



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1898A -

ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Chialà Francesco

MATERIA: Meccanica Applicata alle macchine - Prof. Ferraresi

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

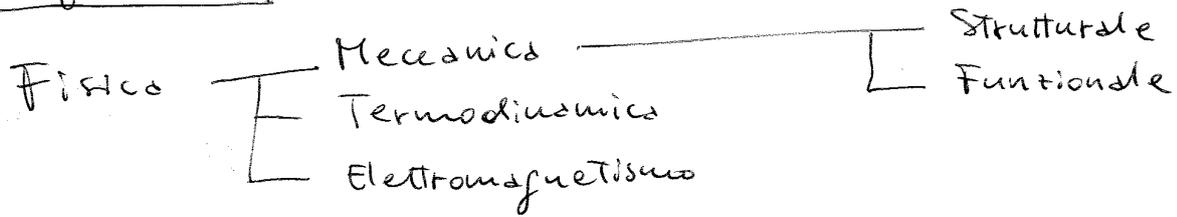
**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Meccanica applicata

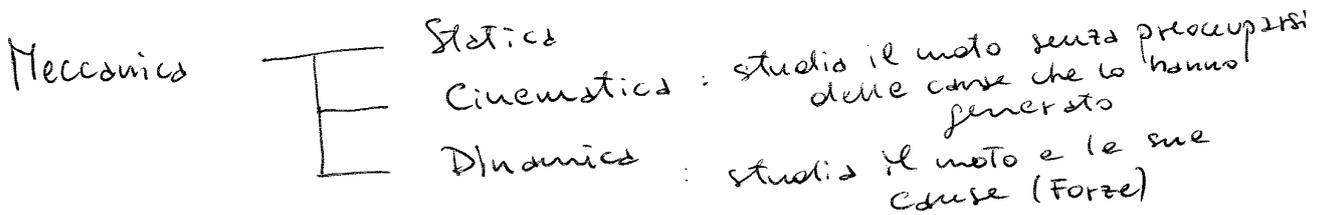
Testo: Meccanica applicata CLUT 3^a EDIZIONE 2007
Autori: Ferraresi
Riparelli

Metodo risolutivo dei problemi!!!

Definizioni



La meccanica funzionale è la meccanica applicata,
(applicata alle macchine in questo corso)

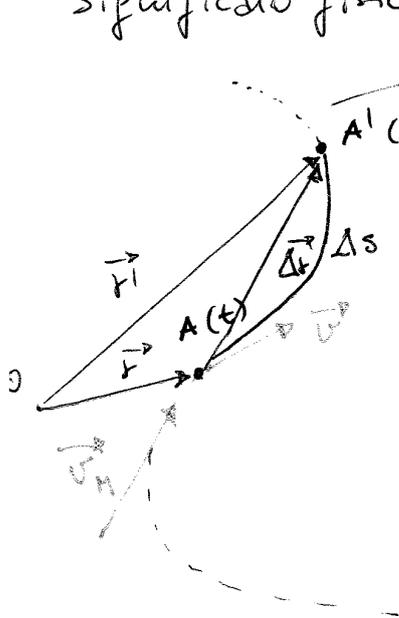


Sistema reale

Posso avere due obiettivi: 1) Analisi (del funzionamento)
2) Progettare (un sistema reale)

Il sistema reale è un sistema qualunque
esempio: Automobile

Significato fisico



Traiettoria: linea che rappresenta la posizione del punto materiale istante per istante

eq. vettoriale

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}' - \vec{r} = \text{grandezza finale} - \text{quella iniziale}$$

Variazione di grandezza finale meno iniziale

Nota che c'è stata una variazione della parte scalare ma anche di quella vettoriale

Percorso seguito = lunghezza del tratto di Traiettoria da A ad A'. Notiamo che $|\Delta \vec{r}| \neq \Delta s$

Definizione velocità: variazione posizione rispetto ad un certo tempo e rispetto all'origine del sistema di riferimento

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{v}_M \quad \text{passando al limite} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{v}$$

velocità istantanea

velocità

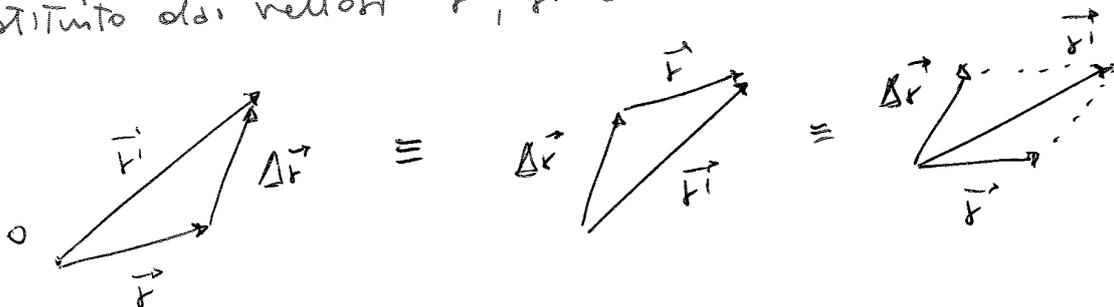
Man mano che il punto finale si avvicina al punto iniziale il vettore $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{v}$ tende ad essere tangente

alla traiettoria. Invece $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ aveva la stessa direzione di $\Delta \vec{r}$

$$\vec{v} = \text{sempre tangente alla Traiettoria}$$

Conclusione

l'eq. vettoriale è rappresentata univocamente dal "triangolo" costituito dai vettori \vec{r} , \vec{r}' e $\Delta \vec{r}$



$$\begin{cases} \ddot{x} \hat{i} + \ddot{y} \hat{j} \neq 0 \\ \ddot{y} \hat{j} + \ddot{x} \hat{i} \neq 0 \end{cases}$$

I vettori \hat{i}, \hat{j} sono FISSI
 per cui non esisterà una $\frac{d\hat{i}}{dt}$ e
 nemmeno $\frac{d\hat{j}}{dt}$ perché
 questi sono associati agli assi
 coordinati:

Perciò a fronte avremo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \cancel{x \frac{d\hat{i}}{dt}} + \cancel{y \frac{d\hat{j}}{dt}}$$

$$|\vec{v}_x| = \left| \frac{dx}{dt} \hat{i} \right| < 0 \text{ (in figura)}$$

$$|\vec{v}_y| = \left| \frac{dy}{dt} \hat{j} \right| > 0 \text{ (in figura)}$$

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \frac{d\hat{j}}{dt} = \vec{0} \text{ perché } \hat{i} \text{ e } \hat{j} \text{ sono vettori costanti}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x} \hat{i} + \ddot{y} \hat{j}$$

$$|\vec{a}_x| > 0$$

$$|\vec{a}_y| < 0$$

Avremo

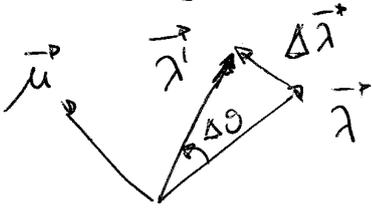
$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$\vec{r}^p = r \vec{\lambda}^p$$

$$\vec{v}^p = \frac{d\vec{r}^p}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{\lambda}^p + r \frac{d\vec{\lambda}^p}{dt}$$

Come faccio la derivata di $\vec{\lambda}^p$?



Notiamo che $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vartheta}{\Delta t} = \frac{d\vartheta}{dt} = \dot{\vartheta} = \omega$

$$\Delta \vartheta = \Delta t \cdot \dot{\vartheta}$$

$$\vec{\lambda}^p = \vec{\lambda}^p + \Delta \vec{\lambda}^p$$

Approssimo $\Delta \vec{\lambda}^p$

$$\Delta \vec{\lambda}^p \cong \Delta \vartheta \cdot |\vec{\lambda}^p| \vec{\mu}^p = \Delta t \cdot \dot{\vartheta} \cdot 1 \vec{\mu}^p$$

$$\frac{\Delta \vec{\lambda}^p}{\Delta t} \cong \dot{\vartheta} \vec{\mu}^p \quad \text{relazione approssimata}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\lambda}^p}{\Delta t} = \frac{d\vec{\lambda}^p}{dt} = \dot{\vartheta} \vec{\mu}^p \quad \text{relazione esatta per } \Delta t \rightarrow 0$$

La derivata $\frac{d\vec{\lambda}^p}{dt}$ è un vettore che ha come

modulo il valore di $\dot{\vartheta} = \omega$ e verso quello del vettore $\vec{\lambda}^p$ ruotato di 90° in senso antiorario

Tramite le formule di Poisson:

$$\frac{d\vec{\lambda}^p}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{\lambda}^p = \omega \vec{v}^p \wedge \vec{\lambda}^p = \omega \vec{\mu}^p$$

$$\text{Allo stesso modo} \quad \frac{d\vec{\mu}^p}{dt} = \dot{\vartheta} (-\vec{\lambda}^p)$$

Sottocasi moto rettilineo

1) Moto rettilineo uniforme

$$\vec{v} = \text{cost}$$

[Oss. essendo il moto RETTILINEO posso sottintendere il versore \hat{i} in quanto è uguale per tutti i parametri (le variabili in gioco)]

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \underline{\text{eq. del moto}}$$

$$dx = v dt \quad \rightarrow \quad \int_{x_0}^x dx = \int v dt = v \int_{t_0}^t dt$$

Ricavo la legge del moto

$$x - x_0 = v(t - t_0)$$

$$x = x_0 + v(t - t_0)$$

fissando come istante iniziale $t_0 = 0$

$$x = x_0 + vt \quad \text{Legge del moto rettilineo uniforme}$$

2) Moto rettilineo uniformemente accelerato

$$a = \frac{dv}{dt} = \text{cost} \quad \leftrightarrow \quad \text{eq. del moto}$$

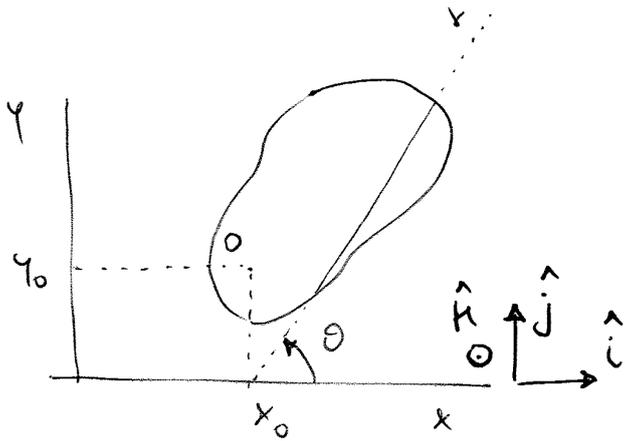
$$dv = a dt$$

$$\int_{v_0}^v dv = a \int_{t_0}^t dt$$

$$v = v_0 + a(t - t_0)$$

legge del moto rettilineo unif. accelerato per la velocità

Corpo rigido nel piano



Consideriamo un corpo esteso e fissiamo un sistema di riferimento. Teniamo presente che anche rotolando in 2 dimensioni per definire la velocità angolare e molte altre grandezze abbiamo comunque bisogno della terza dimensione per definirli. Definiamo, perciò anche \hat{k}

Individuiamo il punto o e al corpo esteso. Le coordinate x_0 e y_0 variano nel tempo, durante il moto

$$\begin{array}{lcl}
 x_0 = x_0(t) & \xrightarrow{\text{segnalo le df. di}} & \begin{array}{l} \dot{x}_0 \\ \ddot{x}_0 \end{array} \\
 y_0 = y_0(t) & & \begin{array}{l} \dot{y}_0 \\ \ddot{y}_0 \end{array}
 \end{array}$$

Queste coordinate non sono sufficienti per definire la posizione del corpo. Introduciamo una terza individuata dall'angolo

$$\theta(t) \xrightarrow{\text{segnalo}} \dot{\theta}(t) \quad \ddot{\theta}(t)$$

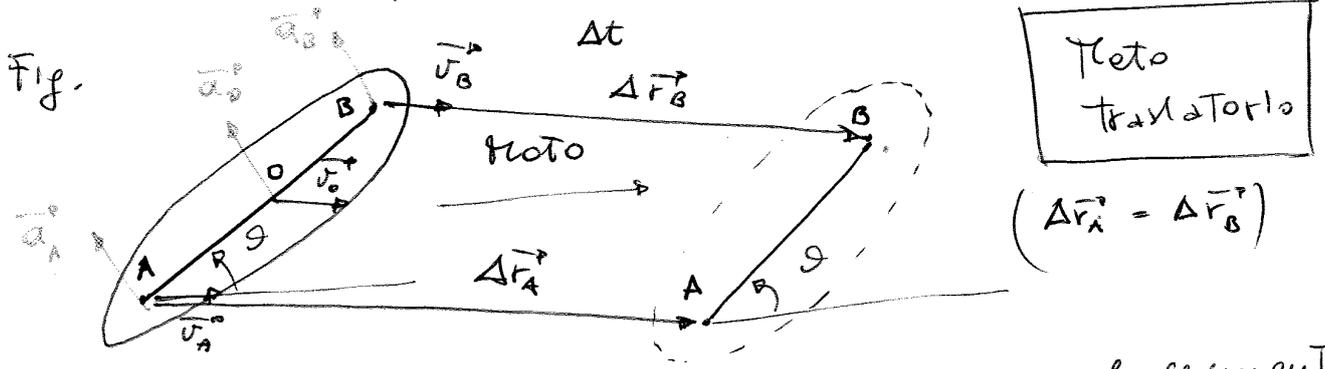
Questi parametri sono tutti vettori da convenire è che se $\theta(t)$ cambia ruotando in senso antiorario allora il vettore $\vec{\theta}(t)$ è orientato come \hat{k} .

Allo stesso modo se $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$ $\omega > 0 \Rightarrow$ il corpo accelera

Avremo 3 G.D.L.:

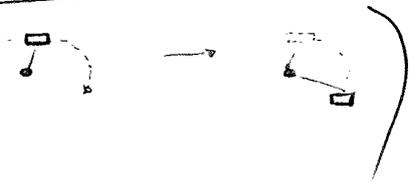
- 1) x
- 2) y
- 3) θ

Vediamo se in alcuni casi particolari dei 3 gradi di libertà alcuni possono essere eliminati.



Guardando la Fig. notiamo che nel moto il segmento \overline{AB} mantiene inalterata la sua inclinazione pari a $\theta = \text{cost}$. Questo tipo di moto è detto Moto traslatorio.

(Esempio: pedale della bici)



Arreamo che in questo tipo di moto $\dot{\theta} = 0 = \omega$ e $\ddot{\theta} = 0 = \dot{\omega}$.

Costruendo il rapporto incrementale:

$\frac{\Delta \vec{r}_A}{\Delta t}$, $\frac{\Delta \vec{r}_B}{\Delta t}$ definiamo le velocità medie

$$\frac{\Delta \vec{r}_A}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}_B}{\Delta t} = \vec{v}_A = \vec{v}_B$$

Il moto traslatorio ha 2 p.d.l. (x e y)

E quindi le velocità istantanee:

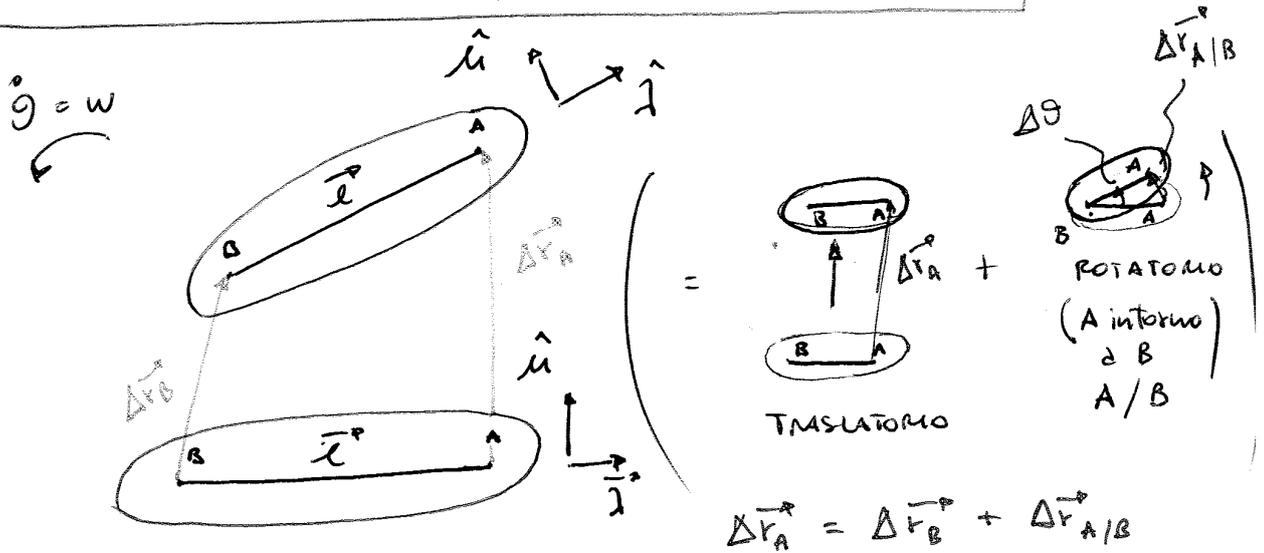
$$\vec{v}_A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_B}{\Delta t} = \vec{v}_B$$

derivando una seconda volta:

$$\vec{a}_A = \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{a}_O = \frac{d\vec{v}_O}{dt} = \vec{a}_B = \frac{d\vec{v}_B}{dt}$$

Questo perché abbiamo eliminato 1 grado di libertà - (cioè θ)

Moto piano generico (o moto rototraslatorio)



Tutto avviene in un tempo Δt

Inoltre $\Delta \theta = \omega \cdot \Delta t$

dividendo per Δt

$$\frac{\Delta \vec{r}_A}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}_B}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{r}_{A/B}}{\Delta t}$$

Passando al limite:

$$\left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \right) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}}^*$$

Inoltre $\vec{v}_{A/B} = \omega \cdot l \cdot \vec{\mu}$

(Moto di A/B = moto CIRCOLARE)

La relazione * è detta Formula fondamentale della cinematica

Particolare importanza è assunta dalla componente rotatoria della velocità (del moto di A intorno a B, A/B)

Derivando la *:

$$\boxed{\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}}$$

Teorema di RIVALS

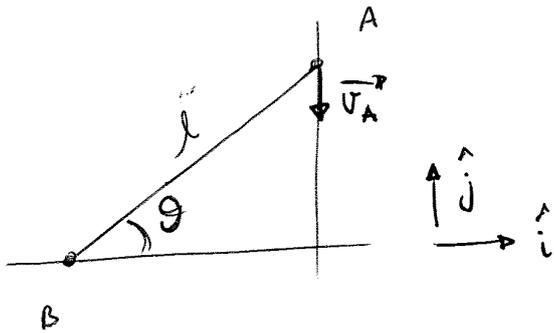
$\vec{a}_{A/B}$ è l'accelerazione che A avrebbe se B fosse fisso

Perciò

$$\vec{a}_{A/B} = \vec{a}_{A/Bt} + \vec{a}_{A/Bn}$$

$$\vec{a}_{A/Bt} = \omega l \vec{\mu} \quad \vec{a}_{A/Bn} = \omega^2 l (-\vec{\lambda})$$

PROBLEMA 1.1



A vincolato a muoversi verticalmente
 B vincolato a muoversi orizzontalmente

Dati: $\vec{v}_A = 2 \text{ m/s } (-\hat{j})$ $g = 30^\circ$
 $|\vec{v}_A| = \text{cost.}$ ($a_A = 0$) $l = 0,2 \text{ m}$
 $\vec{v}_B = ?$ $a_B = ?$

Oss.: conosco la geometria

{ la posizione di tutti i punti del corpo

• conosco vel / acc. di un punto

• NON CONOSCO ANCORA $\omega / \dot{\omega}$ del corpo

Quindi calcolo $\omega / \dot{\omega}$

Oss. $a_A = 0 \not\Rightarrow a = 0$ in qualsiasi altro punto

Sfruttiamo la formula fondamentale che lega la velocità di due punti qualsiasi e al corpo

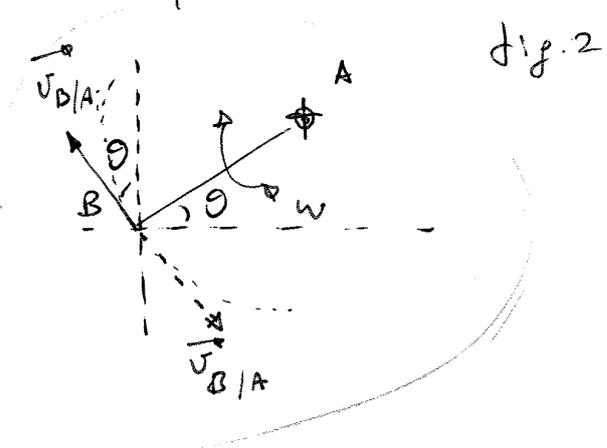
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} \quad (\text{M modulo, D direz, V vert})$$

Individuo tutte le caratteristiche possibili dei vettori

$$\vec{v}_B, \vec{v}_A, \vec{v}_{B/A}$$

M	?	v_A	$(\omega \cdot AB)?$
D	—		—
V	?	$-\hat{j}$?

ricordate



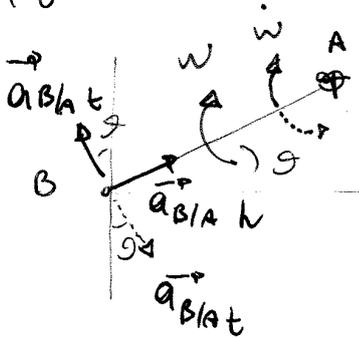
informazioni note

Calcolo accelerazione

Uso la formula di RIVALS

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A_n} + \vec{a}_{B/A_t} \quad \text{eq. vettoriale.}$$

fig.3



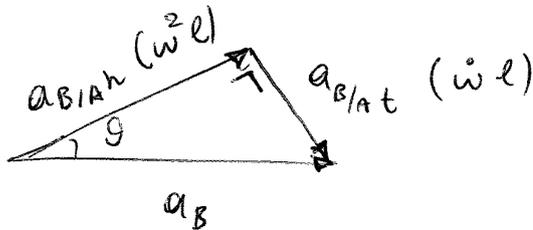
ricordando

$$\frac{v_A}{a_A} = \cos \theta$$

	a_B	a_{B/A_n}	a_{B/A_t}
M	?	$\omega^2 l$	$(\dot{\omega} l) ?$
D	—	θ	θ
V	?	B → A	?

1) Disegno le direzioni

2) stabilisco a quali direzioni e le accelerazioni dell'eq. vettoriale



3) stabilisco i versi

$$a_B = \frac{\omega^2 l}{\cos \theta} = 30,6 \text{ m/s}^2; \quad \text{orizzontale, } \hat{i}$$

Dalla fig.3 deduco che $\dot{\omega} \hat{c}$

$$\dot{\omega} l = \omega^2 l \tan \theta \quad \dot{\omega} = \omega^2 \tan \theta = 76,3 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \curvearrowright$$

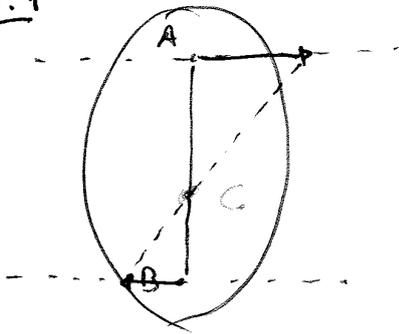
Ci sono casi in cui si conoscano le direz.^{ioni} di due punti e tali direz. sono uguali: non riesco a determinare "C". In questi casi necessito

di conoscere i moduli e versi di tali velocità (es. nei punti A e B).

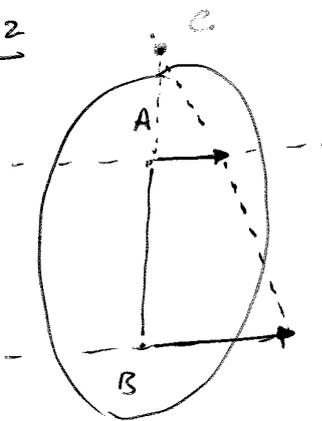
In tal caso possiamo determinare "C" con le due costruzioni di fianco

In fine abbiamo un 3° caso:

costr. 1

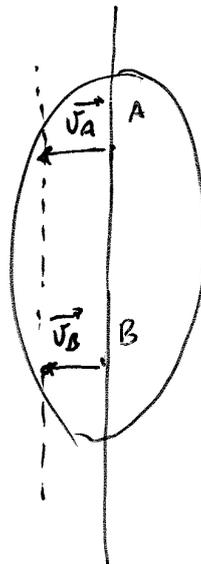


costr. 2



Valgono le seguenti relazioni:

$$\omega = \frac{v_A}{CA} = \frac{v_B}{CB}$$



$$\vec{v}_A = \vec{v}_B$$

$$CA = CB = \infty$$

$$\omega = \frac{v_A}{AC} = \frac{v_B}{BC} = 0$$

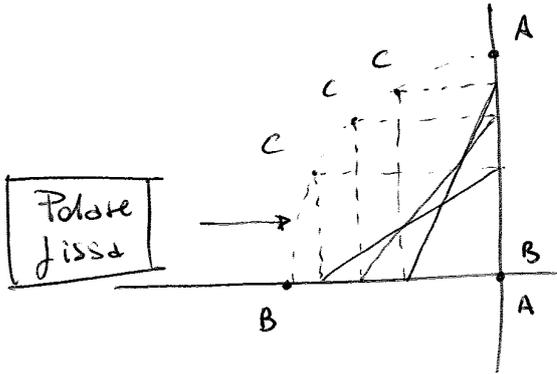
⚠ Attenzione!!!

Non è detto che il corpo stia traslando solo perché "w" in un certo istante è nulla. Potrebbe essere che in un istante successivo la rotazione esista e sia $w \neq 0$.

Quindi il centro delle velocità non è il centro delle accelerazioni. Se $w = 0 \Rightarrow a \neq 0$ in generale

Causa derivazioni ...

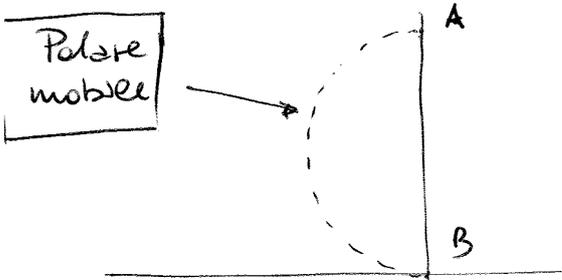
Nel SR ASSOLUTA



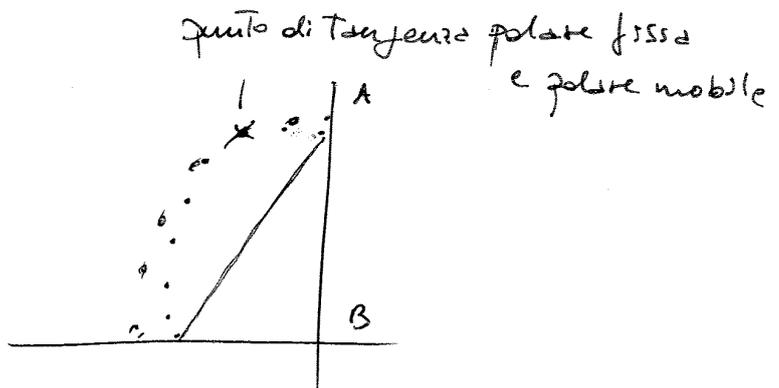
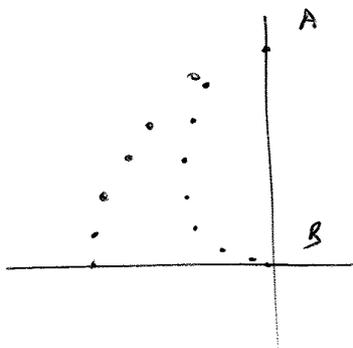
- Polare perché C segue una traiettoria circolare
- fissa perché tale traiettoria circolare non muta

Nel SR RELATIVO (sulla sbarretta)

Vedo il punto C muoversi di moto circolare
 Si definisce così la Polare mobile



Se Traccio la Polare fissa e seguo il movimento del corpo AB insieme al moto della polare mobile mi accorgo che: la polare mobile ruota sulla polare fissa

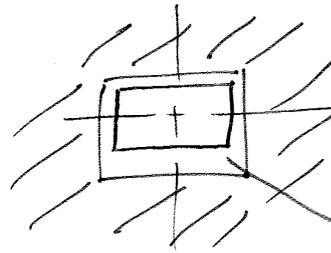
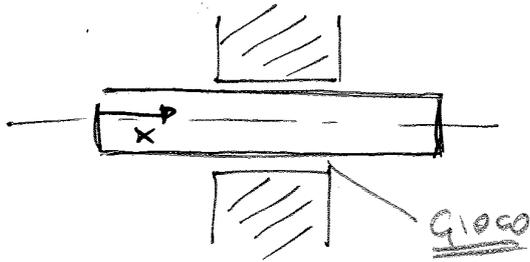


Consideriamo un corpo con forma parallelepipedica



In questa situazione il corpo 1 ha 3 g.d.l.

