



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1896A -

ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Castellana Carlo

MATERIA: Idraulica ambientale - Prof Ridolfi

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Variazione di volume (aggiungere dopo capitolo di deformazione, pag. 4)



Seppur si segue per un tempo DT un volume dV di fluido, questo non si stiracchia in tutte le direzioni.

Di quanto cambia questo volume?

Così quanto vale $\frac{1}{dV} \frac{D}{Dt}(dV)$? Così quanto cambia il volume riferito al volume iniziale?

Non è necessario usare tutti i conti!

$$\frac{1}{dV} \frac{D}{Dt}(dV) = \frac{1}{dx_1 dx_2 dx_3} \frac{D}{Dt}(dx_1 dx_2 dx_3)$$

Ricordando la proprietà delle derivate:

$$D[f(x) \cdot g(x) \cdot z(x)] = f'(x)g(x)z(x) + f(x)g'(x)z(x) + f(x)g(x)z'(x)$$

si ha:

$$\frac{1}{dx_1 dx_2 dx_3} \frac{D dx_1}{Dt} \cdot dx_2 dx_3 + \frac{1}{dx_1 dx_2 dx_3} \frac{D(dx_2)}{Dt} dx_1 dx_3 + \frac{1}{dx_1 dx_2 dx_3} \frac{D(dx_3)}{Dt} dx_1 dx_2$$

$$= \frac{1}{dx_1} \frac{D}{Dt}(dx_1) + \frac{1}{dx_2} \frac{D}{Dt}(dx_2) + \frac{1}{dx_3} \frac{D}{Dt}(dx_3) =$$

$$= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad \text{divergenza}$$

Quindi la divergenza espone la variazione di volume e caso del campo in cui è immerso.

Se la divergenza è nulla, il fluido è incompressibile: cioè il volume considerato di fluido può cambiare di forma, ma non di volume.

Senza si è analizzato il cambiamento di volume e di superficie. Concludiamo ora la forma. La forma è legata agli agenti.

Esempio agli sforzi in meccanica dei fluidi:

Superficie con moto piano in direzione x_1 con un certo gradiente di velocità fra il profilo di velocità e l'asse x_2 (perpend.).

Quindi il campo di moto è dato da una u_1 che è funzione solo di x_2 :

$$u_1 = u_1(x_2), \quad u_2 = 0$$

La densità di deformazione:

$$E_{11} = E_{22} = 0$$

$$E_{12} = E_{21} = \frac{1}{2} \frac{du_1}{dx_2} = \Gamma \text{ (shear)}$$

La matrice di densità di deformazione è:

$$\begin{pmatrix} 0 & \Gamma \\ \Gamma & 0 \end{pmatrix}$$

Osservando la matrice si nota che sulla diagonale principale ci sono degli 0

significa che il sistema di riferimento scelto (x_1, x_2) è il più laborioso che posso immaginare da quello delle direzioni principali.

Ricorrendo agli autovalori si ottiene $\lambda^{(1)} = \Gamma$

$$\lambda^{(2)} = -\Gamma$$

Si usano i componenti ortocellari $b^{(1)}$ e $b^{(2)}$

Nel sistema di riferimento principale (b_1, b_2) si ha che la matrice si può scrivere in maniera canonica con gli autovalori sulla diagonale:

$$\begin{pmatrix} \Gamma & 0 \\ 0 & -\Gamma \end{pmatrix}$$

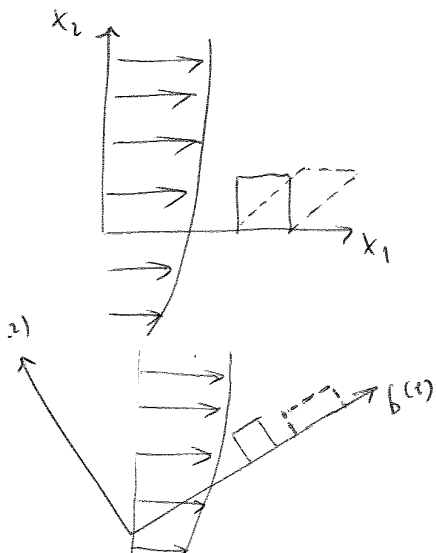
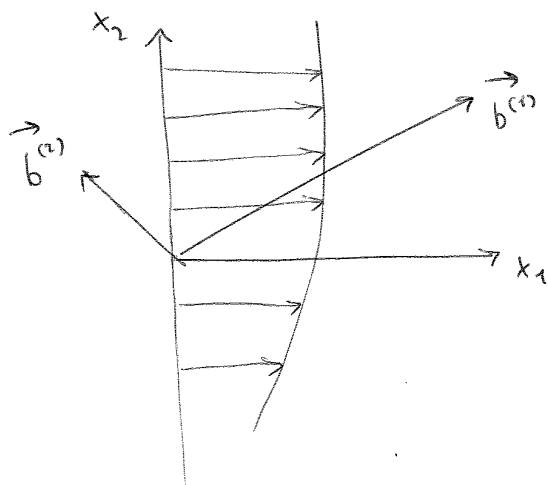
Il significato fisico è che il sistema di riferimento intelligente alle deformazioni è quello (b_1, b_2) .

Nel sistema di riferimento (x_1, x_2) se seguiamo e descriviamo questo si deforma, non si dilata. Si deforma cioè la parte superiore è più veloce dell'inferiore (si veda profilo), non si ha dilatazione (che tutti i punti su un piano // x_1 hanno stessa velocità).

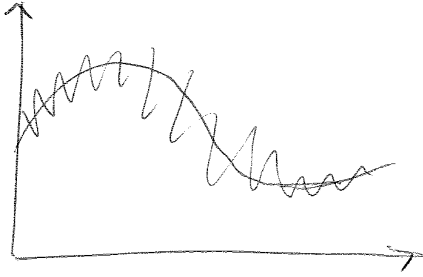
Questo è lo stesso la matrice di densità di deformazione che è $\begin{pmatrix} 0 & \Gamma \\ \Gamma & 0 \end{pmatrix}$ cioè densità di dilatazione nulla.

Se si segue un quadratino nelle direzioni principali, si vede che questo si sarebbe dilatato nella direzione $b^{(1)}$ e compresso nella direzione $b^{(2)}$, ma non si sarebbe deformato. Questo è visibile dalla matrice: $\begin{pmatrix} \Gamma & 0 \\ 0 & -\Gamma \end{pmatrix}$

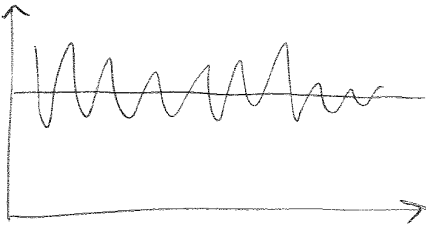
Gli autovalori e gli ortocellari guidano nel vedere in maniera giusta il problema (cioè in maniera più semplice).



È la variabile casuale che genera questo tipo di informazione allargando T .
 Il primo problema è che fatto questo vale se il processo è stocastico, cioè che fatto oscilla intorno allo stesso valore medio. Si safferrebbe che nel tempo però sempre lo stesso perché, è uguale nel tempo ha sempre la stessa velocità. Il problema è che il motore è variabile. Quindi considero un T grande almeno la variabile di base del motore. Di conseguenza il concetto di medio temperate è sbagliato, vuole ed essere.



Il vero segnale da studiare è quello in alto, non quello in basso.



Quindi l'ambiguità è ripulita da moti vari e di conseguenza il concetto di medio temperate da due grandi limiti.

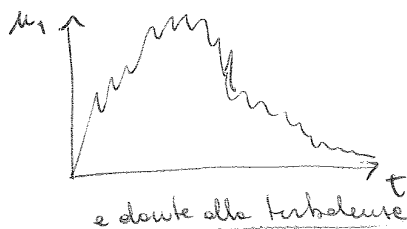
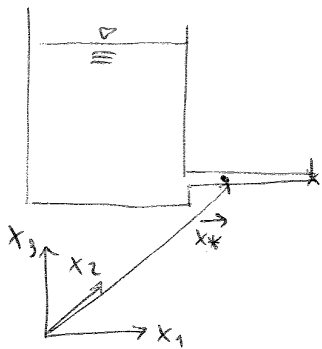
Kolmogoroff (matematico) cambia il modo di pensare.

Facciamo l'esempio del problema dello svuotamento di un serbatoio (moto vari).

Risumiamo il serbatoio. Apriamo il rubinetto e il serbatoio si svuota facendo uscire turbolente.

Se in un generico punto rispetto la velocità u_1, u_2 etc nel tempo l'andamento di fatto u_1 parte da $t=0$ così quasi la velocità viene aperta.

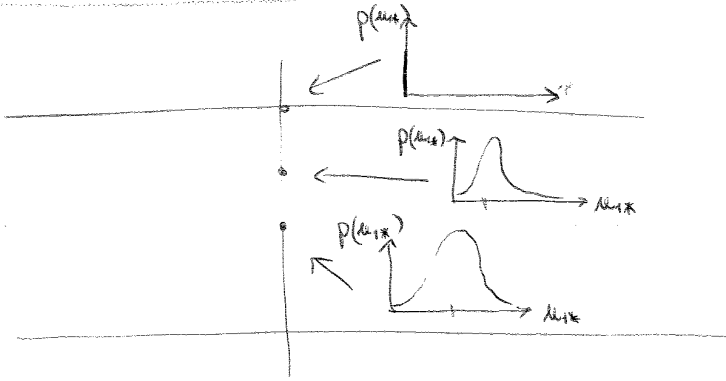
Rifacendo l'esperimento n volte con le stesse condizioni al contorno (stesso livello del serbatoio, stesso punto di misura ecc.), si era che in media l'andamento sarà sempre lo stesso, ma le oscillazioni attorno



e dovute alla turbolenza

alla partenza, saranno diverse. Si pensano fare infinite realizzazioni di uno stesso processo. È lo stesso che fare un dado. Ci sono degli aspetti al contorno con fini elastici (casuale). Quindi ripetendo il processo di svuotamento infinite volte ho tutte le possibili manifestazioni del fenomeno svuotamento serbatoio e riportarle in un al punto considerato. Così il fenomeno turbolento è la realizzazione di un senso casuale. È esattamente come il tiro di un dado concettualmente, seppur regolato da un processo alquanto più complicato.

Considerando un punto equidistante dalle pareti ci sono una distribuzione di probabilità con una media più alta di un punto non equidistante il quale presenta una media più bassa.



In ogni punto è come se esistesse il valore di u da queste distribuzioni di probabilità.

Lo spazio diventa un campo stocastico

L'idea generale è quella di vedere la turbolenza in questo modo: come se in ogni punto si avessero di volta in volta ed esistesse un valore di velocità dalla corrispondente distribuzione.

Se il moto è variabile queste distribuzioni variano nel tempo.

All'istante $t=0$ le distribuzioni sono tutte aderenti a zero (è tutto fermo), col passare del tempo le medie si spostano. Le distribuzioni cambiano nello spazio e nel tempo (campo stocastico spazio-temporale).

Si concludono la media d'insieme e il concetto di media pertiene la turbolenza: la media di una grandezza ad un preciso tempo d'osservazione nel punto di interesse è la media sulla distribuzione di probabilità di quella grandezza, in quel punto, in quell'istante.

problemi della media temporale scariscono: non c'è più il problema riguardo T e Δ usato vari.

come si fa però a calcolare la media d'insieme?

ci sono due strade: o si fanno molte sperimentazioni (si ottiene un campione, con una popolazione, ma in base lo stesso) oppure attraverso l'ergodicità (lo vediamo in seguito).

risultato della media d'insieme fondamentale è la lineareità cioè:

$$\left\langle \frac{du}{dt} \right\rangle = \frac{d\langle u \rangle}{dt}$$

$$\left\langle \int u dx \right\rangle = \int \langle u \rangle dx$$

La correlazione.

Ad essere precisi (r_{xy}) lo chiamiamo CROSS-COVARIANZA (fra due variabili x e y), mentre (r_{xy}) CROSS-CORRELATION (vale fra due variabili).

Attenzione alla differenza fra legge e correlazione. In matematica quando si dice che due grandezze sono fra loro correlate significa che esiste un'equazione lineare fra le due grandezze, cioè:

$$y(t_2) = a \cdot x(t_1) + b$$

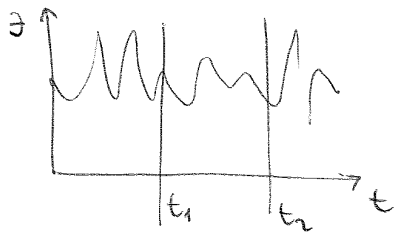
↳ valore

Esprime una retta non passante per l'origine.

Quando cioè non accade che due grandezze si dicono correlate, ma ciò non vuol dire che non vi sia legge perché potrebbe esserci un'equazione non lineare però si fa riferimento all'AUTO-COVARIANZA e AUTO-CORRELATION quando si guardano la stessa variabile a tempi diversi.

$$p_{xx}(t_1, t_2) = \frac{\langle x(t_1) \cdot x(t_2) \rangle}{\langle x^2 \rangle}$$

Ad esempio se ci riferiamo alla temperatura θ a tempi diversi, si può trovare la autocorrelazione tra $\theta(t_1)$ e $\theta(t_2)$:



Quando i segnali sono detti STATIONARI, quello che importa è la differenza o t_1 e t_2 . Cioè l'autocorrelazione di quel segnale dipende dalla distanza temporale tra t_1 e t_2 (cioè l'autocorrelazione fra $\theta(10 \text{ sec})$ e $\theta(15 \text{ sec})$ è uguale a quella fra $\theta(100 \text{ sec})$ e $\theta(105 \text{ sec})$). Si può scrivere:

$$p_{xx}(\tau) = \frac{\langle x(0) \cdot x(\tau) \rangle}{\langle x^2 \rangle} \quad \text{con } \tau = t_2 - t_1$$

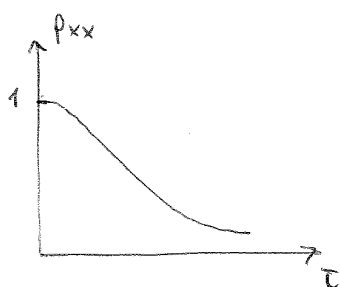
Come cambia la correlazione al variare di τ ?

Se $\tau = 0$ si ha che $p_{xx}(\tau) = \frac{\langle x^2 \rangle}{\langle x^2 \rangle} = 1$, quindi si parte da 1.

A mano a mano che τ aumenta la variabile tende a scordarsi, perde di memoria perché c'è un qualcosa che ha inglobato tutta l'informazione

(è tipico dei sistemi dinamici). La curva prende il nome di autocorrelogramma.

Tanto più la curva scende lentamente, tanto più il sistema mantiene una memoria lineare (il che implica alta prevedibilità).



spettro e trasformata di Fourier (pag. 11)

lo spettro è lo studio di un segnale vari nel dominio del tempo, ma nel dominio delle frequenze. Il passaggio è dal segnale e dare il contenuto in frequenza del segnale stesso.



uno spettro $S(\omega)$ funzione della frequenza angolare ω .

Fourier dimostra che una funzione che varia nel tempo si può scrivere (in un certo intervallo) si può scrivere come somma di funzioni ortogonali (seno e coseno)

$$f(t) = a + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin(\omega_i t) + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \cos(\omega_i t)$$

dove a è il valore medio.

Il periodo del seno e del coseno ($\omega_i t$) è pari all'intervallo della funzione.

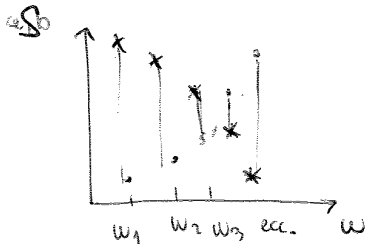
Lo stesso caso della scomposizione di un vettore secondo due basi ortogonali, ciò che nel campo delle funzioni dove seno e cos seno le funzioni ortogonali e conseguente sono i coefficienti a_i e b_i esattamente come le componenti del vettore.

coefficienti seno le componenti delle varie armoniche.

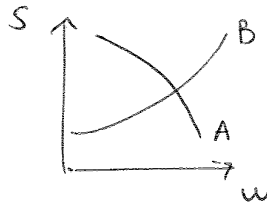
Il posto di dare la funzione, si possono dare solo i coefficienti a_i e b_i

si può fare un diagramma di coeff. in corrispondenza di ogni armonica

centro distribuito da ω_1, ω_2 ecc.). Insieme di coefficienti due casi (funzioni)

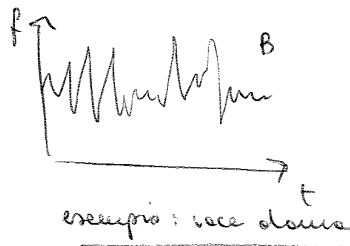
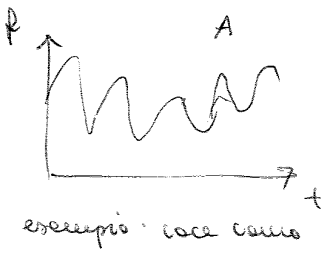


Si parla di spettro quando si vuol dire in considerazioni tutte le possibili frequenze. Per spetti sono



delle curve e la decomposizione armonica è fatta da integrali, non più da somme.

nel caso A (funzione) le armoniche bene cambia tempo, viceversa nel caso B (funzione). Per bene il fatto che la variabile sia maggiore o minore nelle alte o basse frequenze



lo spettro è dato da:

$$S(\omega) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} p(t) dt \quad \text{trasformata di Fourier}$$

è l'armonica nel campo della serie di Fourier.

