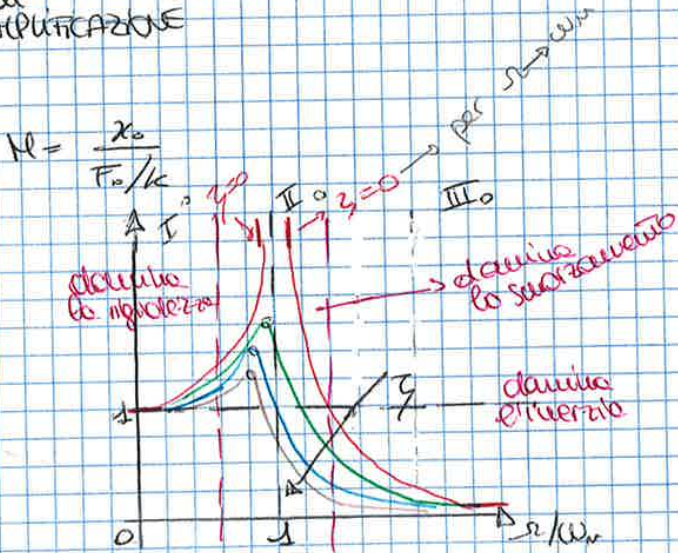
$$F_0 = \cos t \quad \omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{\left(\frac{F_0}{m}\right) \left(\frac{m}{k}\right)}{\sqrt{\left(2\zeta \frac{\omega_n \omega}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega_n^2}{\omega_n^2} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2}}$$

diviso per  $\omega_n^2$

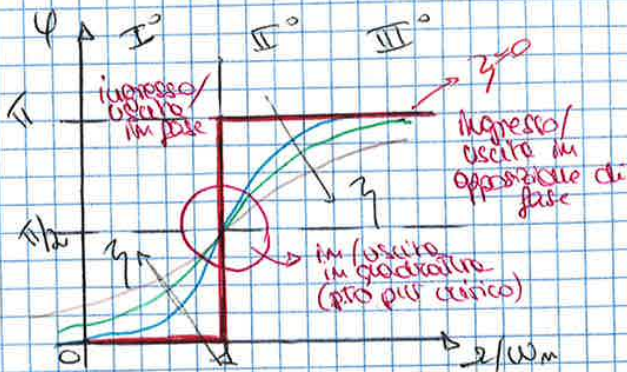
$$\rightarrow H = \frac{x_0}{F_0/k} = \frac{1}{\sqrt{\left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2}}$$

FAITORE di AMPLIFICAZIONE



$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\omega_n} \rightarrow 0, \quad \frac{x_0}{F_0/k} \rightarrow 1 & \text{ I}^\circ \\ \frac{\omega}{\omega_n} \rightarrow 1, \quad \frac{x_0}{F_0/k} \rightarrow \frac{1}{2\zeta} & \text{ II}^\circ \\ \frac{\omega}{\omega_n} \rightarrow \infty, \quad \frac{x_0}{F_0/k} \rightarrow \frac{1}{(\omega/\omega_n)^2} & \text{ III}^\circ \end{aligned}$$

come viene con i massimi a sinistra dell'origine all'aumentare di  $\zeta$



$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\omega_n} \rightarrow 0, \quad \text{tg} \varphi \rightarrow 0, \quad \varphi \rightarrow 0 & \text{ I}^\circ \\ \frac{\omega}{\omega_n} \rightarrow 1, \quad \text{tg} \varphi \rightarrow \infty, \quad \varphi \rightarrow 90^\circ & \text{ II}^\circ \\ \frac{\omega}{\omega_n} \rightarrow \infty, \quad \text{tg} \varphi \rightarrow 0^-, \quad \varphi \rightarrow 180^\circ & \text{ III}^\circ \end{aligned}$$

$\omega = \omega_n$   
 $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$  } in RISONANZA (massima ampiezza della risposta)



a)  $\downarrow +m(\ddot{x} + \ddot{x}_b) + \beta\dot{x} + kx = 0$

$+m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_b$

ottergo già una forza  
( $m\ddot{x}_b$ )

essendo  $x_b = b \sin \omega t \Rightarrow \ddot{x}_b = b \omega^2 \cos \omega t$  e  $\boxed{\ddot{x}_b = -b \omega^2 \sin \omega t}$

①  $+m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = +m b \omega^2 \sin \omega t$

②  $+1\ddot{x} + \left(\frac{\beta}{m}\right)\dot{x} + \left(\frac{k}{m}\right)x = b \omega^2 \sin \omega t$