Suppongo di collegargli un corpo 2 di forma qualsiasi ma che abbia una forma complementare in corrispondenza dei punti di contatto.



Questo è

un

[1] ACCOPPIAMENTO PRISMATICO

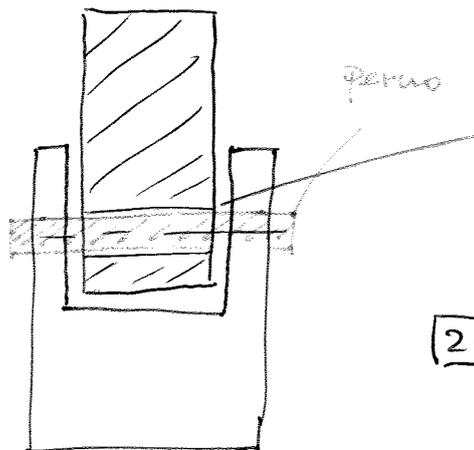
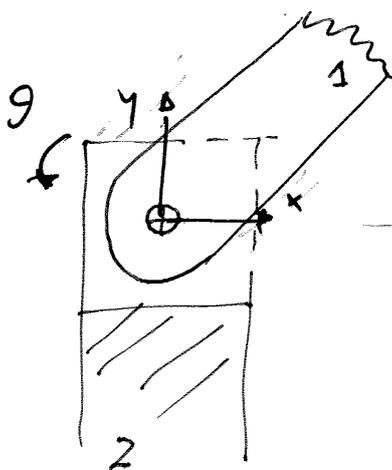
gioco 1 g.d.l.

Definiamo:

superfici coniugate: superfici lungo le quali i due corpi sono a contatto.

profili coniugati:

Notiamo che i g.d.l. in rosso si sono ridotte alla sola traslazione lungo x . Il g.d.l. z, y sono stati VINCOLATI



gioco

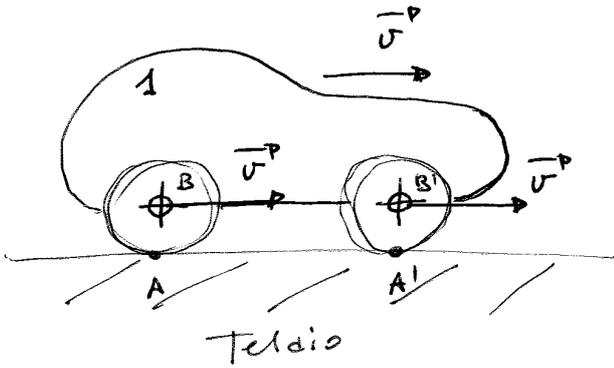
Questo è un

[2] ACCOPPIAMENTO ROTOIDALE

(o cerniera) 1 g.d.l.

In tal caso vincolano le traslazioni

lungo x e y . Mi riduco alla sola rotazione z intorno all'asse della cerniera (moto relativo)



Studi del moto della ruota e contatto con il terreno. 1) Supponiamo che sia un moto di puro rotolamento

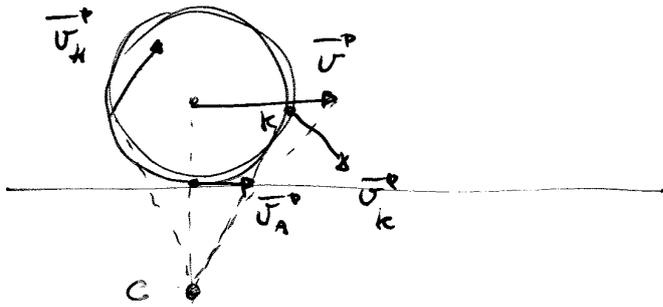
Il punto di contatto con velocità nulla!!!



$$\omega = \frac{v}{BC} = \frac{v}{r}$$

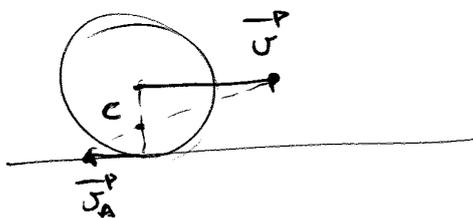
2) Supponiamo che ci sia anche STRISCIAMENTO

Il punto di contatto non è più fermo



$$\omega' = \frac{v}{BC} (< \omega)$$

3) Supponiamo che il punto di contatto si muova ma nel verso opposto a v .



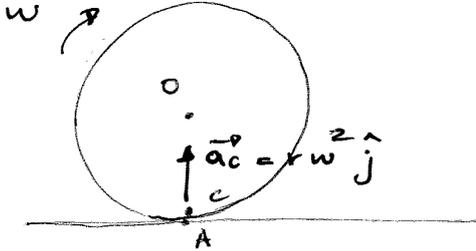
$$\omega'' = \frac{v}{BC} (> \omega)$$

Quando $\vartheta = 0$ (cioè quando c è centro di istantanea rotazione)

posizione : $x_c = 0$ $y_c = 0$

velocità : $\dot{x}_c = 0$ $\dot{y}_c = 0$

accelerazione : $\ddot{x}_c = 0$ $\ddot{y}_c = r\omega^2 \neq 0$



Il punto c è al corpo

ha la stessa velocità di A e di terreno.

Essendo A fermo $\Rightarrow c$ ha vel. nulla.

Però l'acc. del punto c esiste e

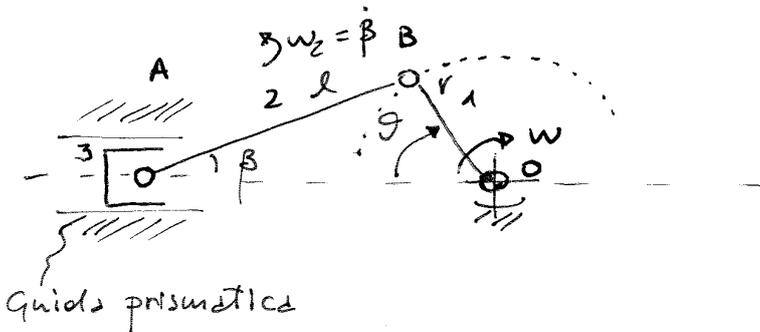
non è nulla !!!

È sempre diretta verso il centro

dell'arco di curva che sta percorrendo

Biella - manovella

- 1 manovella
- 2 biella
- 3 pistone



La manovella è posta in rotazione da un motore.

Supponiamo che "r" sia la lunghezza di 1

"l" " 2

β e ϑ sono gli angoli rispetto all'orizzontale di "2" e "1"

$\omega = 1500$ rpm (cost.) (round per minute = giri al minuto)
 $r = 125$ mm da trasformare in rad al secondo
 $l = 350$ mm $\vartheta = 60^\circ$

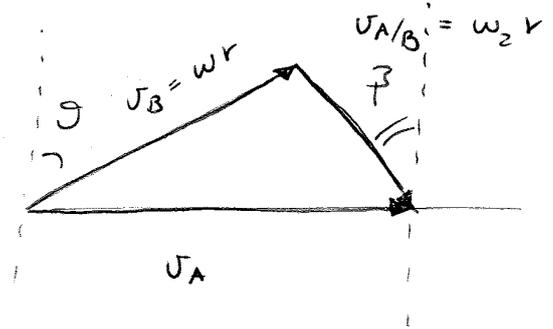
Con questi dati riusciamo a definire posizione, vel., acc. di tutti gli elementi del sistema. In particolare il pistone.

In fatti la manovella è l'elemento MOVENTE
 il pistone è l'elemento CEPENTE

Il pistone cede, restituisce il momento del motore al veicolo.

Analisi velocità
Completiamo la tabella:

	\vec{v}_A	=	\vec{v}_B	+	$\vec{v}_{A/B}$	
M	?		rw		$(w_2 l)?$	
D	—		$\frac{r}{l} \theta$		$\frac{\beta}{l}$	
V			\nearrow			



Proiettando in direzione orizzontale i lati associati a

v_B e $v_{A/B}$:

$$v_A = wr \sin \theta + w_2 l \sin \beta$$

In direzione verticale:

$$v_B \text{ verticale} = wr \cos \theta = w_2 l \cos \beta = v_{A/B} \text{ verticale}$$

Prelevando il sistema ricaviamo w_2 e β :

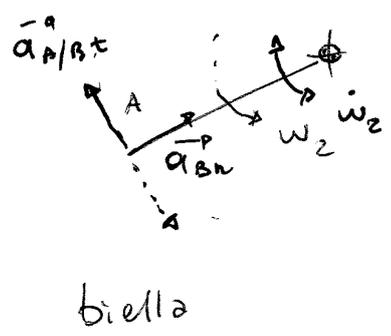
$$\begin{cases} v_A = wr \sin \theta + w_2 l \sin \beta \\ wr \cos \theta = w_2 l \cos \beta \end{cases}$$

Analisi accelerazioni

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}$$

$\begin{matrix} n & & t \\ \swarrow & & \searrow \\ \vec{a}_B & & \vec{a}_{A/B} \end{matrix}$

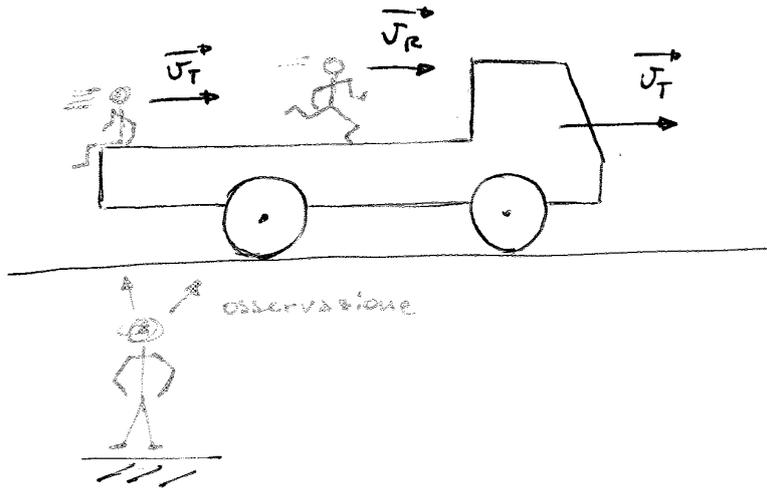
* essendo $w = \text{cost} \Rightarrow \dot{w} = 0$
 \Rightarrow non esiste componente tangenziale di B



biella

	\vec{a}_A	=	\vec{a}_B	+	$\vec{a}_{A/B} n$	+	$\vec{a}_{A/B} t$
M	?		rw^2		lw_2^2		$(l\dot{w}_2)?$
D	—		$\frac{r}{l} \theta$		$\frac{\beta}{l}$		$\frac{\beta}{l}$
V	?		\searrow		\nearrow		?

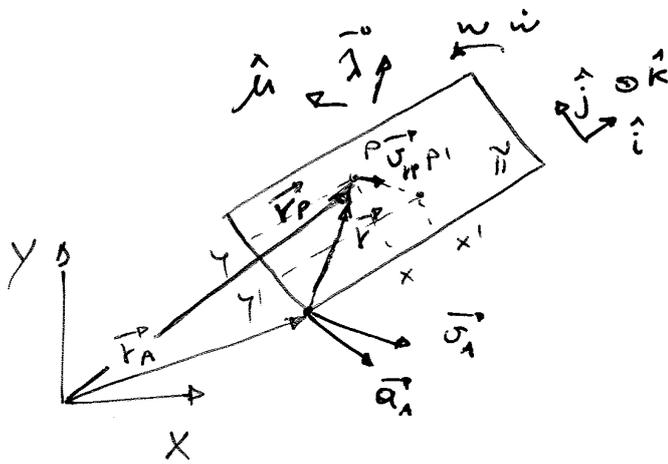
Cinematica dei MOTI RELATIVI



$$\vec{v}_A = \vec{v}_R + \vec{v}_T$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_T$$

Consideriamo un piano mobile ed un SR ad esso solido



Un punto "P" posto sul piano è "trascinato" dal piano stesso ma potrà anche muoversi indipendentemente su tale piano.

Il piano può anche ruotare continuando a "trascinare" il punto "P".

Il raggio vettore \vec{r}_P rappresenta la posizione ASSOLUTA del punto P (rispetto a SR fisso)
 Il raggio vettore \vec{r}' invece la posizione RELATIVA di P (rispetto a SR mobile)

Esiste la relazione:

derivando

$$\vec{r}_P = \vec{r}' + \vec{r}_A$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{r_P} + \vec{v}_{tP}$$

$$\vec{v}_{tP} = \vec{v}_A + \vec{v}_{tP/A}$$

vel. RELATIVA di P rispetto al SR MOBILE

$$\vec{\omega} = \omega \hat{k}$$

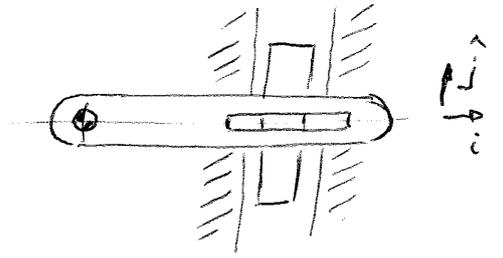
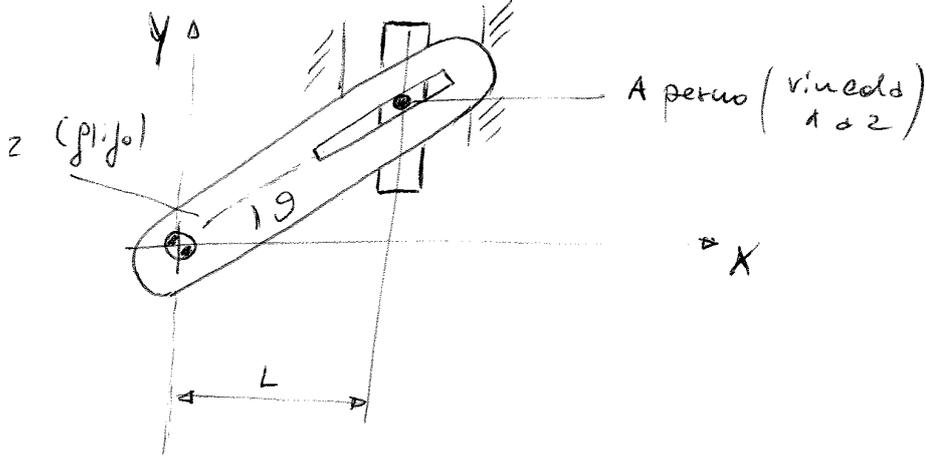
$$\vec{r}' = r \hat{\lambda} = x \hat{i} + y \hat{j}$$

$$\vec{v}_{tP/A} = \omega \cdot r \hat{\mu}$$

velocità di P intorno ad A

vel. di TRASINAMENTO: che avrebbe P se fosse solido a SR MOBILE

Studio del meccanismo a GLIFO



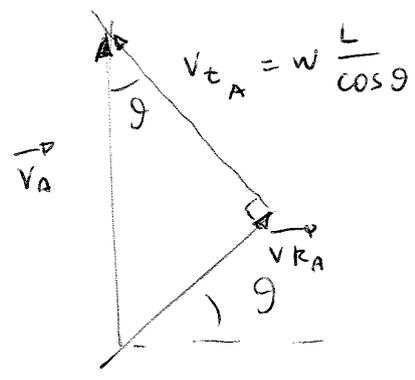
XY SR fissa
 i j SR mobile

Considerazioni sulla \vec{v}_A :

- \vec{v} assoluta di A diretta lungo \hat{j}
- \vec{v}^p relativa di A diretta lungo \hat{i}

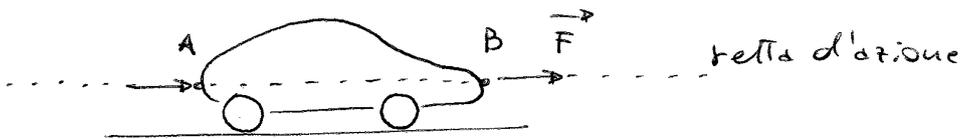
	\vec{v}_A	\vec{v}_{RA}	\vec{v}_{TA}
M	?	?	$OA \cdot \omega$
D		θ	θ
V	?	?	θ

Dati:
 $\omega = 1 \text{ rad/s}$
 $L = 200 \text{ mm}$
 $\theta = 0^\circ, 20^\circ$ variabile di θ



	$\theta = 0^\circ$	$\theta = 20^\circ$
$v_A = \frac{\omega L}{\cos \theta}$	$0,2 \frac{m}{s}$	$0,226 \frac{m}{s}$
$v_{RA} = \frac{\omega L \sin \theta}{\cos \theta}$	$0 \frac{m}{s}$	$0,077 \frac{m}{s}$

Forze applicate a CORPI RIGIDI



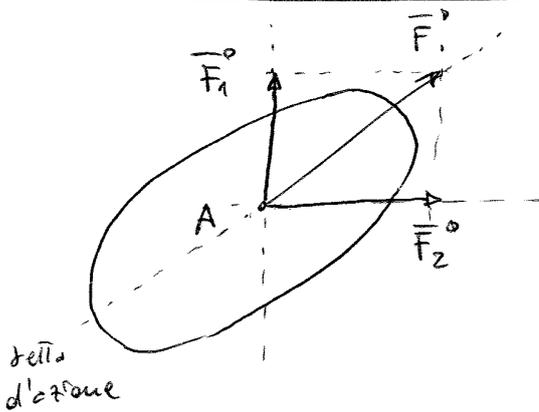
Nel caso di un corpo rigido l'applicazione della forza in A oppure in B implica lo stesso effetto sull'auto.

Si dice che i CORPI RIGIDI godono del

PRINCIPIO DI TRANSMISSIBILITÀ: La forza si trasmette su tutti i punti della retta d'azione che appartengono al corpo (nell'esempio l'automobile).

In tal caso si parla di FORZE SCORREVOLI

OPERAZIONI CON LE FORZE

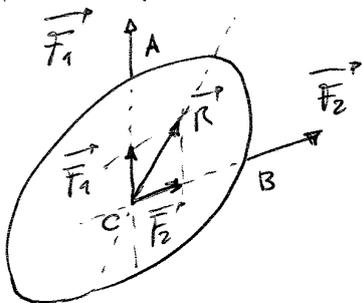


$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

in A

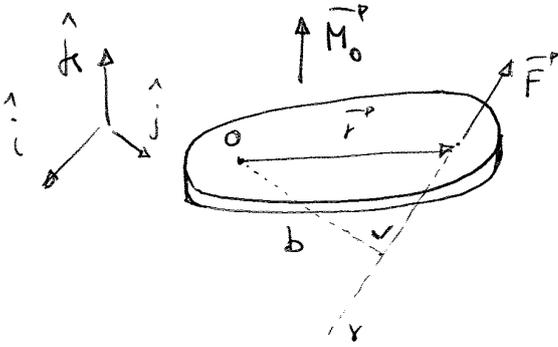
La somma vettoriale di due forze applicate ci permette di individuare la RETTA D'AZIONE

Se le due forze non sono applicate nello stesso punto posso applicare il "principio di Trasmissibilità".



Questa operazione può essere estesa al caso di N forze calcolando la risultante delle forze prese a due a due.

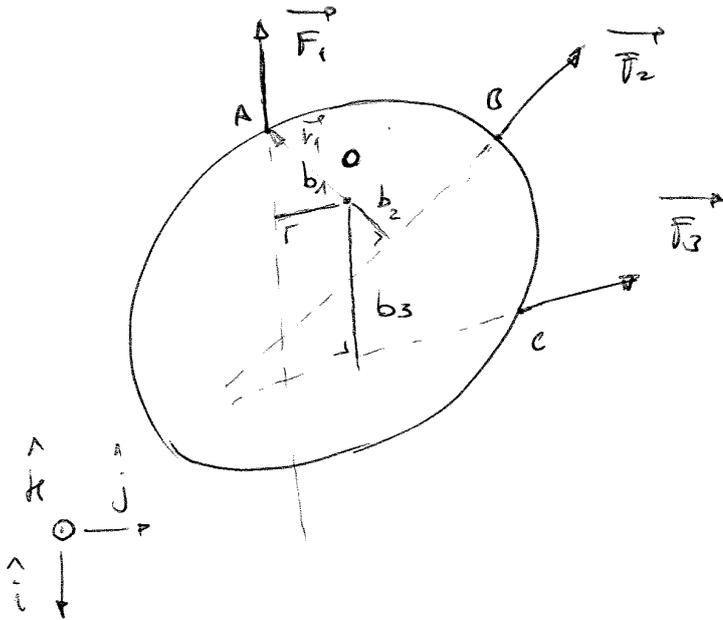
$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$



\vec{F} è al piano $\hat{i}\hat{j}$

$$\vec{F}^p = bF \hat{k}$$

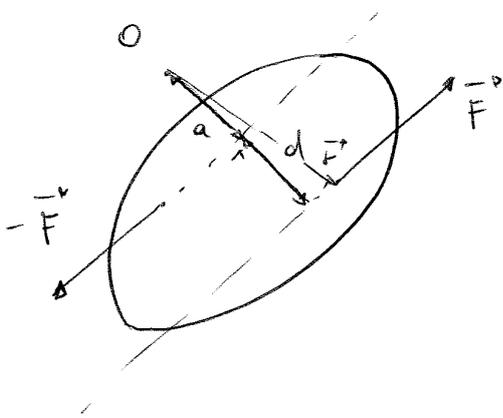
Questo concetto può essere esteso al caso di N forze



$$\begin{aligned} \vec{M}_0 &= b_1 F_1 (-\hat{k}) + \\ &+ b_2 F_2 (\hat{k}) + \\ &+ b_3 F_3 (\hat{k}) = \\ &= (-b_1 F_1 + b_2 F_2 + b_3 F_3) \hat{k} \end{aligned}$$

Momento risultante delle 3 forze

Consideriamo un sistema di forze costituito da due forze UGUALI IN MODULO, OPPOSITE IN VERSO ED APPLICATE IN DUE PUNTI DISTINTI DEL CORPO.
In tal caso parleremo di "COPPIA DI FORZE"

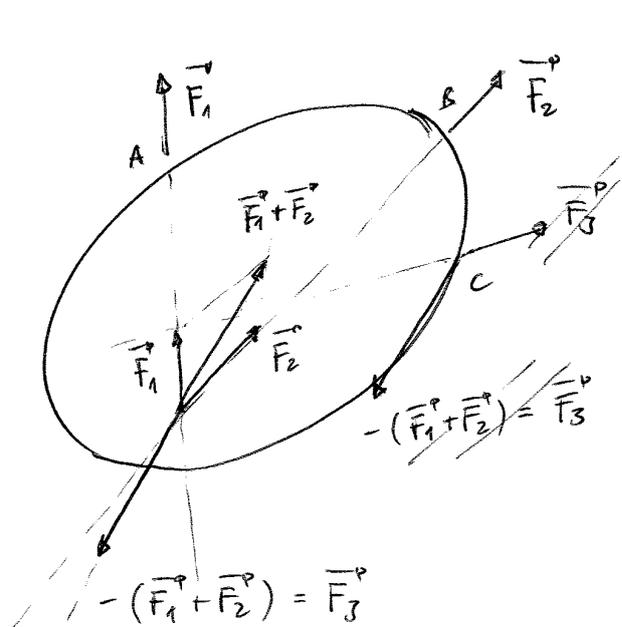


per una COPPIA DI FORZE

$$\begin{aligned} \vec{M}_0 &= (a+d) F \hat{k} + \\ &+ a F (-\hat{k}) = \\ &= d F \hat{k} \end{aligned}$$

la quantità "d" è detta BRACCIO DELLA COPPIA

Nota: Di solito si confonde l'espressione "momento di una coppia" con quello di "coppia"



$$\vec{R}^p = \sum \vec{F}^p = \vec{0}^p$$

$$\vec{M} = \vec{0}$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}^p$$

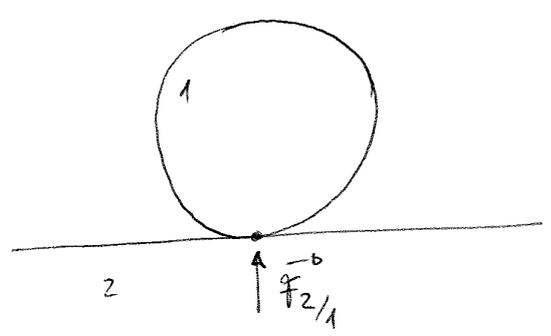
$$\vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$$

Perciò

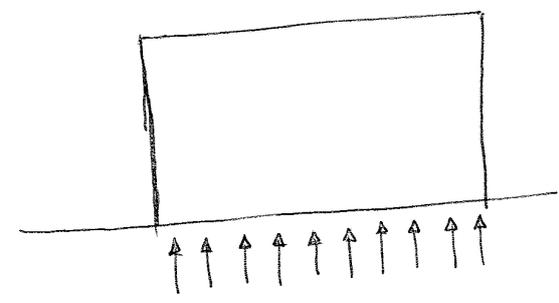
Se un corpo è soggetto a 3 forze affinché sussista l'equilibrio le tre forze devono:

- avere risultante nulla
- essere concorrenti nello stesso punto (devono cioè convergere nello stesso punto)

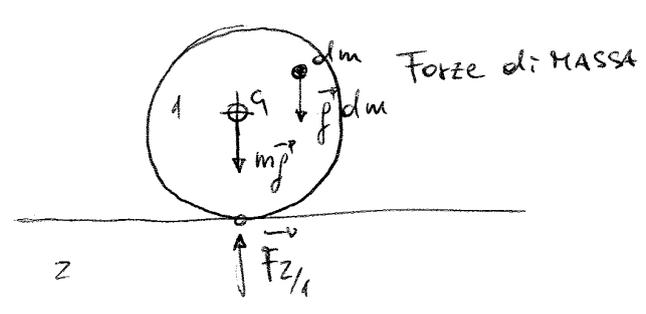
TIPICHE FORZE NEI SISTEMI MECCANICI



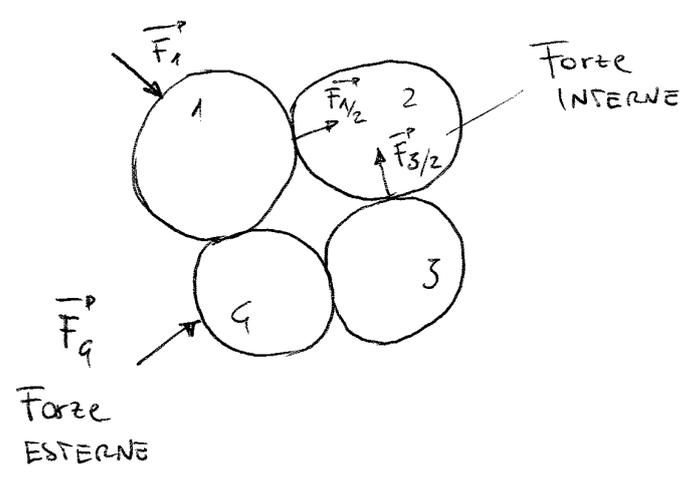
Forza CONCENTRATA



Forza DISTRIBUITA

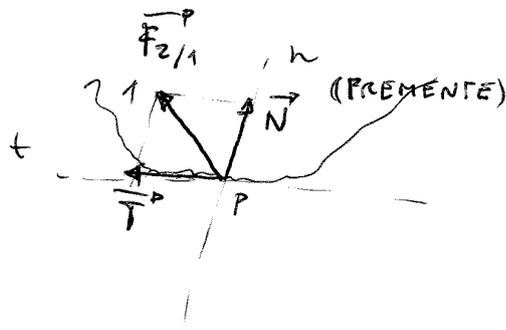
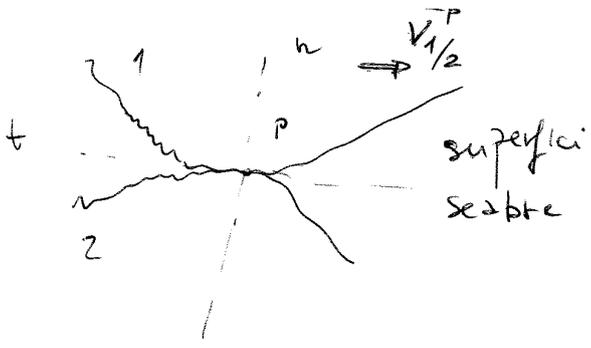


Forza di MASSA



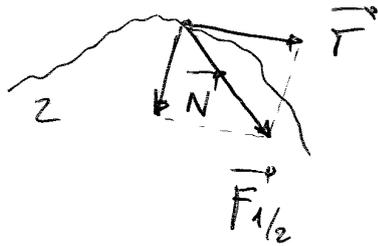
Forze ESTERNE

Forze INTERNE



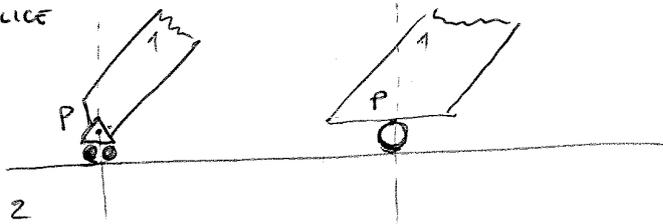
La forza NORMALE impedisce la penetrazione tra due corpi

La forza TANGENZIALE in tal caso esiste perché è tale da opporsi al verso del moto di 1 RISPETTO A 2
(MOTO RELATIVO DI 1 RISPETTO A 2)

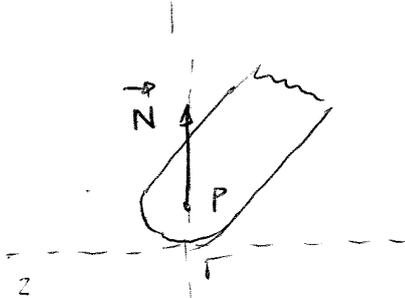


VINCOLI E REAZIONI

APPOGGIO SEMPLICE



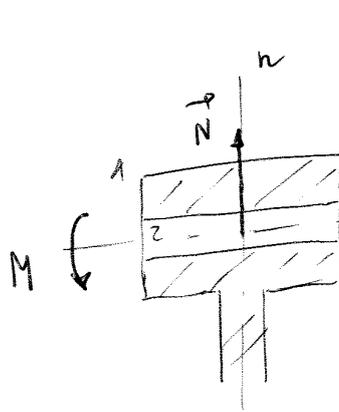
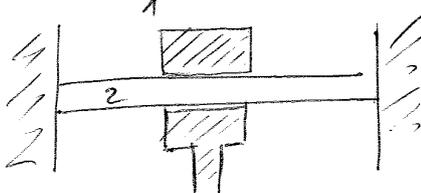
Cosa posso dire sulle forze scambiate tra 1 e 2?