è importante al punto dice che l'informazione nel dominio delle frequenze di un segnale altro non è che l'autocorrelogramma

78/64 Do 44:30 o 1:02:00 ?

Esponiamo ancora la scrittura:

$$\rho \left(-g \delta_{i3} - \frac{Dm_i}{Dt} \right) = \frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial m_i}{\partial x_j} \quad (2)$$

il delta di Kronecker fa sì che il termine \vec{R} si accende solo quando considero la direzione x_3 . Il laplaciano è scritto come la sommatoria delle derivate seconde con la convenzione di Einstein

Questa equazione è l'equazione scalare complessiva/complessivo $i=1,2,3$ (tre eq. scalari) e per $j=1,2,3$.

la scrittura tradizionale è: (dividendo per ρ)

$$\frac{Dm_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial m_i}{\partial x_j} - g \delta_{i3} \quad (3)$$

dove $\nu = \mu/\rho$ è la viscosità cinematica.

Questa è l'equazione che accoppiata con quella di continuità dice due fatti: fluidi newtoniani soddisfanno queste due equazioni.

Quest'ultima equazione descrive come cambia la velocità della particella che si sta seguendo.

Il termine $-g \delta_{i3}$ dice che la velocità cambia + che si è in un campo gravitazionale. Il simbolo meno è giustificabile da un p.to di vista energetico in quanto $-g \delta_{i3}$ espone l'energia potenziale, mentre Dm_i/Dt espone l'energia cinetica e se cresce l'una, diminuisce l'altra.

Il termine $1/\rho \partial p/\partial x_i$ indica che la velocità cambia a causa di gradienti di pressione (il cambiamento di velocità è contrario non della pressione, ma della variazione di questa, altrimenti la particella si muoverebbe sempre alla stessa velocità perché la pressione che agisce è costante).

Il termine $\nu \partial^2 m_i/\partial x_j^2$ è spontaneamente unificatorio nel senso che fa riferimento a pressioni tangenziali legate al termine viscoso e sono legate al gradiente del gradiente malgrado si esprime come la viscosità che conta è quella cinematica, non quella dinamica.

L'equazione di Navier-Stokes è complessa + che al primo termine ci sono termini non lineari (con termini che dipendono da un coeff. che dipende dal termine stesso):

$$\frac{Dm_i}{Dt} = \frac{\partial m_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial m_i}{\partial x_j}$$

Se non in definitiva si hanno queste due equazioni.

Il primo approccio che viene in mente è quello di risolvere, cioè di conoscere la velocità, la pressione, istante per istante in ogni punto del fluido. Il problema è che queste equazioni non si riescono a risolvere.

Allora l'approccio ingegneristico è quello di inferire alle medie anziché di derivare il moto medio. Si cerca di capire qualcosa che fatto non si può capire.

In questo rigenerato l'equazione della quantità di moto si può scrivere:

$$\frac{D(U_i + u_i)}{Dt} + (U_j + u_j) \frac{\partial (U_i + u_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (P+p)}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} (U_i + u_i) - g \delta_{i3}$$

non si scompone la derivata (P) perché per noi il fluido è incompressibile, anche ν è costante

bisogna applicare l'operatore medio d'insieme. Poiché la media è lineare la media della somma è la somma delle medie. Quindi:

$$\frac{\partial \langle (U_i + u_i) \rangle}{\partial t} + \langle (U_j + u_j) \frac{\partial (U_i + u_i)}{\partial x_j} \rangle = -\frac{1}{\rho} \langle \frac{\partial (P+p)}{\partial x_i} \rangle + \nu \langle \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} (U_i + u_i) \rangle - g \delta_{i3}$$

Le medie delle costanti non si fa (ρ, ν, g).

discutiamo l'eq. pezzo per pezzo.

① $\langle \frac{\partial (U_i + u_i)}{\partial t} \rangle$ è la media d'insieme della derivata nel tempo di $U_i + u_i$.

si eseguono gli stessi passaggi usati per l'equazione di continuità. Quindi:

$$\langle \frac{\partial U_i}{\partial t} \rangle + \langle \frac{\partial u_i}{\partial t} \rangle = \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} = \frac{\partial U_i}{\partial t}$$

Il primo termine non ci dà problemi: di turbolenza non c'è più traccia.

② $-\frac{1}{\rho} \langle \frac{\partial (P+p)}{\partial x_i} \rangle$ si può trattare come il termine ①.

$$-\frac{1}{\rho} \langle \frac{\partial P}{\partial x_i} \rangle - \frac{1}{\rho} \langle \frac{\partial p}{\partial x_i} \rangle = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i}$$

Anche per questo termine di turbolenza non c'è più traccia.

$$\text{③ } \nu \langle \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} (U_i + u_i) \rangle$$

la media d'insieme della derivata seconda è la derivata seconda della media d'insieme.

Quindi $\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} U_i$. Anche questo termine non dà problemi.

④ I problemi sono dati dai termini non lineari come il secondo termine.

Questo si può scrivere come:

$$\langle (U_j + u_j) \frac{\partial (U_i + u_i)}{\partial x_j} \rangle = U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + U_j \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \langle u_j \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \langle u_j \rangle \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

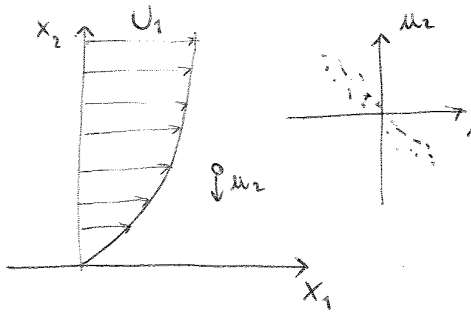
Quest'ultimo termine ci dà fastidio perché seppur la media d'insieme di u_j è zero e la media d'insieme di u_i è zero non è detto che il prodotto sia nullo.

cosiddette Tensioni di Reynolds. Queste sono molto importanti e non si possono sottovalutare o non considerare, anzi le tensioni viscose sono da considerarsi (cioè diventano prevalenti e importanti) solo quando le tensioni di Reynolds dovute alle turbolenze sono trascurabili. Le tensioni che entrano, quindi, sono quelle di Reynolds. Come in casi dove si possono trascurare (ad esempio vicino alla parete) dove si considerano le tensioni viscose.

Le tensioni di Reynolds esistono perché vi è una correlazione tra le componenti di equazioni turbolente, e il fatto che ci sia correlazione, implica che queste non sono puro caso altrimenti si avrebbe $\langle u_i u_j \rangle = 0$ cioè le particelle si agiterebbero, senza però essere correlate fra loro. La turbolenza invece è puro caso, ma è deterministica, ci sono delle equazioni sotto che impingono dei vincoli e fanno sì che le due variabili (u_i e u_j) sono correlate fra loro. La correlazione comporta il fatto che non vengono fuori distribuzioni di probabilità gaussiane, perché le distribuzioni gaussiane rappresentano fenomeni che dipendono da tanti fattori, ma tutti indipendenti fra loro. Se ci sono correlazioni vengono fuori distribuzioni con code estese (sono più probabili gli eventi estremi). Le tensioni di Reynolds sono:

$$- \rho \begin{pmatrix} \langle u_1^2 \rangle & \langle u_1 u_2 \rangle & \langle u_1 u_3 \rangle \\ \langle u_2 u_1 \rangle & \langle u_2^2 \rangle & \langle u_2 u_3 \rangle \\ \langle u_3 u_1 \rangle & \langle u_3 u_2 \rangle & \langle u_3^2 \rangle \end{pmatrix} \quad \text{tensore simmetrico}$$

Esistono perché in un fluido esiste la correlazione tra u_1 e u_2 supponiamo che ci sia una parete e un campo di moto medio (il più semplice che mi posso immaginare). La presenza della parete impone che ci sia un profilo di velocità perché alla parete la velocità deve andare a zero. Quindi una parete automaticamente porta ad un gradiente di velocità. Si crea un cosiddetto Shear Flow (flusso a contatto con la parete).



Una qualsiasi di considerare una particella che ad un dato istante si trova dove disegnata, la seguiamo per un breve tempo e si viene a conoscenza della turbolenza. Supponiamo che in quell'istante c'è una u_2 negativa che la fa debolmente scendere. La densità

che ci pensiamo è se la u_1 può essere qualsiasi (a volte negativa a volte positiva) e se c'è una certa velocità. Se la particella si sposta verso il basso se in una zona di moto medio un pochino più lento. Le particelle che si muovono più in basso vedono una particella intorno che va più veloce rispetto a loro, quindi per fare spazio tendono ad accelerare. Quindi localmente nasce una $u_1 > 0$. E contrario avviene se u_2 è verso l'alto (cioè c'è una u_2 positiva).

Quindi ci si aspetta che se $u_2 > 0 \rightarrow u_1 < 0$ e che $u_2 < 0 \rightarrow u_1 > 0$. Questo spiega intuitivamente la correlazione.

unque $\langle u_1 \rangle = \langle u_2 \rangle = 0$ e $\langle u_1 u_2 \rangle \neq 0$ anzi $\langle u_1 u_2 \rangle < 0$ perché tende a bilanciare il peso - delle tensioni di Reynolds ($-\rho \langle u_1 u_2 \rangle$) e le tensioni viscosità quando si è

è un termine che (sparto energia) da un punto all'altro, ma non produce e dissipa energia. lo spartamento come si viene avviene in maniera complicata.

Quindi è inutile ragionare su questo termine.

- Il termine $-2\overline{v_i v_j} E_j$ è un prodotto di quantità positive (v positivo, $E_j E_j$ è un quadrato quindi positivo). Quindi è un termine che dissipa energia (presente del meno). È una temperatura uscosa che porta via energia e l'energia cinetica diminuisce (dissipazione in calore).
- Il termine $\langle u_i u_j \rangle \partial u_j / \partial x_i$ è legato alle funzioni di Reynolds cioè alle correlazioni dei termini turbolenti ed ai gradienti di velocità media. Quindi è un termine che esiste soltanto se la velocità media ha dei gradienti. Dato che $\langle u_i u_j \rangle < 0$ è un termine che espone l'energia che sta rubando la turbolenza.

In sostanza il campo di energia potenziale fornisce energia al moto medio il moto medio ha due perdite: una piccola perdita che è quella uscosa una perdita più grande che va ad alimentare la turbolenza.

La turbolenza è un parassita che ruba energia al moto medio.

Un modo per abbassare la turbolenza è quello di agire sui gradienti di velocità media (per eliminare la turbolenza è necessario far viaggiare fluido con un profilo passabile praticamente piatto). vedi pag. 20

modo di procedere alla turbolenza di parete (lezione 30/4) inserisci da dispende.

- Teorema II
- espansione di contorno del moto prossimo turbolento
- espansione dell'energia cinetica del moto prossimo turbolento
- Turbolenza come creato di vortici
- Scale massime, intermedie e minime
- Turbolenza libera

Il teorema π

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{matrix} \begin{matrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{matrix} = 0$$

in contraddizione con la condizione di indipendenza dimensionale di Q_1, Q_2, Q_3 , poiché è:
 Così, ad esempio, se fisso la mia attenzione su massa specifica ρ , lunghezza l e velocità l , poiché è:

$$\begin{matrix} [\rho] = kg \cdot m^{-3} \cdot s^0 \\ [l] = kg^0 \cdot m^1 \cdot s^0 \\ [l] = kg^0 \cdot m^1 \cdot s^{-1} \end{matrix}$$

si ha:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Ne segue che posso effettivamente assumere le tre precedenti grandezze come nuova tria di grandezze fondamentali.

Naturalmente una grandezza fisica, ad esempio la viscosità μ che ha dimensioni $L^{-1} \cdot T^{-1}$ rispetto a kg, m, s

$$[\mu] = kg^{-1} \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$$

avrà rispetto alle unità di misura ρ, l, t , ed l ,

$$[\mu] = [\rho]^{-1} \cdot [l]^{-1} \cdot [l] \quad (1)$$

Il teorema π

$$\log[M] = \begin{matrix} \log[Q_1] & \beta_1 & \gamma_1 \\ \log[Q_2] & \beta_2 & \gamma_2 \\ \log[Q_3] & \beta_3 & \gamma_3 \end{matrix} \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{matrix}$$

Se ciò accade, si potrà esprimere $M, L, e T$ in funzione di $Q_1, Q_2, e Q_3$.

Le tre grandezze veragono dette dimensionalmente indipendenti. Ciò significa che tramite esse non è possibile costruire un numero puro.

$$[Q_1]^r \cdot [Q_2]^s \cdot [Q_3]^t \neq \text{numero puro semplice}$$

a meno che non sia $p = q = r = 0$.

Ciò è dimostrabile per assurdo, infatti se

$$[Q_1]^r \cdot [Q_2]^s \cdot [Q_3]^t = (M)^p \cdot (L)^q \cdot (T)^r = (M)^p \cdot (L)^q \cdot (T)^r = (M)^p \cdot (L)^q \cdot (T)^r$$

fosse un numero puro, vorrebbe dire che

$$\begin{matrix} \alpha_1 p + \alpha_2 q + \alpha_3 r = 0 \\ \beta_1 p + \beta_2 q + \beta_3 r = 0 \\ \gamma_1 p + \gamma_2 q + \gamma_3 r = 0 \end{matrix}$$

ma questo sistema ha soluzione non banale solo se

Il teorema π

ESEMPIO

Sia $F = \varphi(\rho, l, D, \mu)$ una forza misurata in Newton (N).
 Scegliamo ρ, l, D come grandezze indipendenti. Sono effettivamente indipendenti perché con esse non è possibile scrivere un numero puro.
 Scriviamo

$$\frac{F}{\rho^{\alpha_1} \cdot l^{\beta_1} \cdot D^{\gamma_1}} = \varphi\left(\frac{\mu}{\rho^{\alpha_1} \cdot l^{\beta_1} \cdot D^{\gamma_1}}\right)$$

Calcoliamo α, β, γ e $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ in modo che

$$\frac{F}{\rho^{\alpha_1} \cdot l^{\beta_1} \cdot D^{\gamma_1}} = \frac{\mu}{\rho^{\alpha_1} \cdot l^{\beta_1} \cdot D^{\gamma_1}}$$

siano due numeri puri.

Dato che:

$$[F] = \text{kg}^1 \cdot \text{m}^1 \cdot \text{s}^{-2}$$

$$[\rho] = \text{kg}^3 \cdot \text{m}^{-3}$$

$$[l] = \text{m}^1 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$[D] = \text{m}$$

$$[\mu] = \text{kg}^1 \cdot \text{m}^1 \cdot \text{s}^{-1} \quad \left(\tau = \mu \frac{dl}{dy} \right)$$

possiamo scrivere:

$$1) \text{kg}^1 \cdot \text{m}^1 \cdot \text{s}^{-2} = \text{kg}^{\alpha_1} \cdot \text{m}^{\beta_1} \cdot \text{m}^{\gamma_1} \cdot \text{s}^{-\beta_1} \cdot \text{m}^{\gamma_1}$$

Il teorema π

$$N_p = \varphi(N_1, N_2, \dots)$$

Siamo partiti considerando un fenomeno in cui intervergono 6 grandezze: ne abbiamo scelte 3 come dimensionalmente indipendenti e abbiamo ottenuto una relazione tra numeri puri.
 Il ragionamento fatto nelle 6 grandezze con la scelta di 3 grandezze come dimensionalmente indipendenti si poteva ottenere in generale partendo da "n" grandezze e considerando le "m" grandezze indipendenti ($m=2$ nei problemi di cinematica, $m=3$ nei problemi di dinamica). In questo caso si ottiene una relazione tra "n-m" numeri puri.

Si può allora enunciare il teorema π :

SE IN UN FENOMENO FISICO INTERVENGONO "n" GRANDEZZE E "m" È IL NUMERO DELLE GRANDEZZE FONDAMENTALI, IL LEGAME TRA LE "n" GRANDEZZE È RICONDUCCIBILE AD UN LEGAME TRA "n-m" NUMERI PURI.

Unalbero di parete (pag. 26)

Caratterico di un'ipotesi alla decisa: qual è il profilo di velocità di un fluido in presenza di una parete?

La risposta per cui esiste un profilo di velocità è perché un fluido si muove ed essendo viscoso, alla parete la velocità è nulla, allora o la velocità è ovunque zero, ma il fluido non si muoverebbe oppure nasce un profilo di velocità. Si intuisce che più ci si allontana dalla parete, più aumenta la velocità. La parete rappresenta il vincolo deterministico in questo qui la velocità non può essere che nulla (non c'è nulla di stocastico qui non ci sono oscillazioni turbolente quindi la parete va a vincolare il corpo stocastico). A mano a mano che ci si allontana dalla parete si entra in un vincolo determinato dal caso. Alla parete si ha $u=0$.

Si ripropone di escludere gli strumenti concettuali per escludere questo miscuglio tra problema stocastico e problema deterministico. Questi strumenti non li conosciamo e ci esorcizziamo con quello che c'è.