③  $+1\ddot{x} + (2\zeta \omega_m)\dot{x} + (\omega_m^2)x = b \omega^2 \sin \omega t$

b) Scrivo l'equazione in  $z$  (e non più in  $x$ , coord. relativa)

$\downarrow m\ddot{z} + \beta(\dot{z} - \dot{x}_b) + k(z - x_b) = 0$

$+m\ddot{z} + \beta\dot{z} + kz = \beta\dot{x}_b + kx_b$

analizzo i due casi

a) Forzante:  $F(t) = (m b \omega^2) \sin \omega t$

soluzione a regime:

$x(t) = x_0 \sin(\omega t - \varphi)$

$\dot{x}$

$\ddot{x}$

Esprimo in  $m$  in una delle equazioni (1) (2) o (3) e costruisco il poligono dei vettori rotanti e calcolo  $x_0$  e  $\varphi$

$H = \frac{x_0}{b} = \frac{(\omega/\omega_m)^2}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_m}\right)^2}}$

$\text{tg } \varphi = \frac{2\zeta \omega/\omega_m}{1 - (\omega/\omega_m)^2}$

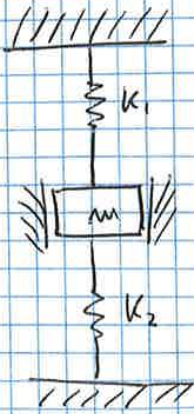
①  $\frac{\omega}{\omega_m} \rightarrow 0$   $H \rightarrow 0$

②  $\frac{\omega}{\omega_m} \rightarrow 1$   $H \rightarrow \frac{1}{2\zeta}$

③  $\frac{\omega}{\omega_m} \rightarrow \infty$   $H \rightarrow 1$



b)



$$F_1 = k_1 \Delta x$$

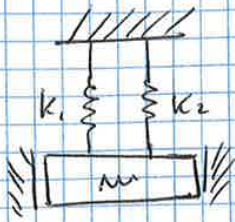
$$F_2 = k_2 \Delta x$$

$$F_{TOT} = F_1 + F_2 = (k_1 + k_2) \Delta x$$

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + \infty + k_m$$

→ MOVIE IN PARALLELO

c)



$$F_1 = k_1 \Delta x$$

$$F_2 = k_2 \Delta x$$

$$F_{TOT} = F_1 + F_2 = (k_1 + k_2) \Delta x$$

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + \infty + k_m$$

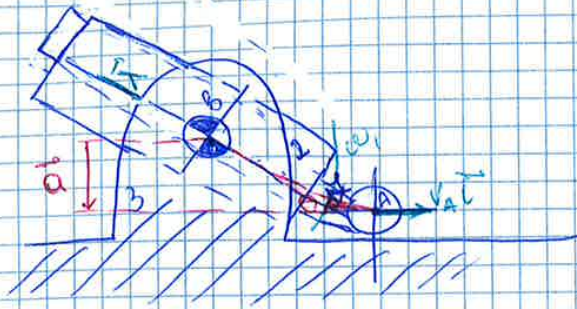
→ MOVIE IN PARALLELO



12/03/2015

ESERCIZIO 1

ES 5



Il corpo 1 può scorrere in 2  
 → la velocità è più  
 veloce e maggiore

$AB \neq \text{cost} \Rightarrow$  moto coposto

$l = 25 \text{ cm}$      $v_A = 1 \text{ m/s}$      $\theta = 30^\circ$      $AB = \frac{l}{\sin \theta} = 0,5 \text{ m}$

$\omega_1 = ?$      $\vec{v}_{Arel}, \vec{v}_{Arel} = ???$

→ moto di distanza  $\neq \text{cost}$

1) Moto relativo: traslazione lungo  $\vec{i}$  ( $AB \neq \text{cost}$ )

2) se braccio  $AB \Rightarrow$  moto circolare di B  
 (case tolgo moto rel.)