\vec{N} : \perp al piano di appoggio (VERO PREMENTE)

ACCOPPIAMENTO PRISMATICO

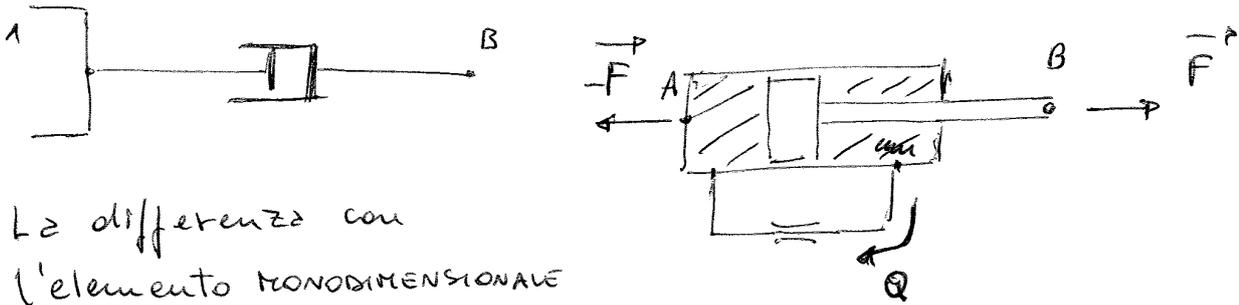
senza attrito



\vec{N} : direzione \perp all'asse della coppia verso : qualunque

\vec{M} si oppone alla rotazione di 1 rispetto a 2

SMORZATORE VISCOLO (elemento deformabile viscoso)



La differenza con l'elemento MONODIMENSIONALE è che: lo smorzatore

viscoso è un elemento deformabile ma NON ELASTICO. Inoltre nel caso di elemento deformabile viscoso ciò che determina l'entità della forza è il COME SI DEFORMA (non il QUANTO come in quello MONODIMENSIONALE).

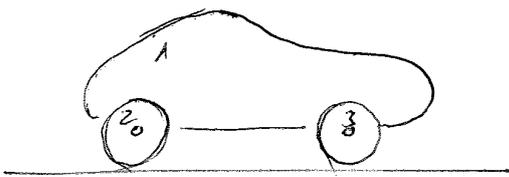
In particolare si avrà una relazione di questo genere:

$$\vec{F}^p = \beta (\dot{x}_B - \dot{x}_A)$$

se $\dot{x}_B = v_B$ è diversa

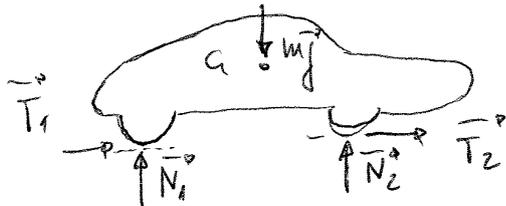
da $\dot{x}_A = v_A \Rightarrow$ esiste una forza

DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO



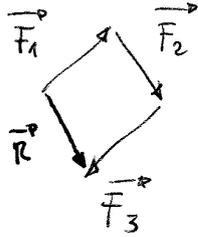
Occorre formulare un diagramma che metta in evidenza le forze subite da un particolare elemento del sistema

Si può considerare l'intero sistema e non i singoli elementi che lo costituiscono



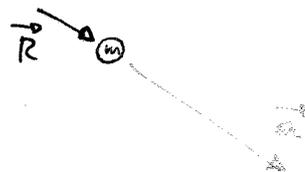
In tal caso evidenteremo tutte le forze dette ESTERNE.

(2) $\vec{R} \neq \vec{0}$ (2^a legge della dinamica)



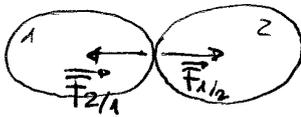
$$\Rightarrow \sum \vec{F}_e = m\vec{a} = \vec{R}$$

\vec{R} è un vettore PROPORZIONALE all'accelerazione del corpo



Il fattore di proporzionalità è la massa del corpo

(3) Caso di corp. a contatto



$$\vec{F}_{2/1} = -\vec{F}_{1/2}$$

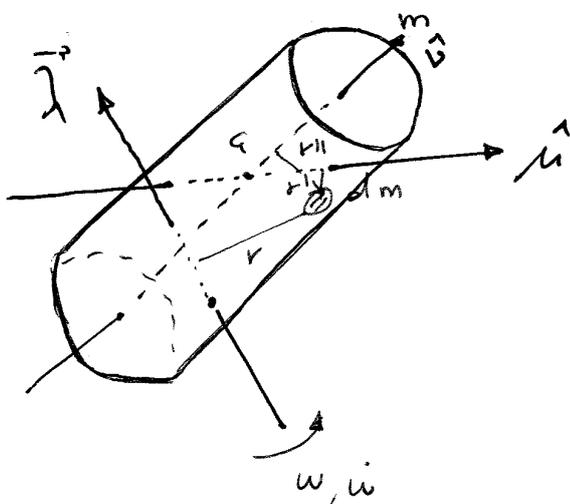
(3^a legge della dinamica)
(principio di azione e reazione)

Le forze che agiscono possono anche non essere complanari
Nella (1), (2), (3) non abbiamo specificato nulla di ciò

Notiamo anche che il momento delle forze con la stessa filosofia ha unità di misura:

$$[\sum \vec{M}_e] = N \cdot m = \frac{kg}{s^2} \cdot m^2$$

Supponiamo di avere un corpo cilindrico e di farlo ruotare attorno ad un'asta che gli infiliamo che costituisce l'asse di rotazione.



Il corpo ruoterà attorno all'asta.

Come ruoterà?

In base alla sua distribuzione di massa cioè in base al momento d'inerzia di massa definito come:

$$\int_m r^2 dm = I_\lambda$$

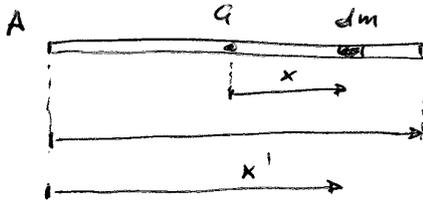
Se scelgo come asse di rotazione quello passante per il baricentro allora il momento d'inerzia è detto baricentrico:

$$\int_m r'^2 dm = I_{\mu}(a)$$

Esistono infiniti momenti d'inerzia perché infiniti sono gli assi che posso considerare ed infiniti sono gli assi passanti per un punto:

$$\int_m r''^2 dm = I_{\nu}(a)$$

Momento di un'asta



RISPETTO A G

$$I_G = \int x^2 dm$$

$$m = \mu L \quad (\mu \text{ densità lineare})$$

$$dm = \mu dx$$

$$I_G = \mu \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \mu \frac{L^3}{12} =$$

$$= \frac{m}{L} \cdot \frac{L^3}{12} = \frac{mL^2}{12}$$

RISPETTO AD A

$$I_A = \mu \int_0^L x^2 dx =$$

$$= \mu \frac{L^3}{3} = \frac{mL^2}{3}$$

TEOREMA DI HUYGENS - STEINER

$$I_A = I_G + m \overline{AG}^2$$

Applicato al caso precedente

$$I_A = I_G + m \overline{AG}^2 = \frac{mL^2}{12} + m \frac{L^2}{4} = m \frac{L^2}{3}$$

RAGGIO D'INERZIA (Es. disco)

$$I_G = \frac{m r^2}{2} = m \rho_G^2$$

$$\rho_G = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

disco

$\vec{w} = w \hat{k}$

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_e = m \vec{a}_G \\ \sum \vec{M}_e = I_G \dot{\vec{w}} \end{cases}$$

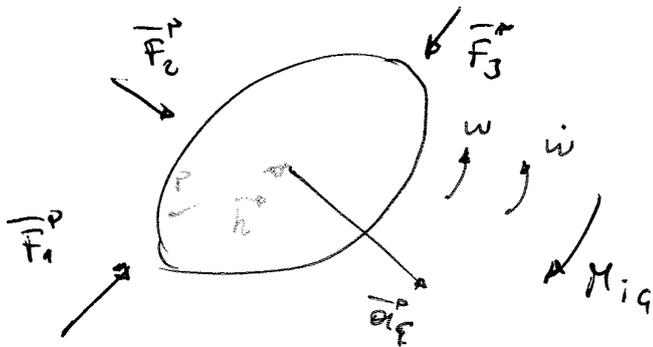
EQ. CARDINALI DELLA DINAMICA

Sono eq. vettoriali e quindi forniremo più di un'eq. se scomposte nelle varie direzioni

!!! ATTENZIONE !!! $\sum \vec{M}_e = I_G \dot{\vec{w}}$ vale solo NEL PIANO

È possibile formulare le eq. di D'ALEMBERT rispetto ad un PUNTO QUALSIASI e non solo al baricentro.

Scelgo come nuovo Pao di riferimento un punto generico P.



$$\sum \vec{M}_{e(r)} + \underbrace{M_{iQ}}_{\vec{K}_i(r)} + \vec{h} \wedge \vec{F}_i = \vec{0}$$

Avremo nella forma più generale:

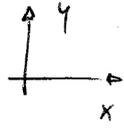
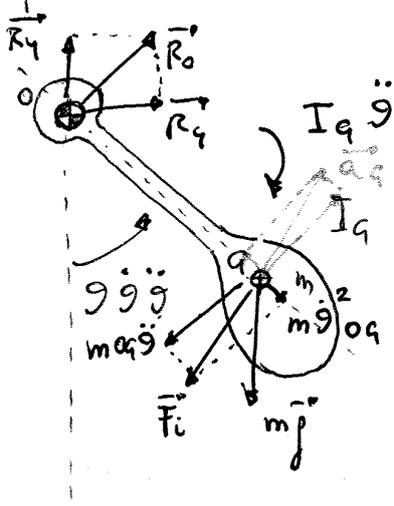
$$\begin{cases} (2) & \sum \vec{K}_e + \vec{K}_i = \vec{0} \\ (1) & \sum \vec{F}_e + \vec{F}_i = \vec{0} \end{cases}$$

Le formulazioni delle eq. cardinali della dinamica nel modo di D'ALEMBERT valgono anche in 3D perché non sono relative ad uno specifico asse.

In 2D le eq. di D'Alembert saranno scomposte in tal modo:

$$\begin{cases} \sum F_{ex} + F_{ix} = 0 \\ \sum F_{ey} + F_{iy} = 0 \\ \sum M_{e(z)} + F_{i(z)} = 0 \end{cases}$$

Esempio PENDOLO COMPOSTO



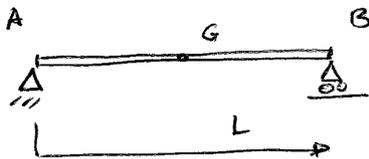
$I_q \ddot{\theta}$ si
oppone a θ

$$\left\{ \begin{aligned} \sum F_{ex} + F_{ix} &= 0 \\ \sum F_{ey} + F_{iy} &= 0 \\ \sum M_e + M_i &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\vec{F}_i = -m \vec{a}_c$$

Esercizio 2.21

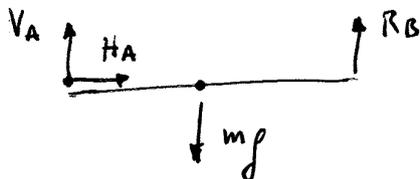
$m = \mu L$ $\mu = \text{cost}$



Schema di corpo libero (STATICO)

Nota:

Non ci sono forze d'inerzia
perché non ci sono accelerazioni

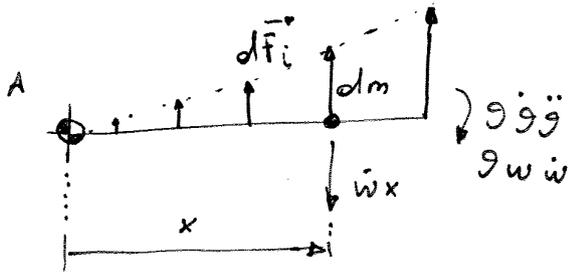


$$\begin{aligned} \rightarrow & \left\{ \begin{aligned} H_A &= 0 \\ V_A + R_B - mg &= 0 \\ R_B \cdot L - mg \cdot \frac{L}{2} &= 0 \end{aligned} \right. \\ \uparrow & \\ \curvearrowright & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_A &= 0 \\ R_B &= \frac{mg}{2} \\ V_A &= \frac{mg}{2} \end{aligned}$$

SIGNIFICATO FORZE D'INERZIA

Ci riferiamo a forze dovute a masse in accelerazione



$$dm = \mu dx \quad m = \mu L$$

$$dF_i = dm \ddot{\omega} x = \ddot{\omega} \mu x dx$$

Forza d'inerzia infinitesimale

Notiamo che la forza d'inerzia dF_i è proporzionale a x . Da qui scaturisce il DIAGRAMMA TRIANGOLARE

Si può ridurre un sistema di forze (in tal caso sistema delle forze d'inerzia).

Ridurre un sist. di forze: sostituire al sistema di forze un'unica forza applicata in un punto specifico oppure una forza e un momento.

Calcolo risultante:

$$|\overline{F}_i^*| = \int_0^L \ddot{\omega} \mu x dx = \ddot{\omega} \mu \frac{L^2}{2} = m \ddot{\omega} \frac{L}{2}$$

$$\overline{F}_i^* = m \overline{a}_G$$

!!! ATTENZIONE !!! La \overline{F}_i^* (risultante delle forze d'inerzia)

NON VA APPLICATA AL BARICENTRO DEL CORPO.

Va applicata nel BARICENTRO del DIAGRAMMA DELLE FORZE

$$\int_0^L x dF_i = M_{i(A)} = x^* F_i$$

$$x^* \cdot m \ddot{\omega} \frac{L}{2} = \ddot{\omega} \mu \int_0^L x^2 dx = \ddot{\omega} \mu \frac{L^3}{3} = \frac{\ddot{\omega}}{3} m L^2$$

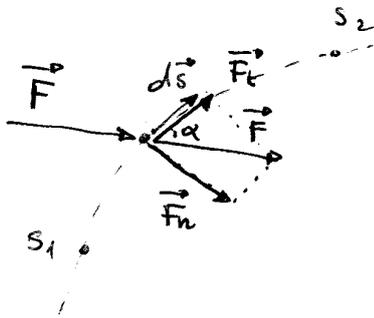
Da cui

$$x^* = \frac{2}{3} L$$

Che è guarrelato la coordinata rispetto a x del baricentro del Triangolo

LAVORO

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_e + \vec{F}_i = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_e + \vec{M}_i = \vec{0} \end{cases}$$

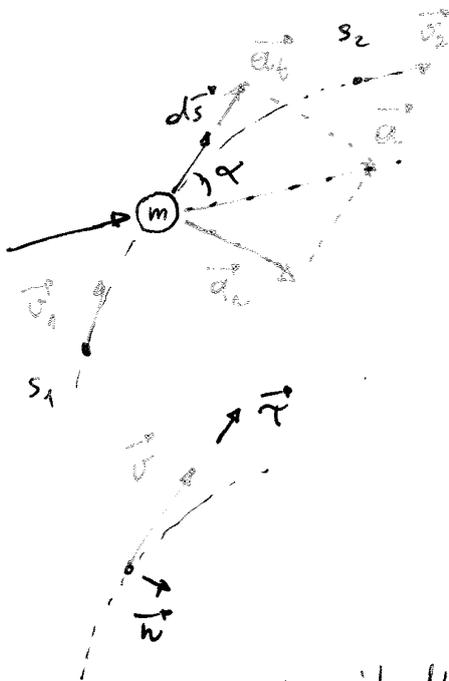


Se il punto di applicazione di una forza si MUOVE allora si dice che la forza COMPIE LAVORO. (però le forze di vincoli NON COMPIONO LAVORO)

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Per calcolare il lavoro totale dovrei conoscere la funzione della forza in funzione della posizione:

(Ricordo)



$$\begin{aligned} \vec{F} &= m\vec{a} \\ dL &= \vec{F} \cdot d\vec{s} = m\vec{a} \cdot d\vec{s} = \\ &= m a_t \cdot ds = m a_t \cdot ds \end{aligned}$$

$$\vec{v} = v \vec{\tau}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + v \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \\ &= \vec{a}_t + \vec{a}_n \end{aligned}$$

Però posso esprimere il dl come:

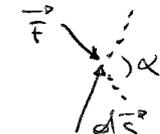
$$dL = m \frac{dv}{dt} ds = m v dv$$

Il lavoro complessivo sarà:

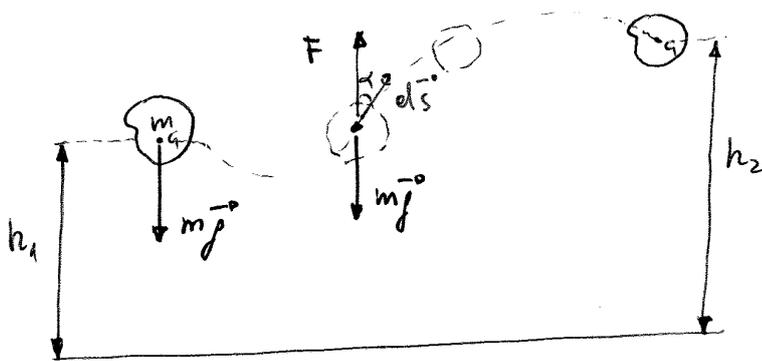
$$L_{1-2} = m \int_{v_1}^{v_2} v dv = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)$$

dove $\frac{1}{2} m v^2 = E_c$

cioè $L_{1-2} = \Delta E_c = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad (\geq \leq 0)$

Se la forza si oppone allo spostamento  $\Rightarrow dL < 0$

Nel caso di un grave (in un campo gravitazionale):



Immaginiamo di spostare il corpo all'interno del campo gravitazionale.

Deve esserci un "Azione" che oppone una forza opposta a $m\vec{g}$ altrimenti il corpo non si sposterebbe lungo la traiettoria. Traiettoria ma cadrebbe semplicemente.

Nota: F è ESATTAMENTE opposta a $m\vec{g}$ perché possiamo considerare l'intero fenomeno come una successione di "situazioni di EQUILIBRIO".

$$dL = m g dh$$

$$L_{1-2} = m g \int_{h_1}^{h_2} dh = m g (h_2 - h_1)$$

Perciò:

$$L_{1-2} = \Delta E_p$$

dove $E_p = \rho m h$
ENERGIA POTENZIALE
(perché immagazzinata)
GRAVITAZIONALE

ENERGIA CINETICA, POTENZIALE ELASTICA E POTENZIALE GRAVITAZIONALE sono le tre forme di energia che possiamo identificare in un sistema meccanico.

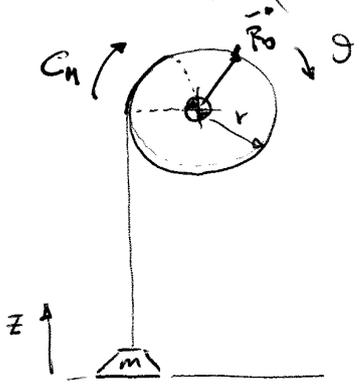
Definiamo ENERGIA MECCANICA TOTALE:

$$E_M = E_c + E_e + E_p$$

Nota: non è presente ENERGIA TERMICA perché nell'ambito della meccanica l'energia dovuta allo scambio di calore è considerata una energia non utile. A tal proposito definiamo:

- 1) Sistemi CONSERVATIVI : non dissipano calore.
- 2) " NON CONSERVATIVI : dissipano calore.

Es. 2.4 (ARCIANO: Tamburo vincolato ad una cerniera fissa, usato per sollevare carichi)



* $(z = r\theta)$
 $I_G = m_T \frac{r^2}{2}$ (Momento d'inerzia cilindro pieno e omogeneo)

$m = 200 \text{ kg}$

$m_T = 100 \text{ kg}$

$r = 15 \text{ cm}$

Problema INVERSO della cinematica

Risoluzione con approccio energetico:

	(1)	(2)] Obiettivo cinematico $C_H = ?$
t	0	T	
z	0	h = 2m	
\dot{z}	0	v = 1 m/s	

$L_i + L_e = \Delta E_c + \Delta E_e + \Delta E_p$

Nel problema non si specifica che i corpi siano deformabili per cui considerandoli rigidi $\Rightarrow \Delta E_e = 0$

Derivando la *

$\dot{z} = r\dot{\theta} = rv \quad w = \frac{\dot{z}}{r}$

• $\Delta E_c = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m_T \frac{r^2}{2} w^2 =$
 $= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m_T \frac{r^2}{2} \cdot \frac{\dot{z}^2}{r^2}$

• $\Delta E_p = mgh$

Valutiamo il Lavoro:

• R_0 è applicato ad un punto fisso \rightarrow non compie lavoro

•  $dL_e = C_H \cdot d\theta \quad L_e = C_H \int d\theta = C_H \cdot \frac{z}{r}$

Riepilogo:

$$L_i + L_e = \Delta E_c + \Delta E_e + \Delta E_p$$

Il lavoro $L_i + L_e$ è il lavoro compiuto dalle forze attive.

Non sono forze attive le forze d'inerzia

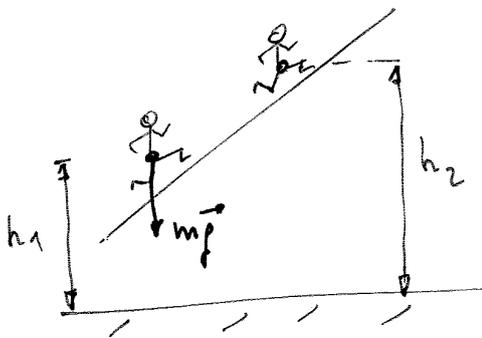
$$[L] = [E] = \text{Nm} = \text{J}$$

L'energia ci permette di quantificare le "potenzialità" del sistema.

Esiste però un'altra importante grandezza in meccanica che riferisce l'energia ad un tempo...

La variazione di energia sarà data da:

$$L = \Delta E_p = m g (h_2 - h_1)$$



Molte volte è importante riferire la "prestazione" e la variazione di energia ad essa sostenuta.

Si definisce POTENZA la quantità:

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = P_H \quad \rightarrow \quad \text{sotto forma di derivato} \quad \frac{dE}{dt} = P \quad [P] = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \frac{\text{W}}{\text{W} \cdot \text{s}}$$

$$1 \text{ CV} = 735 \text{ W} \quad \text{cv} = \text{cavalli}$$

Si definisce RENDIMENTO:

$$\eta = \frac{P_u}{P_M} < 1$$

Ricordiamoci l'eq. di D'Alembert:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \vec{F}_e + \vec{F}_i = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_e + \vec{M}_i = \vec{0} \end{array} \right. \quad \left(\begin{array}{l} \text{nel piano: } 3 \text{ equazioni scalari} \\ \text{ nello spazio: } 6 \text{ equazioni scalari} \end{array} \right)$$

Nel piano

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_{ex} + F_{ix} = 0 \\ \sum F_{ey} + F_{iy} = 0 \\ \sum M_e + M_i = 0 \end{array} \right.$$

Ricordiamo che la risultante delle forze d'inerzia è:

$$\vec{F}_i = -m \vec{a}_c \quad \text{che può essere ridotta al baricentro o ad un altro punto conveniente}$$

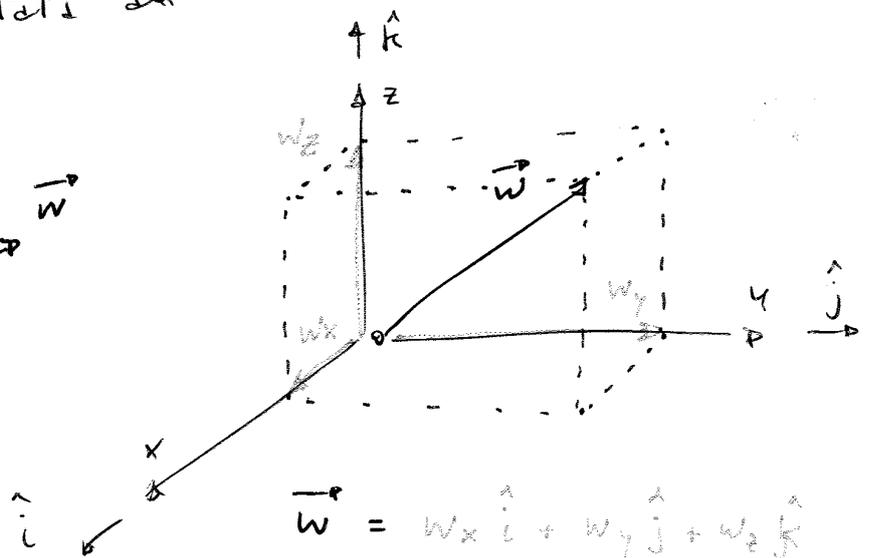
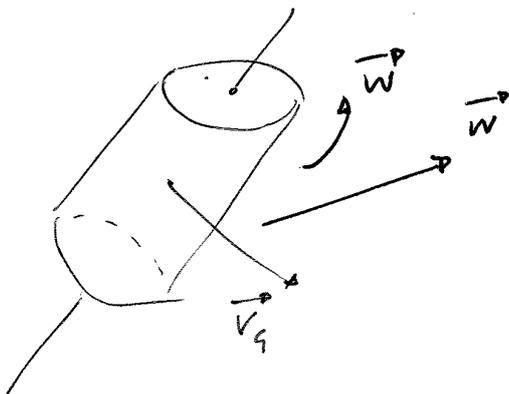
VALIDA SEMPRE $\begin{pmatrix} 2D \\ 0 \ 3D \end{pmatrix}$

Per il momento delle forze d'inerzia invece:

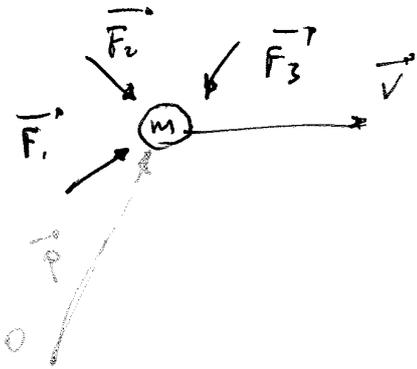
$$\vec{M}_{ic} = -I_G \dot{\vec{\omega}} \quad \dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega} \hat{k}$$

(VALIDA SOLO NEL PIANO)

Nello spazio infatti il moto rotatorio del corpo non può essere unitario ad un solo asse.