Quindi intuiamo che ci sarà un profilo di velocità, e vogliamo conoscere l'andamento della velocità media al variare di y .

$$U = U(y)$$

Con i vari problemi legati al profilo di velocità, se conosco il profilo, facendo l'integrale ottengo la portata.

Avere l'informazione sul profilo è difficile perché il dato medio è influenzato dai termini turbolenti (u, u'), quindi abbiamo un dato che è difficile separare i due vincoli (medio e turbolento). Dovremmo conoscere bene il vincolo turbolento per poter rispondere computazionalmente al nostro problema, questo è impossibile quindi pensiamo anzitutto a ricavare il profilo e intuire come viene.

Approssimiamo il problema con il ragionamento di Millikan (che usa il teorema II).

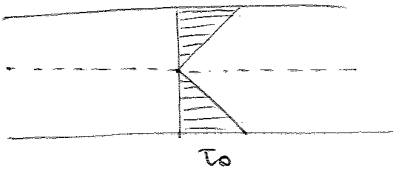
Millikan cerca di semplificare il problema suddividendo il fluido in strati in diverse fasce. Quindi Millikan va a guardare certe fasce di fluido piuttosto che altre. Millikan si concentra nella fascia vicino alla parete (strato chiamato inner layer). Va a concentrarsi su questo strato perché fa punto ragionamento: il campo di moto nella fascia di fluido a contatto con la parete dipende dalla posizione distante dalla parete (y), dipende dalla densità del fluido in oggetto (ρ), dalla viscosità (ν). La dipendenza dalla viscosità: alla parete la velocità è nulla perché il fluido alla parete ha la stessa velocità della parete quindi il fluido è viscoso, che se il fluido fosse perfetto non ci sarebbero termini tangenziali e il fluido avrebbe velocità diversa da quella della parete. A mano a mano che ci si allontana dalla parete la dipendenza da ν diminuisce (diventa meno importante). Millikan non sa bene pensare questo vincolo inferiore chiamato inner layer (strato viscoso o strato di parete): non quanto sia spesso, malgrado il campo di moto dipenda anche dal "motore" che fa muovere il fluido: ci sarà un gradiente di pressione, ci sarà un carico maggiore a sinistra rispetto a quello che c'è a destra.

Il fenomeno è così e una seconda ipotesi in primo ordine, però ho capito che il profilo di velocità ha scale tipiche più evidenti.

Il secondo pensa che lo Millekare può di uscire fuori dallo stato di periferia (inner layer) e quello di fare un'analisi più approfondita di questo stato.

Individua nel suo ragionamento un sottostato viscoso addossato alla parete e contenuto nell'inner layer. Si è con vicino alla parete che praticamente la turbolenza non c'è più, e un mondo dominato dalla viscosità. La turbolenza non c'è più perché questo significa esplosione, ma la parete impone $U=0$ anche se ha che la turbolenza verticale è nulla perché si ha la parete e se si segue questo, si spengono anche le altre componenti turbolente. Si ha dunque un mondo determinato dalla viscosità scaturito dal vincolo deterministico rappresentato dalla parete.

In questo stato causano le tensioni tangenziali (date dalla legge di Newton).



Perché invece nel sottostato viscoso, siamo con vicino alla parete che non si susseguono delle variazioni delle tensioni tangenziali (in quanto continuo pochissimo). Il gradiente delle τ lo usò sulla scala che è rappresentata dal diametro del tubo, ora siamo in uno stato con profilo che non ci

si carica del gradiente delle tensioni.

$$\tau_0 = \mu \frac{dU}{dy}$$

Integrando l'eq. differenziale rispetto la U si ha:

$$U = \frac{\tau_0}{\mu} y + \text{cost}$$

Per $y=0$ si ha $U=0$ quindi la $\text{cost} = 0$.

Quindi si viene che vicino alla parete il profilo di velocità varia linearmente. Dividendo per μ^* si ottiene:

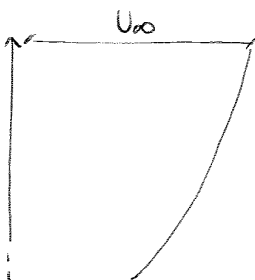
$$\frac{U}{\mu^*} = \frac{\tau_0}{\mu} \frac{y}{\mu^*} = \frac{\tau_0}{\rho \nu} \frac{y}{\mu^*} = \frac{\mu^*}{\nu} \frac{y}{\mu^*} = \frac{\mu^* y}{\nu}$$

Abbiamo capito come è fatta la f nel sottostato viscoso (una retta pensata in l'origine):

$$\frac{U}{\mu^*} = y^+$$

invece ora ad analizzare l'outer layer o stato esterno.

Millekare definisce nello stato esterno la velocità come $U_{\infty} - U$ (perché era trovato a che fare con con tubi o canali limitati da due pareti).



Questa quantità $U_{\infty} - U$ è funzione sempre di y^+ del μ^* e della scala globale del fluido δ (non più della viscosità).

$$U_{\infty} - U = F(y^+, \mu^*, \delta)$$

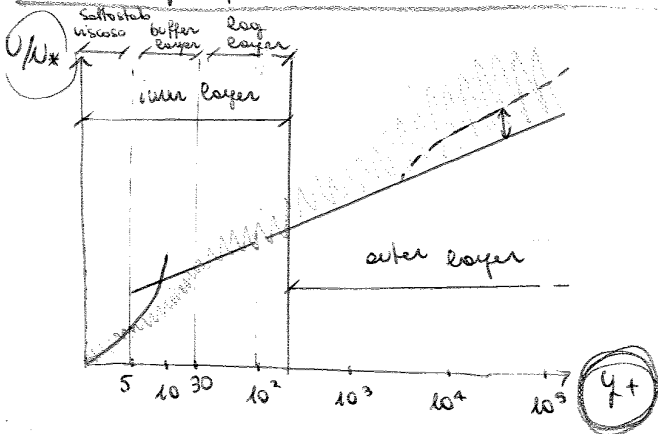
Approssimando il fenomeno τ :

$$\frac{U_{\infty} - U}{\mu^*} = F\left(\frac{y^+}{\delta}\right)$$

$$\frac{U_{\infty} - U}{\mu^*} = F(\xi) \quad \text{dove } \xi = \frac{y^+}{\delta}$$

Attraverso gli esperimenti in diverse sezioni e crosstake si è visto $A \approx 5.0$, $B \approx -1.0$ e la tassa di overlap esiste.

Tutto il profilo di velocità viene sottobato in un diagramma:



La legge viscoso in scala logaritmica la curva oscillante rappresenta l'evento dei dati sperimentali.

La curva (parabola) rappresenta bene i dati sperimentali nel sottobato viscoso cioè fino ad $y+ = 5$.

Questa curva è la legge lineare del tratto viscoso.

La tassa tra $y+ = 5$ e $y+ = 30$ è detta

buffer layer ed i dati sperimentali non sono rappresentati né dalla curva della legge lineare, né dalla retta che rappresenta la legge logaritmica.

Da $30 < y+ < 100$ i dati sperimentali sono bene rappresentati dalla legge logaritmica.

Nel caso dell'outer layer i punti non stanno bene sulla logaritmica perché i punti sperimentali si allargano come fasce all'aumentare di $y+$ perché il campo di moto risente delle condizioni sperimentali (tubo rettangolare, circolare, se si è a contatto con scala, aria ecc) ed contano, inoltre la linea di questi punti si allontana un po' dalla legge logaritmica (tutt'oggi) e la differenza prende il nome di funzione di scia (wake function).

Per molti problemi ingegneristici nell'outer layer si considera la legge logaritmica e si calcola l'errore della funzione di scia.

Considerazioni:

• Il buffer layer è una zona prossima alla parete e molto sottile in cui si forma la turbolenza perché il termine di dissipazione delle energie alla turbolenza è $\langle u_i u_j \rangle \partial u_i / \partial x_j$ e per formare vicinanza di un gradiente di velocità e tanto più il gradiente è forte tanto più la turbolenza si instaura.

Il gradiente di velocità si instaura nei pressi della parete e la velocità deve andare a zero (questa zona, il buffer layer, è la cella della turbolenza). Da questo strato poi la turbolenza si diffonde nel fluido.

Questo è visibile dai profili di velocità in modo laminare e in modo turbolento: i profili laminari sono spiccati, quelli turbolenti sono piatti perché la turbolenza meschia, omogeneizza e il gradiente di velocità è visibile proprio vicino alla parete, cioè nel buffer layer la velocità decresce istantaneamente. Ovviamente la differenza ha i due usi si effettua e punta di punta.

Diffusione molecolare (17)

Notiziamo la diffusione molecolare in quanto è un processo semplice da cui stessa può essere adoperata ed altri processi che riguardano i fluidi. La diffusione molecolare è un processo chimico.

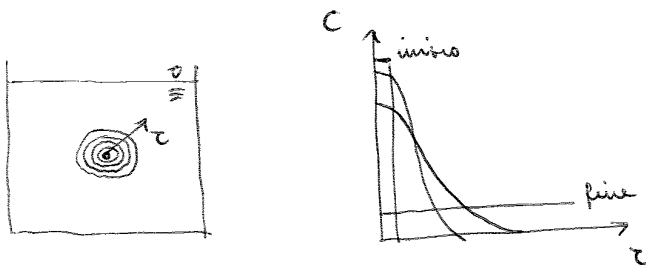
Generalmente la diffusione molecolare non perché è relativamente importante nella pratica, ma perché è una sorta di pendenza e cui ricordiamo altri fenomeni come la diffusione turbolenta, la dispersione in shear e processo di sedimentazione/galleggiamento.

La diffusione molecolare si basa sulla legge di Fick.

Consideriamo un fluido (acqua) in un contenitore fermo. Con molta cautela, senza creare un corpo di moto, mettiamo una sferetta di colorante (anch'io blu) che abbia la stessa densità dell'acqua. Osservando nel tempo si osserva che la zona d'acqua circostante la sferetta comincia a colorarsi. Il colorante quindi comincia a diffondersi. Aspettando tanto tempo tutta l'acqua assume la stessa colorazione, cioè l'anch'io si è diffeso ovunque.

Se pensiamo un sistema di riferimento e nel centro della sferetta, all'inizio tutto l'anch'io è concentrato nel raggio della sferetta, per initia e distribuirsi la massa si distribuisce.

Si osserva che il processo di diffusione tende ad uniformarsi, a sentire il gradiente. All'inizio si ha un gradiente fortissimo, in gradiente e per un tempo $t \rightarrow \infty$ in tutto il contenitore si avrà la stessa concentrazione.



Si osserva anche che all'inizio il processo è più veloce, cioè l'efficacia della diffusione dipende dal gradiente stesso. Più il gradiente è forte, più il processo di diffusione è forte. Alla fine, il processo di diffusione non avviene perché il gradiente è nullo.

Si osserva inoltre che facendo misure di concentrazione lungo diverse direzioni non cambia nulla: il processo è isotropo, non ha direzioni preferenziali. Questa caratteristica è quella che il processo ha solo in un senso: non si revers una forza e concentrazione inversa. Cioè il processo di diffusione è una diffusione nel tempo.

Il processo di diffusione di una sorta (concentrazione) è disole e quello del colore per esempio. Questo perché stiamo osservando un fenomeno macroscopico che avviene fra miliardi di particelle a livello microscopico (molecole che per agitazione si muovono).

Fick nota tutto questo e scrive l'equazione:

$$\vec{q} = -D \nabla c$$

dove:

\vec{q} è il flusso di sostanza (massa) del processo diffusivo, \vec{q} è la massa di sostanza che passa attraverso l'unità di superficie nell'unità di tempo ($\text{kg}/\text{m}^2\text{s}$)

A questo punto cerchiamo di trovare una soluzione dell'equazione. Quindi si usa la soluzione del modello matematico ($\partial C/\partial t = D \nabla^2 C$) sfruttando delle condizioni iniziali ed il contorno. Nel modello matematico è contenuta tutta la comprensione del problema.

Trovare la soluzione significa trovare una funzione di x, y, z, t ($C = C(x, y, z, t)$) che usata nel modello matematico risolve l'equazione.

Già che ci sono infinite C_i e C_c significa che ci sono infinte soluzioni. Poiché l'equazione è lineare, però pensiamo la soluzione come una soluzione vettoriale (che è una) che combinandola diversamente riappresenta tutte le possibili soluzioni dell'equazione. Quindi insegna trovare nell'equazione un'idea, il vettore fondamentale. La soluzione vettoriale si chiama funzione di Green.

Analizziamo il caso unidimensionale. L'equazione è:

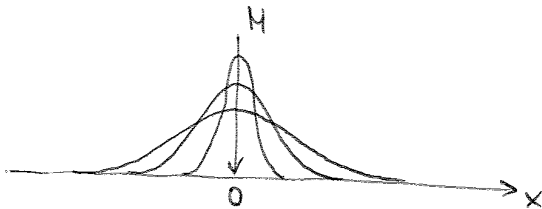
$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad \text{dove } C = C(x, t)$$

già in un mondo dove c'è solo la x , la soluzione vettoriale corrisponde a perturbare in maniera impulsiva il sistema.

Immaginiamo di mettere una mano M in un punto (ad esempio $x=0$) in un istante e poi vediamo cosa succede. Il sistema reagisce e lo pensiamo aprire infinitamente. È come se scendessimo in una piscina un secchio in un istante ($t=0$) in un punto ($x=0$). La mano per $t=0$ è concentrata in un punto, poi comincia a diffondersi. Questa soluzione lì è la soluzione vettoriale; tutte le altre sono combinazioni di questa soluzione vettoriale.

Matematicamente dire che tutta la mano è concentrata in un punto è difficile. Si fa meno alla funzione δ di Dirac.

Quindi la condizione iniziale è che tutta la mano è concentrata in un punto;



$$C(x, t) = M \delta(x)$$

è come se ci fosse un poco di se ne va ad infinito di area finita per ad M . La condizione iniziale è una gaussiana con $\delta=0$. Cioè un'area per base nulla e altezza infinita. Senza condizioni iniziali quanto è l'ordine massimo del tempo (cioè t). Le condizioni al contorno sono date dall'ordine massimo nello spazio (cioè x).

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} C(x, t) = 0 \quad (\text{esprimo due condizioni: una per } +\infty \text{ e l'altra per } -\infty)$$

se non ci fosse questa condizione si avrebbe che $C(x, t)$ andrebbe ad infinito e significherebbe che la mano è infinita, ma non è così perché stiamo considerando una mano finita.

La soluzione vettoriale, cioè la soluzione impulsiva, deve rispettare le condizioni qui sopra riportate.

si moltiplica moltiplicare $\frac{1}{2x^2}$

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \frac{dq}{d\eta} \frac{1}{\sqrt{4Dt}}$$

quindi:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \frac{d^2 q}{d\eta^2} \frac{1}{\sqrt{4Dt}} \frac{1}{\sqrt{4Dt}} = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \frac{d^2 q}{d\eta^2} \frac{1}{4Dt}$$

Sottraendo i termini ricorrendo nell'eq. differenziale si ottiene:

$$2q(\eta) + 2\eta \frac{dq}{d\eta} + \frac{d^2 q}{d\eta^2} = 0$$

si è costretti a pensare da un'equazione alle derivate parziali, ed una alle derivate ordinarie perché q è funzione di un'unica grandezza η .

tutto questo grazie al teorema τ . Il vantaggio che si è pagato è che è usata una variabile lineare. Però è un'equazione che numericamente è più semplice da risolvere piuttosto che quella alle derivate parziali. La fortuna è che l'eq. che si è ottenuta è una delle pochissime risolvibili per via analitica anche è un'equazione esatta di Eulero. Si può scrivere come:

$$\frac{d}{d\eta} \left(2\eta q(\eta) + \frac{dq}{d\eta} \right) = 0$$

si si accorge che quello che c'è tra parentesi è costante. Si riesce ad ebbare di ordine l'equazione in maniera semplice:

$$2\eta q(\eta) + \frac{dq}{d\eta} = \text{cost.}$$

Integrando le equazioni al contorno si si accorge che:

$$2\eta q(\eta) + \frac{dq}{d\eta} = 0$$

si ottiene un'eq. diff. del primo ordine alle derivate ordinarie che si sa risolvere

si ottiene integrando che:

$$q = c_0 e^{-\eta^2}$$

(costante d'integrazione)

Infine sottraendo si ottiene la soluzione finale:

$$c(x,t) = \frac{M c_0}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad \text{chiffre di una gaussiana (ecco perché si mette 4π e 4).$$

la costante c_0 la trova imponendo la condizione

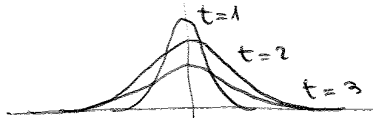
$$\int_{-\infty}^{+\infty} c dx = M \quad \text{condizione di conservazione della massa}$$

si ottiene che $c_0 = 1$

quindi: $c(x,t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$

Approssimando in questo modo rigoroso (matematicamente) per far fronte alla
 scelta infinite si ottiene un'equazione di Fick, l'equazione
 si preferisce approssimare ingegneristicamente il problema non considerando
 le code delle gaussiane nell'analisi dei risultati.