Moto di traslazione: rotazione di  $\Delta$  intorno a B ( $\omega_1$ )

3) Moto coposto: traslazione di  $\Delta$  lungo  $\vec{i}$

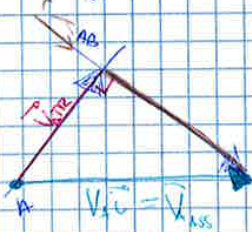
$\vec{v}_{A_{oss}} = \vec{v}_A \vec{i} = \vec{v}_{A_{oss}} + \vec{v}_{A_{rel}}$

$\vec{v}_A \vec{i} = +v_A \vec{i} + \left[ \vec{v}_s + \vec{v}_{A/B} \right]_{TR} = +v_A \vec{i} + \left[ \omega_1 k \wedge (A-B) \right]_{TR}$

Moto  
M, D, N

2 componenti  
essendo una  
rotazione  
(x def. in questo caso)

Essendo note sufficienti componenti  
 $\Rightarrow$  triangolo velocità

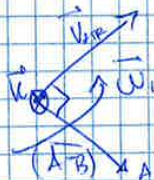


→ vetti correlati dal triangolo

$|\vec{v}_{Arel}| = v_{A_{oss}} \cos \theta = 0,866 \text{ m/s}$

$|\vec{v}_{A/B}| = v_{A_{oss}} \sin \theta = 0,5 \text{ m/s}$

$\omega_1 = \frac{v_{A/B}}{AB} = 1 \text{ rad/s}$



$\vec{a}_{Aco} = 2\omega_1 \vec{k} \wedge \vec{v}_{Arel}$

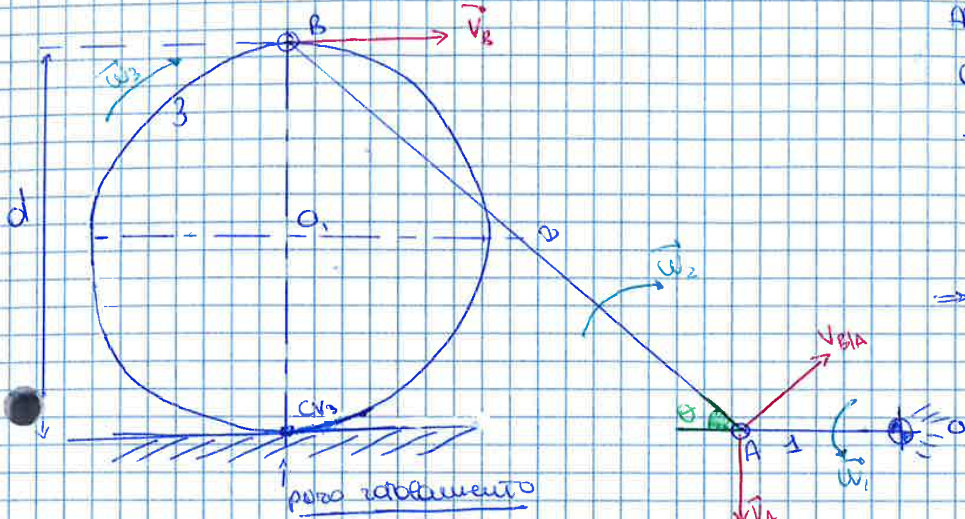
$|\vec{a}_{Aco}| = 2\omega_1 \cdot v_{Arel} = 1,73 \text{ m/s}^2$



$$3) \vec{a}_{A/ASS} = \vec{a}_{A/cep} + \vec{a}_{A/12} + \vec{a}_{A/\omega} \\ = a_{ASS} \vec{j} = a_{A/cep} \vec{i} + \left[ \vec{\omega}_0 + \vec{a}_{A/\omega} + \vec{a}_{A/\omega} \right]_{TR} + \left[ 2\omega \vec{k} \times \vec{v}_{A/cep} \right]_{CO}$$

ESERCIZIO 3

ES. 3



$$AB = 0,20 \text{ m}$$

$$d = 0,1 \text{ m}$$

$$AO = 0,04 \text{ m}$$

$$\omega_1 = 50 \text{ rad/s}$$

$$\sin \theta = \frac{d}{AB} = 0,5$$

$$\Rightarrow \theta = 30^\circ$$

MOTO SEMPLICE  
(acc. di  $Cv_3 \neq 0$ )

• CORPO 1

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_{A/O} = \omega_1 \vec{k} \wedge (A-O)$$

H |  $\omega_1 AO = 2 \text{ m/s}$

D |  $\perp AO$

V |  $(\vec{\omega}_1)_+$

• CORPO 2

$$\textcircled{1} \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} = \vec{v}_A + \omega_2 \vec{k} \wedge (B-A)$$

*6 m/s (m/s)*

• CORPO 3

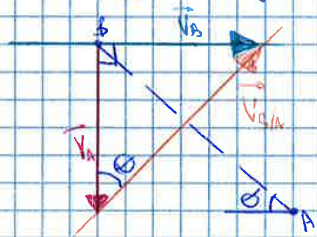
$$\vec{v}_B = \vec{v}_{Cv_3} + \vec{v}_{B/Cv_3} = \omega_3 \vec{k} \wedge (B-Cv_3) \Rightarrow \text{caso particolare di } \vec{v}_B$$