Notiamo che la quantità di moto è un vettore.
Esisterà allora una relazione che lega \vec{Q} al moto ROTATORIO del corpo.



$$\vec{Q} = m \vec{v}$$

Suppongo di calcolare il momento delle forze rispetto a O

$$\begin{aligned} \sum \vec{M}_{eO} &= \vec{r} \wedge \vec{F}_1 + \vec{r} \wedge \vec{F}_2 + \vec{r} \wedge \vec{F}_3 \\ &= \sum \vec{r} \wedge \vec{F}_i \end{aligned}$$

Calcolo quindi anche il momento della \vec{Q} rispetto ad O :

$$\vec{r} \wedge \vec{Q} = \vec{r} \wedge m \vec{v} = \vec{K}_O$$

Momento della quantità di moto rispetto a O

Se $\vec{v}_O = \vec{0}$ (Cioè: POLO DI RIFERIMENTO CON VELOCITÀ NULLA)

Allora:

$$\boxed{\sum \vec{M}_{eO} = \frac{d\vec{K}_O}{dt}}$$

Teorema del momento della Q.M

In inglese

Momentum = quantità di moto

Angular momento = momento della quantità di moto

Ritorniamo alle equazioni:

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_e + \vec{F}_i = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_e + \vec{M}_i = \vec{0} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_i &= -\sum \vec{F}_e = -\frac{d\vec{Q}}{dt} = \\ &= -\frac{d(m\vec{v}_q)}{dt} = -m \frac{d\vec{v}_q}{dt} = -m\vec{a}_q \end{aligned}$$

Per quanto riguarda \vec{M}_i invece facciamo un passo in avanti

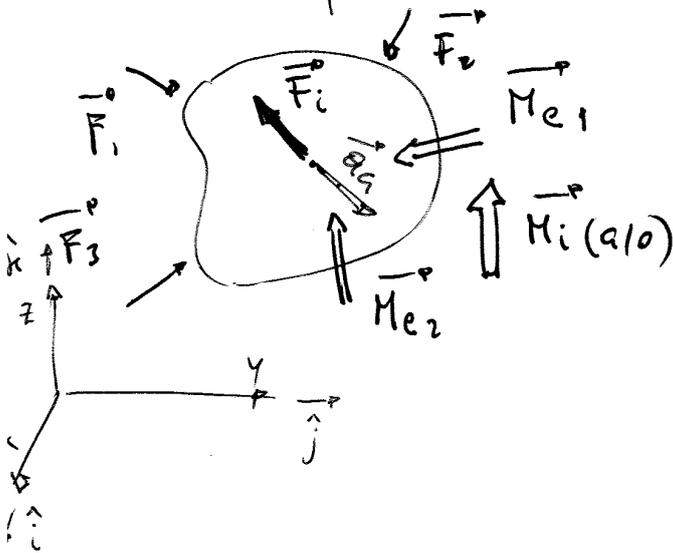
(stessa legge del caso 2D)

SE CI RIFERIAMO AL BANCENTRO O AD UN PUNTO 'O' CON $\vec{v}_O = \vec{0}$

$$\vec{M}_i = -\sum \vec{M}_e = -\frac{d\vec{K}}{dt}$$

$\vec{K}(q/O)$ $q \equiv$ baricentro
O: $\vec{v}_O = \vec{0}$

Questo ci permette di studiare il moto di un corpo esteso nel 3D.



Notiamo che la quantità

$\vec{K}(q/O)$ 1) dipende dalla massa

2) dipende dal moto rotatorio

Supponendo di aver individuato i momenti CENTRALI
 d'INERZIA e la corrispondente TERNA CENTRALE D'INERZIA :

$$I_x \quad I_y \quad I_z \quad (\text{M.C.I.})$$

$$\hat{i} \quad \hat{j} \quad \hat{k} \quad (\text{T.C.I.})$$

e supponendo che il corpo studiato abbia una certa
 velocità angolare :

$$\vec{\omega} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k}$$

avremo che di conseguenza:

$$\vec{K}_G = I_x \omega_x \hat{i} + I_y \omega_y \hat{j} + I_z \omega_z \hat{k}$$

Nota: I momenti centrali d'inerzia e la terna centrale
 d'inerzia sono delle caratteristiche che dipendono dalla
 geometria del corpo. In particolare se esiste una
 SIMMETRIA (GEOMETRICA e nella DISTRIBUZIONE DELLE MASSE)
 allora gli assi di simmetria sono anche assi
 centrali d'inerzia.

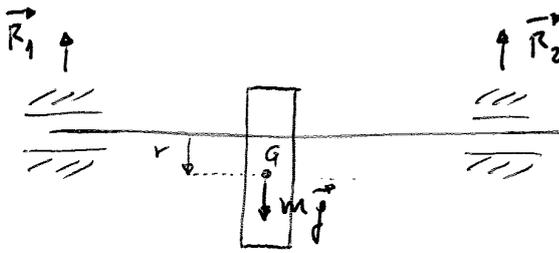
Derivando \vec{K}_G rispetto al tempo si ottiene:

$$\vec{M}_{iG} = - \frac{d\vec{K}_G}{dt}$$

$$\frac{d\vec{K}_G}{dt} = I_x \omega_x \frac{d\hat{i}}{dt} + I_y \omega_y \frac{d\hat{j}}{dt} + I_z \omega_z \frac{d\hat{k}}{dt} +$$

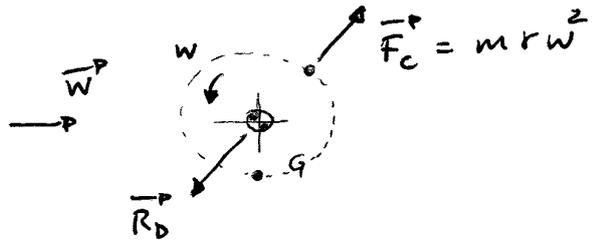
$$+ I_x \dot{\omega}_x \hat{i} + I_y \dot{\omega}_y \hat{j} + I_z \dot{\omega}_z \hat{k}$$

Esempio 2



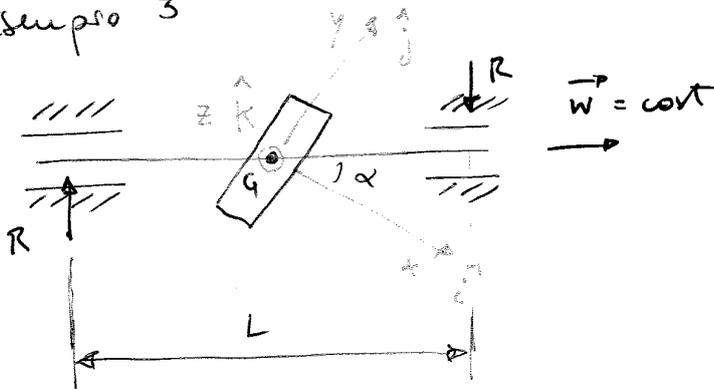
$$R_1 + R_2 = mg$$

Questo è un esempio di albero **SEQUILIBRATO STATICAMENTE** (il baricentro non è sull'asse di rotazione)



Durante la rotazione si genera una forza centrifuga che dovrà essere equilibrata da una reazione R_0

Esempio 3



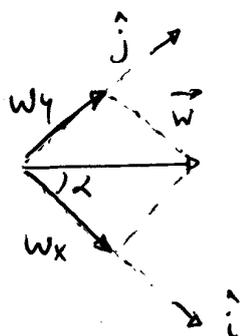
Questo è un esempio di rotore **EQUILIBRATO STATICAMENTE** (G è sull'asse di rotazione) ma **NON DINAMICAMENTE** (l'asse di rotazione non coincide con un asse principale d'inertia)

Anche se $w = \text{costante}$, nascono delle azioni d'inertia che sollecitano i supporti dell'albero

Supponiamo di conoscere I_x, I_y, I_z ed aver individuato la Terna $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ (solidale al corpo)

$$\vec{H}_{G} = - \frac{d\vec{K}_G}{dt}$$

$$\vec{K}_G = I_x \omega_x \hat{i} + I_y \omega_y \hat{j} + I_z \omega_z \hat{k}$$



$$\omega_z = 0$$

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{i} = \omega \sin \alpha (-\hat{k})$$

$$\frac{d\hat{j}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{j} = \omega \cos \alpha (\hat{k})$$

MECCANICA

APPLICATA (PARTE II)
ALLE MACCHINE

II ANNO (2014/2015)

FRANCESCO CHIARA'

Gli assi $\vec{\lambda}^o, \vec{\mu}^o, \vec{\nu}^o$ costituiscono la Terna centrale d'inertia

I_λ, I_μ, I_ν Momenti centrali d'inertia

$$\vec{K}_G^o = I_\lambda \omega_\lambda \vec{\lambda}^o + I_\mu \omega_\mu \vec{\mu}^o + I_\nu \omega_\nu \vec{\nu}^o$$

Come si calcola ω ?

La velocità assoluta sarà data da:

$$\vec{\omega}_1^o + \vec{\omega}_2^o = \omega_1 \vec{k} - \omega_2 \vec{\lambda} = \vec{\omega}$$

$$\begin{cases} \omega_\lambda = \omega_1 \sin \alpha - \omega_2 & \text{somma delle proiezioni di } \vec{\omega}_1^o \text{ e } \vec{\omega}_2^o \\ & \text{lungo } \vec{\lambda}^o \\ \omega_\mu = \omega_1 \cos \alpha & \text{somma delle proiezioni di } \vec{\omega}_1^o \text{ e } \vec{\omega}_2^o \\ & \text{lungo } \vec{\mu}^o \\ \omega_\nu = 0 \end{cases}$$

Supponiamo per semplicità $|\vec{\omega}| = \text{costante}$ (in modulo).

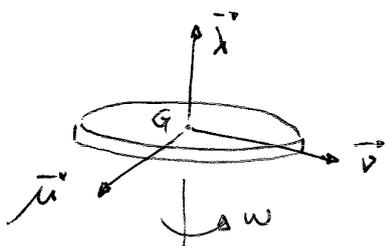
Pero i vettori $\vec{\lambda}^o, \vec{\mu}^o, \vec{\nu}^o$ si muovono:

$$\frac{d\vec{\lambda}^o}{dt} = \vec{\omega}_T^o \wedge \vec{\lambda}^o \quad \left(\begin{array}{l} \text{se la Terna è solida al} \\ \text{corpo } \vec{\omega}_T^o = \vec{\omega} \end{array} \right)$$

La ruota ha una simmetria polare.

Perciò posso assimilarlo ad un corpo giroscopico.

Esempio corpo giroscopico

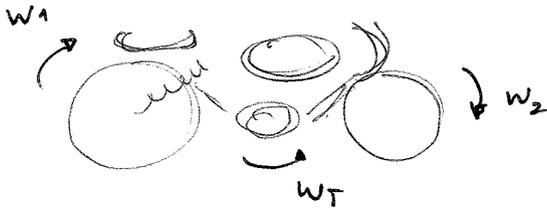


Se il solido è giroscopico posso mantenere la Terna fissa e considerare come ω_T la velocità angolare del telaio della ruota.

$$\vec{\omega}_T^o = \vec{\omega}_1^o = \omega_1 \hat{k}$$

$$\frac{d\vec{\lambda}^o}{dt} = \omega_1 \hat{k} \wedge \vec{\lambda}^o = \omega_1 \cos \alpha (-\vec{\nu}^o)$$

$$\frac{d\vec{\mu}^o}{dt} = \omega_1 \hat{k} \wedge \vec{\mu}^o = \omega_1 \sin \alpha (\vec{\nu}^o)$$



Alcuni costruttori cercano di compensare l'effetto di M_{ig} facendo ruotare gli elementi del motore in modo che generino una reazione opposta a M_{ig}

Ricordiamo

$$L_i + L_e = \Delta E_H$$

$$\text{se } L_i + L_e = 0 \rightarrow E_H = E_c + E_e + E_j = \text{cost}$$

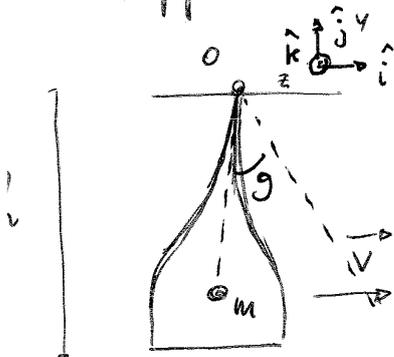
$$\Sigma \vec{F}_e = \frac{d\vec{Q}}{dt}$$

$$\text{se } \Sigma \vec{F}_e = \vec{0} \rightarrow \vec{Q} = \text{cost}$$

$$\Sigma \vec{\tau}_e = \frac{d\vec{K}}{dt}$$

$$\text{se } \Sigma \vec{\tau}_e = \vec{0} \rightarrow \vec{K} = \text{cost}$$

Applicazione: FUNAVIA



Noti: m, I_a, v, h

Ricavare $\omega = ?$, $\theta = ?$, $E_p = ?$ dopo l'arresto della funivia

$$\vec{K}_0 = \text{cost}$$

$$\vec{Q}_i = m\vec{v} \quad \vec{K}_{oi} = h m v \vec{k} \quad (\text{P.H.M.S. dell'arresto})$$

$$\vec{K}_{of} = I_x \omega_x \hat{i} + I_y \omega_y \hat{j} + I_z \omega_z \hat{k} = I_0 \omega \vec{k}$$

(Elimino i termini perché $\vec{\omega}$ non ha componenti lungo x e y)

$$I_0 = I_a + m h^2 = m (r_g^2 + h^2) \omega = h m v$$

$$\boxed{\omega = \frac{h v}{r_g^2 + h^2}}$$

ATTRITO

Incominciamo ad dire che è scorretto pensare all'attrito come un fenomeno puramente dissipativo. Molte volte esso è indispensabile per il funzionamento di alcuni organi di macchine. Quindi molte volte l'attrito è funzionale (basti pensare che se non ci fosse attrito non potremmo camminare).

Divideremo l'attrito in:

1) **ATTRITO SECCO**: Tra due superfici. Le forze di attrito secco possono manifestarsi in condizioni di:

- 1) ADEGENZA
- 2) STAMSCIAMENTO
(tra le superfici)

2) **ATTRITO FLUIDO**: non c'è contatto diretto tra le superfici ma esse sono separate da "un velo" di fluido (liquido o gas).

Esempio: pattino sul ghiaccio.

Nel passaggio della lama del pattino c'è una fusione localizzata ed istantanea del ghiaccio che si ricongela immediatamente dopo il passaggio. Si parla perciò di attrito fluido e non secco.

3) **ATTRITO INTERNO**: fenomeno che si manifesta tra le molecole del materiale ed è legato alla deformazione del materiale.

Quando \vec{R} diventa tale da uscire dal cono la condizione di "ADERENZA" non è più soddisfacibile.

Chiamiamo: $\beta = f_A$ "A" sta per "ADERENZA"

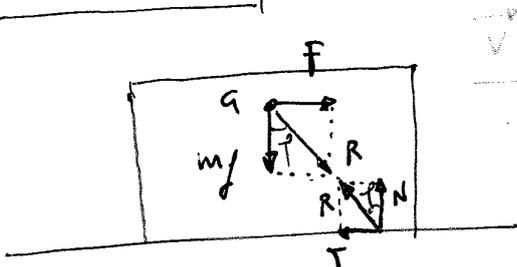
Valle inoltre:

$$\boxed{t_p f_A = f_A}$$

Coefficiente di aderenza
(o coeff. di attrito statico)

Finché $\beta \leq f_A$ non c'è strisciamento.

Strisciamento

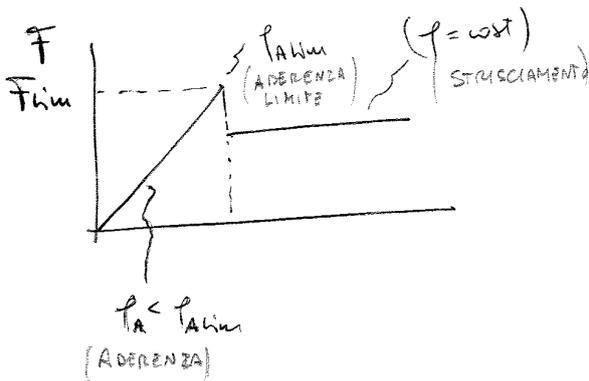


Supponiamo che il moto sia a $\vec{v} = \text{costante}$

Affinché ci sia equilibrio deve essere che $\vec{R} = m\vec{j} + \vec{F}$ sia inclinata di φ rispetto alla verticale così come $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$. Abbiamo diseguito il diagramma di corpo libero della cosa perciò \vec{T} è diretto verso sinistra in modo da opporsi alla \vec{v} .

Questo attrito fu studiato sperimentalmente da Coulomb. Egli dimostrò che in una condizione di strisciamento:

- \vec{T} ha valore costante indipendentemente da \vec{v}
- Per mantenere lo strisciamento serve una forza \vec{F} minore rispetto a quella richiesta per metterlo in moto.



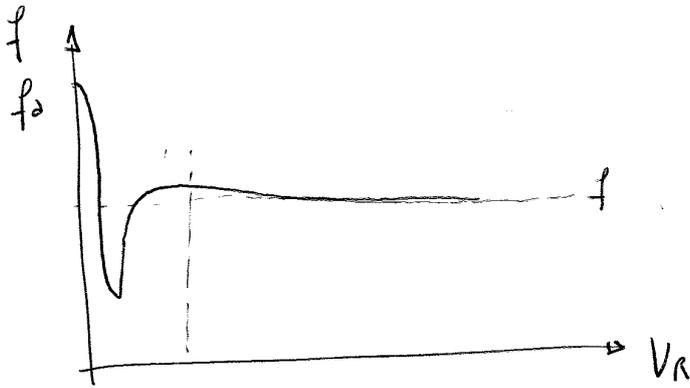
Avremo:

$$T = N t_p f$$

$f = \text{costante}$ in condizioni di strisciamento

$t_p f = f$ coeff di attrito (dinamico)

$f = \text{angolo di attrito (dinamico)}$



Anche diagrammando f vs v_R ($v_R = \text{velocità relativa}$)

si ricava sperimentalmente che da una certa velocità in poi f si mostra costante.

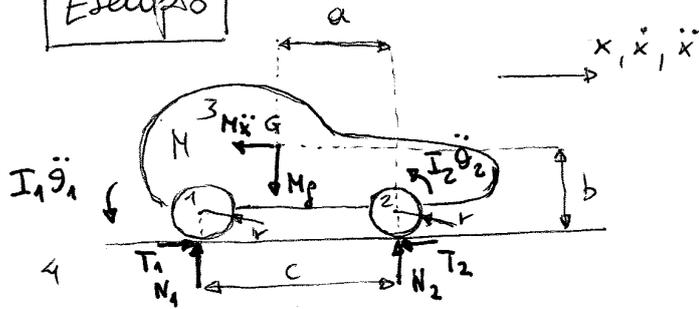
Si nota inoltre la brusca riduzione di f da f_A (caso aderenza in cui $v_R = 0$) al caso in cui $v_R \neq 0$ (strisciamento).

Conclusione: f dipende solo dal materiale dei due corpi a contatto.

mat ₁	mat ₂	f	f _A
Acciaio	Acciaio	0,2	0,25
Acciaio	Alluminio
legno	Acciaio

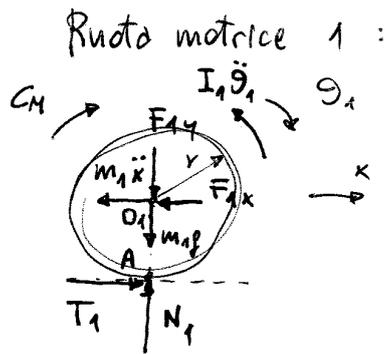
($f_A > f$)
 in alcuni libri
 $f = \mu$
 $f_A = \mu_K$ $\mu = \text{kinetics}$

Esempio



$$M = m_1 + m_2 + m_3$$

- 1 = ruota motrice soggetta a una coppia C_M 2 = ruota condotta
- Noti
- a, b, c, r
 - M massa totale auto (compreso le ruote)
 - m_1, m_2 masse delle ruote
 - I_1, I_2 momenti d'inerzia delle ruote
 - f, f_A



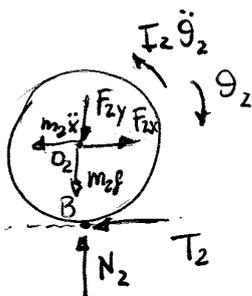
Ciò che è necessario capire sempre è IL VERSO DI T_1 .

Si ragiona in questo modo: il punto A se non ci fosse attrito scivolerebbe verso SINISTRA

$\Rightarrow T_1$ è rivolta verso DESTRA

Riportiamo tutte le azioni subite da 1 e che sono contemporaneamente azioni ESTERNE agenti sull'auto completa (telajo + ruote)

Facciamo la stessa cosa con la ruota condotta 2 :



Ragionamento sul verso di T_2 :

Il punto B è trascinato dal telajo in AVANTI (perché tale ruota è condotta trascinato cioè non è soggetto a coppie, ma semplicemente

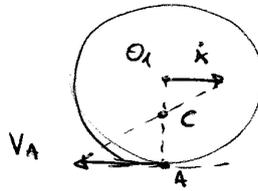
Se non ci fosse attrito B scivolerebbe in AVANTI $\Rightarrow T_2$ è rivolta verso SINISTRA

Combinazione delle Hp

- ...¹ primarie → ADEGENZA
- ...² → SIMPLICIAMENTO

- I a', b'
- II a', b''
- III a'', b'
- IV a'', b''

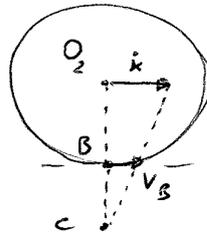
Spiegazione verifica a''



$$\ddot{g}_1 = \frac{\ddot{x}}{O_1 c} \quad O_1 c < r$$

$$\ddot{g}_1 > \frac{\ddot{x}}{r} \iff \boxed{\ddot{x} < \ddot{g}_1 r}$$

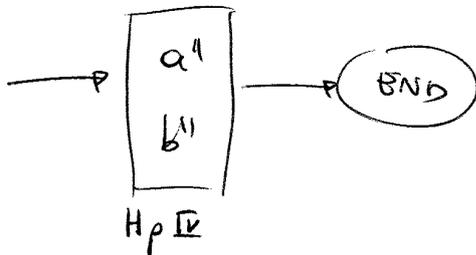
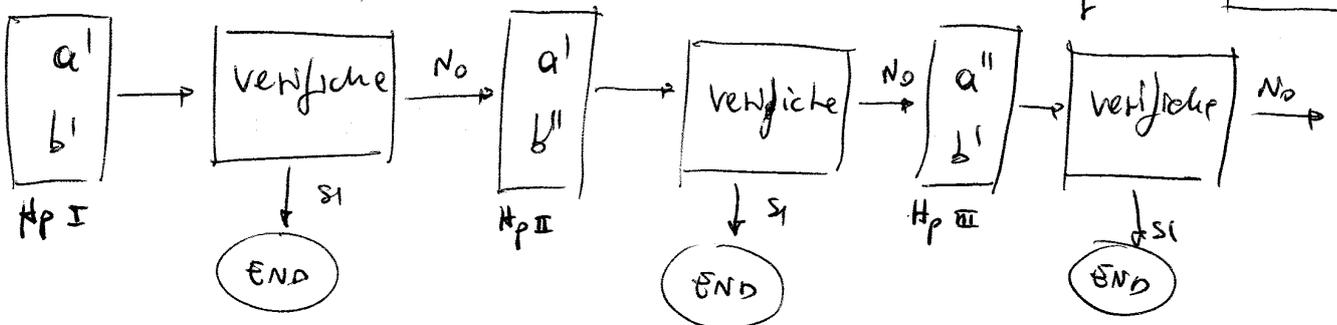
Spiegazione verifica b''



$$\ddot{g}_2 = \frac{\ddot{x}}{O_2 c} \quad O_2 c > r$$

$$\ddot{g}_2 < \frac{\ddot{x}}{r} \iff \boxed{\ddot{x} > \ddot{g}_2 r}$$

Schema logico

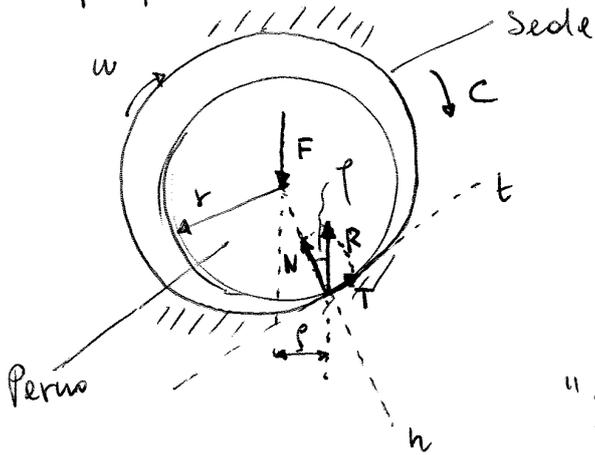


Sfruttando l'Hp che soddisfa le verifiche combinato

(1), (2), (3), (4), (5), + eq. (6)/(7) derivanti dall'Hp

→ per trovare le incognite $[T_1, T_2, N_1, N_2, \ddot{x}, \ddot{g}_1, \ddot{g}_2]$

Riproporiamo un modello



Notiamo che in questo modello avremo dall'equilibrio

$$C = F - f = R \cdot p$$

Essendo R una forza di contatto allora possiamo dire che:

"Il punto di contatto rispetto al caso precedente si è spostato di p . È come se l'albero si è arrampicato lungo la parete di destra (sul disegno)"

Supponendo di conoscere r : raggio dell'albero \approx raggio del foro

(infatti il gioco deve essere minimo; il punto necessario per introdurre del lubrificante (ad esempio) /

e supponendo di

conoscere f : coefficiente di attrito.

Notiamo che la forza R non ha solo componente normale ma anche tangenziale (vedi disegno)

Quanto vale p ???

Dalla trigonometria conoscendo r :

$$p = r \sin \alpha$$

Ricordando che

" $f = t \cdot f$ " possiamo dire che p DIPENDE:

- 1) DAL RAGGIO DEL PERNO " r "
- 2) COEFF. DI ATTRITO " f "

Inoltre conoscendo

$F = m \cdot g$ (peso del perno)

possiamo determinare la coppia necessaria a mantenere in rotazione il perno

$$C = F \cdot p$$

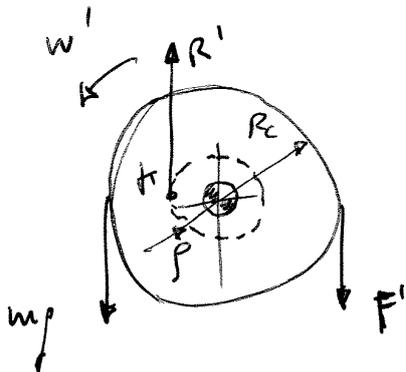
Scrivendo l'equilibrio dei momenti attorno ad H

$$F(R_c - p) = m_p (R_c + p)$$

$$F = m_p \left(\frac{R_c + p}{R_c - p} \right) \quad \left(F > m_p \text{ !!! } \begin{array}{l} \text{Ciò ha senso perché} \\ \text{devo vincere l'attito} \\ R \text{ genera un momento} \\ \text{discorde a } F \text{ che devo vincere!!!} \end{array} \right)$$

$$f = r \cdot \sin \alpha$$

2) Supponiamo ora di voler abbassare il catino in a velocità costante

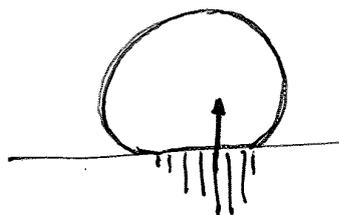
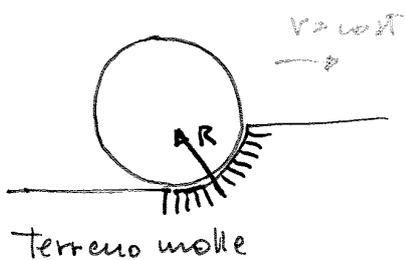


$$F' (R_c + p) = m_p (R_c - p)$$

$$F' = m_p \left(\frac{R_c - p}{R_c + p} \right)$$

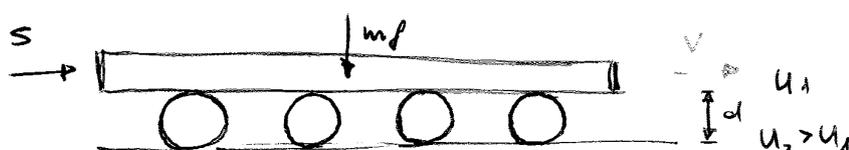
$F' < m_p \text{ !!!}$ ha senso perché l'attrito in questo caso favorisce l'equilibrio dei momenti.
 Nel senso che R' genera un momento concorde a F' !!!
 Quindi F' sarà minore che nel caso precedente perché è aiutata dalla reazione R' nell'equilibrio dei momenti

Deformazione



In rosso
la distribuzione
delle
pressioni

Supponiamo di voler spostare un corpo pesante:

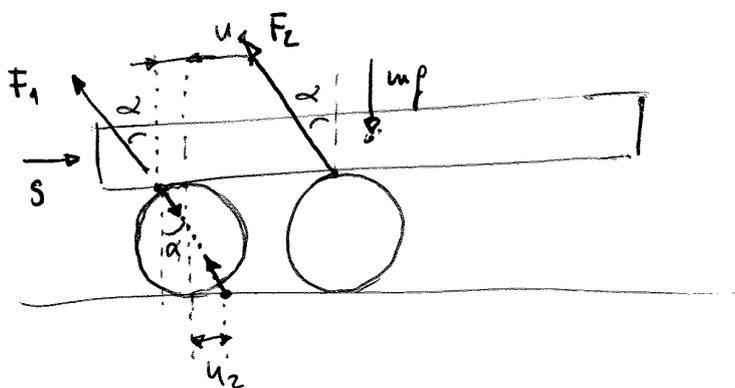


Invece che
trasciare il corpo
e vincere l'attrito
radente più gli
effetti capricciosi che
che si potrebbero
sfruttare i rulli

Bisogna considerare l'attrito
dei rulli con il piano e quello
dei rulli con la lastra.