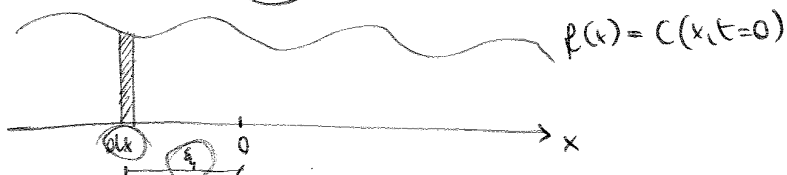
Il disegno delle gaussiane fa vedere che fino un istante e l'altro andare
 lo spreco fa faccia il contratto non so cosa venga.



Abbiamo analizzato le caratteristiche della soluzione matematica.

ha veduto come metterli assieme.

consideriamo il caso in cui la concentrazione iniziale non sia uniforme. Quindi
 consideriamo un certo andamento della concentrazione all'istante $t=0$.



Abbiamo trovato la soluzione con $C(x,t)$. Se il problema non fosse lineare
 allora trovare per ogni $f(x)$ la soluzione. Poiché il problema è lineare,
 si può applicare il principio di sovrapposizione degli effetti: questo vuol dire
 che se si considera una fetta dx e si considera la massa che c'è dentro
 anche quando si considera un'altra fetta con un'altra massa vicino alla
 fetta precedente, si ha che la massa con cui si diffonde la massa
 delle due fette è totalmente indipendente. Si può quindi trattare ogni
 singola fetta isolata come si può trattare come un'azione istantanea in
 tutte le fette. Consideriamo ora la soluzione: la gaussiane. Allora si
 scrivono tutte le gaussiane che sono infinite (integrale):

$$C(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi$$

c'è $x-\xi$ perché considero come parte a diverse distanze dal punto 0.
 Ecco come usando la soluzione matematica, si sono risolte tutte le possibili fette

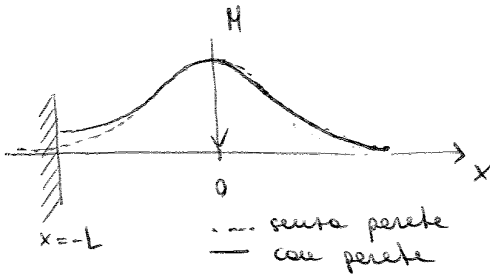
si ottiene:

$$c(x,t) = \frac{C_0}{2} \left[1 + \operatorname{Erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right]$$

questa è la soluzione ricercata che ha la stessa dell'integrale di una gaussiana che è la funzione di errore.

Esempio:

Consideriamo un dominio limitato, consideriamo una parete a distanza $x = -l$. Consideriamo un'immersione impulsiva. Se non si fosse la parete avrei già la soluzione (cioè quella di Fermi).



La parete è impermeabile: la concentrazione non passa. Quindi alla parete non c'è flusso e per Fick significa che per $x = -l$ non c'è gradiente.

$$q_x|_{x=-l} = 0 \quad \text{cioè} \quad \frac{\partial c}{\partial x}|_{x=-l} = 0$$

Se non ci fosse la parete una delle curve sarebbe come quella tratteggiata, poiché c'è la parete, c'è un ostacolo prima di questa (curva continua) che alza la coda.

Il problema è:

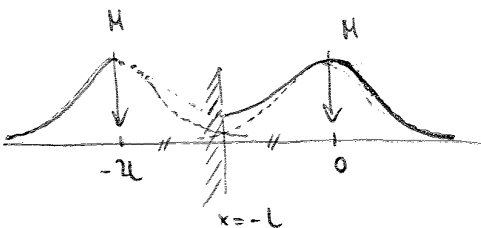
$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

ci) $c(x,t=0) = M \delta(x)$

cc) $\lim_{x \rightarrow \infty} c = 0$, $\frac{\partial c}{\partial x}|_{x=-l} = 0$

Si tratta di risolvere un'equazione lineare. Si sa che, una si perde tempo si preferisce approssimare il problema con il metodo delle immagini (approccio ingegneristico). La parete dà l'effetto nel nostro dominio $[-l, +\infty[$ di un ostacolo. Per giustificare tale ostacolo ci pensiamo nel dominio $]-\infty, +\infty[$ e consideriamo una seconda immersione simmetrica alla parete (per $x = -2l$). Le due sorgenti sono eguali. Tratto le due sorgenti in un dominio $]-\infty, +\infty[$.

--- nel dominio $]-\infty, +\infty[$
 — nel dominio $[-l, +\infty[$



Tale il principio di sovrapposizione degli effetti. Si nota che i gradienti nel punto della parete sono uguali e opposti, quindi si annullano, ecco il ostacolo. Le due curve tratteggiate sono identiche.

Si ottiene che:

$$c(x,t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \left(e^{-\frac{x^2}{4Dt}} + e^{-\frac{(x+l)^2}{4Dt}} \right)$$

la soluzione è valida per $x > -l$.

• 3D :

si espande in $C_3(x, y, z, t)$ che si porta dietro la t .

$$C(x, y, z, t) = C_1(x, t) \cdot C_2(y, t) \cdot C_3(z, t)$$

$$C(x, y, z, t) = \frac{M}{(4\pi t)^{3/2} \sqrt{D_x D_y D_z}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4D_x t} - \frac{y^2}{4D_y t} - \frac{z^2}{4D_z t}}$$

se $D_x = D_y = D_z$ le curve di concentrazione sono delle sfere,
se $D_x \neq D_y \neq D_z$ le curve di concentrazione sono degli ellissoidi
di rotazione.

Sono delle gaussiane nello spazio.

|| Nel tempo sono curve sempre diverse, basta vedere che in 1D $t^{1/2}$,
in 2D t^1 , in 3D $t^{3/2}$.

Convezione

nei fluidi le particelle possono trasportare sostanza perché si muovono.

L'equazione di convezione-diffusione per una generica q_x è:

$$q_x = -D \frac{\partial C}{\partial x} + uC$$

quindi la sostanza (meno per unità di superficie e tempo) si sposta a causa del
gradiente di concentrazione e perché le particelle sono in un campo di
moto. La particella sposta la propria massa (con sposta quantità di moto), un
qualche colore, sostanza chimica in esse contenute ecc. Quindi alla legge di
Fick si aggiunge un termine convettivo legato al campo di moto.

Se introduco questa equazione nell'equazione di continuità:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial t}$$

si ottiene in 1D: $\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uC) = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$

domanda perché in un punto dello spazio la concentrazione cambia? Perché c'è
e convezione e la convezione.

Nel caso 3D: $\frac{\partial C}{\partial t} + \text{div}(\vec{u}C) = D \nabla^2 C$ ///

e i fluidi sono incompressibili se ha che $\text{div} \vec{u} = 0$ e quindi il termine

$\text{div}(\vec{u}C) = C \text{div} \vec{u} + \vec{u} \text{div} C = \vec{u} \text{div} C$ allora:

$$\left| \frac{\partial C}{\partial t} + \vec{u} \text{div} C = D \nabla^2 C \right|$$

senza per esteso:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) \text{ ep. di diffusione-convezione}$$

dove u, v, w sono le componenti della velocità in direzione x, y, z .

quindi:

$$u \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial y} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \quad \text{e' l'eq. di differenziale}$$

n' e' solo cambiato il punto di vista.

la soluzione la rappresenta:

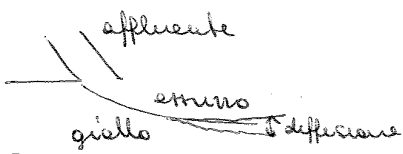
$$c(y, t) = \frac{C_0}{2} \left[1 + \operatorname{Erf} \left(\frac{y}{\sqrt{4Dt}} \right) \right]$$

così:

$$c(x, t) = \frac{C_0}{2} \left[1 + \operatorname{Erf} \left(\frac{x-ut}{\sqrt{4Dt}} \right) \right]$$

Esempio:

Consideriamo un processo diffusivo che avviene fra due correnti in parallelo. Ad esempio quando un effluente marittimo (piatto) si immette in un fiume grande (molto spesso = materiale in sospensione) si forma una zona di miscelamento, si vedono dei fenomeni diffusivi nel verso della y e convettivi nel verso della x . Come va la concentrazione?



Immaginiamo che fino ad $x=0$ le due correnti vengano separate, mantenendo sopra una concentrazione $c=0$ e sotto una $c=C_0$.

Da $x=0$ in poi le due correnti iniziano a toccarsi ed iniziano i processi di diffusione. Come va la concentrazione?

L'equazione da risolvere e':

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}$$

Bisogna fare alcune considerazioni.

il termine diffusivo lungo x e' minore rispetto a quello lungo y (perche' se fosse il contrario, il fenomeno non avverrebbe). Inoltre volendo i due termini in x , quello convettivo sara' spesso

di quello diffusivo (basta pensare che $D \approx 10^{-9}$), quindi la convezione e' preponderante rispetto alla diffusione. In definitiva il termine $D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$ si puo' trascurare.

Considerando in uno stesso punto vedremo sempre la stessa concentrazione, quindi il termine $\frac{\partial c}{\partial t}$ e' zero (siamo nel p.to di vista euleriano).

quindi l'eq. da risolvere e':

$$u \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}$$

La u e' un numero e puo' essere portato all'interno della derivata trascurando

la variabile facendo $\xi = x/u$. Si ha

$$\frac{\partial c}{\partial \xi} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}$$

funzione di Stokes:

$$\gamma_i(z,t) = \frac{M}{4\pi D t u} e^{-\frac{(y^2+z^2)}{4Dt}}$$

per ottenere $C(x,y,z)$ basta sostituire $(t = x/u)$:

$$C(x,y,z) = \frac{M}{4\pi D x} e^{-\frac{(y^2+z^2)}{4Dx}}$$

Attenzione la concentrazione lungo tutto il perimetro del p.to di vista esterno

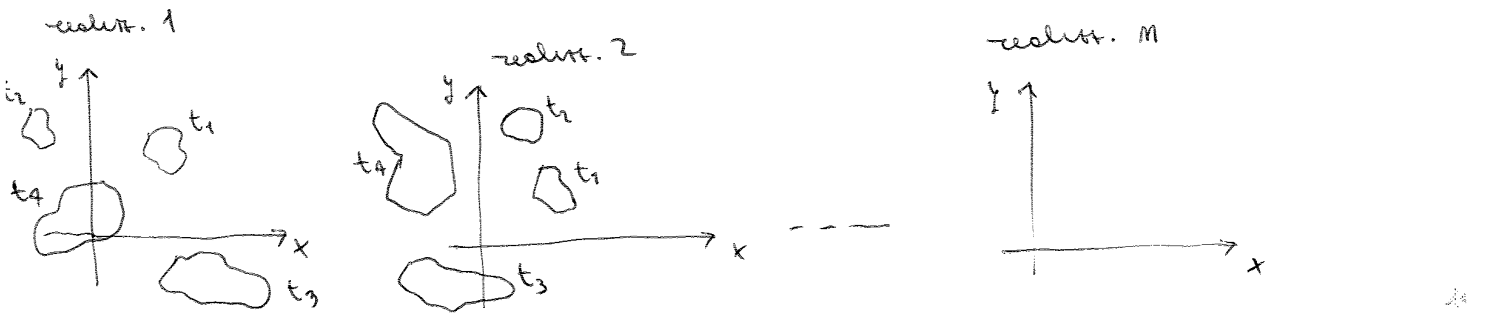
Diffusione tubulenta:

Effettueremo la teoria di Taylor (1921).

Supponiamo di avere un campo di moto turbolento; lo rappresentiamo in $1D$, in un sistema di riferimento x,y . Facciamo scendere una goccia di contaminante (o qualcosa d'altro). Appena la goccia tocca viene assorbita tutto il campo di moto vicino nell'ipotesi in cui il campo di moto non è influenzato dalla assorbizione della goccia, ma ogni particella della goccia viene presa dalla schiera delle particelle fluide e viene portata in giro (questo perché la goccia sente il campo di moto). La forma della goccia assume delle forme strane. Le forme sono strane perché la macchia (goccia deformata) uscente di tutte le scale, più passa il tempo più le forme cambiano tutte le scale. La geometria della forma è indescrivibile con la geometria euclidea.

teniamo descrivere la particolare macchia che sto studiando. Come evolve nel tempo. Come evolve la concentrazione nello spazio e nel tempo in un moto turbolento. E' possibile conoscere l'evoluzione della macchia? o risposta è no. Non sappiamo ottenere la relazione perché l'evoluzione della macchia dipende dalla particolare realizzazione turbolenta che la macchia ha visto in quel particolare istante. Copie la descrizione della singola realizzazione cambiere dire aver risolto il campo di moto per una certa realizzazione: cioè nel due risolvere Navier-Stokes. Non sappiamo risolvere Navier-Stokes. Sanno al solito discorso, raggiungiamo un fenomeno medio. Cioè raggiungo nella media di tante realizzazioni. cioè si fa una realizzazione e si vede come evolve la macchia ai vari tempi t_1, t_2, \dots . Poi si fa un'altra realizzazione e si vedano gli evoluimenti agli stessi tempi t_1, t_2 - di più. Facciamo tante realizzazioni e per media tutte le realizzazioni. Si suppone si mettano la goccia sempre nello stesso punto (origine).

Evidentemente la soluzione non dipende dal tempo x che se un uetto in punto dello spazio e osservato, per quel punto era' sempre la stessa concentrazione nel tempo.



Quindi la variabile che interessa è la variabile $\langle x^2 \rangle$ oppure x^2 .

In particolare come la variabile delle componenti varie nel tempo, cioè un'iterazione copre come la turbolenza allarga lo scostamento, quindi la variabile che si vuole descrivere è $\frac{d\overline{x^2}}{dt}$

una proprietà della media d'ensemble, e quindi ereditata anche dalla media temporale perché siamo sotto l'ipotesi di ergodicità, e che è lineare.

$$\frac{d\overline{x^2}}{dt} = \overline{\frac{dx^2}{dt}} = 2\overline{x \frac{dx}{dt}} = 2\overline{x v_x}$$

Per togliersi di torno lo spazio e scrivere tutto in termini di velocità, basta ricordare che lo spazio è l'integrale della velocità:

$$x = \int_0^t v_x(t') dt'$$

si scrive t' perché è una variabile muta in quanto concerne la velocità istante per istante del campo di moto.

Sostituendo:

$$\frac{d\overline{x^2}}{dt} = 2 \overline{\left(\int_0^t v_x(t') dt' \right) v_x} = 2 \int_0^t \overline{v_x(t') v_x(t)} dt' = 2 \int_0^t \overline{v_x(t') v_x(t)} dt'$$

nell'integrale ha il numeratore dell'autocorrelazione:

$$p_x(\tau) = \frac{v_x(t) v_x(t+\tau)}{v_x^2}$$

Le velocità che la particella incetta sono autocorrelate fra loro, quindi Taylor capisce che la variabile nel tempo è legata all'autocorrelazione logaritmicamente delle velocità del campo di moto. È logaritmico ed è stocastico separando la particella - quindi nella relatività pensiamo l'autocorrelazione:

$$\frac{d\overline{x^2}}{dt} = 2 \overline{v_x^2} \int_0^t p_x(t-t') dt' = 2 \overline{v_x^2} \int_0^t p_x(\tau) d\tau \quad \text{con } \tau = t-t'$$

si può trovare fuori dall'integrale la variabile del campo di moto $\overline{v_x^2}$ perché è costante sotto l'ipotesi di stazionarietà ed omogeneità del campo.

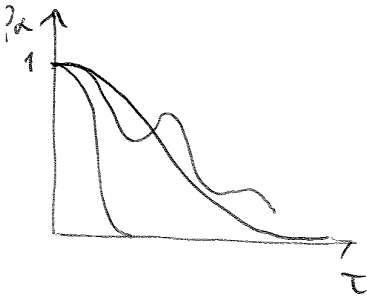
In definitiva:

$$\frac{d\overline{x^2}}{dt} = 2 \overline{v_x^2} \int_0^t p_x(\tau) d\tau \quad \text{è un'eq. integro-differenziale}$$

Per togliersi la derivata al primo membro integro moltiplicando:

$$\overline{x^2}(t) = 2 \overline{v_x^2} \int_0^t \int_0^{t'} p_x(\tau) d\tau dt'$$

integro il primo integrale in t' per fare un modo che appare il tempo per integrare il secondo integrale tra 0 e t .



Taylor dice, per tempi molto molto piccoli si dice che l'autoaccelerazione sarà circa 1 quindi studia il caso per $\tau \ll J$ (cioè per tempi piccolissimi dopo che si è unnesso la vertenza) cioè per $p_A(\tau) \approx 1$.
 Si può risolvere l'integrale e si ottiene:

$$x_A^2(t) \approx \frac{1}{2} D t^3$$

quindi nei primi istanti la vertenza coincide con il quadrato del tempo, cioè in modo non fisico, la turbolenza nei primi istanti non segue la legge di Fick. Quindi la turbolenza è un problema complesso. Questo non segue la legge di Fick e' figlio della accelerazione si esce dal mondo geometrico, dalla semplice matematica geometrica, ed è proprio per questo che alle scale lunghe il problema diventa fisico, cioè ma vale che il fenomeno abbia superato le scale interne del problema, cioè quando la macchina ha usato tutte le possibili scale) si ha che la accelerazione va a zero.