H |  $\omega_3 (BCv_3) ?$

D |  $\perp BCv_3$

V |  $(\omega_3) ?$

Riprendo da  $\textcircled{1}$  e faccio il triangolo delle velocità



$$|\vec{v}_B| = |\vec{v}_A| \tan \theta = 1,5 \text{ m/s}$$

$$|\vec{v}_{B/A}| = \frac{|\vec{v}_A|}{\cos \theta} = 2,31 \text{ m/s}$$

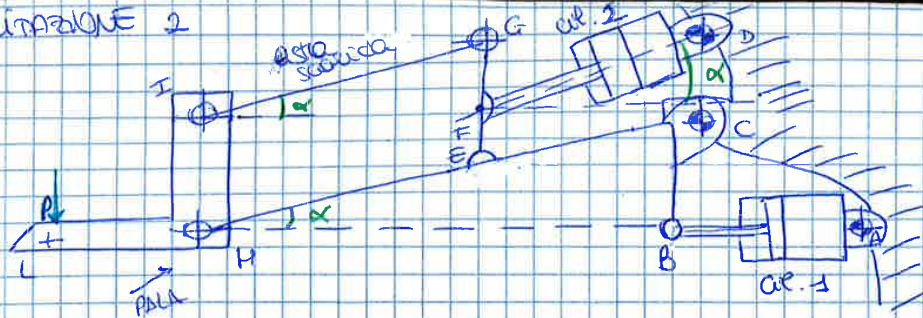
$$\omega_2 = \frac{v_{B/A}}{AB} = 11,55 \text{ rad/s} \quad \text{CRACIA}$$



20/03/2015

ESERCITAZIONE 2

1)



$\alpha = 30^\circ$

$P = 60000 \text{ N}$   
 il carico

I cilindri (di uguali materiali e carichi, costituiti da un solo pezzo) sono a scorrimento libero (non sono a scorrimento) sono aste scorrevoli

Trascuro i pesi delle diverse parti

GE: asta continua non scorrevole (carico sui punti G, E ed F)

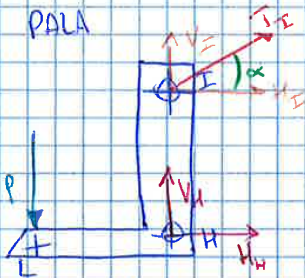
Sistema con 2 gradi di libertà

Attivando cilindro 2 il meccanismo IHEG si piega verso sx (o dx) quindi la pala si solleva e si abbassa  
 ↳ agisce nella direzione B

Solo una camera del cilindro 1 e del cilindro 2 lavorano

• metodo ausiliario (diagramma di corpo libero)

PALA



scelta arbitraria

$V_I$  verso l'alto  $\Rightarrow$  nell'asta IG e verso il basso

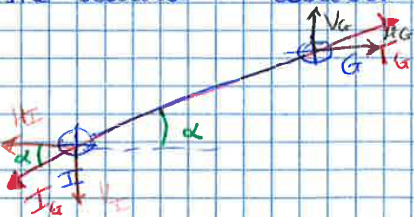
$$\uparrow \sum V_I + V_H - P = 0$$

$$\rightarrow \sum H_I + H_H = 0$$

$$\curvearrowright \sum M_I = -H_H(H_I) + P(LH) = 0$$

• ASTA SCORREVA

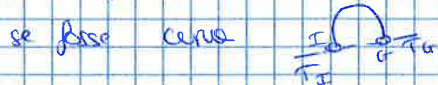
asta scorrevole  $\rightarrow$  carichi solo alle estremità



analisi IG anziché HEB perché ho meno complicanze nei calcoli

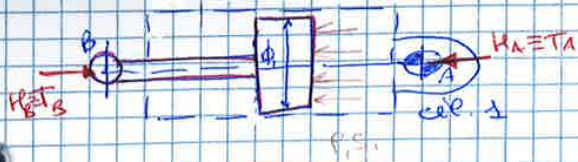
$\frac{T_I}{T_G}$  rispettivamente ma le reazioni vincolari  $H_I$  e  $V_I$  in I  
 $H_G$  e  $V_G$  in G