A tali accoppiamenti si associano i **FENOMENI DI ATRITO VOLVENTE**

u_1 (lastra - rulli) $u_2 > u_1$ (rulli - piano)



F_1 : è la forza che il rullo esercita sul lastrone.
Essa varierà istante per istante ed aumenta man mano
che ci si avvicina al baricentro
Ciò che non varia è l'angolo α !!!

$$\tan \alpha = \frac{u_1 + u_2}{d}$$

d = diametro
rulli

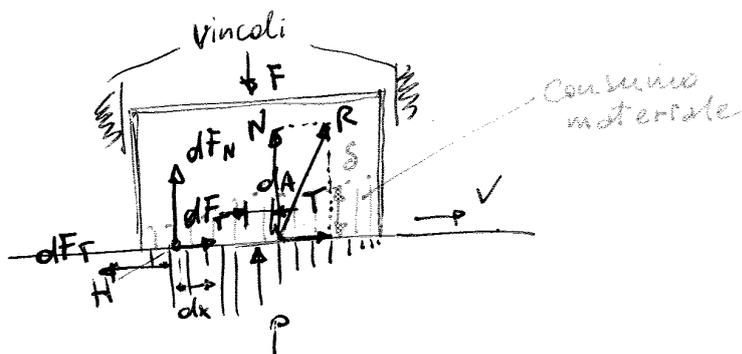
Per risolvere gli integrali precedenti bisogna conoscere la funzione, distribuzione "p(x)".

Si può IPOTIZZARE che $p(x) = \text{costante}$

Oppure si può fare l'IPOTESI dell'USURA

$p(x)$
 / uniforme
 / ipotesi dell'usura:

[Il volume di materiale consumato in un certo tempo è proporzionale al lavoro delle forze di attrito nello stesso tempo.]



$$dF_N = p \cdot dA$$

$$dF_T = f \cdot dF_N = f \cdot p \cdot dA$$

$$dL = dF_T \cdot dx$$

Il volume di materiale consumato è $\delta \cdot dA$.
 Le forze che compiono lavoro sono solo le FORZE TANGENZIALI

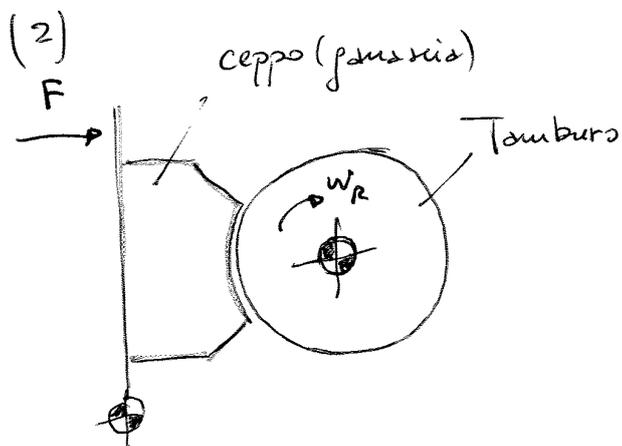
IPOTESI DELL'USURA: $\delta \cdot dA \propto \frac{dL}{dt}$

Da questa relation si ricava $p(x)$ lungo tutta la zona di contatto

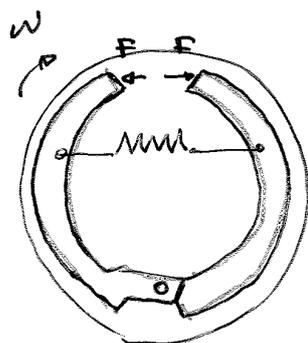
$$\delta \cdot dA \propto f \cdot p \cdot dA \cdot \frac{dx}{dt} = f \cdot p \cdot dA \cdot v_R$$

Si calcola la componente NORMALE e TANGENZIALE in tal modo

$$\left\{ \begin{aligned} F &= \int_A dF_N = \int_0^L p(x) dx = N \\ T &= f \cdot N \end{aligned} \right.$$

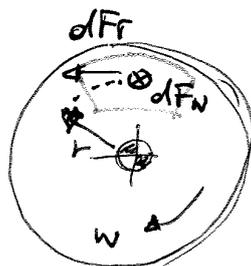
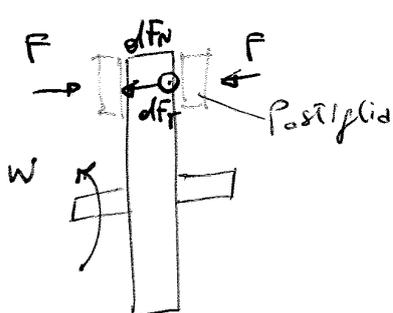


Freno a CEPPo
(o a TAMBURo)
(esempi se ne trovano nei vecchi treni merci)



Altro esempio di freno a Tamburo che lavora dall'interno del tamburo

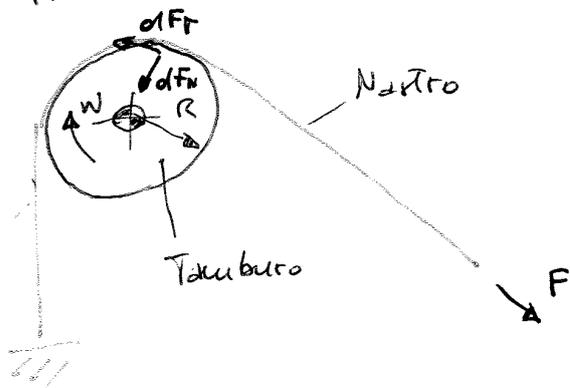
(3) Freno a DISCO



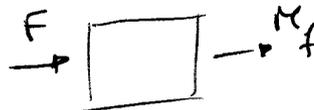
$$dF_T \cdot r = dM_f$$



(4) Freno a Nastro



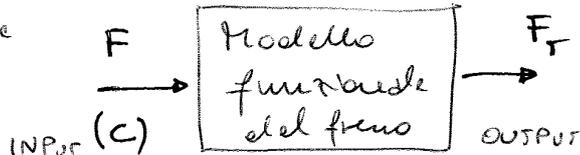
$$dM_f = dF_T \cdot R$$



Nota: si fa in modo che l'elemento frenante sia più tenero del tamburo perché è più economico sostituirlo. Un tempo l'elemento frenante era detto "ferodo" dal nome di una famosa azienda cinese che lo produceva.

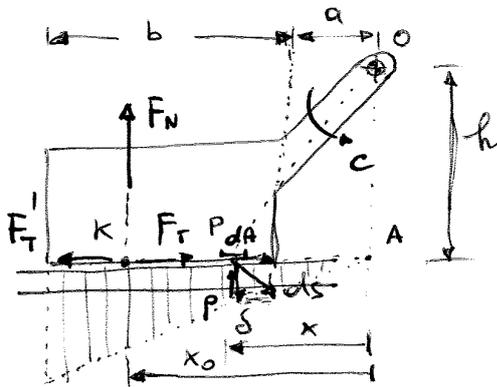
Studiate un freno vuol dire elaborare un modello funzionale:

INPUT
Devo conoscere la forza e la coppia che muove l'elemento frenante



OUTPUT
Mi interessa conoscere la forza tangenziale che si oppone al moto e FRENA il corpo

ANALISI FRENO A PASTIGLINO AD ACCOPPIAMENTO RIGIDO



Devo determinare $p(x) = ?$
 $dF_N = p \, dA = p \, dx$
 $a = x = a + b$

Secondo l'ipotesi dell'usura

$\delta \, dA \propto f \cdot p \cdot dA \cdot v_R$

Ricordando $dF_T = f \cdot dF_N = f \cdot p \cdot dA$

Bisogna capire quali sono le quantità costanti.

Con costanza in tal caso non si intende costante nel tempo ma costante in ogni punto del pastigino.

- v_R è costante
- f è costante

Perciò la relazione dell'ipotesi dell'usura diventa:

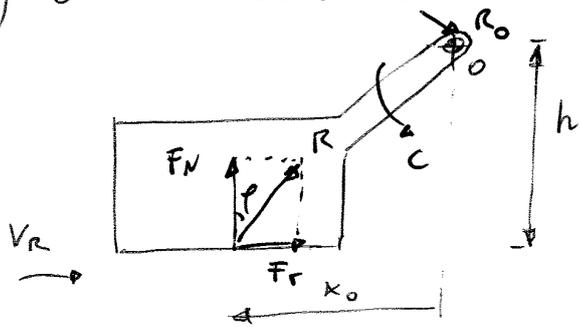
$\delta \, dA \propto f \cdot p \cdot dA \cdot v_R = p \, \kappa \quad (\kappa = f \cdot v_R = \text{cost})$

Si noti che ogni punto del pastigino si muove intorno ad O . Quindi p ruota attorno ad O di $d\vec{s}$.

$d\vec{s}$ si può scomporre in una componente:

- ORIZZONTALE che non contribuisce all'usura
- VERTICALE che contribuisce all'usura

I) Esaminiamo tale caso:



Dall'equilibrio dei momenti rispetto ad O avremo:

$$C = F_N \cdot x_0 - F_T h$$

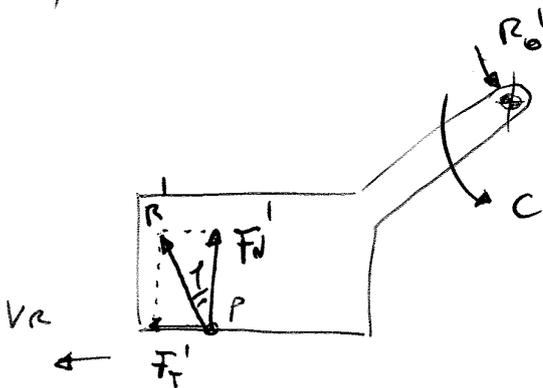
$$F_N = \frac{F_T}{f} \dots$$

$$\dots C = F_T \left(\frac{x_0}{f} - h \right)$$

$$F_T = \frac{C}{\frac{x_0}{f} - h}$$

Modello Funzionale

II) Esaminiamo il caso di: V_R verso sinistra:



Dall'equilibrio:

$$C = F'_N \cdot x_0 + F'_T \cdot h$$

$$C = F'_T \left(\frac{x_0}{f} + h \right)$$

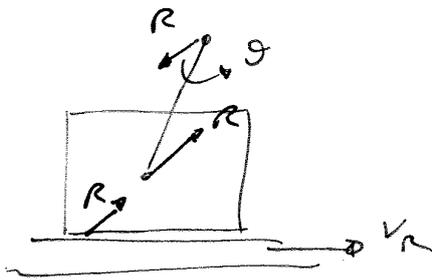
$$F'_T = \frac{C}{\frac{x_0}{f} + h}$$

Modello Funzionale

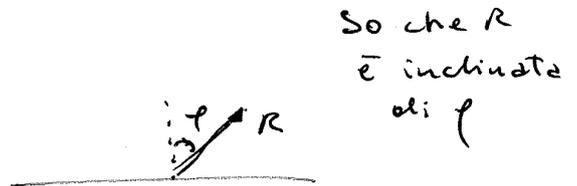
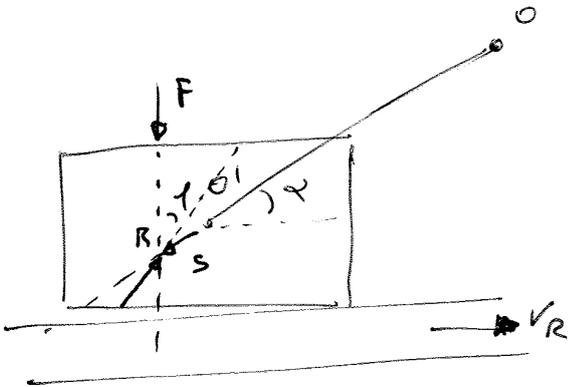
Attenzione!!! $F_T \neq F'_T$ In particolare è evidente che $F_T > F'_T$.

Conclusione: l'azione frenante DIPENDE ANCHE DUE CONDIZIONI DI FUNZIONAMENTO!!!

IMPUNTIAMENTO FRENO A PATINO AD ACCOPIAMENTO LIBERO



Supponiamo ora di attrarre il patino con una forza...



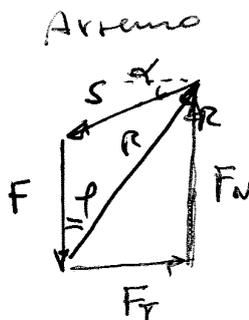
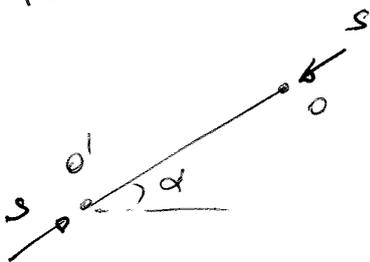
So che R è inclinata di ϕ

In questo caso il corpo è soggetto a 3 forze
Perché ci sia equilibrio deve essere:

(1) $\sum \vec{F} = \vec{0}$

(2) Forze concorrenti nello stesso punto

Per la biella:



$$F_N = \frac{F_T}{f} = F + S \sin \alpha$$

$$S = \frac{F_T}{\cos \alpha}$$

$$\frac{F_T}{f} = F + F_T \tan \alpha$$

$$F_T \left(\frac{1}{f} - \tan \alpha \right) = F$$

$$F_T = \frac{F}{\frac{1}{f} - \tan \alpha}$$

Modello

Guardando Figura 4 :

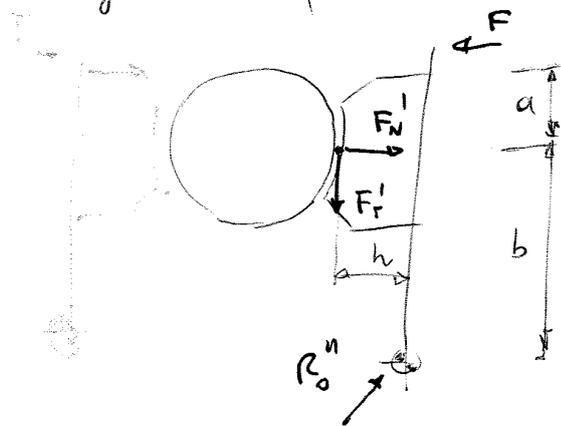
$$F(a+b) - F_N \cdot b - F_T \cdot h = 0$$

$$F(a+b) = \frac{F_T}{f} b + F_T \cdot h = F_T \left(\frac{b}{f} + h \right) = F(a+b)$$

$$F_T = F \frac{a+b}{\frac{b}{f} + h}$$

Modello
funzionale

Vediamo se il funzionamento del ceppo di destra
è uguale a quello di sinistra



$$F(a+b) - F'_N \cdot b + F'_T \cdot h = 0$$

$$F(a+b) = \frac{F'_T}{f} b - h F'_T$$

$$F'_T \left(\frac{b}{f} - h \right) = F(a+b)$$

$$F'_T = F \frac{a+b}{\frac{b}{f} - h} > F_T$$

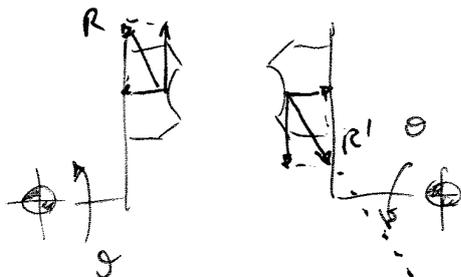
E' DIVERSO IL FUNZIONAMENTO!!!

Essendo $F_T < F'_T$

⇒ il ceppo di destra

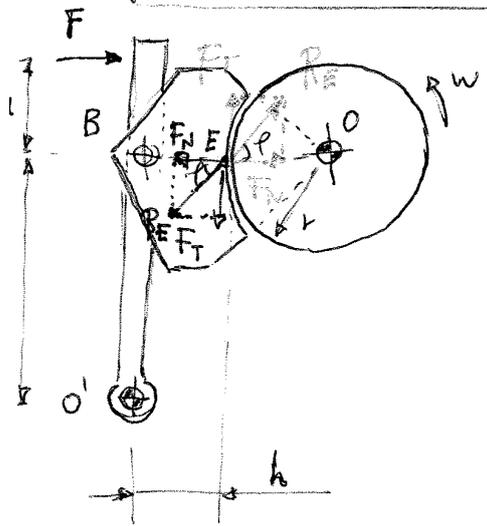
si consuma di più rispetto a quello di sinistra

Inoltre il ceppo di destra (che si consuma di più)
rischia di IMPUNTARSI (se viene fatto male o se
non viene fatta manutenzione)

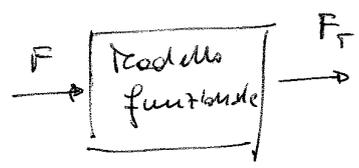


passa a
sinistra
della cerniera!!!

FRENI A CEPPI AD ACCOSTAMENTO LIBERO



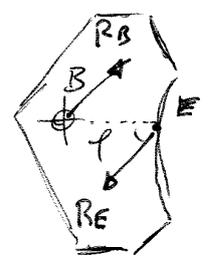
Obiettivo:



In blu le forze sul tamburo
 In verde le forze sul ceppo

f

Esplodendo il sistema ed onerando il ceppo:



$$\sum \vec{F}_e = \vec{0} \quad (1)$$

$$\sum \vec{M} = \vec{0} \quad (2)$$

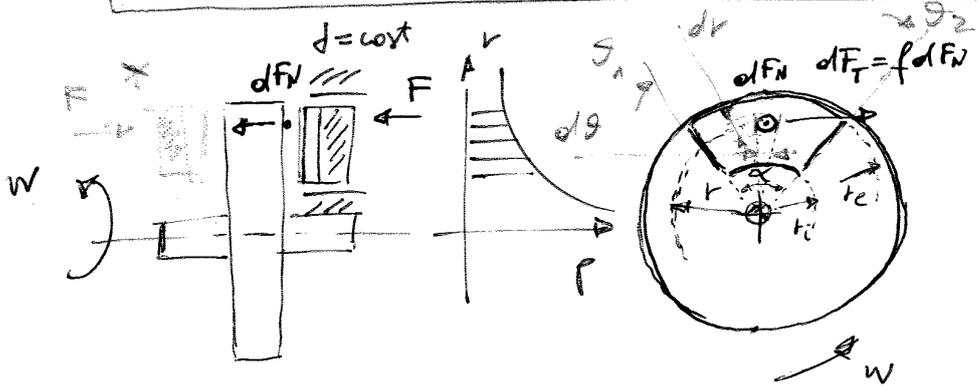
Affinchè sia soddisfatta la (1) è necessario che in B si generi una forza R_B uguale e opposta a R_E
 Però... non è soddisfatta la (2)



Se non è soddisfatta anche una delle equazioni cardinali \Rightarrow IL MODELLO NON È VALIDO !!!

Dobbiamo elaborare un nuovo sistema

FRENO A DISCO ACCIOTTAMENTO RIGIDO



* Le partiglie sono sempre 2 in modo che il moto non subisca forze non equilibrate

$$dM_f = r dF_f$$

$$dF_N = p \cdot dA$$

L'area dA su cui spicca la pressione dovuta a dFN è data da

$$dA = dr \cdot d\theta \cdot r$$

Perciò:

$$F = \int_A dF_N = \int_A p \cdot dA$$



Ora per capire qual è la distribuzione $p = p(r)$ devo usare l'ipotesi dell'usura:

$$\delta dA \propto f p \cdot dA \cdot v_R$$

$$v_R = \omega \cdot r$$

⇓

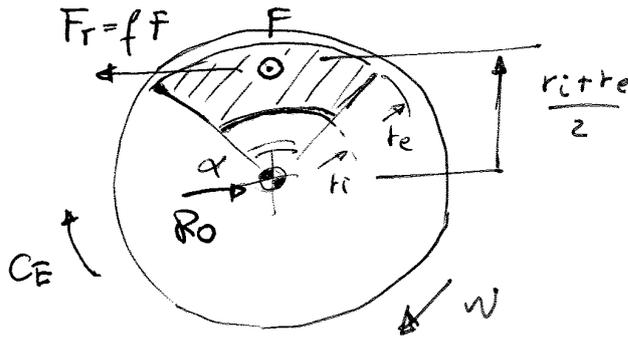
$$\delta \propto f p \omega r$$

Devo capire se ci sono quantità costanti
 Attenzione!!! costanza non intesa del tempo ma nel senso che in un certo istante un valore è uniforme su tutta la zona di contatto

f e ω sono costanti!

Inoltre anche d = costante perché il moto della partiglia è vincolato da una guida prismatica

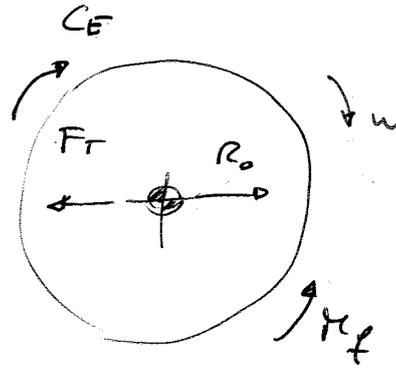
In maniera sintetica:



$$M_f = f F \frac{r_i + r_e}{2}$$

ATTENZIONE !!! Nel diagramma di corpo libero del Tamburo non riportare il momento frenante M_f perché esso è inglobato in F_r

Tutt'al più:



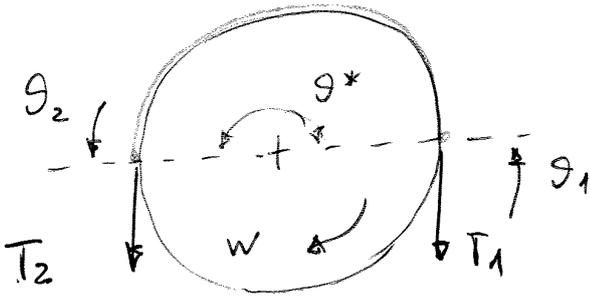
NOTA: L'angolo α non influisce mai sul valore del momento frenante.

Chiaramente però un freno con α molto piccolo si usurerà più velocemente di uno con un α più grande.

Arrevo quindi

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dF_T}{f} = T \cdot dg \\ dF_T = dT \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\frac{dT}{f} = T \cdot dg}^* \quad \begin{array}{l} \text{eq. diff.} \\ \text{del I ordine} \end{array}$$

[Sigu. Tale equazione descrive la VARIATIONE DELLA TENSIONE DEL NASTRO lungo l'angolo g^*]



L'equazione differenziale* ed il suo Sigu ci portano a distinguere due tensioni diverse T_1 e T_2

Arrevo quindi che:

$$\boxed{M_f = (T_2 - T_1) \cdot r}^A$$

essendo che T_1 è una tensione motrice

T_2 è una tensione frenante

Dalla * :

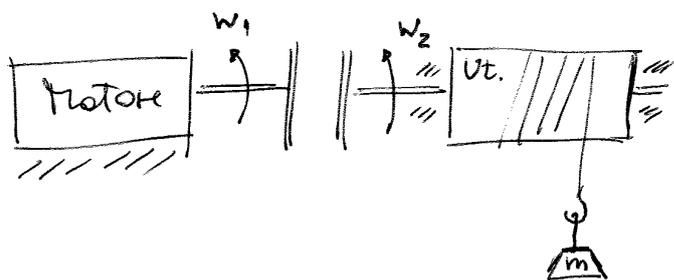
$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = f \int_{g_1}^{g_2} dg$$

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = f (g_2 - g_1) = f g^*$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{T_2}{T_1} = e^{f g^*}}$$

FRIZIONE

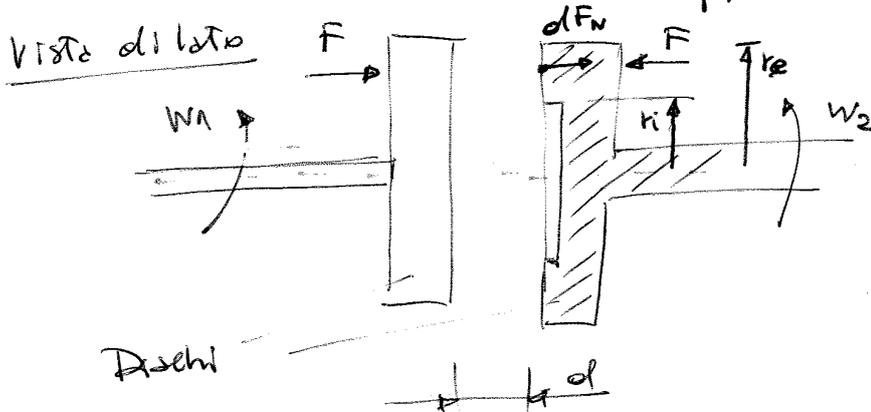
La frizione collega il motore ad un utilizzatore



Sistema di sollevamento

1) La frizione quindi permette di innestare o disinnestare il motore

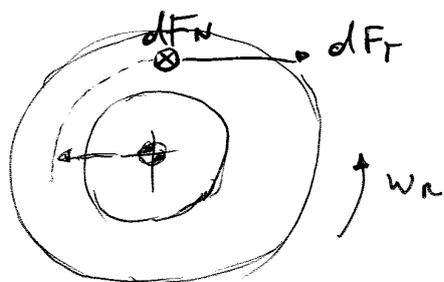
2) giunto di sicurezza : elemento che superata una certa coppia permette al collegamento di strisciare in modo da dissipare energia e rallentare il motore nei casi in cui esso ruota in maniera troppo veloce



$$\omega_r = \omega_2 - \omega_1$$

↳ relativa

Vista frontale (2° elemento a destra)

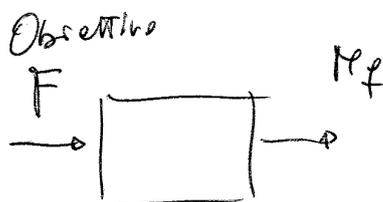


Relazioni:

$$dM_f = r dF_T$$

$$dF_T = dF_N f$$

$$\int dF_N = F$$



$$dF_N = p \cdot dA = p \cdot r dr d\theta$$

$$F = \int_{r_i}^{r_e} \frac{k}{r} \cdot 2\pi r dr = 2\pi k (r_e - r_i)$$

$$M_f = \int_{r_i}^{r_e} r f \frac{k}{r} \cdot 2\pi r dr = 2\pi f k \left(\frac{r_e^2 - r_i^2}{2} \right)$$

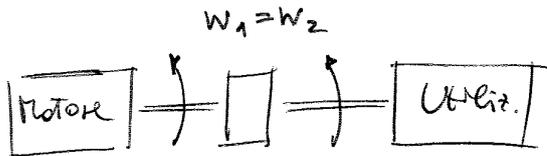
$$\frac{M_f}{F} = \frac{2\pi f k (r_e - r_i) (r_e + r_i)}{2 \cdot 2\pi k (r_e - r_i)} = f \frac{(r_e + r_i)}{2}$$

Uguale al freno a disco

$$\Rightarrow \boxed{M_f = f F \frac{r_e + r_i}{2}}$$

Indica le predizioni della frizione

Arriverà un certo momento in cui la frizione non genera più attrito ma sarà collegata rigidamente al motore \rightarrow INNESTO



Nella fase di frizione innestata ($\omega_1 = \omega_2$) $\omega_R = 0$

$$\Rightarrow \underline{\text{ADERENZA}} \quad \text{cioè} \quad dF_T \leq f_R \cdot dF_N$$

Integrando:

$$M_{f(\max)} = f_A F \frac{r_e + r_i}{2}$$

LIMITI: Il $M_{f(\max)}$ risulta essere limitato.

Infatti dipende da:

$$\left. \begin{matrix} f_A \\ F \\ \frac{r_e + r_i}{2} \end{matrix} \right\} \text{parametri limitati}$$

Non posto costante dischi di frizione euron !!!

$$dF_N = p \cdot dA$$

Definiamo dA come area di una striscia di superficie conica:



Per cui

$$dF_N = \frac{k}{f} \cdot 2\pi r \frac{dr}{\sin \alpha} = 2\pi k \frac{dr}{\sin \alpha}$$

$$F = \int_A dF_N \sin \alpha = \int_{r_i}^{r_e} 2\pi k \frac{dr}{\sin \alpha} \cdot \sin \alpha = \int_{r_i}^{r_e} 2\pi k dr = 2\pi k (r_e - r_i)$$

$$M_f = \int f dF_N \cdot r = \int_{r_i}^{r_e} f 2\pi k \frac{dr}{\sin \alpha} \cdot r = \frac{2\pi f k}{\sin \alpha} \left(\frac{r_e^2 - r_i^2}{2} \right)$$

$$\frac{M_f}{F} = \frac{2\pi f k}{2 \sin \alpha} \frac{(r_e r_i)(r_e - r_i)}{2\pi k (r_e - r_i)} = \frac{f}{\sin \alpha} \cdot \frac{r_e r_i}{2}$$

$$\boxed{M_f = \frac{f}{\sin \alpha} F \frac{r_e r_i}{2}}$$

$$\frac{f}{\sin \alpha} = f' (> f)$$

Tanto più è piccolo α tanto più grande diventa f' e quindi aumenta M_f .

È come se "virtualmente" andassimo a moltiplicare il coefficiente di attrito f in virtù dell'angolo di conicità α

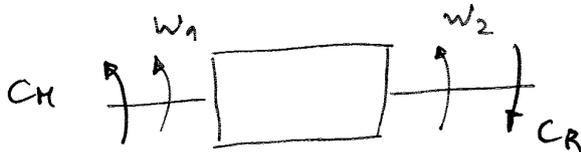
Questo suggerisce, dal punto di vista progettuale di ridurre il più possibile α

MA quando α diventa molto piccolo si possono avere fenomeni di PIANTAGGIO: I due coni si piantano e per poterli allontanare è necessario applicare una forza di disinnesto.