Taylor studia il problema per $\tau \gg J$, si ha che $p_A(\tau) \approx 0$ e sviluppa l'2° integrale:

$$\int_0^t (1 - \frac{\tau}{t}) p_A(\tau) d\tau = \underbrace{\int_0^t p_A(\tau) d\tau}_{\text{area del convulsione cioè è la scala integrale per tempi lunghi}} - \frac{1}{t} \underbrace{\int_0^t \tau p_A(\tau) d\tau}_{\text{va a zero per tempi molto lunghi}}$$

quindi:

$$x_A^2(t) \approx 2 D t^3$$

Quando la particella ha così tanto ingombro nello spazio tanto da aver usato tutte le possibili scale, continua a vedere cose nuove e l'autoaccelerazione si spegne e tutto va come va Fick.

La scala integrale della turbolenza sono i vortici, la era prima di questi intervallo di tempo precedenti usano solo due cose la macchina.

Se vale Fick l'equazione della diffusione turbolenta è anche la stessa struttura della diffusione molecolare del tipo:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (\text{ovviamente per } \tau \gg J)$$

quindi:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad \text{dove } \epsilon \text{ è il coeff. di diffusione turbolenta}$$

$$\text{in 3D: } \frac{\partial c}{\partial t} = \epsilon_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \epsilon_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \epsilon_z \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}$$

Si sono usati i 3ϵ perché la turbolenza è un fenomeno anisotropo.

Quando un moto fuso di pieno pieno:

$$\langle R_m^2 \rangle = \langle R_1^2 \rangle + (m-1)l^2$$

ma il pieno pieno coincide con l, quindi:

$$\langle R_m^2 \rangle = ml^2$$

si ottiene che la varianza della distanza è uguale ad m volte la lunghezza del pieno. Ma m è il tempo (1 pieno, 2 pieni ecc.), quindi la varianza è proporzionale linearmente al tempo: la legge di Fick. |||

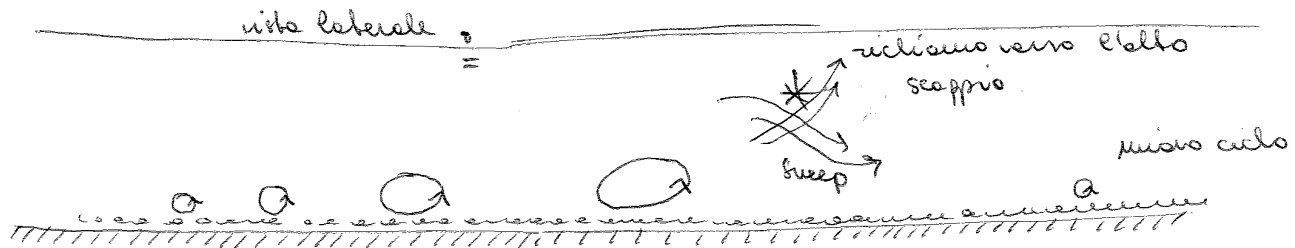
Quindi si va a finire su Fick passando così c'è conoscenza. 000
 volente si può prendere in considerazione lo squ, cioè la radice quadrata della varianza che è proporzionale alla radice quadrata del tempo.

Esperimenti su fotoaprie turbolente:

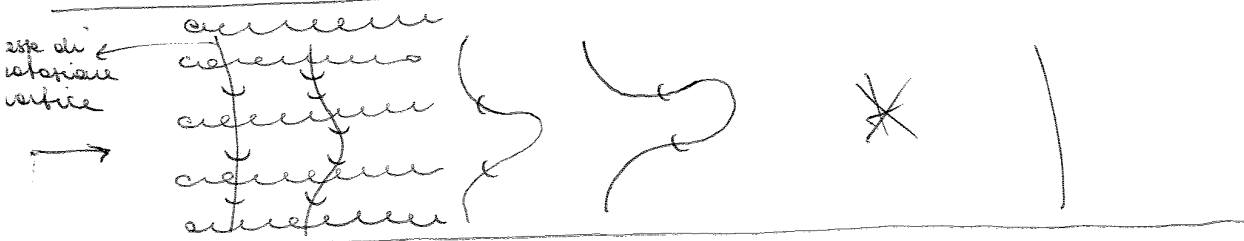
Ciclo del bursting nella turbolenta di parete (ciclo dell'esplosione, scoppio), il problema della turbolenta è che è con velocità che non si riesce bene a capire,

osservando la parete da sopra, nella direzione del moto si fanno un tappeto di tanti piccoli vortici (figura 11.11). Il moto procede dal basso verso l'alto e ad altezza $h = y_+ = 2,7$ si hanno una serie di vortici allineati con la direzione del moto. Per $y_+ = 2,7$ ci aspetteremo solo la viscosità, invece a frizioni di millimetri a sono i vortici. L'esperimento condotto da Van fatto con filo di platino vicino alla parete nelle quale è mandato un tubo di corrente elettrica, emette l'idrogeno e le balle d'idrogeno si formano. Si ottiene che questo è preminente disturbo della parete a sono i microvortici, quindi ci aspetteremo un movimento dominato dalla viscosità.

sopra questo tappeto di vortici, ci sono altri vortici orientati normalmente al campo di moto.



vista dall'alto



Anisotropia del movimento

Dispersione per shear

Ven c'è una differenza in italiano per shear, potremmo tradurre "e corso del fatto che c'è un profilo di velocità e sua volta curvato dell'attuto".

Dispersione è diversa dalla diffusione.

Uno degli ingredienti fondamentali è dunque la presenza ^{del profilo di velocità} che si combina con un altro ingrediente (che scopriremo) e la causa dell'effetto dell'interazione tra i due prende il nome di dispersione.

Il primo ingrediente è la presenza di un profilo di velocità.

Nel caso ci sia una parete, sappiamo che il profilo di velocità sia quello semplice in figura. Non ci interessa se il tubo è laminare o turbolento perché sappiamo che in presenza della parete il profilo cede a zero, ovviamente però cambierà la forma del profilo. A noi interessa solo che ci sia un profilo di velocità.

Pensiamo del colorante in un serbatoio (lo coloriamo tutto) in un istante $t=0$.

La concentrazione che si ha in questa sezione sarà pari a tutta la massa di colorante meno divisa l'altura.

Pensiamoci in considerazione una particella.

Al tempo t_1 questa si sarà spostata di una quantità pari alla velocità che la particella aveva all'istante $t=0$ moltiplicata per il tempo t_1 .

Una particella che sta più in basso va più piano, e a parità di tempo (t_1), si sarà

spostata di meno (avrà percorso uno spazio minore in direzione x). La particella alta però sarà restata ferma. Al contrario una particella più alta avrà percorso uno spazio maggiore perché ha una velocità maggiore.

Quindi il pennello di colorante meno all'istante $t=0$, si sposta nel tempo

il pennello di sostanza è stato stirato nel tempo (distribuito nello spazio) e di conseguenza la concentrazione non è più concentrata tutta in una stessa

x (cioè nella sezione d'immersione), ma sarà diluita nello spazio del punto x di immersione fino alla x occupata dal punto che va più veloce.

Quindi il profilo di velocità ha l'effetto di stirare, diluire (diminuire la concentrazione).

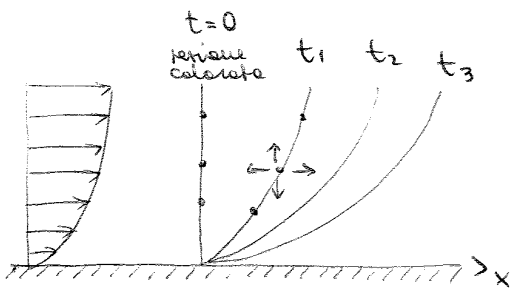
Se il profilo fosse stato uniforme si avrebbe avuto una semplice estensione nello spazio e nel tempo della concentrazione della sezione. Non ci sarebbe avuta diluizione.

La presenza di un profilo di velocità (si sottintende non uniforme) fa sì che si abbia diluizione e che questa sia tanto maggiore quanto più passa il tempo.

Quindi l'effetto del profilo di velocità è che le particelle tendono ad allontanarsi tra di loro e quindi la diluizione cresce.

Quindi quando c'è un profilo di velocità (che non c'entra niente con la diffusione) si ha questo effetto di diluizione.

Per la ricerca del problema ci serviamo di un tubo laminare.

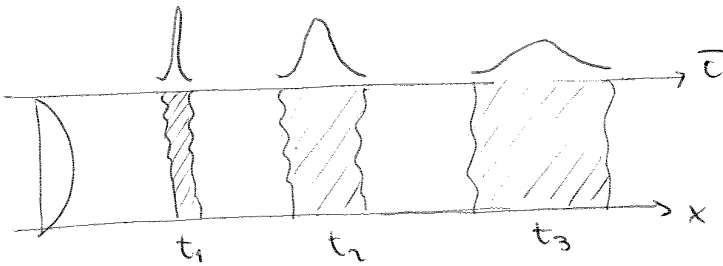


In un tubo il problema è 1D

Il profilo di velocità è stato chiamato convergente, per c'è la diffusione molecolare. Bisogna mettere assieme questi fenomeni. L'equazione di partenza è quella di diffusione-convergenza:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right)$$

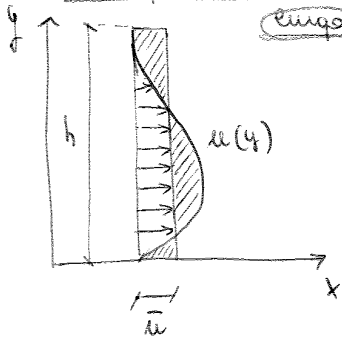
La grandezza che ci interessa è la concentrazione media sulle verticali e sezione trasversale. Quindi partiamo da un profilo di concentrazione in media sulle sezioni trasversali, e' un picco. A mano a mano che passa il tempo l'imponente comincia a diluirsi nella sezione. E' questo il processo che voglio descrivere e quindi la variabile che si vuole descrivere è \bar{c} media spaziale della concentrazione lungo la sezione trasversale. (\bar{c})



Consideriamo un tubo profilo in 2D noto (non importa di che tipo sia).

Il campo di moto è solo lungo x !!

Definiamo due grandezze:



$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_0^h u(y) dy$$

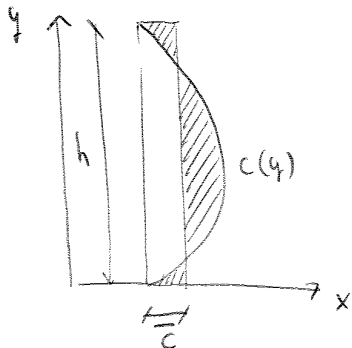
(velocità media sulla set. trasversal)

media spaziale

h è l'altezza della canale.

$u'(y)$ è l'andamento degli scarti quindi:

$$u'(y) = u(y) - \bar{u} \quad \text{decomposizione sullo spazio}$$



$$\bar{c} = \frac{1}{h} \int_0^h c(y) dy$$

(valore medio della concentrazione sulla sezione trasversale)

$$c'(y) = c(y) - \bar{c} \quad \text{decomposizione sullo spazio}$$

Attenzione !!

$c(y)$ e $u(y)$ dipendono da x e y , \bar{u} e \bar{c} dipendono solo da x , $u'(y)$ e $c'(y)$ dipendono da x e y .

L'eq. di cont. diff. per il 2D è (il campo di moto è solo lungo x):

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = D \left[\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right]$$

↓
termine d'inerzia
temporale

↓
termine convettivo

↓
termine diffusivo

Il quarto termine è per $\mu \frac{\partial \bar{c}}{\partial y}$ perché la media degli scarti non è quella e zero (come nelle tensioni di Reynolds)

Il punto termine è nullo. Quindi

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \mu \frac{\partial c'}{\partial y} = 0 \quad **$$

Sottraendo membro a membro, facendo $* - **$?

$$\frac{\partial c'}{\partial t} + \mu \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} + \mu \frac{\partial c'}{\partial y} - \mu \frac{\partial c'}{\partial y} = D \frac{\partial^2 c'}{\partial y^2} \quad 5)$$

Nell'equazione i termini $\mu \frac{\partial c'}{\partial y}$ e $\mu \frac{\partial c'}{\partial y}$ differiscono perché il primo varia lungo la verticale, il secondo è mediato lungo la verticale.

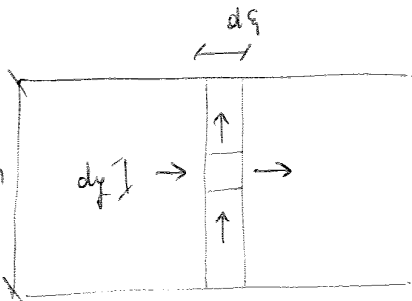
Facendo degli esperimenti si nota che facendo passare un po' di tempo i due termini tendono ad elidersi perché col tempo la diffusione aumenta e le variazioni nella verticale si sono sempre più rinviate.

A tempi grandi tutte le variazioni rallentano e $\frac{\partial c'}{\partial t} \approx 0$. 6)

Quindi: l'equazione di diffusione - convettiva è quella che dice Taylor che ho descritto, non in questo modo, eliminando i tre termini:

$$\mu \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} = D \frac{\partial^2 c'}{\partial y^2}$$

Cosa significa fisicamente?



Consideriamo una canale alta h e consideriamo una fetta (dy) e un rettangolino considerando il lato (dy) (Non necessariamente $dy = dy$, per questo ho utilizzato quest'equazione sta dicendo che c'è un equilibrio tra la differenza di c_0 che entra e c_0 che esce nella direzione x (o y è la stessa cosa) a causa della convezione con c_0 che entra e c_0 che esce e causa della diffusione nel senso di y a causa

dei gradienti di concentrazione degli scarti. Taylor quindi sta dicendo che ad un certo punto nel processo convettivo essenzialmente i processi convettivi nella direzione x che sono in equilibrio con i processi diffusivi nella direzione y. Questo è il significato fisico per tempi lunghi.

Integrando l'eq. in y due volte

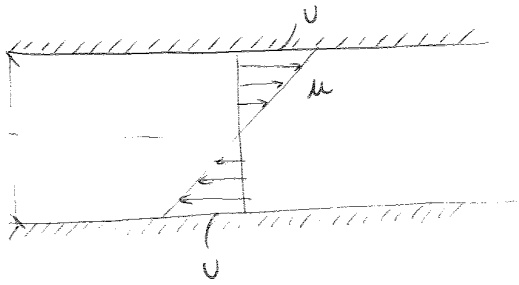
$$c'(y) = \frac{1}{D} \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} \int_0^y \mu dy dy + c'(0) \quad 7)$$

è la eq. di diff. - conv. senza i termini integrali.

non dipende da y e si porta fuori dall'integrale

Esempio

tubo alla Couette: un tubo capillare tra due pareti parallele che si muovono con velocità uguale ed opposte.



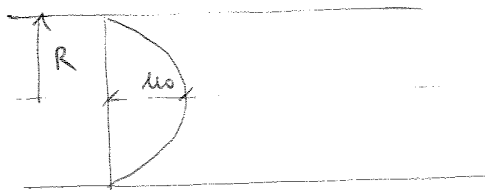
Il profilo è lineare, si possono calcolare facilmente gli scarti.

Si ottiene $k = \frac{U h^2}{120 D}$ dove U è la velocità alle pareti.

Esempio:

consideriamo un condotto circolare di raggio R .

Il profilo è un paraboloide.



$$k = \frac{R^2 u_0}{192 D}$$

Consideriamo come sostanza in acqua del sale da cucina (NaCl) che ha $D = 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$. Supponiamo un tubo piccolo con moto laminare.

supponiamo $R = 2 \text{ mm}$, $u_0 = 1 \text{ cm/s}$. Quanto vale k ?

$$k = 20 \text{ cm}^2/\text{s}$$

si vede che k è molto più grande di D .

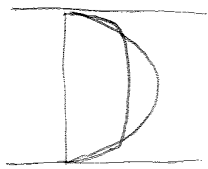
si calcoliamo il tempo per cui è valida la teoria di Taylor (appliciamo il 40% del tempo necessario, tiro il collo):

$$0,4 R^2/D = 1600 \text{ s}$$

in questo tempo il fluido che ha velocità 1 cm/s percorre circa 4000 volte il diametro. Quindi c'è un tratto lungo in cui non posso utilizzare Taylor (a riga, ancora più lungo).

Tutto quello che abbiamo detto della dispersione riguarda il moto laminare Taylor lo estende al moto turbolento. Dal punto di vista concettuale non cambia niente se non che c'è la diffusione turbolenta che sposta le particine normalmente perché molto più efficiente della diffusione molecolare.

Praticamente il posto di D si mettono le (E_T) . Bisogna però stare attenti che E_T è funzione di y mentre D è una costante. E_T vale zero che la turbolenza non c'è più e cambia a mano a mano che ci si allontana dalla parete. Altra differenza è che il profilo di velocità è quello turbolento, molto più appiattito di quello laminare.



l'equazione è sempre la stessa: $\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \right)$

k diventa:

$$k = -\frac{1}{h} \int_0^h u' \left(\int_0^y \frac{1}{E_T(y')} \right) u' dy' dy$$

Altro caso è quando α piccolo e isotropo:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}$$

basta introdurre due nuove variabili che comprimono o dilatano lo spazio:

$$x' = x \sqrt{\frac{D}{D_x}} \quad y' = y \sqrt{\frac{D}{D_y}}$$

per ottenere un'equazione isotropa di cui si conosce la soluzione:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y'^2} \right) D$$

Altro caso è quando μ è funzione dello concentrazione:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mu \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

è un caso difficile perché l'eq. diventa non lineare. Nel caso particolare in cui $\mu \approx c$ (quando è proporzionale), l'eq. diventa l'equazione di Burgers:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

Cole e Hopf hanno considerato una nuova variabile $c = -2D \frac{\partial \psi}{\partial x}$ e l'eq. torna ad essere lineare:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

invece nel trasporto dei fluidi non bisogna mai considerare le reattività chimiche. Questo non è un problema perché l'eq. di trasporto diventa semplicemente con dei termini aggiunti:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mu \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + S(c)$$

Fase B

Per studiare la fase B useremo periculis subito ai piedi, ma periculis ad un canale quindi periculis di cui c'è un'ipotesi semplificativa rispetto ad un fiume. Quindi periculis ad un canale rettilineo, pensavo da un lato un'ipotesi che sia uniformemente lungo e che non abbia curve di profondità costante e sempre di stessa forma.