$T_I$  e  $T_G$  si trovano sulla stessa congiungente ma flette verso



$$\Rightarrow V_I = H_I \operatorname{tg} \alpha$$

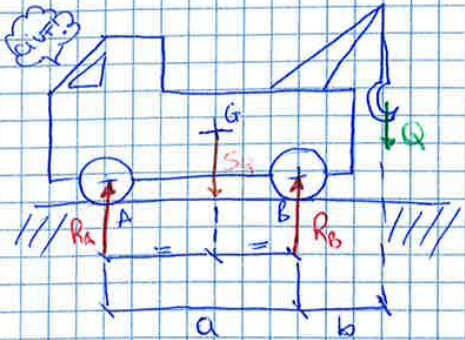




$$S_1 = \frac{\pi \Phi_1^2}{4}$$

$$P_1 = \frac{H_B}{\left(\frac{\pi \Phi_1^2}{4}\right)} \Rightarrow P_1 = 117,47 \text{ bar}$$

2)



$$a = 3,7 \text{ m} \quad b = 5 \text{ m} \quad S_g = 20 \text{ t}$$

$$Q = \begin{cases} 4 \text{ t (mezzate) } \\ 6 \text{ t} \end{cases}$$

$$\uparrow R_A + R_B - S_g - Q = 0$$

$$\rightarrow 0 = 0$$

2 Equazioni in 2 incognite ✓

$$\text{B)} \quad -R_A a + S_g \frac{a}{2} - Q b = 0$$

$$R_A = \frac{S_g}{2} - \frac{Q b}{a} \begin{cases} 4 \text{ t} & R_A = 4,59 \text{ t} \\ 6 \text{ t} & R_A = 3,85 \text{ t} \end{cases}$$

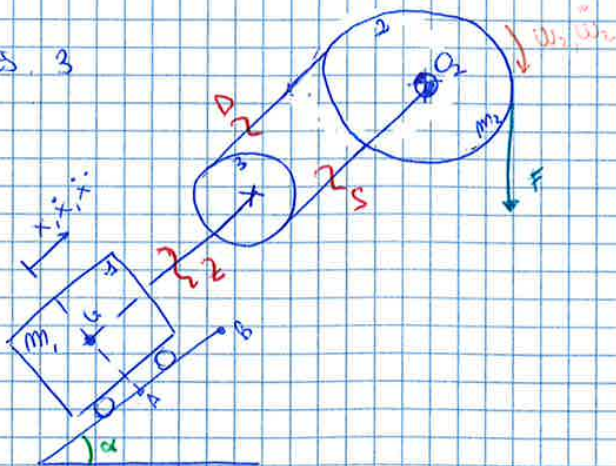
$$R_B = S_g + Q - R_A = \begin{cases} 4 \text{ t} & R_B = 19,41 \text{ t} \\ 6 \text{ t} & R_B = 26,11 \text{ t} \end{cases}$$

Q limite per il ribaltamento del mezzo : quando la ruota A si solleva  $\rightarrow R_A = 0$

$$R_A = 0 \Rightarrow Q_{\text{limite}} = \frac{S_g}{2} \frac{a}{b} = 7,4 \text{ t}$$

26/03/2015

Es. 3



$$m_1 = 50 \text{ kg}$$

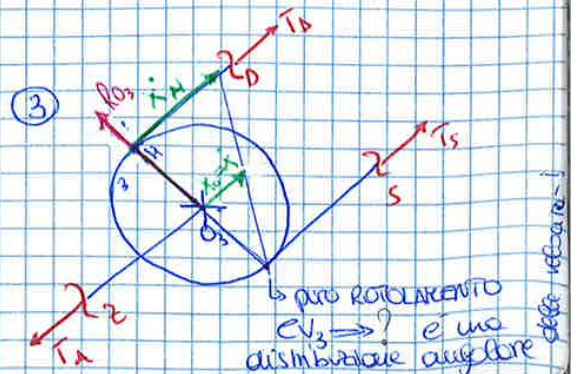
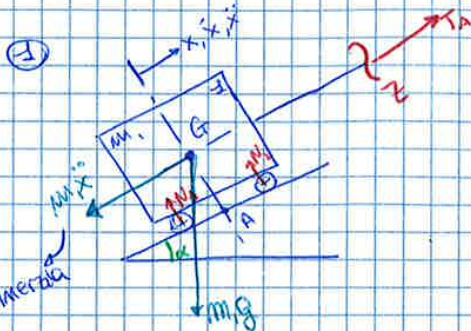
$$m_2 = 4 \text{ kg}$$

$$v_A = 0 = \dot{x}_A$$

$$\alpha = 20^\circ$$

$$F = 250 \text{ N}$$

$$v_B = ? \quad AB = 2 \text{ m}$$





Da (1) e (2)

$$\ddot{x} = \frac{2T_1/2 - m_1 g \sin \alpha}{m_1} \quad (4) + (5)$$

$$2 \left( F - \frac{I_0 \omega_2}{R_2} \right) - (m_1 g \sin \alpha) = \ddot{x} m_1$$