- 1) La dove la forza o la coppia è concorde al verso del moto, si può identificare L'INGRESSO DELLA POTENZA MOTRICE e quindi l'elemento MOVENTE (vedi unmovella)
- 2) Se la forza o la coppia è discorde al verso del moto, allora in quel punto si ha L'USCITA DELLA POTENZA cioè il suo TRASFERIMENTO e quindi si identifica l'elemento CEDENTE (vedi pazione). (SI RECUPERA LA POTENZA UTILE)

Alcuni sistemi hanno lo scopo di cambiare le velocità di un certo moto.

Esempio: RIDUTTORI o MOLTIPLICATORI



RIDUTTORE : $w_2 < w_1$

MOLTIPLICATORE : $w_2 > w_1$

$$\eta = \frac{C_R w_2}{C_M w_1} < 1$$

Il rendimento è sempre < 1 a causa della dissipazione per effetto dell'attrito.

Nei sistemi di trasmissione bisogna fare in modo che sia madre vite che vite abbiano moti a 1 g.d.l.

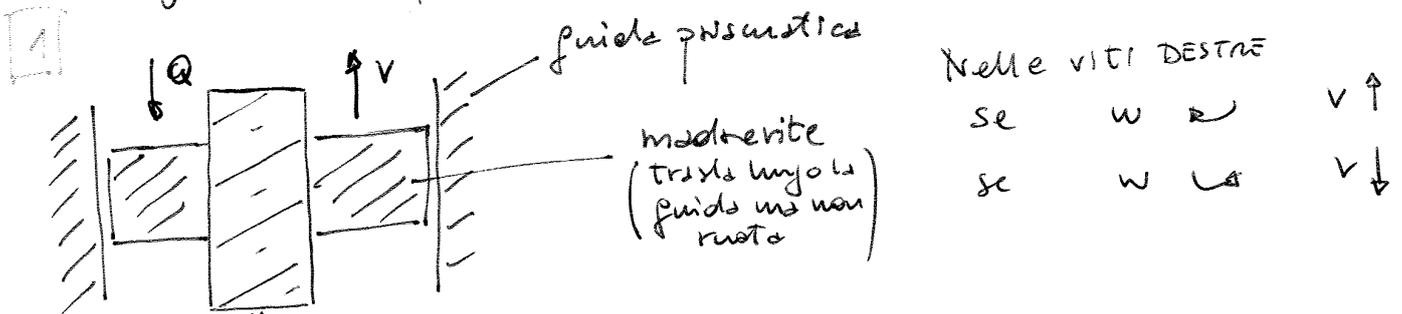
Esempio:

madre vite ferma, vite rotante collegata ad un motore.

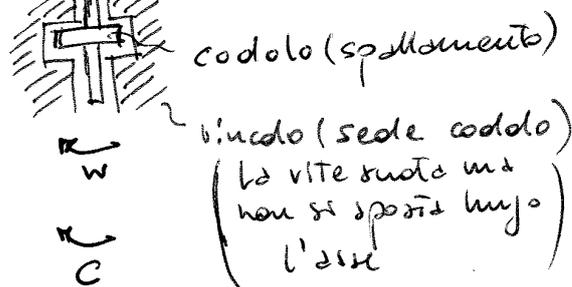
Nell'accoppiamento la

- vite ruota soltanto
- madre vite avanza (tratta)

In generale possiamo avere due situazioni



Esempio: martinetto a vite



Elemento:

- movente: vite
- cedente: madre vite

w : velocità di rotazione della vite

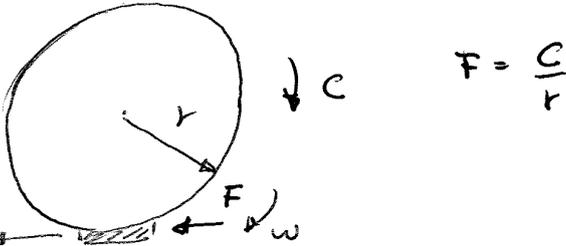
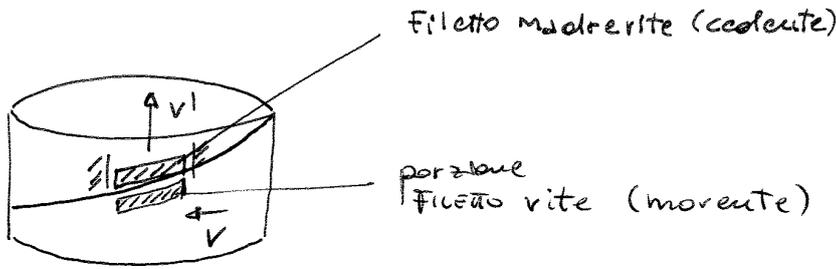
Q = carico

C : coppia

v : velocità di salita della madre vite

Il moto di RISALITA della madre vite potrà essere usato per vincere un carico Q

1

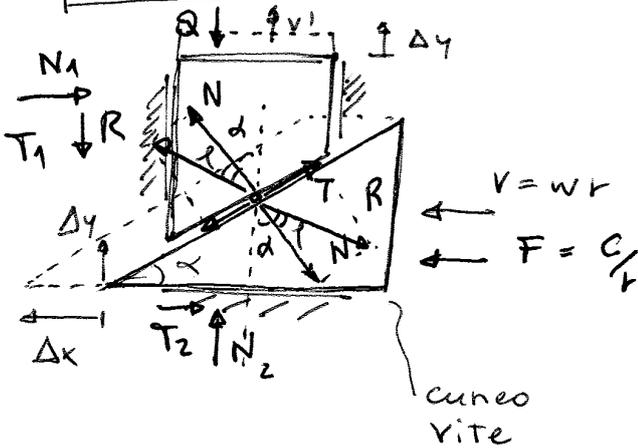


$$F = \frac{C}{r}$$

velocità tangenziale = v

SISTEMA DEI CUNEI EQUIVALENTI

per studiare la relazione tra w e v



$$\Delta y = \Delta x \tan \alpha$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tan \alpha$$

$$v' = v \tan \alpha$$

$$v' = wr \tan \alpha$$

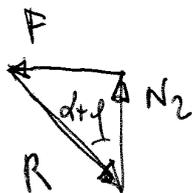
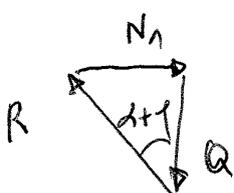
Eq. CINEMATICA

Immaginiamo di concentrare le forze di contatto tra il cuneo superiore (madrevite) e quello inferiore (vite). C'è **ATTRITO** tra i due cunei !!!

"T" è rivolta verso destra perché si oppone al moto (verso destra)

N_1, T_1 e N_2, T_2 sono le forze sembrate di vincoli.

Se i vincoli sono privi di attrito $\Rightarrow T_1 = T_2 = 0$



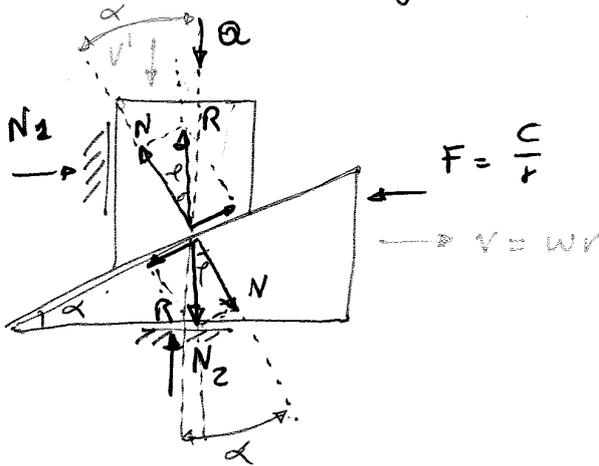
Devo scrivere una relazione tra F e Q !!!

Eq. del cuneo superiore (madrevite)

Eq. del cuneo inferiore (vite)

Supponiamo ora di invertire il funzionamento del sistema.
 Elemento movente è di solito l'elemento che ruota
 (esempio vite) e l'elemento condotto è quello vincolato a
 muoversi lungo una guida prismatica (es. madrevite)

Potrei voler in, alcuni casi, produrre la rotazione
 dell'elemento che prima era movente (vite) muovendo
 la madrevite lungo la guida prismatica:



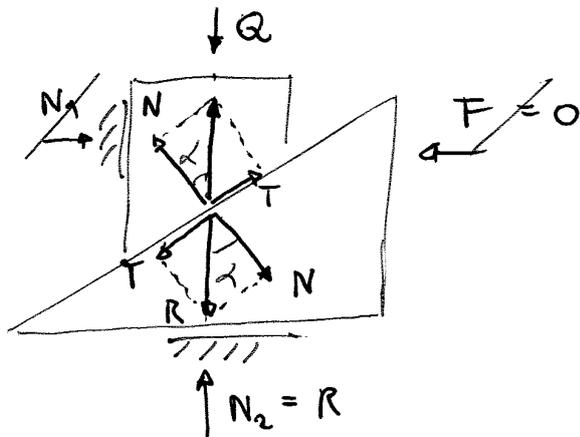
$$Q = R \cos(\alpha - \rho)$$

$$F = R \sin(\alpha - \rho)$$

$$\frac{F}{Q} = \tan(\alpha - \rho)$$

Quando si può realizzare una condizione di IRREVERSIBILITÀ?
 IRREVERSIBILITÀ quando se il carico diventa l'azione motrice
 essa non è in grado di muovere all'indietro il meccanismo
 (esempio crick auto: se lascio il crick l'auto rimane
 comunque sollevata) → pur utilizzando ad agire sul meccanismo
 con il proprio peso Q

La situazione è la seguente



Però in condizioni di
 IRREVERSIBILITÀ: e

$$\frac{T}{N} = \tan \alpha$$

sappiamo anche che
 il coeff. di attrito è:

$$\frac{T}{N} \leq f_A$$

Per cui:

$$\tan \alpha \leq f_A$$

⇒

$$\alpha \leq f_A$$

CONDIZIONE DI
 IRREVERSIBILITÀ

Definizione di giunto: È un organo di collegamento permanente tra due alberi rotanti di una macchina. Hanno quindi la funzione di trasmettere un momento torcente tra i due alberi stessi.

I due alberi possono essere coassiali, oppure può esistere tra loro un disassamento (come già detto) dovuto ad esigenze di montaggio oppure ad imperfezioni di costruzione o a deformazioni elastiche dei componenti o dei supporti.

Gli spostamenti relativi possono essere:

- assiali: gli alberi si avvicinano o si allontanano, mantenendosi coassiali;
- paralleli: gli alberi si mantengono paralleli ma non più coassiali;
- angolari: gli assi sono concorrenti ma disallineati;

I giunti si distinguono in:

- a) fissi (rigidi)
- b) elastici (deformabili)
- c) mobili (snodati)

Giunti rigidi

Realizzano un accoppiamento rigido dei due alberi.

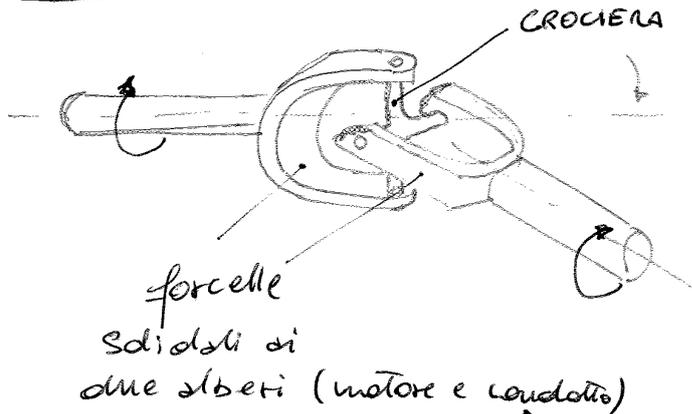
I più comuni sono:

- giunto A BUSJOLA INCHIAVERATA (A MANICOTTO) piccole velocità angolari
- giunto FLANGIATO

Richiedono una elevata precisione sulla coassialità degli alberi, per evitare sollecitazioni alternate che possono danneggiare i supporti e la macchina.

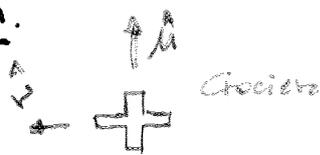
I "giunti universali" trasmettono il moto rotatorio tra i due elementi estremi. Se le velocità dei due alberi sono istante per istante UGUALI \Rightarrow il giunto è detto **OMOCINETICO**

Un "giunto universale" molto famoso è il Giunto cardanico



Le velocità angolari delle due forcelle sono in generale diverse. Si tratta perciò di un giunto "Non omocinetico" *

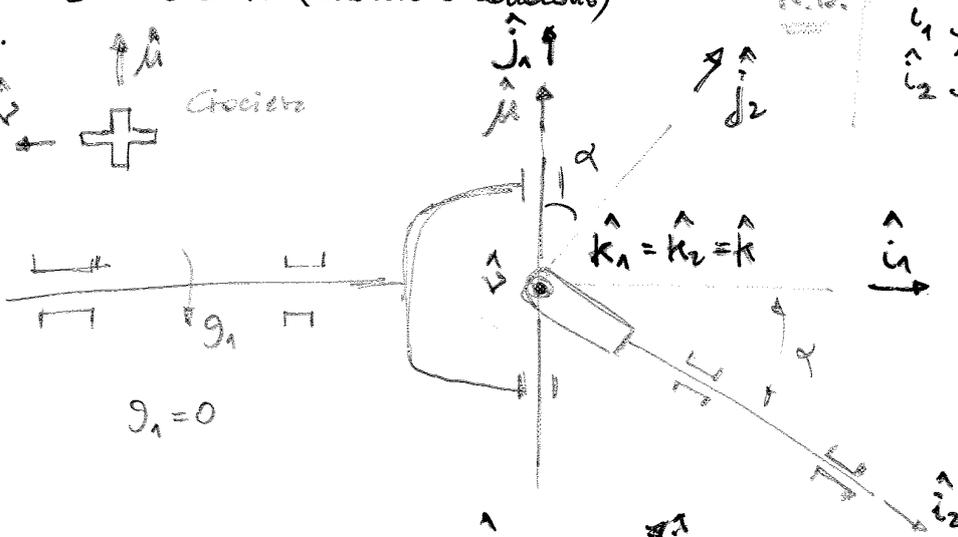
* Dim.



N.B.

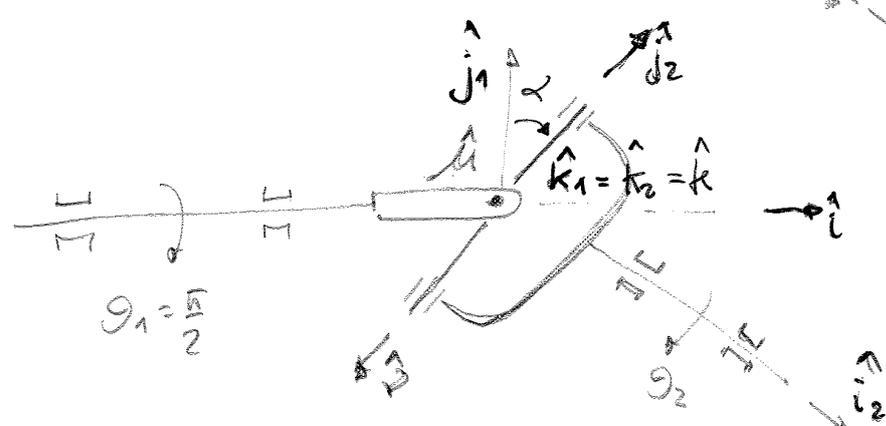
$\hat{i}_1, \hat{j}_1, \hat{k}_1$ sistema di riferimento FISSI!
 $\hat{i}_2, \hat{j}_2, \hat{k}_2$

(1)



$g_1 = 0$

(2)



$g_1 = \frac{\pi}{2}$

Da (1) a (2) la crociera ha subito:

- rotazione attorno a \hat{i}_1 di $\frac{\pi}{2}$
- rotazione attorno a \hat{u} di $-\alpha$ (senso orario)

- L'asse della crociera solida a:
- \hat{u} ruota nel piano \hat{j}_1, \hat{k}_1
 - \hat{v} , , , \hat{j}_2, \hat{k}_2

Derivando nel Tempo ...

$$\frac{d(t_f g_2 \cos \alpha)}{dt} = \frac{d(t_f g_1)}{dt} \quad \cos \alpha = \text{costante}$$

$$\frac{d(t_f g_2)}{dt} \cdot \cos \alpha = \frac{d(t_f g_1)}{dt}$$

$$\frac{d t_f g_2}{dt} \cdot \frac{d g_2}{dt} \cdot \cos \alpha = \frac{d t_f g_1}{dt} \cdot \frac{d g_1}{dt}$$

$$(1 + t_f^2 g_2) w_2 \cdot \cos \alpha = (1 + t_f^2 g_1) w_1$$

Definiamo rapporto di trasmissione : $u = \frac{w_1}{w_2}$

$$u = \frac{w_1}{w_2} = \frac{(1 + t_f^2 g_2) \cos \alpha}{(1 + t_f^2 g_1)} = \dots$$

Dalla * :

$$\left(t_f g_2 = \frac{t_f g_1}{\cos \alpha} \Rightarrow t_f^2 g_2 = \frac{t_f^2 g_1}{\cos^2 \alpha} \right)$$

$$\dots = \frac{\left(1 + \frac{t_f^2 g_1}{\cos^2 \alpha} \right) \cos \alpha}{1 + t_f^2 g_1} = \frac{\left(1 + \frac{t_f^2 g_1}{\cos^2 \alpha} \right) \cos^2 \alpha}{(1 + t_f^2 g_1) \cos \alpha} =$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha + t_f^2 g_1}{(1 + t_f^2 g_1) \cos \alpha} = \frac{(\cos^2 \alpha + t_f^2 g_1) \cos^2 g_1}{(1 + t_f^2 g_1) \cos \alpha \cdot \cos^2 g_1} =$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha \cos^2 g_1 + \sin^2 g_1}{(\cos^2 g_1 + \sin^2 g_1) \cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha \cos^2 g_1 + (1 - \cos^2 g_1)}{\cos \alpha} =$$

$$= \frac{\cos^2 g_1 (\cos^2 \alpha - 1) + 1}{\cos \alpha} = \frac{1 - \cos^2 g_1 \sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

Mettendo a rapporto:

$$\frac{t_f \vartheta_1}{t_f \vartheta_3} = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'}$$

$$\text{Se } \underline{\alpha = \alpha'} \Rightarrow t_f \vartheta_1 = t_f \vartheta_3 \Rightarrow \vartheta_1 = \vartheta_3 \Rightarrow \underline{w_1 = w_3}$$

OMOCINETICO!!

Conclusione:

ⁿ Per ottenere un punto OMOCINETICO:

1) Le forcelle collegate all'albero intermedio devono giacere sullo stesso piano. $\Leftrightarrow \hat{\mu}' = \hat{\mu}''$

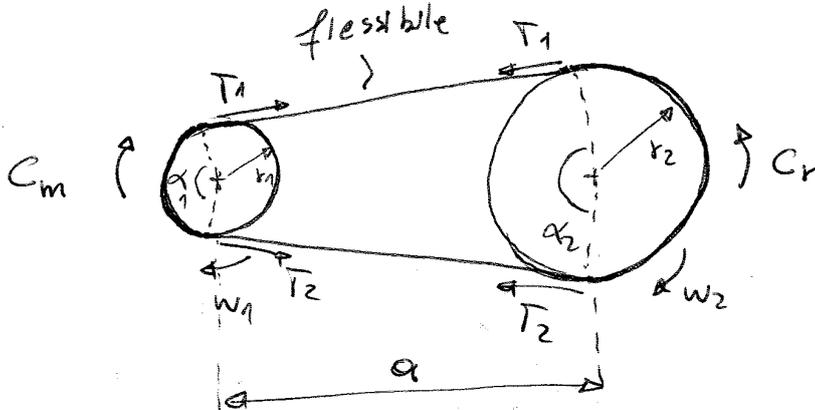
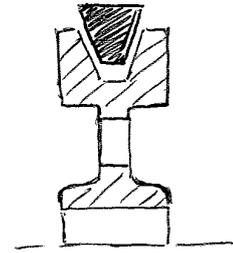
(Le forcelle devono essere // tra loro)

2) Angoli di disallineamento α e α' devono essere t.c. $\alpha = \alpha'$ (sia in Es.1 che in Es.2)

Cinghie trapezoidali

Hanno sezione trapezoidale e si accoppiano con pulegge dotate di gola anch'esse a sezione trapezoidale.

Tali cinghie lavorano sui fianchi



I parametri fondamentali sono:

- r_1, r_2 raggi pulegge
- a interasse
- α_1, α_2 angoli di avvolgimento

relative agli
elementi del
meccanismo

- rendimento $\eta = \frac{P_M}{P_u} = \frac{C_M w_1}{C_r w_2} < 1$
- potenza

Caratteristiche
DINAMICHE
del
sistema

- rapporto di trasmissione] Caratteristiche
CINEMATICA

Si supponga che, durante il moto, vi sia ADERENZA tra le pulegge e flessibile e che quest'ultimo sia IDEALE e INESTENSIBILE.

Tali ipotesi implicano che il flessibile si accoppi con continuità con i corpi con cui è a contatto assumendone la forma e che la sua lunghezza rimanga costante.

In tal caso la velocità del flessibile è:

$$V_s = w_1 r_1 = w_2 r_2$$

Funi

Le funi sono costituite da fili opportunamente avvolti.

I fili sono realizzati con fibre vegetali o artificiali, oppure sono metallici. Quest'ultima soluzione è la più diffusa nelle applicazioni meccaniche.

A seconda della conformazione le funi sono suddivise in:

- SPINALOIDI O TRAFOLI:

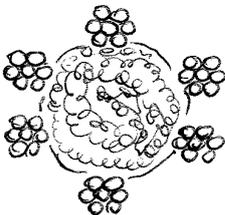


sono costituite da uno o più fili avvolti a elica attorno ad un nucleo centrale

- FUNI A TRAFOLI:

Sono formate avvolgendo ad elica, attorno ad un nucleo centrale, uno o più strati di trafoli.

Il nucleo centrale detto "anima" può essere metallico oppure di fibre tessile



Rigidità dei flessibili

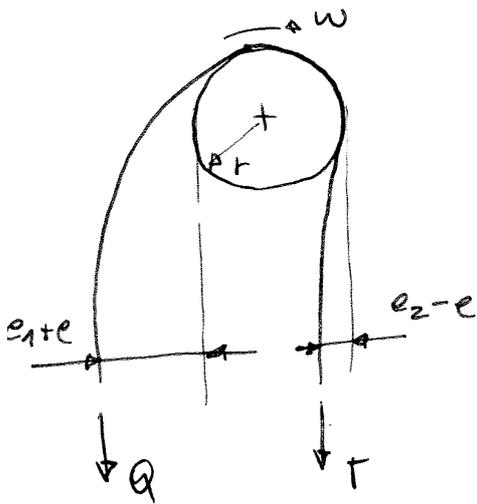
Fino ad ora i flessibili sono stati considerati ideali, cioè perfettamente flessibili.

In realtà quando i flessibili si avvolgono o ssvolgono dalle pulegge essi manifestano una certa resistenza a cambiare la propria forma. Se non di rigidità non nulla!

In relazione al fenomeno si parla di:

- RIGIDITÀ ELASTICA
- / ANAELASTICA

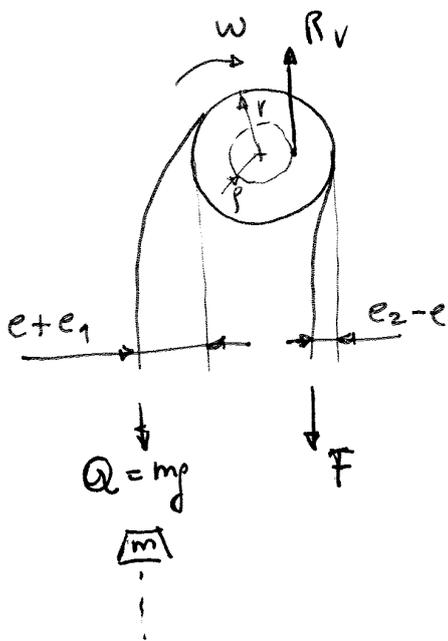
Caso più generale



$$T(r + e - e_2) = Q(r + e + e_1)$$

$$T = Q \cdot \frac{r + e + e_1}{r + e - e_2}$$

Se esiste anche attrito al perno



$$Q(r + e + e_1 + \rho) = F(r + e_2 - e - \rho)$$

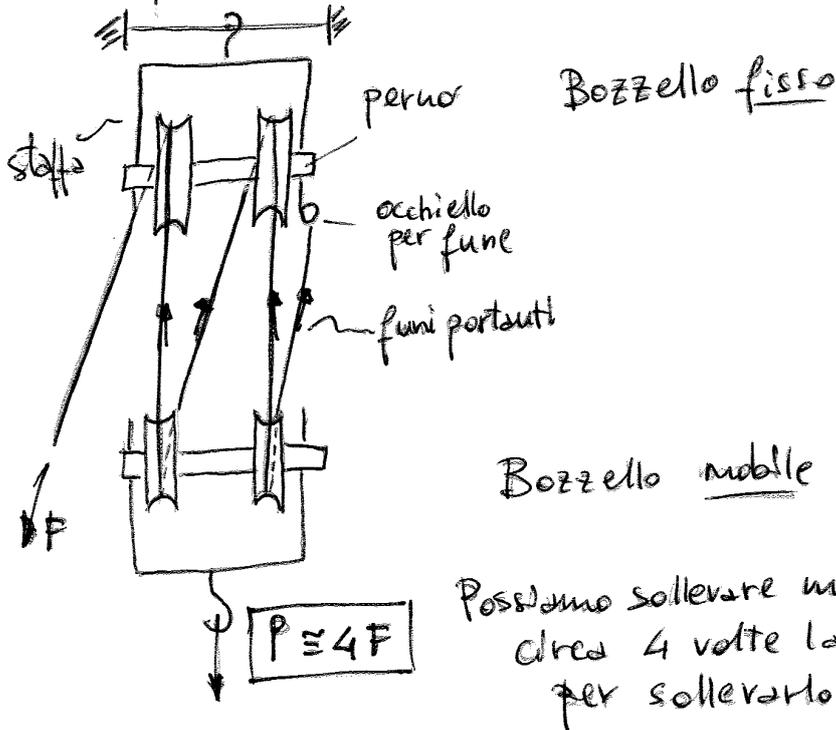
$$P_M = F \cdot v \quad P_u = Q \cdot v$$

$$\eta = \frac{P_u}{P_M} = \frac{mg}{F} = \frac{Q}{F} = \frac{r + e_2 - e - \rho}{r + e + e_1 + \rho} < 1$$

Notiamo come η dipenda

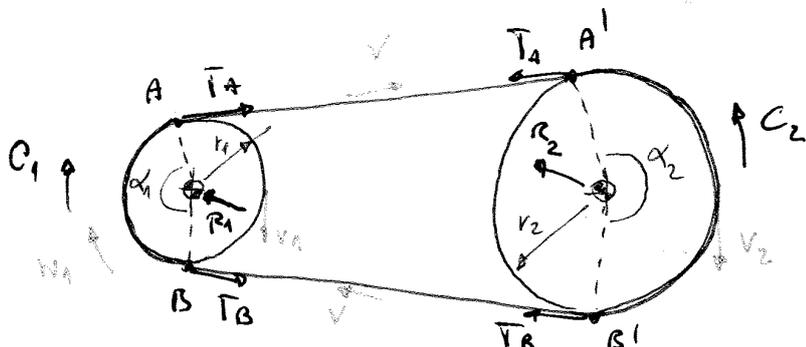
$$da: r, e_2, e_1, e, \rho$$

Esempio di Paranco



Possiamo sollevare un carico di circa 4 volte la forza applicata per sollevarlo.

Analisi: cinghie



Si può modellizzare il sistema in diversi modi.

Il primo è fondato su tale ipotesi:

H_p FLESSIBILE IDEALE :

- 1) inestensibile
- 2) perfettamente flessibile

(assume la forma dell'elemento su cui è avvolta)

• $v_1 = w_1 r_1$

(H_p Se c'è ADERENZA) sulla puleggia 1 allora:

$v = v_1 = w_1 r_1$

• $v_2 = w_2 r_2$

(H_p Se c'è ADERENZA) sulla puleggia 2 allora: $v = v_2 = w_2 r_2$

Integrando l'eq. differenziale:

$$\int_{T_A}^{T_B} \frac{dT}{T} = \int_{\vartheta_A}^{\vartheta_B} f_A d\vartheta$$

$$\ln \left(\frac{T_B}{T_A} \right) \leq f_A (\vartheta_B - \vartheta_A) = f_A \alpha$$

più grande

$$\frac{T_B}{T_A} \leq e^{f_A \alpha}$$

più piccolo

Questa relazione va verificata sia per la:

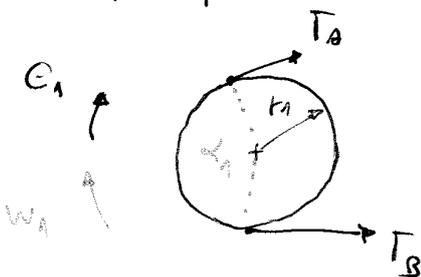
- puleggia più piccola $\rightarrow \alpha_1$
- ' ' grande $\rightarrow \alpha_2$

In particolare essendo $\alpha_2 > \alpha_1 \Rightarrow$ la puleggia più piccola avrà $e^{f_A \alpha_1} < e^{f_A \alpha_2}$.