Abbiamo detto che la fase B è dominata dalla differenza tubolare ~~transversale~~, quindi ci sono gli E questi E a zero? Vi è anisotropia e se si vede il mio bene di differenza tubolare ha alcuni tra elementi E_v , E_r , E_t (verticale, longitudinale, trasversale). Questi sono i tre elementi della diagonale. Nel nostro ragionamento trascuriamo i coefficienti incrociati.

Nella fase di Teste abbiamo capito che per tempi sufficientemente lunghi gli E erano proporzionali alla scala integrale logaritmica del campo di moto (J) cioè alla memoria delle velocità che le particelle subiscono muovendosi in un campo di moto $\langle u \rangle$. Quindi:

$$E \propto J \langle u \rangle$$

o periculis del campo di moto sarà legato all'energia cinetica turbolenta che arriva dall'energia del moto medio che dà a che la turbolenza si prende a spartire in medio il fluido. Quindi la viscosità è legata alle turbolenze (che dissipano energia), le dissipazioni di una corrente a contatto con la parete sono correlate nello T_0 . Per ragioni storiche si dà più che T_0 , la $u_* = \sqrt{T_0/\rho}$. Dove $T_0 = f R_i$ (f = perso specifico, R_i dipende dalla profondità). Quindi la $E \propto u_*$.

o scala integrale è questo tempo c'è memoria del regime quando si dirige nel campo di moto (quindi c'è la particella che si sta muovendo nel campo di moto, rispetto punto per punto in cui si trova la particella la velocità ed ha un regime di velocità e un'idea quanto ha memoria). Vi è che detta la memoria più lunga? La scala integrale è l'area dell'autocorrelazione e l'area è detta da quando cade a zero l'autocorrelazione. Sono le scale più lunghe che fanno cadere l'autocorrelazione a zero perché sono quelle più lente e che quindi hanno memoria più e lunga termine e le più lente sono quelle più grandi. Quindi J è proporzionale alla scala turbolenta più grande verso l'ordine della profondità del canale.

$$\text{quindi } E \propto u_* d.$$

e due variabili chiave sono u_* e d .

Ma se E abbiamo dunque questa distanza, il problema adesso è capire cosa sono questi.

ancora ed analizzabile.

E_t ; E_L

dei corse i problemi perché non si può più calcolare secondo Elder anche non conosciamo il profilo di velocità trasversale del canale.
 sappiamo solo che la struttura sarà:

$E_t \propto u_*^3, d$

non se ne esce dal punto di vista teorico. Ci si affida ai dati sperimentali (si veda tabella 5.1 capitolo Terzetto).

dei dati sperimentali si nota che:

$E_t / d u_*^3 \approx 0,15 \div 0,16$

l'errore è del $\pm 50\%$.

È un errore enorme, ma è già importante conoscere l'ordine di grandezza. Per questo riguardo E_L è peggio ancora perché lungo lo sviluppo longitudinale osservo due fenomeni che non si riescono a separare: la diffusione turbolenta e la dispersione (perché c'è un profilo di velocità perché ci sono delle parti).

Il problema è risolto dal punto di vista teorico da Taylor distinguendo l'effetto della diffusione turbolenta longitudinale e l'effetto della dispersione sono additivi (non lo distinguo). Se questi effetti sono separati, significa che se uno è maggiore rispetto all'altro, penso far essere quello minore.

Non abbiamo i risultati per confrontarli.

Taylor dice che $E_L \approx E_t$. È sufficiente l'ordine di grandezza di $E_t \approx 0,15 d u_*^3$ quindi E_L sarà più o meno simile ($0,1 \div 0,2$).

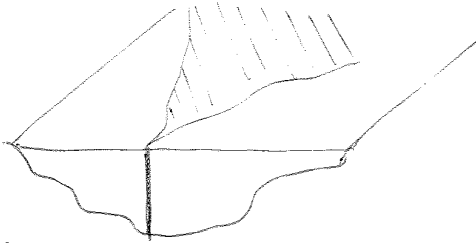
La $K = 5,97 d u_*^3$ per Elder (e rappresenta la dispersione). Quindi di E_L non me ne faccio niente, lo penso trascurare se c'è diffusione turbolenta e dispersione. Ecco perché la fase C è dominata dalla dispersione (K) e non trascurare E_L (diff. turbolenta).

il definitivo E_L l'ho calcolato, E_t l'ho per via sperimentale E_L lo trascuro.

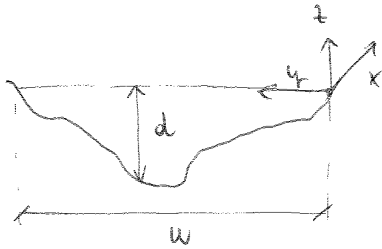
Adesso cerchiamo e guardare cosa succede ai meandri.
 I meandri prima effettive per un canale rettilineo. Inizialmente la profondità del fiume non è più costante, ma varia in modo irregolare. Le spende del fiume sono irregolari (rientrante, vegetazione). Altro differenza sono le curve presenti, rettilineo che influenza queste caratteristiche hanno sulle E_t .
 Per questo riguarda E_L sia le spende che le curve irregolari non hanno molta importanza perché sono caratteristiche che si vedono nel fiume in pianta su lungo la sezione verticale. Invece la d irregolare è molto importante e può usare la stessa esperienza di Elder facendo attenzione ad usare spina alla profondità di locale.

Andiamo di capire come evolve il pannello.

consideriamo una serie in cui si è esercita la fase A: cioè una serie in cui la serbata considerata occupa tutta la verticale. Quindi consideriamo una sergente linea che occupa tutta la verticale.



l'è la pancia profonda



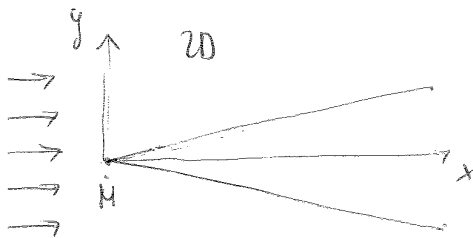
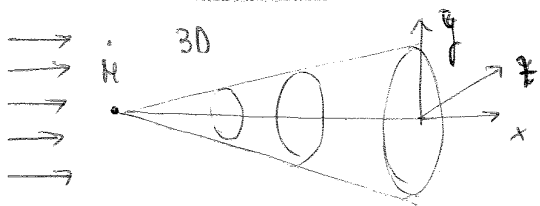
Il nostro problema è quello della diffusione turbolenta nel piano bidimensionale x, y.

È come se la nuvola che va allargandosi va vedere la dipendenza da t (ricordiamo di $w/d \geq 20 \div 30$ nella realtà). Quindi non

è pensabile alla scala della profondità affinché dovremo usare altri elementi costitutivi (Navier Stokes). Siamo alla scala di qualche decimetro (alla scala della fase B)

superato il problema in questa maniera, la soluzione è quella del problema dell'instabilità puntuale M e la corrente crea un

instabilità bidimensionale (problema di convezione - diffusione).



Si ha convezione lungo l'asse x, diffusione turbolenta lungo l'asse y.

Questa soluzione era in 3D. Si ottiene la soluzione in 2D. Prescindendo sempre una struttura di fluido (e con un pannello come nel caso 3D) che pensa per la sergente, prende serbata e punta si affonda.

Si effettua lo stesso identico ragionamento e si ottiene:

$$c(x, y) = \frac{M}{\mu \sqrt{4\pi x} \epsilon t} e^{-\frac{y^2}{4\epsilon x}} \quad M = \text{portata in massa}$$

Questo è l'andamento del campo di concentrazione nel piano x, y.

io che cambia nel nostro problema è che la sergente non è puntuale sul verso, ma distribuita lungo tutta la verticale. la portata che mettiamo per qui piano è dunque M/d . Quindi:

$$c(x, y) = \frac{M}{d \mu \sqrt{4\pi x} \epsilon t} e^{-\frac{y^2}{4\epsilon x}}$$

volte questa soluzione va bene se non dominano i fenomeni, in realtà il instabilità comincia ad aprirsi e ad un certo punto uscite della presenza alle pareti (il pannello occupa tutta la sezione trasversale del fiume).

quindi bisogna avere la coscienza coperto dalle pareti, cioè bisogna fare che il fiume ha una certa larghezza.

in fase così si adoperano il metodo delle immagini per simulare la presenza delle pareti.

Esempio:

Un'industria scarica centralmente in un fiume una portata di carbonio per $Q = 11 \cdot 10^6$ l/giorno. La portata ha concentrazione 200 ppm (C_{imm})

Il fiume ha deboli meandri, la profondità media del fiume è $d = 10$ m, la velocità media è $\bar{u} = 0,6$ m/s e $u_* = 0,06$ m/s (in prima approssimazione si può considerare $u_* = 1/10 \bar{u}$).

si assume che la fase A dura poco (quindi è trascurabile).

Qual è la lunghezza del pennacchio 300 m a valle dell'immissione.

$$M = Q \cdot C_{imm} = \frac{11 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{86400 \text{ s}} \cdot 200 \frac{\text{mg}}{\text{l}} = 27,8 \text{ m}^3/\text{s} \text{ mg/l}$$

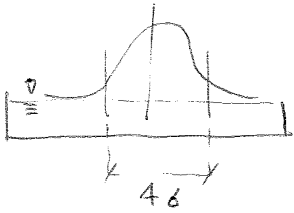
$$E_t \approx 0,6 d u_* = 0,36 \text{ m}^2/\text{s}$$

La 300 m il pennacchio si è allargato, ma non ha occupato tutta la lunghezza del fiume (ipotesi fatta da noi). Quindi è come se il pennacchio si stesse allargando su un dominio infinito perché non risente delle pareti (consideriamo y_{pi} associato la distribuzione della conc. trasversale ed una gaussiana, il 95%.

dei valori della concentrazione sarà compresa in una lunghezza pari a 4δ .

Quindi $L = 4\delta$

è la massima dell'espansione della gaussiana (pag. 6 diff. ind. applicata alla seconda formula di pag. 6)



$$4\delta \sqrt{2\bar{u}} = 4 \sqrt{\frac{2\bar{u} x}{u_*}} E_t \Rightarrow 4\delta = 4 \sqrt{\frac{x}{u_*}} E_t$$

$$L = 4\delta = 4 \sqrt{2 \cdot \frac{300 \text{ m}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \cdot 0,36 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}} = 76 \text{ m} ?$$

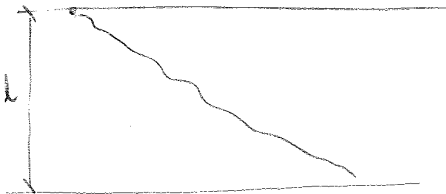
C_{max} si ha per $y = 0$ (sull'asse del fiume):

$$C_{max} = \frac{M}{d u_* \sqrt{4\pi E_t} \frac{x}{u_*}} \approx 0,1 \text{ ppm} \quad \text{L'obiettamento in } 300 \text{ è notevole}$$

Esempio

consideriamo un canale rettangolare: $w = 60$ m, $d = 1,5$ m, $i = 0,0002$, $\bar{u} = 0,6$ m/s

lo scarico è nel bordo. Qual è la distanza per cui tutta la sezione trasversale è bene miscelata?



$$u_* = \frac{\tau_0}{\rho} = \sqrt{g d i} = 0,054 \text{ m/s}$$

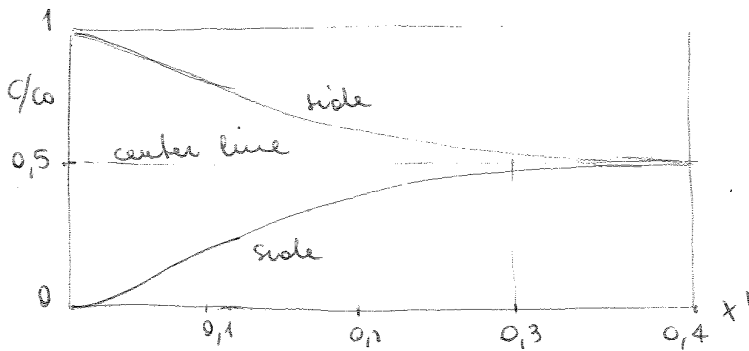
$$E_t = 0,15 u_* d = 0,012 \text{ m}^2/\text{s}$$

Affonda' sia bene miscelato $x' > 0,1$.

$$\text{Quindi } x = 0,1 u \frac{(2w)^2}{E_t} \approx 72 \text{ km}$$

Se voglio avere miscelamento in una x più piccola devo cercare a crescere E_t .

Il diagramma della soluzione per questo problema è il seguente.



La concentrazione ricercata $C_0/2$ si ha per $x' \approx 0,3$.

$$E_t = 0,15 d u_* = 0,0087 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$x_{\text{canale}} = \frac{0,3 \bar{u} w^2}{E_t} \approx 1,2 \text{ km}$$

Quindi effluenti ed solo fenomeno naturale deve costruire un canale di 1,2 km per ottenere la concentrazione considerata.

È una dupletta troppo lunga

Per ottenere x_{canale} bisogna fare in modo di far crescere le E_t . Per fare questo si può costruire il canale in curva mescolato con curve circolari. In presenza di una curva vale:

$$E_t \approx 15 \frac{u^2 d^3}{u_* R^2}$$

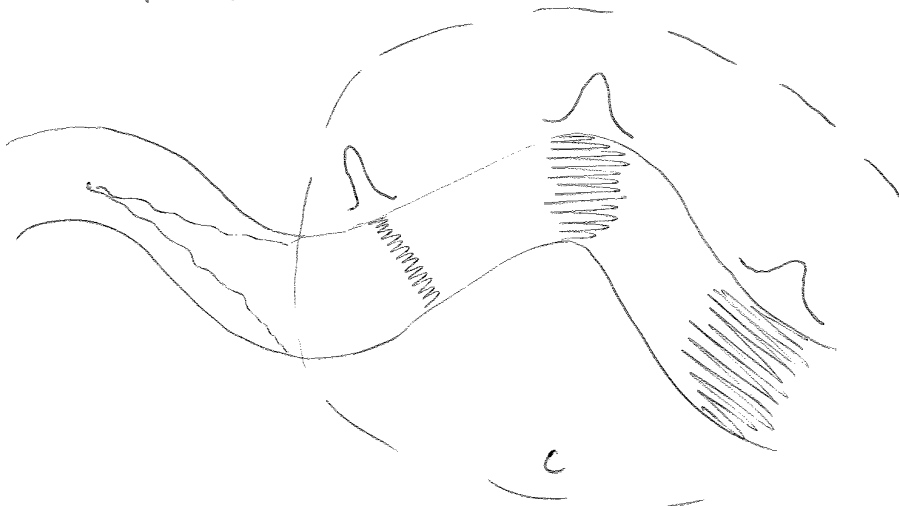
R = raggio di curvatura medio

con $R = 30 \text{ m}$ si ottiene $E_t = 0,056 \text{ m}^2/\text{s}$.

E quindi per $x' = 0,3$ si aveva $x_{\text{canale}} \approx 180 \text{ m}$.

Fase C:

Tracciata tutta la portata in un'area occupa la sezione trasversale ed inizia il fenomeno della dispersione. A mano a mano che passa il tempo dal punto di vista logaritmico e lo spazio dal punto di vista euleriano la portata si distribuisce sempre più su di un intervallo maggiore.



La dispersione cresce linearmente nel tempo (spazio) con la velocità se questo non cambia nel tempo e nello spazio.

La dispersione è contenuta nel coefficiente di dispersione K .

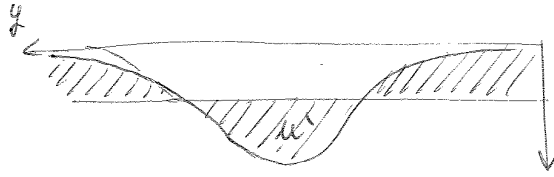
Elder aveva ricavato $K = 5,93 d u_*$

permettendoci però di avere che $K/d u_* = 10^2 \div 10^3$, quindi si possono dare valori di K di ordini di grandezza maggiori rispetto a quelli che si ottennero con la relazione di Elder.