Da (4)

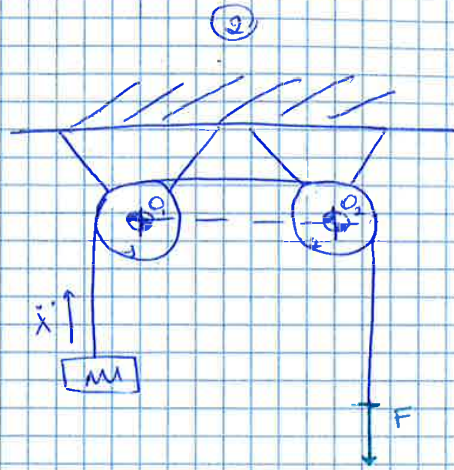
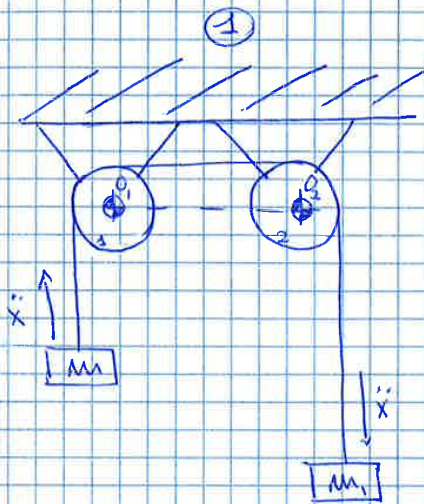
$$\frac{I_0 \omega_2}{R_2} = F - \frac{\ddot{x} m_1}{2}$$

$$\rightarrow \ddot{x} = \frac{2F - m_1 g \sin \alpha}{m_1 + 2m_2} = 4,69 \text{ m/s}^2$$

la velocità in \*

$$\rightarrow v_B = \sqrt{2(4,69) \cdot 2} = 4,23 \text{ m/s}$$

Es. 4



$$F = m_1 g = 1962 \text{ N}$$

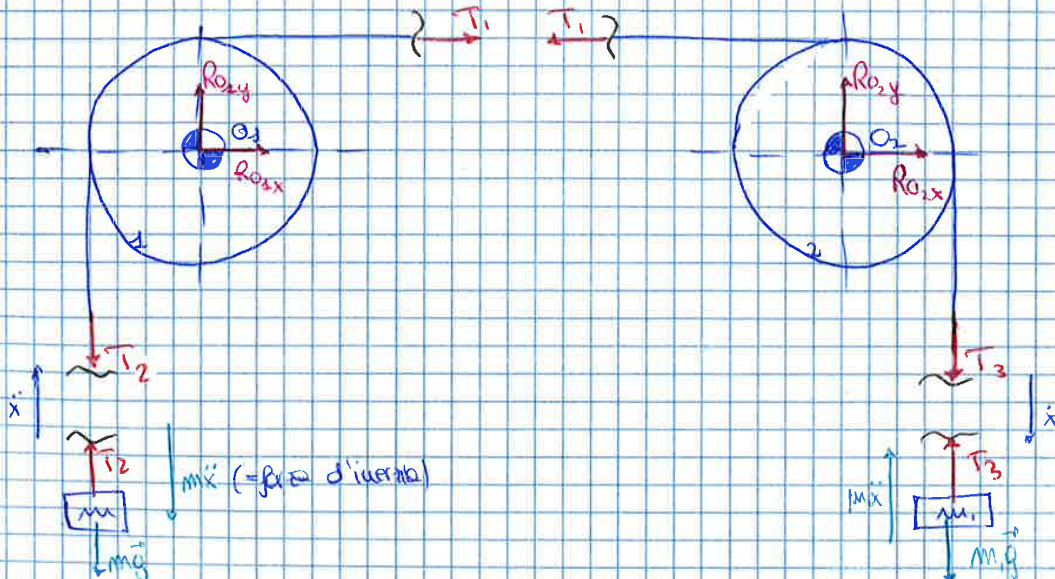
$\ddot{x} ?$

$$M = 150 \text{ kg}$$

$$M_1 = 200 \text{ kg}$$

$\ddot{x} ?$

• sistema (1)