Perciò è la puleggia più piccola che corre il rischio di slittare:

Conclusione:

"La verifica della aderenza va fatta sulla puleggia più piccola"



$$C_1 = (T_B - T_A) r_1$$

$$\frac{T_B}{T_A} \leq e^{f_A \alpha_1}$$

Al limite dell'aderenza:

$$T_B = T_A e^{f_A \alpha_1}$$

Perciò la coppia massima trasmissibile sarà:

$$C_{max} = T_A (e^{f_A \alpha_1} - 1) r_1$$

Coppia max trasmissibile in funzione della tensione minore

Si esprime C_{max} in funzione della

tensione minore perché esistono dei meccanismi che permettono di modularla

CINGHIE DENTATE: Trasmettono il moto per effetto di forze normali tra i fianchi dei denti.

CINGHIE AD ATRITO: Trasmettono il moto per effetto dell'attrito tra la cinghia piana e la puleggia.

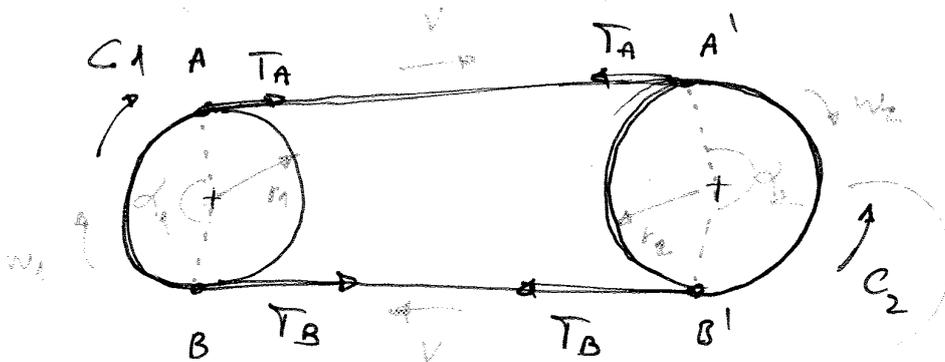
Fin qui abbiamo considerato un' approssimazione:

- FLESSIBILE IDEALE**
- inestensibile
 - in grado di avvolgersi senza alcuno sforzo sulla puleggia

MODELLO REALE TRASMISSIONE A CINGHIA

- FLESSIBILE REALE**
- dotato di elasticità (modulo elastico E)
 - massa non trascurabile
- $$q = \frac{dm}{dl}$$

si può deformare, però bisogna cercare di ridurre tale deformazione. Lo si fa introducendo delle fibre nel flessibile

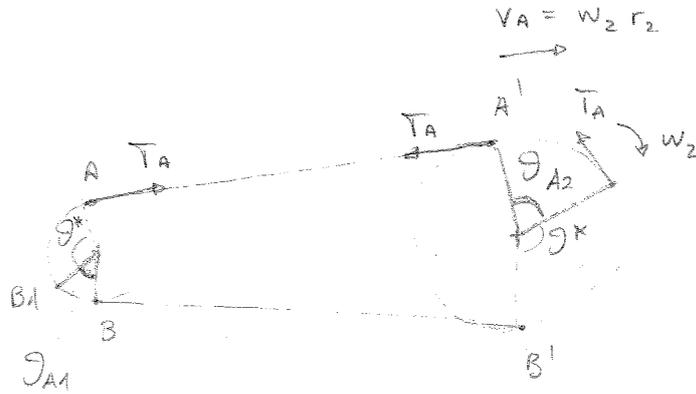


Copie resistite esercitate dall'operazione a cui la puleggia condotta sarà collegata.

Equilibrio puleggia motrice: $C_1 = (T_B - T_A) r_1$

condotta: $C_2 = (T_B - T_A) r_2$

} $T_B > T_A$



Per cui avremo :

- in θ^* STRISCIAMENTO \Rightarrow velocità variabile
- in θ_{A1} ADERENZA \Rightarrow velocità costante
(uguale a quella della puleggia)

Chiaramente :

$$\alpha_1 = \theta^* + \theta_{A1}$$

Quindi sul tratto :

- θ^* (arco di strisciamento) . $dF_r = f dFN$ (Legge di attrito dinamico di strisciamento)
- θ_{A1} (arco di aderenza) . $dF_s \leq f_a dFN$ (Condizione di aderente)
- $V = \omega_1 r_1$ (velocità periferica puleggia)
La cinghia si muove con la stessa velocità periferica della puleggia

Querto perchè :

- su θ^* $T_A \leq T \leq T_B$ non cambia nemmeno la tensione
- su θ_{A1} $T = T_B$
- Si può dimostrare con un ragionamento analogo che sulla seconda puleggia (condotta) avremo un angolo di strisciamento anch'esso pari a θ^* ed un angolo di aderenza pari a θ_{A2} ($\neq \theta_{A1}$ in generale)
- Si può anche dimostrare che il tratto di ADERENZA PRECEDE QUELLO DI SCORRIMENTO.

Perciò quando :

- $C_1 = 0 \Rightarrow \vartheta^* = 0 \rightarrow$ completa aderenza
- $\vartheta^* > \alpha_1 \Rightarrow$ allora avremo strisciamento su tutto l'angolo di avvolgimento

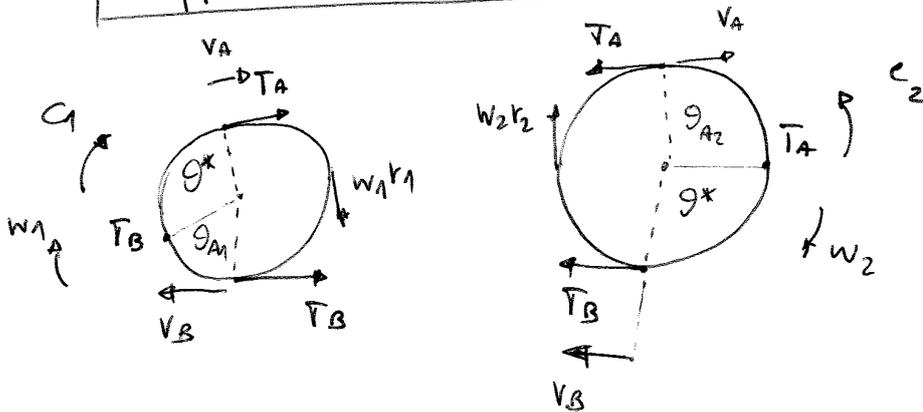
Si noti che

$\vartheta^* = \alpha_1$ è la condizione LIMITE con cui è possibile utilizzare il meccanismo detto di SCORRIMENTO GLOBALE.

- Se aumentassimo ancora la coppia, superando il valore corrispondente a $\vartheta^* = \alpha_1$, avremo strisciamento su tutti i punti di contatto.
- Se invece manteniamo la coppia al valore tale per cui $\vartheta^* = \alpha_1$ avremo UN SOLO PUNTO DI ADERENZA cioè il punto B $v_B = w_1 r_1$
- La coppia massima applicabile e trasmissibile è:

$$C_{1(max)} = T_A (e^{f\alpha_1} - 1) r_1$$

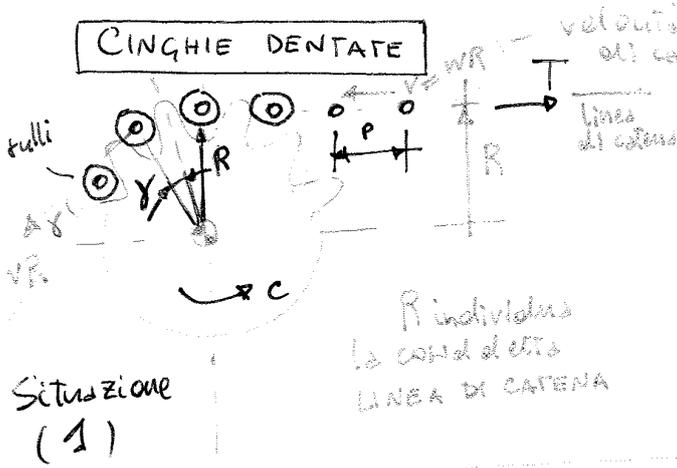
Rapporto di trasmissione



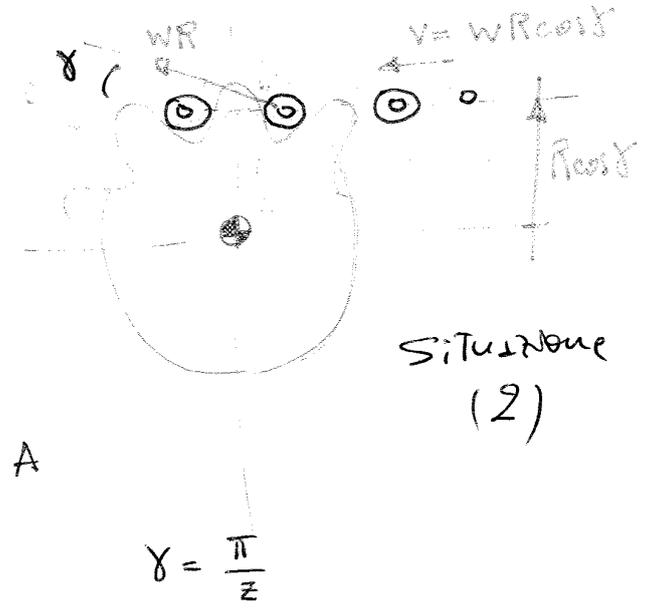
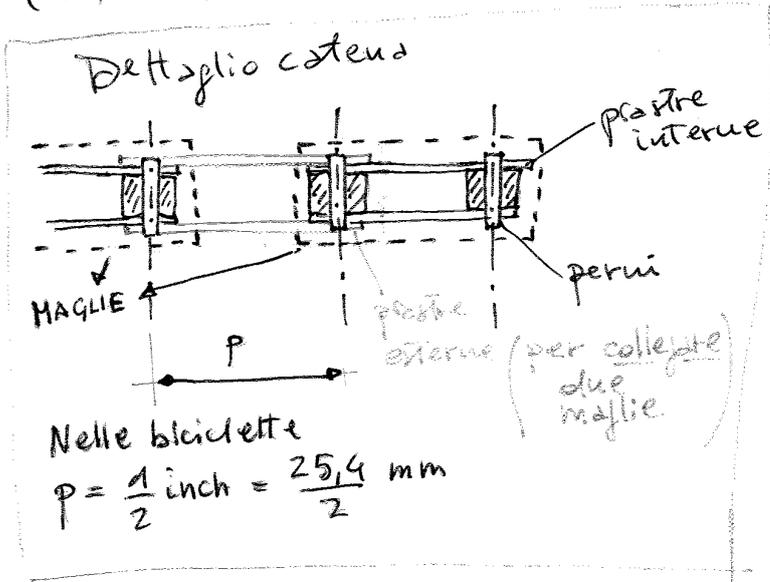
$$i = \frac{w_1}{w_2}$$

$v_B = w_1 r_1$ (velocità della cinghia lungo l'angolo di aderenza della puleggia motrice)

$v_A = w_2 r_2$ (velocità della cinghia lungo l'angolo di aderenza della puleggia condotta)



Parametro fondamentale delle cinghie dentate è il numero di denti; indicato con Z (perché in tedesco dente si dice: ZAHN)



Analizzando la situazione 1 e 2 si deduce...

- La distanza del centro della linea di catena cambia nelle due situazioni

$$R \longrightarrow R \cos \delta$$

(1) (2)

perché la catena "oscilla" continuamente verticalmente

Questo fenomeno genera la tipica vibrazione che caratterizza questo tipo di trasmissione

- Varia anche la velocità 'v' della linea di catena:

$$v = WR \longrightarrow v = WR \cos \delta$$

(1) (2)

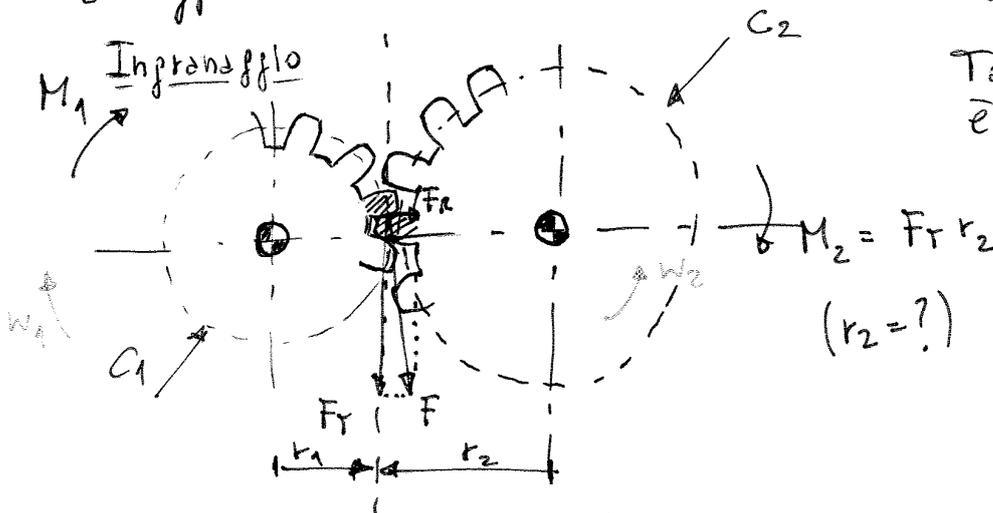
Dall'equilibrio dinamico di 1:

$$F_T = \frac{C_1}{r_1} \rightarrow F_T = \frac{C_1}{r_1} \leq f_a F_N = f_a F \quad (F = F_N)$$

Quindi la forza minima da applicare per trasmettere C_1 è:

$$F \geq \frac{C_1}{r_1 f_a}$$

Questo tipo di trasmissione è molto poco utilizzato. Perché? perché è difficile garantire il coefficiente di aderenza f_a durante il funzionamento del meccanismo. È sufficiente che tra le ruote cada del grasso e "fa" diminuisce.



Tale sistema è detto INGRANAGGIO

Le due ruote dentate "INGRANANO" cioè i loro denti si infilano nei vani dell'altra ruota.

Il termine INGRANAGGIO indica una COPPIA di ruote dentate ingrananti.

Se la ruota dentata 1 è soggetta ad un momento (motrice) M_1 essa cercherà di ruotare ma per farlo dovrà scambiare una forza F con l'ruota dentata 2.

Il problema è ora stabilire dove si trova il punto di applicazione della forza o analogamente a che distanza si trova la setta in verde tratteggiata.

Se la conosciamo lo troveremo: $M_1 = F_T r_1$

A questo punto ci chiediamo:

Che cosa sono o cosa rappresentano i raggi r_1 e r_2 ? E quanto valgono?

Possono calcolarli?

Sì, possiamo calcolarli se conosciamo l'interesse

Infatti:

$$a = r_1 + r_2$$

Perciò:

$$\left\{ \begin{array}{l} i = \frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1} \\ a = r_1 + r_2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} r_2 = i r_1 \\ a = r_1 (1 + i) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} r_1 = \frac{a}{1 + i} \\ r_2 = a \cdot \frac{i}{1 + i} \end{array} \right.$$

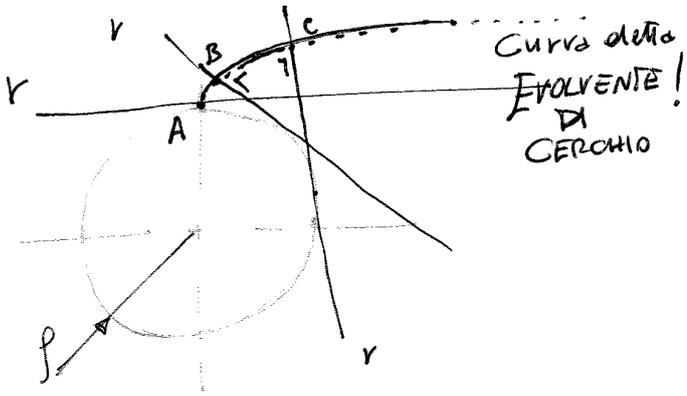
Bisogna considerare, però, che l'interesse "a" può variare in fase di montaggio e di conseguenza potremmo variare "r1" e "r2", ma non varerà "i".

Parleremo di:

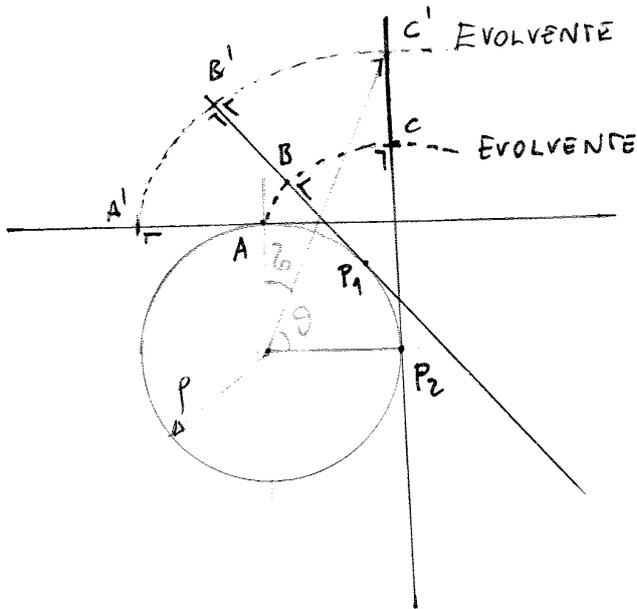
C_1, C_2 : circonferenze primitive dell'ingranaggio

r_1, r_2 : raggi primitive dell'ingranaggio

Il termine primitivo si riferisce al valore che questi parametri avrebbero se considerassimo un meccanismo di trasmissione A RUOTE DI FRIZIONE e partire dalle quali abbiamo costruito quello A RUOTE DENTATE. Primitivo quindi indica le "primitive del moto relativo" tra le ruote.



- 1) Disegnate un cerchio di raggio p
- 2) Disegnate una retta tangente al cerchio e orizzontale
- 3) Far rotolare il cerchio sulla retta



Notare la caratteristica fondamentale dell'EVOLVENTE DI CERCCHIO:

- È sempre \perp alla retta GENERATRICE (r)
- La retta r inoltre è sempre tangente al cerchio di base

I DENTI delle ruote dentate hanno un profilo ad EVOLVENTE DI CERCCHIO.

Il rotolamento di r \implies

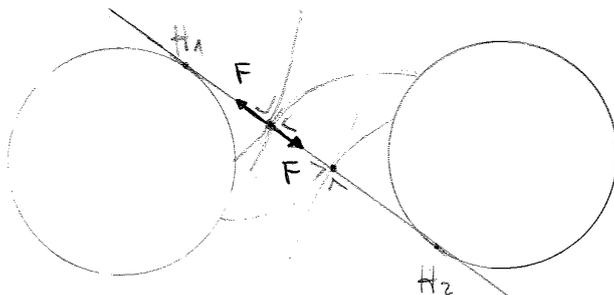
$$\widehat{AP_2} = \overline{CP_2}$$

$$(\phi + \theta)p = p + p\theta$$

\iff

$$\boxed{\phi = \tan \theta - \theta} \quad \text{"ev}(\theta)\text{"}$$

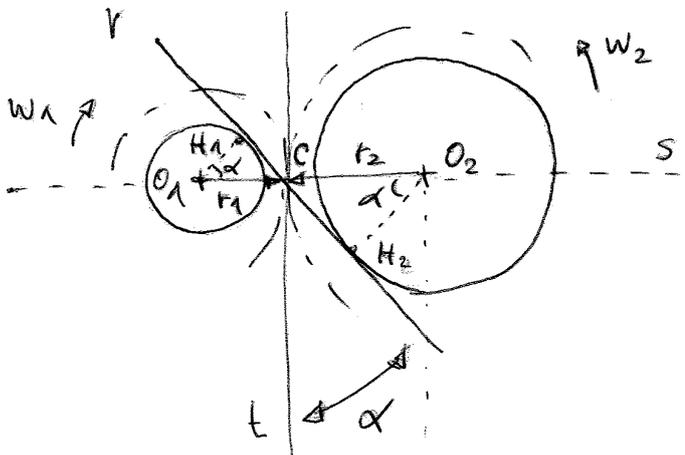
La funzione $\phi = \tan \theta - \theta$ è detta evolvente di θ e si indica con "ev(θ)".



Le forze scambiate sono giacenti sulla "retta di pressione"

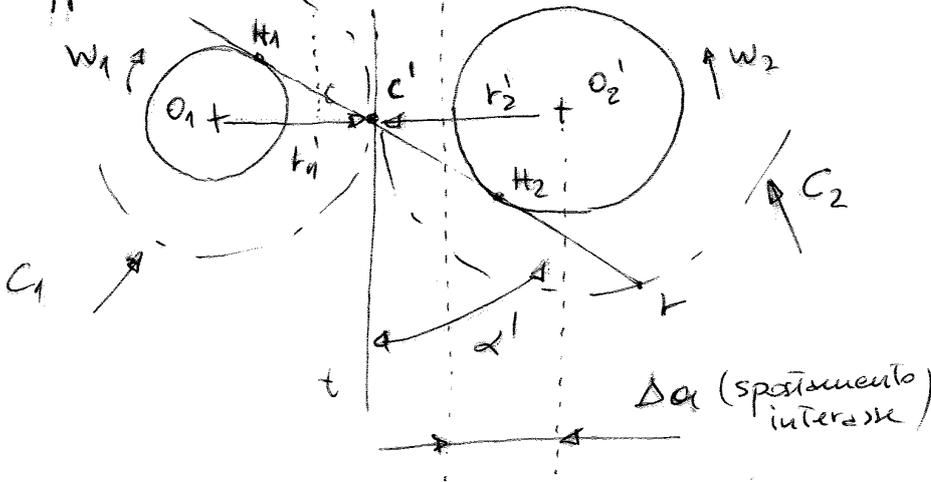
letto di pressione

In ogni punto tra H_1 e H_2 le due evolventi che rappresentano i denti sono sempre \perp alla retta $\overline{H_1 H_2}$ detto LUOGO DEI CONTATTI. Contatto cinematicamente corretto in $\overline{H_1 H_2}$



C: punto di intersezione di r con s (passante per i due centri)
 r_1 e r_2 raggi primitivi

Supponiamo di montare le due ruote con un'interasse più grande



Sono cambiati:
 - la posizione del punto di intersezione di r con s $C \rightarrow C'$
 - la lunghezza dei raggi primitivi

Il rapporto di trasmissione deve però essere costante

In fatti:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}$$

dipende solo dal numero di denti!

$$\begin{cases} r_1 = O_1 C \\ r_2 = O_2 C \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1 = r_1 \cos \alpha \\ p_2 = r_2 \cos \alpha \end{cases}$$

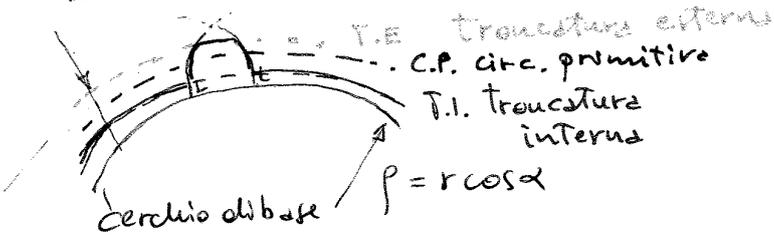
$$i = \frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{p_2}{p_1}$$

$$\begin{cases} r'_1 = O_1 C' \\ r'_2 = O_2 C' \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1 = r'_1 \cos \alpha' \\ p_2 = r'_2 \cos \alpha' \end{cases}$$

$$i = \frac{r'_2}{r'_1} = \frac{p_2}{\cos \alpha'} \cdot \frac{\cos \alpha'}{p_1} = \frac{p_2}{p_1}$$

Quanto sono grandi i denti?



Definito il cerchio di base di raggio p immagino di considerare l'ev che parte dalla circonferenza di base

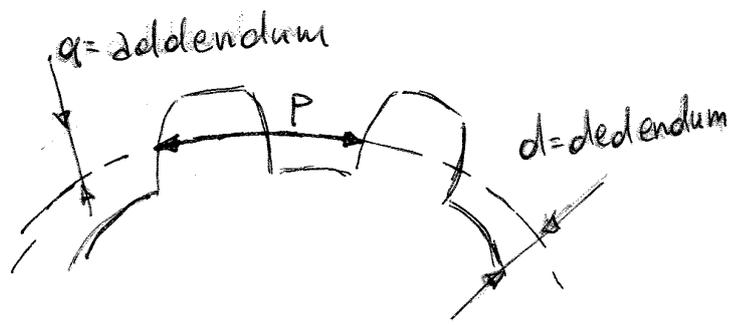
In base alle condizioni progettuali decido di troncate le evolventi mediante le circonferenze di:

- Troncatura esterna
- Troncatura interna

Per abbiamo la circ. primitiva. Dove si trova la circ. primitiva?

La sua posizione è definita da due lunghezze:

- $a = addendum$ distanza tra T.E e C.P.
- $d = dedendum$ / T.I e C.P.



$a = m$
 $d = 1,25 m$

m è un valore standardizzato ed è detto modulo

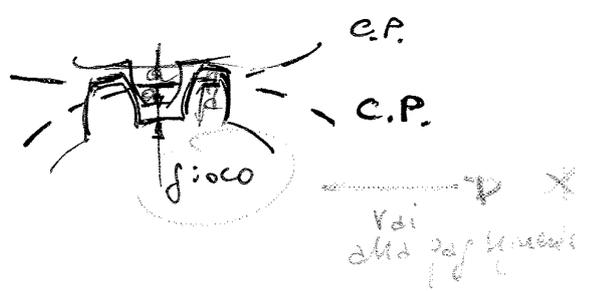
$p = \frac{2\pi r}{z}$

Si definisce **MODULO**:

modulo: $m = \frac{p}{\pi} = \frac{2r}{z}$

$m = 0,5 - 0,6 - 0,8 - 1 \dots$

$\alpha = 15^\circ \ 20^\circ \ 25^\circ \dots$ (anche esso è un valore standardizzato)



La logica in base alla quale si dimensionano una ruota d'ingranaggio è basata sul modulo ed è quindi detto:

PROPORZIONAMENTO MODULARE

Scrivo l'equilibrio dei momenti per la ruota 1:

$$M_1 = F \cdot p_1 = F_T \cdot r_1$$

Per la ruota condotta (ruota 2):

$$M_2 = F \cdot p_2 = F_T \cdot r_2$$

Si noti che con le ipotesi fatte ed in particolare l'ipotesi che la F è applicata in C (dove non c'è attrito) sono IDEALI !!!

Infatti:

$$\eta = \frac{P_u}{P_m} = \frac{M_2 \omega_2}{M_1 \omega_1} = \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_1}{r_2} = 1$$

Per cui $M_2 = M_1 \cdot i \cdot \eta = M_1 \cdot i \cdot 1 = M_1 \cdot i$

$$\boxed{M_2 = M_1 \cdot i}$$

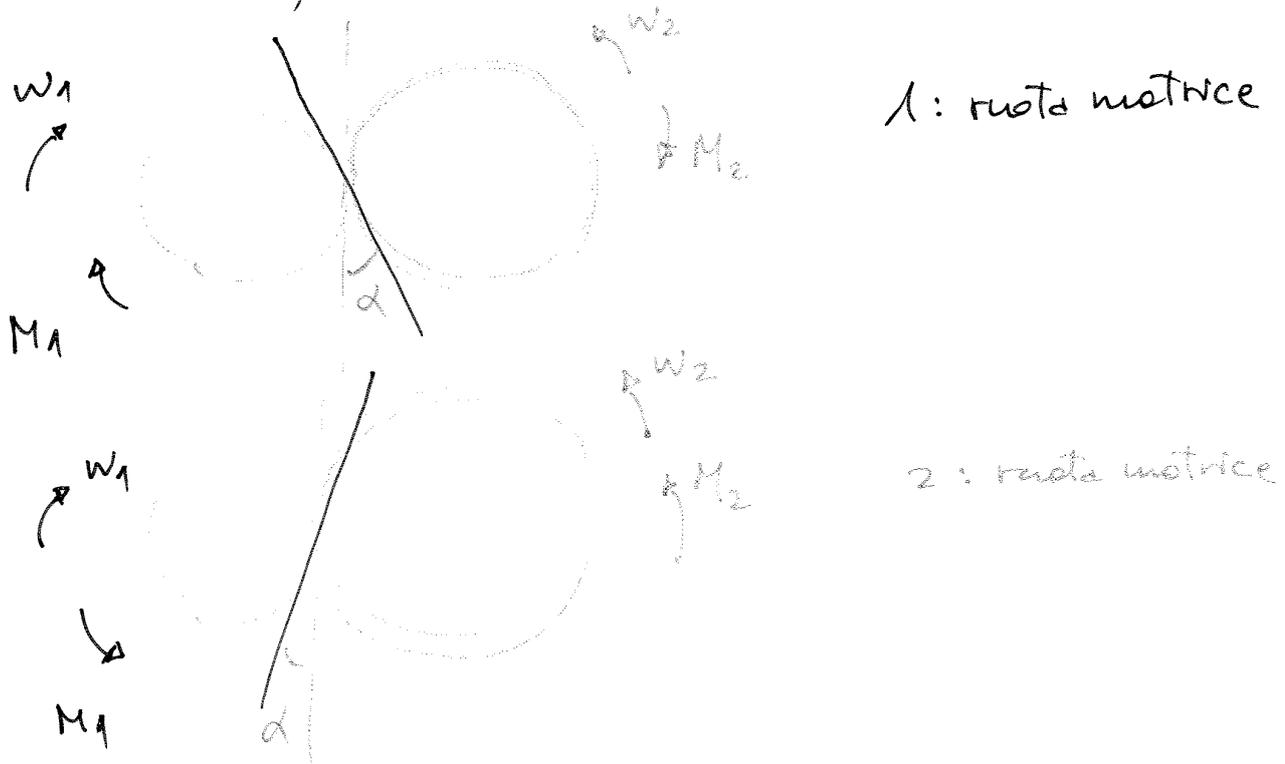
Nel caso in cui forse vada $\eta < 1$:

$$M_2 = M_1 \cdot i \cdot \eta$$

N.B.: La forza scambiata tra le ruote è la stessa ma la coppia trasmessa è diversa!