Quindi:

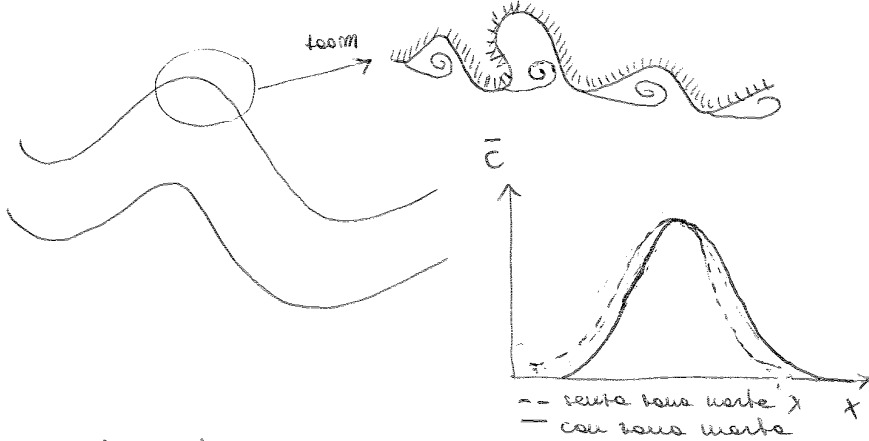
$\Delta_{diff} = \Delta_{conv} \Rightarrow$ integrale e nuovo $k = -\frac{1}{A} \int_0^w u' d \Big|_0^y \frac{1}{E+d} \int_0^y u' d(y) dy dy dy$

Seperato come $u'(y)$ continuo con y e come $d(y)$ continuo con y , però risolvere l'integrale. Questi si ricavano dalla sperimentazione.



Accendiamo ai fenomeni fluidodinamici che interengono nel valore di k .

• Forme morte: viene le spande a senso delle zone in cui l'acqua tende a ristagnare a causa della morfologia delle spande. Perchè presento spesso un'onda di ripercussione, questa tende a ristagnare perchè viene catturata e trattenuta dai vortici che si formano in queste zone e viene rilasciata poco alla volta.



Il primo sintomo di questo fenomeno si ha sulla distribuzione della concentrazione nello spazio. Si vede una curva non più gaussiana il fondo a monte è più ripido e il fondo a valle più lungo. Questo perchè mentre l'onda di contaminante avanza a senso

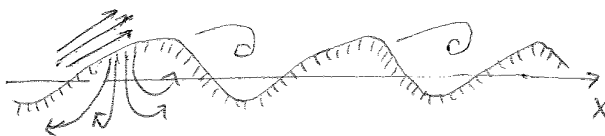
zone che rubano parte della sostanza e la rilasciano più piano provocando una onda finale più lunga.

Quindi si crea asimmetria nella curva.

Anche la vegetazione provoca gli stessi effetti delle zone morte.

• zone iporeiche: nel fondo dei fiumi la tuberosità crea delle dune.

profilo longitudinale



A valle della duna avviene la separazione delle correnti e cioè le traiettorie non ce lo fanno a seguire il profilo delle dune. Si formano a valle delle zone di ricircolo dove che trattengono della sostanza e la dispersione dinamica ne alterata.

oltre a causa del diverso campo di moto a valle e a monte delle dune, si sono combinamenti di fenomeni che innescano molti di filtrazione lungo tutto il letto del fiume. Quindi la sostanza che si infiltra rallenta, viene ritenuta ed esce lentamente. Inoltre la particella innesca una zona di ricircolo (bivio, bottoni ecc.) il ritorno combinamenti biogeochimici ostacoli. l'effetto è sempre quello di combinare le code della area di concentrazione nello spazio.

IL TRASPORTO SOLIDO

Qualunque corrente su un fondo che può essere scivolo o sedimentato, corrente e scivolo.

L'acqua è il principale scivolo della natura.

Il problema del trasporto solido riguarda il modo di una corrente tubulenta che muove una parete deformabile. La parete quindi si deforma e separa dalla tubulenta e vice a vice che si deforma anche la tubulenta scivolo.

Il problema è un problema accoppiato di equazioni di Navier Stokes (tubulenta) accoppiate ad equazioni unifodineamiche (che riguardano l'evoluzione della forma della parete).

Caratterizzato da una spina la scivolo delle equazioni di Navier Stokes, infatti però si riferisce a formule empiriche.

problemi del trasporto solido sono:

- il modo unipiente (la prima domanda da cui si parte e desidero se la corrente è in grado di trasportare qualcosa)
- portata solida Q_s (quanto si trasporta)
- forme di fondo (dime, antidive)
- trasporto solido in sospensione
- unifodineamiche

come trasporto un fluido le particelle solide?

si sono tre meccanismi:

- trasporto solido al fondo, sul fondo c'è del materiale incoerente che la corrente vice versa a portare in sospensione, ma la corrente fa rotolare, saltare il materiale sul fondo.
- trasporto in sospensione: le particelle più fini riescono ad essere catturate dalla tubulenta e percorono dei lungi tratti sospese nella corrente.

Questi due meccanismi sono meccanismi di meccanica dei fluidi.

Il terzo meccanismo non è di meccanica dei fluidi, ma un processo elettrocinetico:

- trasporto di sospensione colloidale (costa ben poco).

I fiumi trasportano soprattutto sul fondo.

Introduciamo un po' di simbologia:

f_s = debito del materiale

$f_s \cdot g$ = f_s peso specifico ($2,1 - 2,9 \text{ t/m}^3$) come valore tipico si prende $2,6 \text{ t/m}^3$

S = f_s / f_w peso specifico relativo

Moto unipiente:

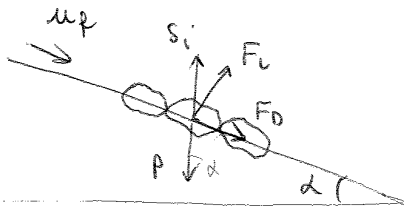
La discesa e' quando la corrente e' in grado di trasportare le particelle?

Il problema del moto unipiente storicamente e' stato affrontato con due approcci

- il primo approccio e' legato all'individuazione di una velocità critica (cioè c'è una velocità oltre la quale avviene il trasporto solido).
- il secondo approccio (che storicamente avviene dopo il primo approccio) che e' legato ad una teoria di trasporto critica T_c . Questo secondo approccio non riesce il primo (quindi i due approcci convivono ed hanno entrambi validità).

Affermazione il primo approccio

L'idea di per se' e' semplice: si tratta di un bilancio di forze.



Consideriamo un particella inclusa di d nel quale ci sono delle particelle che rappresentano il primo stato di materiale sul fondo.

La corrente ha velocità u_b e la inquinazione molto alta sul fondo (cioè quindi alla scala delle particelle di sabbia, ghiaietto).

Vediamo le forze applicate sulla singola particella:

- la forza peso P
- la spinta d'Archimede S_b

quindi lungo la verticale si ha il peso immerso (P_i):

$$P_i = P - S_b = K_3 (p_s - p) g d^3$$

Il peso immerso e' legato alla differenza dei pesi specifici $(p_s - p) g$, al volume reale di un diametro (quello del sedimento) d , e ad un coeff. geometrico K_3 .

La forza di portata F_D :

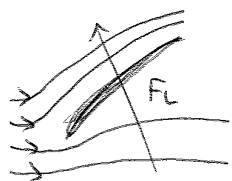
$$F_D = \frac{1}{2} \rho C_d K_2 d^2 u_b^2$$

La velocità u_b e' la velocità della corrente al fondo (la velocità che e' usata dalle particelle)

La forza di portata si ha perché la particella e' curva e per Bernoulli si attiva una forza verso l'alto dovuta ad un gradiente di pressione che si attiva a seguito della curvatura della particella di densità il campo di moto (e' lo stesso fenomeno dell'ala, della vela ecc.)

La forza di portata e' legata alla densità del fluido, ad un coeff. C_d che ha lo stesso fenomeno del coefficiente C_d nel caso di un corpo (quindi che interpreta la complicazione della forma, dell'angolo nascente ecc), all'area frontale $K_2 d^2$ (dove K_2 e' un coeff. di

forma), alla velocità u_b . Se la particella non perfettamente circolare non si avrebbe portata. Il gradiente di pressione perché sopra e sotto l'ala e portata di portata, nel caso di flusso superiore la velocità cresce e per Bernoulli deve diminuire qualcosa e perché + non costante che non sul verso entrante, significa che la pressione diminuisce. Sotto al contrario la pressione aumenta e quindi si crea il gradiente di pressione del verso l'alto.



$$P + \rho \frac{v^2}{2} + \rho g z = \text{cost} \quad (\text{Bernoulli})$$

Si è fatto allora un ragionamento molto semplice

cioè che sappiamo calcolare bene e' la velocità media $u = Q/\Omega$

la velocità al fondo vero' all'interno di un profilo di velocità'. Non so dire da se ad 1mm, 2mm ecc. dal fondo, ma so solo che farà parte di un profilo il cui integrale e' la portata che e' legata a sua volta alla velocità'.

Quindi concettualmente so che ci sarà un legame tra la tip che non so ben definire e la portata e quindi la velocità media.

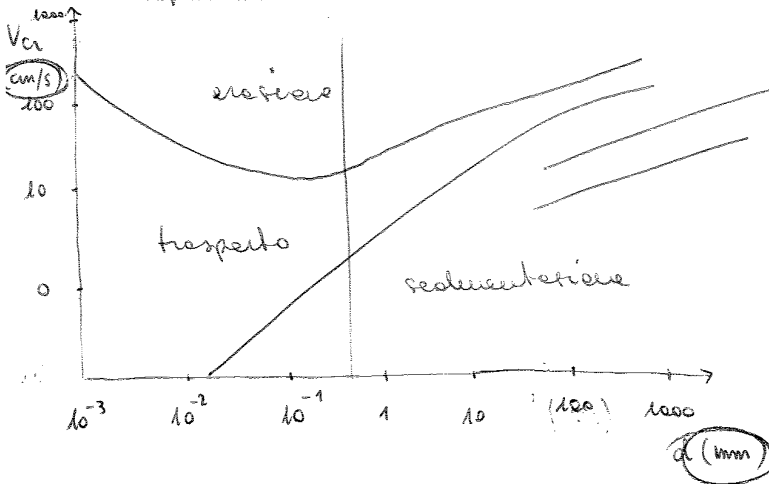
Quindi al posto di calcolare tip, userò che posso calcolare una velocità media critica u_{ce} ? Questo sì che posso calcolarlo.

Quindi ci sarà un legame concettuale tra tip critica e u_{ce}

sperimentalmente sono state ricercate quindi delle tabelle che riportano la velocità critica u_{ce} e per quali valori le particelle di un certo diametro possono muoversi.

A questo proposito ci sono due risultati che vengono ancora oggi utilizzati per la velocità media critica.

Uno di questi e' il diagramma di Hjeltström (vedi dispense sul trasporto solido)



la velocità media critica e i descrittori sono riportati su semi logaritmici.

Il diagramma vale sotto l'ipotesi che la porosità della corrente sia intorno ad 1m.

Il diagramma mostra che la velocità con cui le particelle vengono erose non e' la velocità con cui le particelle si sedimentano, ci sono quindi due velocità per erodere e sedimentare a parte di diagramma delle particelle.

Quindi e' sbagliato dire che l'acqua quando viene erode, necessariamente dipende. Questo e' tutto più vero quando le particelle sono fini (si vede che lo scarto aumenta con il diminuire del diametro). Il responsabile di questa complessità e' la turbolenza che ha effetti tanto più le particelle sono fini.

Altro tipo di tabella e' quella di Fortier-Scobey (vedi dispense) per canali estesi che riporta la velocità critica in m/s per varie classi di materiali. Un canale esteso e' un canale misto (con alveo assetato cioè dove le particelle fini rotolano dall'acqua sono assolate e riempie i vuoti fra le particelle più grosse). Anche questa tabella vale per 1m di corrente. Se la corrente e' più alta si ottiene la velocità di 0.15 m/s.

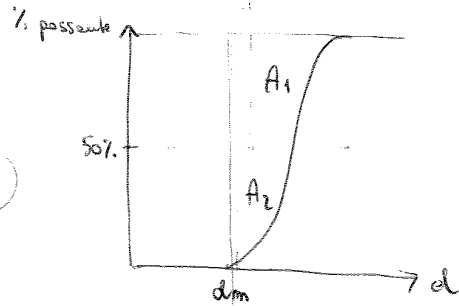
Armoring (corazzamento): nei fiumi, a meno che non si sia molto a valle dove si trovano curve graduaristiche uniformi, c'è sempre più eterogeneità granulometrica verso monte. Le portate medio-basse trasportano le particelle più fini, lasciando quelle più grosse sul fondo. Il risultato e' che le particelle più grosse marciano sotto come strato di particelle medio-grandi (corazza). Questa corazza spesso viene erosa come granularistica dell'alveo, sbalzando i sassi; per questo arriva una piena rompe la corazza e svela lo strato sottostante in tutto materiale fine.

si usa che Schokletsh non viene a defecare A' per $3 \text{ mm} < d < 6 \text{ mm}$,
 ha poco copriente perché.

Un'altra esperienza è data da Imchi.

$$\tau_{02} = \frac{0,03 \text{ dm g} (P_5 - P)}{\sqrt{M}}$$

$$M = \frac{A_2}{A_1}$$



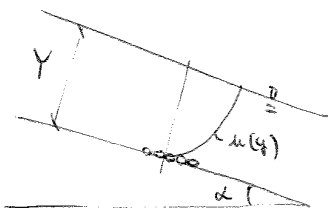
Il pregio è che si considera la curva granulometrica. Inchi questi considera anche la granulometrica sottile. Le formule ci usano tantissime come si può vedere da fig 3 nelle slide. In questo diagramma sono riportate tutte le formule.

È importante dire che a questo livello non cambiano le cifre decimali. Come si può vedere dal grafico, alle scale piccole si hanno risultati eterogenei per particelle fini perché l'effetto della tubulenza si espone proprio su scale piccole. Per particelle grandi i risultati sono omogenei perché operano su scale più grandi dove la tubulenza ha un effetto minore.

In tutta questa difficoltà Shields impugna bene le cose da un punto di vista teorico.

Teorie di Shields (36)

Shields usa con un po' di buon senso l'analisi dimensionale inquadrando bene il fenomeno.



Shields considera particelle omogenee.

Sulla singola particella operano le forze elencate in precedenza.

Inge il fondo agisce una forza complessiva di trascinamento.

mento T:

$$T = F_0 + (P - S_i) \sin \alpha$$

La particella non si muove perché c'è una forza resistente R per il forza d'attrito:

$$R = [(P - S_i) \cos \alpha - F_c] \tan \varphi$$

Quando $T = R$ avviene l'iniziale movimento.

La forza di resistenza F_0 sarà funzione di:

$$F_0 = f_1 (P, \mu, \mu_f, d, \psi, Y)$$

dove ψ è un fattore di forma

La forza di trascinamento F_c funzione di:

$$F_c = f_2 (P, \mu, \mu_f, d, \psi, Y)$$

Schields a questo punto introduce delle ipotesi legate al proprio ambito di lavoro: $d \approx 0$, granularità assoggera.

Quindi $d \approx 0 \Rightarrow \cos d = 1, \operatorname{tg} d = 0$ e si ottiene:

$$\frac{T_{ou}}{(f_s - f)d} = f \left(\frac{u \cdot d}{v}, \frac{Y}{d} \right)$$

dove molto è stato approssimato in costanti.

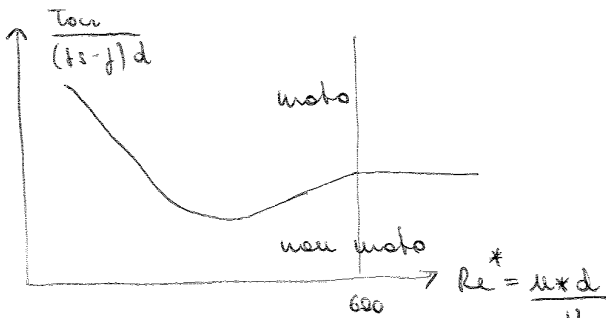
Alla fine il problema dipende dal numero di Reynolds che fa da ponte tra la tubulenza e le grandette fondamentali $Y/d, u \cdot d$ e d .

Per fatti in presenza la resonanza raggiunge il curve di instabilità, cioè ad un certo punto Y/d è così grande ($10^3, 10^4$) che non ha alcuna importanza nella determinazione di T_o e quindi:

$$\frac{T_{ou}}{(f_s - f)d} = g \left(\frac{u \cdot d}{v} \right)_{Re^*}$$

Il problema è quindi legato alla tubulenza !! senza però toccarla.

Schields con la sperimentazione ottiene la curva che lega T_{ou} ad una variabile al numero di Reynolds (Re^*).



La curva separa la zona in cui si ha moto, da quella in cui non si ha moto.

È un grafico bilogarithmico.

Da un certo punto la curva diventa asintotica e significa che il numero di Reynolds ha senza di incidere. Quindi da un certo punto in poi non conta più il bilancio tra forza d'inerzia e forza viscosa perché

nessi le particelle non resistono più della viscosità e il moto delle particelle è governato totalmente dalla tubulenza. Le particelle non fanno parte della sostanza che ha turbato il settorato viscoso.

Si ottiene che:

per $Re^* \geq 600 \Rightarrow \frac{T_o}{(f_s - f)d} = \text{cost} = c$

secondo Schields $c = 0,06$, secondo Zeller $c = 0,047$.

Perché questa differenza?

Perché la tubulenza è un processo stocastico, si creano vortici di bursting che prendono materia e il percorso viene / non viene non è netto, la velocità non è facile da cogliere perché c'è proprio una componente stocastica intrinseca nella tubulenza.