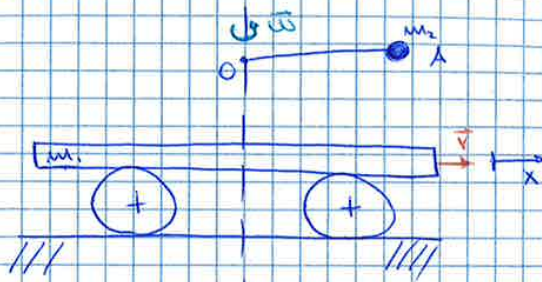




a)-b)

$$\Delta E_k = E_p - E_{k_i} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_p^2 - \frac{1}{2} m_1 v^2 = -15067,9 \text{ J}$$

es. 3



$$m_1 = 20 \text{ kg} \quad m_2 = 5 \text{ kg}$$

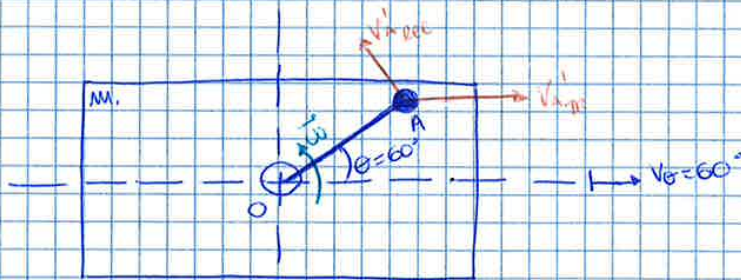
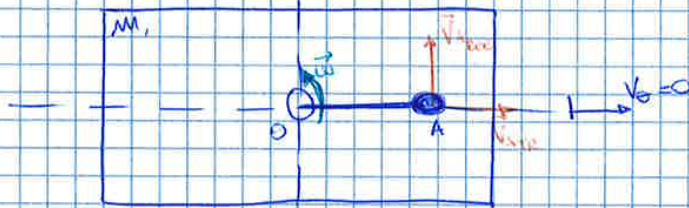
$$r = OA = 0,4 \text{ m}$$

$$\omega = 4 \text{ rad/s} = \text{cost}$$

$$v_{\theta=0^\circ} = 0,6 \text{ m/s}$$

$$v_{\theta=60^\circ} = ?$$

dopo l'evento



$$\vec{v}_{A, \text{res}} = \vec{v}_{A, \text{rec}} + \vec{v}_{A, \text{imp}} = \left[ \vec{v}_B + \omega \vec{k} \times (\vec{A} - \vec{O}) \right]_{\text{rec}} + \vec{v}_{\theta=0^\circ}$$

$$\sum \vec{F}_{\text{est}} = 0 = \frac{d\vec{Q}}{dt} \Rightarrow \vec{Q} = \text{cost.}$$

a)  $\theta = 0^\circ$

$$\text{lungo } x: m_1 v_{\theta=0^\circ} + m_2 [v_{\theta=0^\circ} + \omega r \sin 0^\circ] = \vec{Q}_i$$

$$Q_i = (m_1 + m_2) v_{\theta=0^\circ}$$

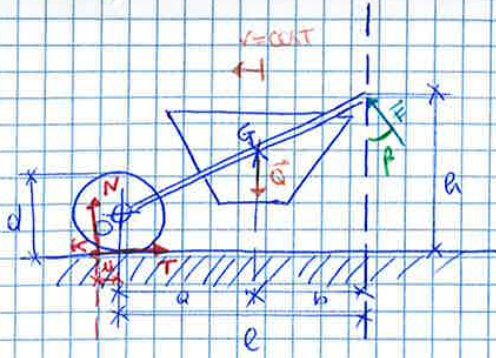
b)  $\theta = 60^\circ$

$$\text{lungo } x: Q_f = m_1 v_{\theta=60^\circ} + m_2 [v_{\theta=60^\circ} - \omega r \sin 60^\circ]$$

$$Q_f = (m_1 + m_2) v_{\theta=60^\circ} - m_2 \omega r \sin 60^\circ$$



es. 2:



$F$ ?  $\beta$ ?