Questo è dovuto alle diverse dimensioni delle ruote 1 e 2. In generale la coppia è maggiore sulla ruota più grande.

Ocorre conoscere ¹ i versi di rotazione e ² quale delle due ruote è quella motrice (e quale condotta).

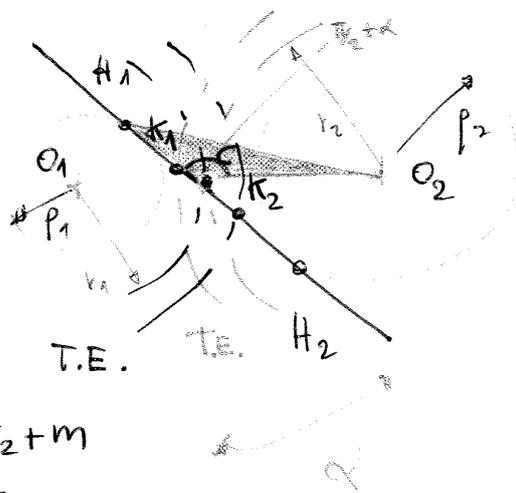


1: ruota motrice

2: ruota motrice

Quanti denti deve avere una ruota?

In alcuni casi è opportuno ridurre al minimo il numero di denti. Però, bisogna sapere, che esiste un limite a ciò



$\overline{H_1 H_2}$ è il possibile luogo dei contatti

$\overline{K_1 K_2}$ è il REALE LUOGO DEI CONTATTI

La condizione limite sarà:

$$K_1 \cong H_1$$

$$O_2 H_1 = r_2 + m$$

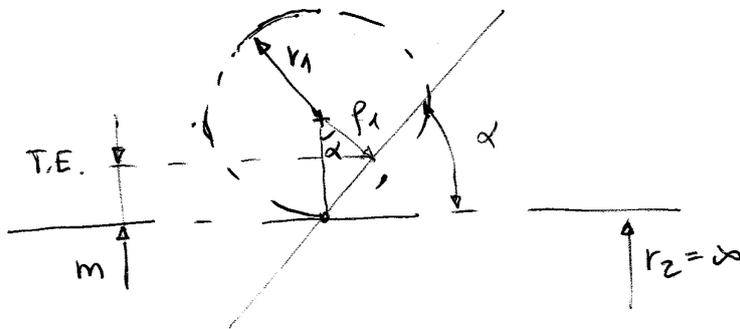
$$O_2 C = r_2$$

$$H_1 C = r_1 \sin \alpha$$

$$H_1 \hat{C} O_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

Notiamo che se porto la T.E. in corrispondenza di π_1 il dente della ruota 2 non va a cozzare con la ruota 1. Infatti esiste sempre un gioco

Estendendo il discorso al sistema rochetto - dentiera:



$$i = \frac{r_2}{r_1} = \infty$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Z_1 = \frac{2}{\sin^2 \alpha}$$

$$r_1 = p \cos \alpha + m$$

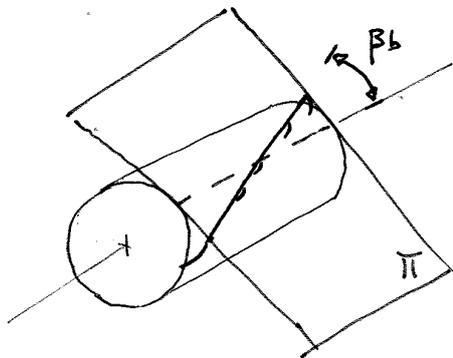
$$r_1 = r_1 \cos^2 \alpha + \frac{2r_1}{Z_1}$$

$$1 = \cos^2 \alpha + \frac{2}{Z_1} \longrightarrow Z_1 = \frac{2}{\sin^2 \alpha}$$

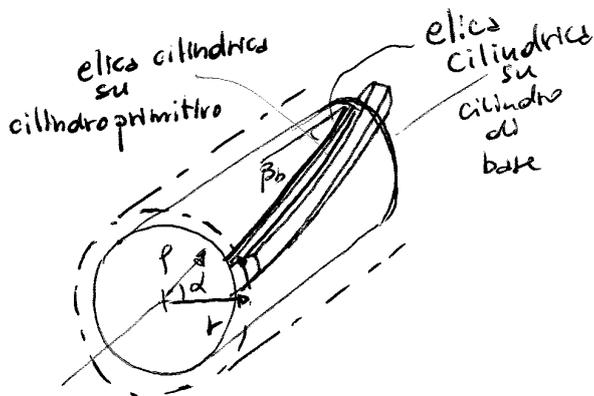
DENTI ELICOIDALI

Esaminiamo ora la costruzione di denti elicoidali.

In tal caso la retta generatrice dei denti (in rosso) la incliniamo di β_b rispetto alla direzione dell'asse.



Anche in questo caso ogni punto della retta generatrice descriverà un'evolvente che sarà via via più corta se ci avviciniamo in prossimità della retta di Tangente perché la lunghezza da percorrere sarà in questi punti minore rispetto ai lati. Le superfici da essi descritte sono delle ELICOIDI.



In tal caso però i profili del dente alle due estremità non sono allineati. Per cui il dente SVERGOLA. Abbiamo costruito dei DENTI ELICOIDALI.

Perché si usa questa soluzione?

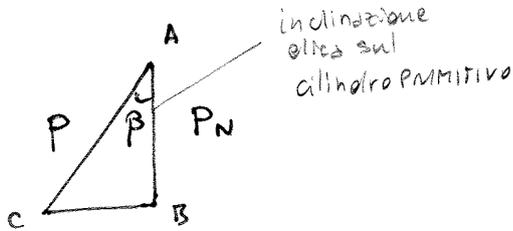
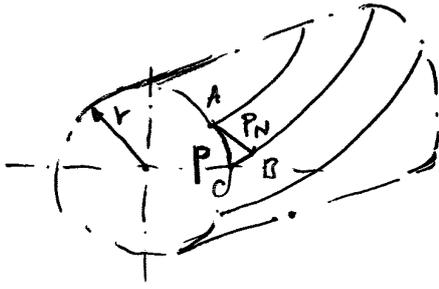
A differenza dei denti dritti, nel caso di denti ELICOIDALI l'ingranamento tra i denti ^{non avviene} contemporaneamente su tutta la superficie ma è progressivo. Come conseguenza si originano poche vibrazioni le quali sono molto più evidenti nei denti dritti. Tali vibrazioni derivano dalla presenza di un gioco reso possibile grazie alle diverse distribuzioni dei pieni e vuoti in un passo. La parte vuota infatti è un po' più lunga della parte piena occupata da un dente.

Inoltre, come vedremo, i denti elicoidali fanno nascere forze assiali da sostenere su eventuali supporti (nei denti dritti, invece, le forze erano tutte contenute in un piano radiale).

L'intersezione tra la superficie laterale del dente ed il cerchio di base è un'ELICA CILINDRICA inclinata rispetto all'asse di " β_b ".

Anche l'intersezione tra la superficie del dente e il cilindro primitivo è un'ELICA CILINDRICA (rossa).

Altre considerazioni geometriche



$$P = \frac{2\pi r}{z}$$

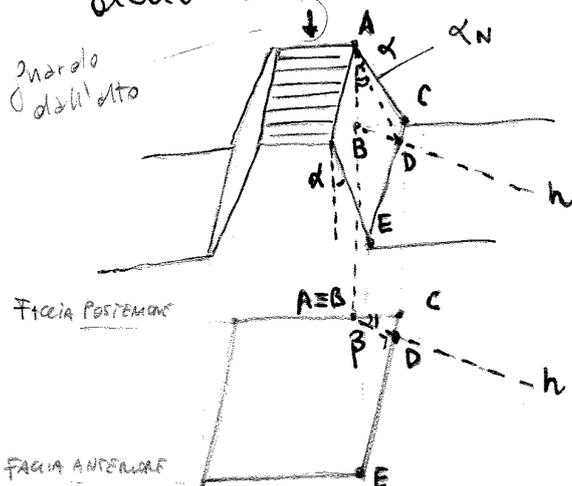
$$PN = P \cos \beta \quad (2)$$

Il modulo è un parametro importante per la costruzione dei denti.

Per costruire le ruote e denti elicoidali si fa sempre riferimento al modulo NORMALE.

Questo perché con lo stesso utensile possono essere costruite ruote e denti dritti o a denti elicoidali a diversa inclinazione (definita dall'angolo β).

Anche un sistema ruotello-dentiera può essere realizzato a denti elicoidali.



$$AB \operatorname{tg} \alpha = BC$$

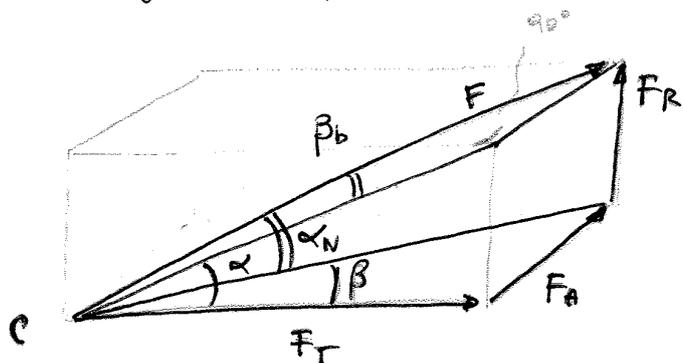
$$AB \operatorname{tg} \alpha_N = BD = BC \cos \beta$$

$$\hookrightarrow \operatorname{tg} \alpha_N = \operatorname{tg} \alpha \cos \beta \quad (3)$$

($\triangle BCD$, $\triangle ACB$, $\triangle ABD$ sono rettangoli)

Vista dall'alto della proiezione

Metodo grafico per il calcolo delle componenti di \vec{F}



Si possono calcolare le componenti in funzione di:

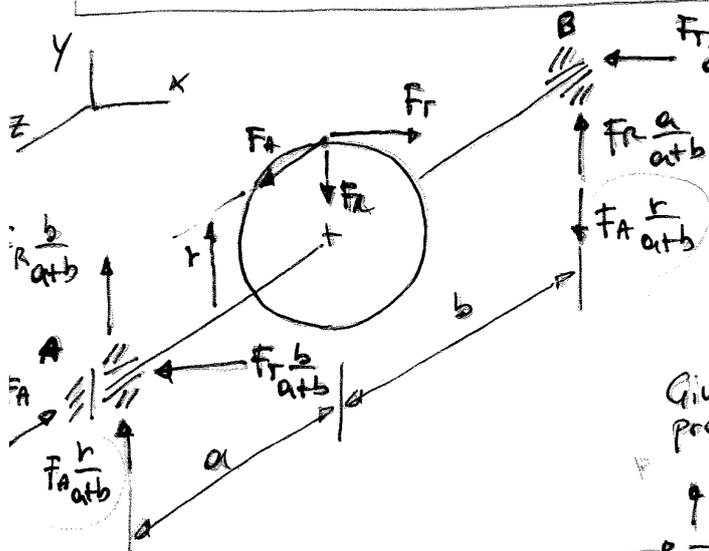
- 1) α e β
- 2) oppure α_N e β

$$F_A = F \sin \beta = F \cdot \cos \alpha_N \cdot \sin \beta$$

$$F_R = F \cos \beta \cdot \sin \alpha = F \sin \alpha_N$$

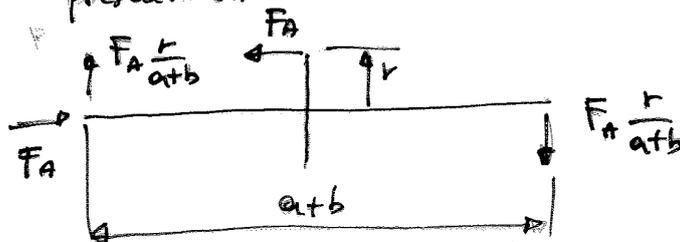
$$F_T = F \cos \beta \cdot \cos \alpha = F \cos \alpha_N \cdot \cos \beta$$

ANALISI DELLE REAZIONI SUI SUPPORTI



Notiamo che uno dei supporti dovrà farsi carico della forza assiale F_A . Supponiamo ad esempio che tale supporto (definito REGGIPANTA) sia A.

Giustificazione presenza di tali contributi

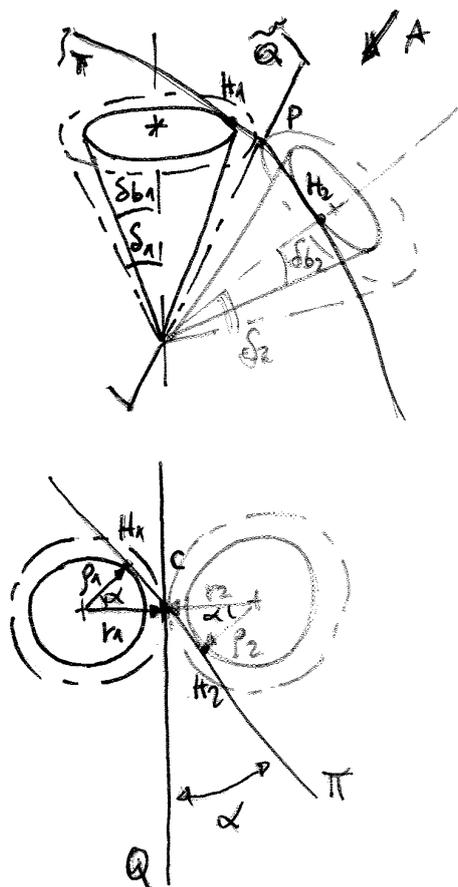


Nell'esempio...

il supporto più caricato è evidentemente A ($R_B < R_A$);

$$R_A = \sqrt{\left(F_T \frac{b}{a+b}\right)^2 + \left(F_R \frac{b}{a+b} + F_A \frac{r}{a+b}\right)^2}$$

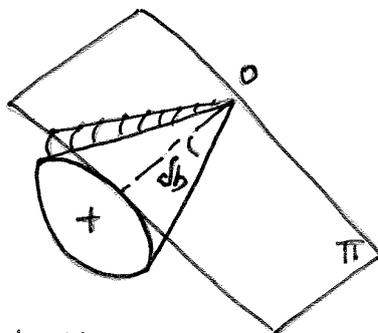
I supporti dovranno generare una coppia per bilanciare il momento $F_A \cdot r$



Studio DINAMICO

Le forze scambiata intersecano la superficie primitiva e sono tangenti alle superfici del cono di base.

Andizziamo, inoltre, come vengono generati i denti su una ruota conica e quali siano le loro caratteristiche



I denti sono generati a partire da evolventi sferiche (che non è una curva piana come nel caso di ev. di cerchi). L'ev. è detta sferica perché tale curva si muove mantenendo fissa la sua distanza da "O". Di conseguenza, i denti hanno dimensioni non costanti ma decrescenti via via che ci si avvicina ad "O".

Dopo aver individuato i piani

- Q tangente ai cerchi primitivi
- Pi piano d'azione (contiene F)

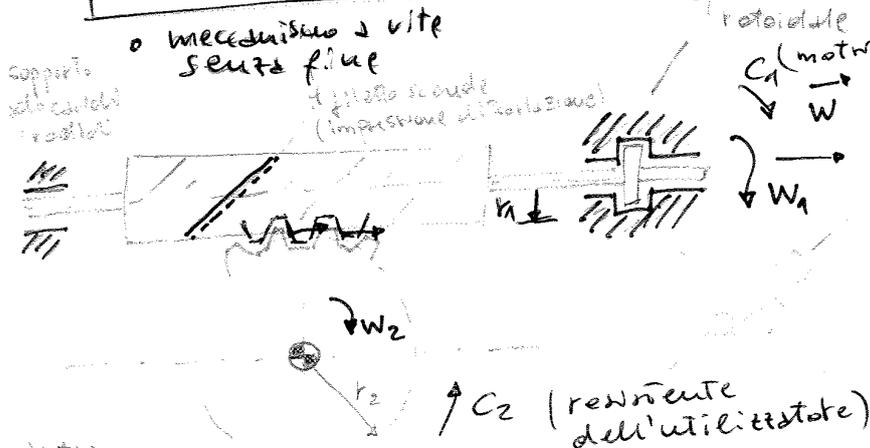
Le Hp che facciamo sono:

- 1) Una coppia di denti in presa
- 2) No attrito tra i denti
- 3) F applicata in maniera

Si noti che per l'Hp 1) la forza scambiata sarà applicata in un punto C (in cui c'è contatto tra i denti) che si trova tra P e O e non nel punto P!

Con le ruote elicoidali si può trasmettere il moto tra assi sghembi oppure, tramite ruote coniche, tra assi incidenti (o sghembi se utilizziamo ruote coniche con denti elicoidali)

INSERIMENTO A VITE



I denti della ruota devono essere elicoidali estendo i filletti della vite elicoidali. La rotazione della vite determina una spinta sui denti della ruota. In questo processo si ha l'impressione che la vite traxi in avanti.

Nota: asse e vite e 2a ruota sono sghembi!!!

Sarà possibile definire il rapporto di trasmissione. Però non si capisce bene in funzione di cosa esprime "i" perché k_1 non è un raggio primitivo ma il raggio medio della vite. Posso dire però che il sistema è un sistema di trasmissione per cui esisterà un rendimento:

$$P_u = C_2 W_2 \quad \eta = \frac{C_2 W_2}{C_1 W_1} = \frac{C_2}{C_1 i} \Rightarrow C_2 = C_1 i \eta$$

$$P_M = C_1 W_1$$

La ruota ha la superficie esterna non rettilinea ma curva per aumentare la superficie di contatto. Inoltre è un dispositivo che presenta elevato attrito. Perciò il rendimento sarà evidentemente basso. Per evitare l'usura e migliorare il rendimento si può usare del lubrificante. Si utilizzano questi meccanismi per realizzare riduttori di velocità in cui la velocità della vite è maggiore di quella della ruota. Anche il diametro dell'albero della vite è minore rispetto a quello su cui è montata la ruota condotta.

Se trascurassimo l'attrito avremmo:

$$F_{A2} = F_{T1}$$

$$F_{R2} = F_{R1}$$

$$F_{T2} = F_{A1}$$

Inoltre abbiamo le seguenti relazioni relative alle coppie:

$$C_1 = F_{T1} r_1$$

$$C_2 = F_{T2} r_2$$

Nei meccanismi che abbiamo descritto bisogna notare che i rapporti di trasmissione sono limitati:

(soprattutto nel caso di meccanismi con denti conici o dritti; nel caso di meccanismi a vite senza fine si hanno i rapporti di trasmissione ^{più grandi} max $i = 5$ $i = 6$)

Esempio vite ad un principio
 $z_1 = 1$
 dente $z_2 = 20 \rightarrow i = 20$!!!

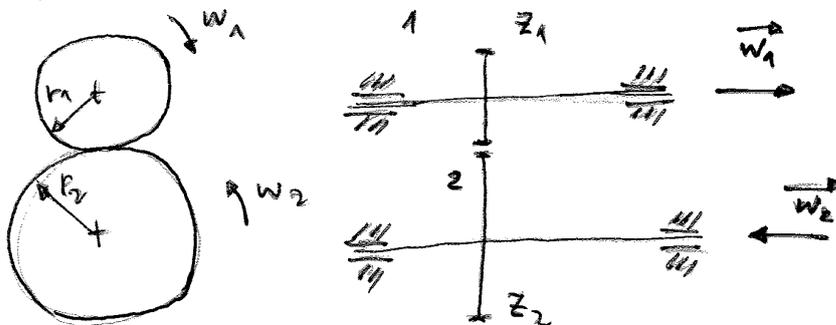
Molte volte si richiedono invece dei rapporti più elevati. Per farlo bisogna fabbricare dei rotismi. Si realizzano in serie:

- Moltiplicazioni di velocità angolari
- moltiplicazione di coppie

Sono sistemi ad un grado di libertà: definita una velocità angolare sono determinate univocamente tutte le altre.

Rotismo: meccanismo costituito da più ingranaggi

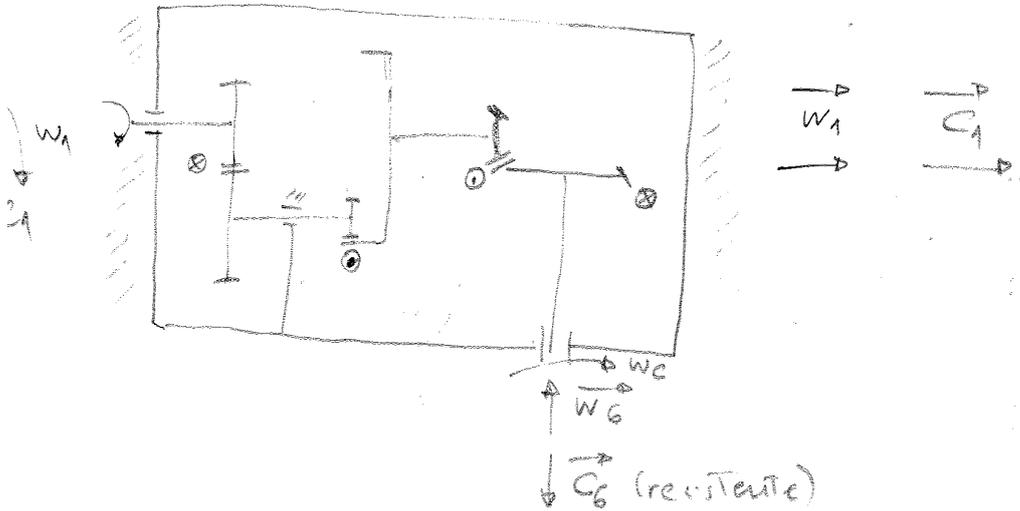
vedi ai piedi
 di pagina
 187



Nel caso di rotismi è fondamentale considerare il segno del rapporto di trasmissione

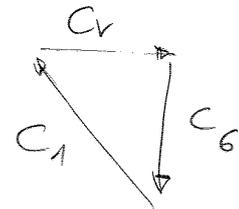
In tal caso $i < 0$

$$i = \frac{w_1}{w_2} = - \frac{z_2}{z_1}$$



La struttura di sostegno deve esercitare coppie per equilibrare

$$C_1 + C_6 + C_V = 0$$



$$|i| = \left| \frac{w_1}{w_6} \right| = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3} \cdot \frac{z_6}{z_5}$$

Ricordiamo la def. di rotismo ORDINAMO ed introduciamo quella di rotismo EPICICLOIDALE

- ORDINAMO: gli assi di rotazione di ogni ruota sono fissi
- EPICICLOIDALE: alcuni assi di rotazione possono muoversi.

Arriviamo:

$$i^* = \frac{\omega_1^*}{\omega_4^*} = - \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3} = \boxed{- \frac{z_4}{z_1} = \frac{\omega_1 - \omega_3}{\omega_4 - \omega_3}}$$

FORMULA DI WILLIS

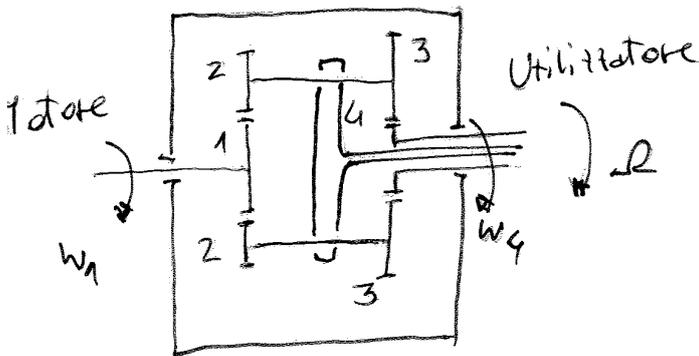
FORMULA DI WILLIS: È LA CARTA D'IDENTITÀ di un rotismo epicicloidale. Riesce a stabilire una relazione tra gli elementi mobili del sistema cioè tra le velocità angolari degli alberi rotanti collegati ai rispettivi elementi motrici ed utilizzatrici.

NOTA IMPORTANTE: il sistema è a 2 f.d.l. in quanto le velocità angolari coinvolte nella formula sono 3!

Perciò per calcolare una velocità angolare occorre fissare le altre due. Nel caso dei Holotton, invece, vi era 1 f.d.l.

($i = \frac{\omega_1}{\omega_2}$). Fissata una velocità angolare si poteva calcolare l'altra.

~~Rotismo epicicloidale esempio 2~~



Ω : velocità PORTAFRENO

$$\frac{\omega_1^*}{\omega_4^*} = \frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_4 - \Omega} = \frac{\omega_1^*}{\omega_2^*} \cdot \frac{\omega_3^*}{\omega_4^*} =$$

$$= \left(- \frac{z_2}{z_1}\right) \cdot 1 \cdot \left(- \frac{z_4}{z_3}\right) =$$

$$= \boxed{\frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3} = \frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_4 - \Omega}}$$

Come utilizzo il rotismo epicicloidale?

Può essere utilizzato come:

- RIDUTTORE (a. f.d.l.)
- DIFFERENZIALE

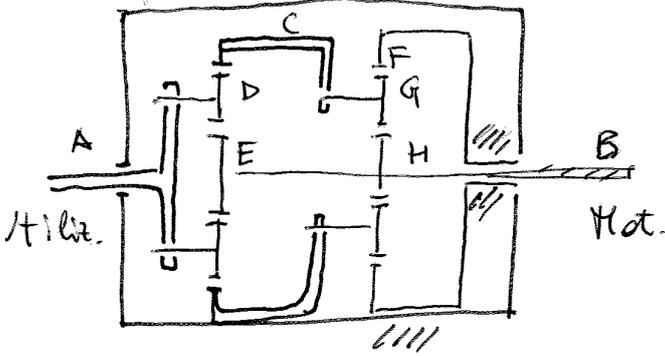
OGNI ROTISMO HA UNA FORMULA DI WILLIS

Per realizzare un RIDUTTORE EPICICLOIDALE devo diminuire 1 f.d.l. impedendo che una delle velocità angolari sia nulla. Suppongo di imporre nell'esempio 1, $\omega_4 = 0$ fissando la ruota 4 al telaio.

Attei la FORMULA DI WILLIS:

$$\frac{\omega_1}{\omega_3} = 1 + \frac{z_4}{z_1} \quad (> 1) \quad \text{Nell' Esempio 1}$$

Altre possibilità



- E, H Solidari
- D, G Planetari
- C - Corona per il 1° stadio
- Portatreno per il 2° stadio
- F Corona 2° stadio

$$w_E = w_H = w_B \quad w_F = 0 \quad (\text{ipotesi di bloccate la corona F})$$

$$i = \frac{w_B}{w_A} = ?$$

Analizziamo il 1° stadio: C/D/E

Riferiamo le velocità rispetto ad E ($w_E = w_B$)

$$\frac{w_E - w_A}{w_C - w_A} = -\frac{z_C}{z_E} = \frac{w_B - w_A}{w_C - w_A} = i_1 \quad \text{F. WILLIS 1° STADIO} \quad (1)$$

2° stadio: F/G/H

$$\frac{w_H - w_C}{w_F - w_C} = -\frac{z_F}{z_H} = \frac{w_B - w_C}{-w_C} = i_2 \quad \text{F. WILLIS 2° STADIO} \quad (2)$$

Mettendo a sistema (1) e (2)

$$i_2 = -\frac{z_F}{z_H} = -\frac{w_B}{w_C} + 1 \quad \frac{w_B}{w_C} = 1 - i_2$$

$$w_C = \frac{w_B}{1 - i_2}$$

$$i_1 = \frac{w_B - w_A}{\left(\frac{w_B}{1 - i_2} - w_A\right)}$$

$$w_B - w_A = -i_1 w_A + \frac{i_1 w_B}{1 - i_2}$$

$$w_B \left(1 - \frac{i_1}{1 - i_2}\right) = w_A (1 - i_1)$$

$$i = \frac{w_B}{w_A} = \frac{1 - i_1}{1 - \frac{i_1}{1 - i_2}}$$