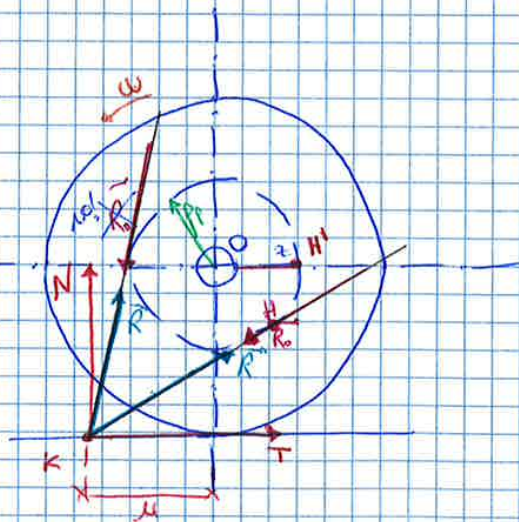
il punto di contatto ruota-terreno

c'è attrito volante  $\rightarrow$  spostato dalla geometria  $u$  da  $N$

$$\uparrow N - Q + F \cos \beta = 0 \quad (1)$$

$$\rightarrow T - F \sin \beta = 0 \quad (2)$$

$$\curvearrowright + -Q(a+u) + F \cos \beta (l+u) + F \sin \beta (e) = 0 \quad (3)$$



$$r_p = R_p \sin \varphi_p = 0,00234 \text{ m}$$

(raggio per cerchio di attrito al punto)

$$\varphi_p = 11,3^\circ \text{ con } \varphi_p = \arcsin \frac{r_p}{R_p}$$

due rette tangenti passanti per k

$r_p$  deve essere spostato a  $u$  essendo attrito del contatto ruota-terreno!

la lunghezza  $Oz$  è la proiezione di  $H'$  sul raggio ( $\neq r_p$ )

$$\curvearrowright H' \quad N(u+r_p) = T \frac{d}{r}$$

$$\tan \beta = \frac{(e-a)(u+r_p)}{r(a+u) - e(u+r_p)} = 0,0496$$

$$\beta = 2,86^\circ$$

$$F = Q \frac{(a+u)}{\cos \beta (l+u) + \sin \beta (e)} = 644,66 \text{ N}$$



se NON avessi  $\vec{\tau}$ , ma  $I_G \dot{\omega}$  e  $\dot{\omega}$  oltre a  $\omega$

$$0) \quad I_G \dot{\omega} + (R_A + R_B) \frac{d}{2} = 0$$

$$I_G \dot{\omega} + (R_A + R_B) \frac{d}{2} \text{sen} \varphi = 0$$

$$I_G \frac{d\omega}{dt} + (R_A + R_B) \frac{d}{2} \text{sen} \varphi = 0$$

$$\int_{\omega_0}^0 I_G d\omega = \int_0^T (R_A + R_B) \frac{d}{2} \text{sen} \varphi dt$$

valore costante del tempo di arresto  
del sistema

$$\omega_0 = \frac{2Tm}{EG}$$

$$I_G (-\omega_0) = - (R_A + R_B) \frac{d}{2} \text{sen} \varphi T$$

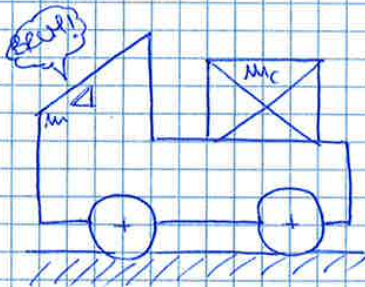
$$T = \frac{I_G \omega_0}{(R_A + R_B) \frac{d}{2} \text{sen} \varphi} = 6,06 \text{ s}$$

ESERCITAZIONE 5

17/04/2015

1)

Freni a cinghi (filaretti) ad accostamento rigido Sulle ruote posteriori



$$M = 3000 \text{ kg}$$

$$M_C = 400 \text{ kg}$$

$$V_0 = 50 \text{ km/h} = 13,88 \text{ m/s}$$

$$P = 3600 \cdot 9,81 \text{ N}$$

$$r_{ruota} = d = 0,8 \text{ m}$$

$$\ddot{x} = -3 \text{ m/s}^2$$

$t^*$  tempo e spazio di frenata  
 $s^*$  ?  
 $\mu$  coeff. di aderenza  
da km/h? affari dec-  
lo corsa sua  
pecca

F  
azione  
ai cinghi?

2) Moto uniformemente accelerato

$$\begin{cases} v(t) = v_0 + at \\ s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \end{cases}$$

no non mette segno a (x decelerazione) perché ho già  $\ddot{x}$   
negativa mette consegna

$$0 = v_0 + \ddot{x} t^* \quad t^* = -\frac{v_0}{\ddot{x}} = -\frac{13,88}{(-3)} = 4,63 \text{ s}$$

$$s^*(t^*) = \int_0^{t^*} v dt = v_0 t^* + \frac{1}{2} a (t^*)^2 = 32,15 \text{ m}$$