Stoklitsh non viene e copre i valori di A' per $3 \text{mm} < d < 6 \text{mm}$ proprio perché in quelle zone c'era la tassa di turbolenza individualizzata di Schields.

Parabola solida al fondo

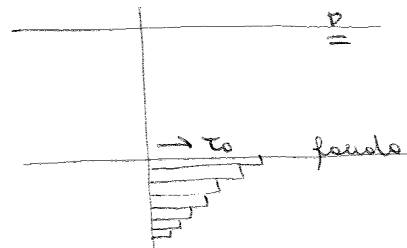
La domanda del problema è: quanto si muove?
 Ci sono una serie di famiglie.

• Du Boys (1879):

Una delle prime famiglie è dovuta a Du Boys (nella realtà non si usa).

Du Boys inventa uno schema meccanistico che viene funzione molto.

Immagina sotto il fondo un manto di straterelli, come fosse un manto laminare in cui il primo strato di grani si muove con una certa velocità trascurata dalla tenzione tangenziale al fondo, il quale a sua volta muove lo strato sottostante e così via.



Giunti in questo modo si viene a creare una sorta di profilo di velocità nei sedimenti in cui lo strato superiore muove quello sottostante. Ricava una parabola solida per un'unità di lunghezza:

$$q_s = D \tau_0 (\tau_0 - \tau_{0c})$$

dove D è un coefficiente funzione della granulometria.

La q_s è funzione della tenzione tangenziale e dell'angolo della tenzione tangenziale rispetto a quella critica ($\tau_0 - \tau_{0c}$).

Per esempio sbagliato il concetto degli straterelli di Du Boys, la stuttura della famiglia di q_s non lo è (non conferme nella fluidodinamica dei letti granulari, dispersiva usata alla fine degli anni '70).

vediamo perché Du Boys è arrivato a questa struttura conetta.

Immagina che q_s è funzione di τ_0 come un'onda envelope osservando i fiumi in piena (più è forte ed alta la corrente, maggiore è τ_0 , eppure il materiale trasportato, ecco):

$$q_s = q_s(\tau_0)$$

Facendo lo sviluppo in serie di Taylor:

$$q_s(\tau_0) = a_0 + a_1 \tau_0 + a_2 \tau_0^2 + \dots$$

imponiamo alcune condizioni limitanti:

$q_s(\tau_0 = 0) = 0$ quando l'acqua è ferma non si ha trasporto solido

$q_s(\tau_0 = \tau_{0c}) = 0$ il manto incipiente si ha per $\tau_0 > \tau_{0c}$

imponendo queste due condizioni si ottiene:

$a_0 = 0$, $a_1 = -a_2 \tau_{0c}$

quindi:

$$q_s = -a_2 \tau_{0c} \tau_0 + a_2 \tau_0^2 = a_2 \tau_0 (\tau_0 - \tau_{0c})$$

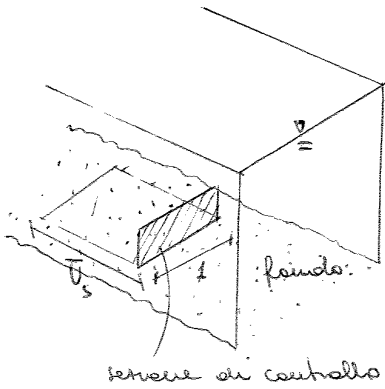
$$q_s = a_2 \tau_0 (\tau_0 - \tau_{0c})$$

che è la struttura di Du Boys.

Giunti la struttura di Du Boys discende da semplici considerazioni unidimensionali e questo è così diffuso e conetto, anche se il ragionamento è esatto.

Teoria di Kolomste (1947)

Kolomste e' il primo che fa comparire qualcosa legato alla turbolenza.



Considero una sezione di controllo verticale sul fondo dell'alveo e perche' inferiore da q_s (portata per unita' di larghezza) la sezione e' larga l . E' importante che sia sufficientemente alta da far passare tutte le particelle che saltano, rotolano.

Si vuole ottenere q_s cioè il volume di particelle solide che passano nell'unita' di tempo e larghezza.

Nell'unita' di tempo passano nella sezione una certa quantita' di particelle disperse in un rettangolo per l'ad $l \cdot \bar{u}_s$ dove \bar{u}_s e' la velocita' media delle particelle. $l \cdot \bar{u}_s$ e' l'area del fatto che ospita le

particelle che possono passare nella sezione di controllo nell'unita' di tempo. Il numero di particelle che sono nell'area $\bar{u}_s \cdot l$ e' :

$$N = \frac{\bar{u}_s \cdot l}{k_1 d^2}$$

cioe' e' il rapporto tra l'area $\bar{u}_s \cdot l$ e l'area delle particelle (proporzionale tramite k_1 e d^2 della particella). k_1 e' il coeff. di forma.

N e' il numero delle particelle che potenzialmente si possono muovere, ma se ne muove soltanto una frattione N_a :

$$N_a = N \cdot p$$

p e' la probabilita' di movimento ed e' dell'ordine di 0,35. Questo probabilita' e' legato ai vortici di turbolenza che trasportano le particelle.

Quindi la portata solida e' data dal volume di particelle per N_a :

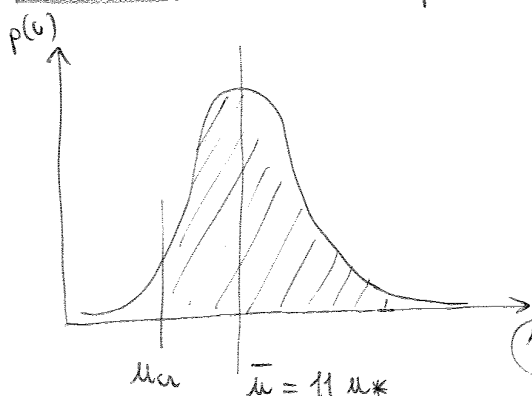
$$q_s = \underbrace{k_3 d^3}_{\text{volume}} N_a = k_3 d^3 \frac{\bar{u}_s \cdot l}{k_1 d^2} p$$

dividendo per $l \cdot d$ per ottenere l'adimensionalita' si ha:

$$\frac{q_s}{l \cdot d} = k_0 p \frac{\bar{u}_s}{u_*} \quad \text{con } k_0 = \frac{k_3}{k_1} \text{ e' un fattore di forma}$$

Il problema e' determinare \bar{u}_s

Kolomste e' questo punto arieggiare che le turbolenze vicino al fondo sia distribuita con una gaussiana, la media della distribuzione e' $u = 11 u_*$ e



una $\sigma = 0,15 u$. Ottenere questi numeri da esperimenti. Immagina che le particelle prese dalla turbolenza si muovono con la stessa velocita' del flusso che le sta trasportando, cioè con velocita' condizionata ad essere maggiore della velocita' critica. Quindi la media della velocita' la faccio tra u_{cr} e $+\infty$. E' la media dell'area sottostante

$$\bar{u}_s = \int_{u_{cr}}^{\infty} (u - u_{cr}) p(u) du$$

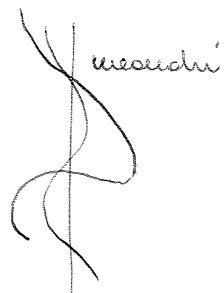
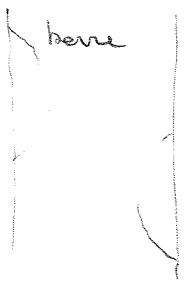
FORME DI FONDO

↑ Intensando le scale geologiche, il principale scalpello della natura è l'acqua (ed anche in certi ambienti l'aria) e da luogo ad una vastissima gamma di instabilità morfologica.

↓ Intensando un fluido si muove a contatto con superfici che possono essere erose, sedimentate, dissolte, ghiacciate ecc. questi usi le superfici di contatto stato-fluido restano indisturbate.

se predispersiono un fondo piatto e formiamo scendere una corrente in un'area inferiore, si ha che il fondo (consideriamo un materiale erodibile come la sabbia) inizia a presentare varie forme a meno che l'acqua non sia in modo di trasportare particelle (vicino sotto la τ_{0c}).

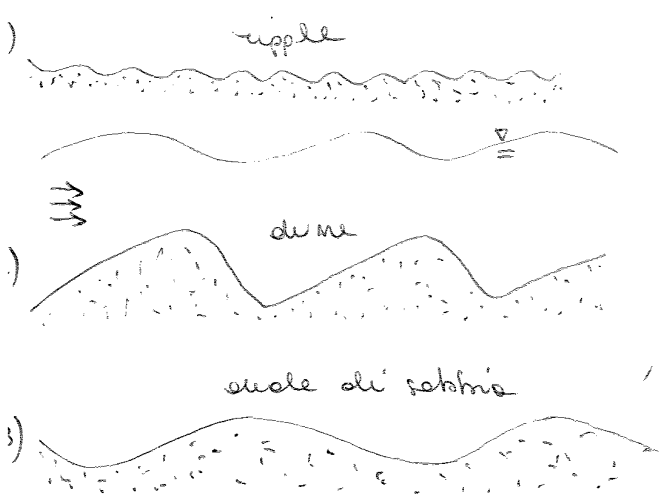
Intensando le microforme che scoloro con la profondità (fondo degli ilvei), mesoforme che scoloro con la larghezza (basse fluviali che possono muoversi verso valle o valle) e macroforme (meandri che formano sempre più e diventare più grandi e a origine verso valle finché non si ha il salto di meandro dette cauche). Altri tipi di macroforme sono i fiumi intrecciati e le forme fluviali.



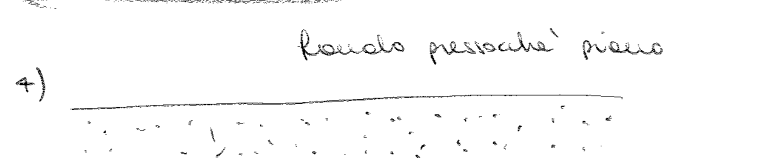
Immaginiamo di partire da una superficie di interazione piatta e con un vento crescente la perturba aumentando la corrente. Inizialmente non c'è trasporto solido perché $\tau_0 < \tau_{0c}$. Intensando superiamo τ_{0c} inizia il vento dei grani e notiamo che il fondo comincia ad erodere delle forme.

Le prime forme che compaiono sono le ripples (ondine). Si formano delle piccole ondoline (sono quelle piccole ondine che si sono in acque basse marine dove l'ultrasonica è piccola). Aumentando la pertubazione ^(cioè la velocità) si creano delle onde di lunghezza d'onda decisamente superiore, per un po' compaiono

le ripples se queste onde lunghe, per le ripples scorrono e restano solo le forme lunghe (si sono formate le dune). Le dune hanno una forma asimmetrica: sono più inclinata verso valle di quanto lo siano verso monte.



Ma se la superficie libera risulta anche erodibile sopra le dune. Le dune si muovono verso valle. Aumentando la velocità le dune si allungano sempre più e pendono il vento di onda di sabbia. Aumentando ancora il fondo diventa inclinato verso.



Le cutidune sono zone da ostension perché ci vogliono frange alte (correnti veloci e generalmente questo richiede alte pendente e richiede molto la resaca di materiale fine (altrimenti non si crebbero queste forme, i massi non si dispergono in questo modo). Ma in contingua ho correnti veloci e materiale grosso, in prova correnti lenti e materiale fine: le cutidune sono difficili da trovare nei usci in condizioni particolari. Per questo sono molto più comuni ripres e dune perché senza correnti lenti e materiale fine (fiumi in piena). Le cutidune si osservano ad esempio all'uscita dagli altipiani dove esiste una distesa di materiale e si verifica all'uscita una resa obiettiva pendente da ostension una corrente lenta.

Le ripres hanno lunghezza di alcuni metri per esistere. Il numero più importante è che il diametro del sedimento sia $d < 0,5 \div 0,6 \text{ mm}$. Questo perché le ripres si formano per infiltrazione fra il settostato viscoso e i sedimenti, se il diametro delle particelle è troppo grande, questo completamente il settostato viscoso e non è manca uno degli effetti della loro uscita (il settostato viscoso). La lunghezza d'onda delle ripres è da $5 \div 50 \text{ cm}$ (λ) e l'ampiezza è $0,5 \div 5 \text{ cm}$ (A).

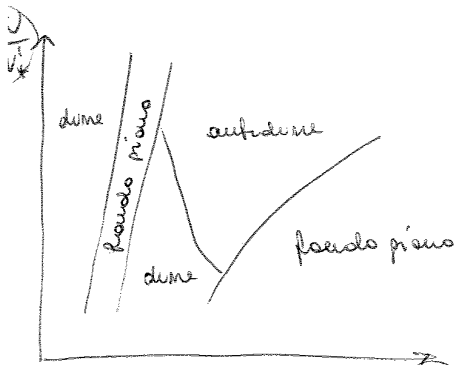
Le dune hanno $\lambda = 50 \text{ cm} \div \text{metri}$, $A = \text{metri}$.

Le cutidune hanno alte dimensioni delle dune.

Le ripres e le dune sono anche sulle neve e in ambienti aridi.

Esistono dei diagrammi pericolosi delle forme di fondo.

Uno dei più utilizzati è quello di Engelund (vedi slide)



V_c divisa da t_0 (legata alla velocità).

Il diagramma è diviso in zone.

Finiamo qui la trattazione delle forme di fondo.

Un modo per classificare i fiumi è quello che suddivide i fiumi in:

- small river
- gravel river
- boulder river
- step-pool river

↓ verso monte

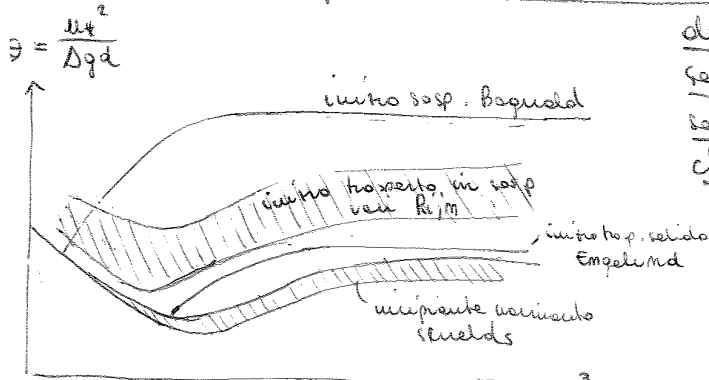
Small (subito) river si hanno nelle zone piatteggianti, senza caratteristiche di pendenza alta (il 1%), materiale fine ($d_s \leq 2 \text{ mm}$), la resaca senza molto alte ($Y/d_s \geq 10^3$). Il fondo è caratterizzato in esclusiva, non bragno aspettare le grandi piatte effetti avverge pubblici al fondo (con la grande piatte si può avere un salto di mescolto o nella la specie non in generale l'effetto morfologico del fondo e stiva sempre) e le tipiche forme sono quelle del regime inferiore (ripres e dune).

TRASPORTO SOLIDO IN SOSPENSIONE

Il trasporto solido in sospensione è quel tipo di moto per cui le particelle più fini vengono trasportate per lunghi tratti (rispetto la lunghezza della profondità in senso alla corrente a seguito di vortici di tubolenze che catturano le particelle solide e le distribuiscono nello spazio (3D) dell'intera corrente. È importante notare la tridimensionalità del moto delle particelle a causa della tubolenza (questa sopravvive in 3D). I fini trasportano l'elemento materiale in sospensione. È importante ci fini della sospensione sia la tubolenza, sia che le particelle siano fini.

Ai nostri fini interessa capire il profilo di concentrazione del materiale in sospensione e quale sia la portata solida del materiale in sospensione. Vogliamo sapere: se prendiamo una sezione d'acqua a diverse profondità dove è maggiore la concentrazione di materiale solido in sospensione? e possiamo avere solo la tubolenza, tenderemo a pensare che il profilo di concentrazione sia più o meno omogeneo (sia lungo la verticale che orizzontalmente).

Forse un disegno in cui è mostrato che superato la fase di moto di incipiente movimento di Shields, ci sono delle curve che evidenziano il trasporto solido in sospensione divenire esteri. Si nota che le curve che evidenziano il trasporto solido in sospensione incipiente, sono fortemente omogenee, Bagnold ed Engelund danno gli estremi.



A parità di D^* si nota che il trasporto solido in sospensione si attiva dopo il trasporto solido sul fondo, cioè per il più alte. Esistono diverse formule che mostrano la portata per il trasporto solido in sospensione.

$$Q_{cr ss} = f \left(\frac{w_s^2}{\Delta \rho d_{50}} \right)$$

w_s è la velocità di caduta in acqua ferma

alla stessa data diverse espressioni:

$$Q_{cr ss} = 0,0625 \left(\frac{w_s^2}{\Delta \rho d_{50}} \right) \quad \text{Engelund}$$

Adoperando le relazioni di bilancio di massa e componente numerica:

$$\tilde{u}_i = U_i + u_i \quad \text{e} \quad \tilde{c} = C + c \quad (1)$$

introducendo e facendo la media (per ottenere il profilo medio di concentrazione)

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial U_x C}{\partial x} + \frac{\partial \langle u_x c \rangle}{\partial x} + \frac{\partial U_y C}{\partial y} - \frac{\partial w_s C}{\partial y} + \frac{\partial \langle u_y c \rangle}{\partial y} + \frac{\partial U_z C}{\partial z} + \frac{\partial \langle u_z c \rangle}{\partial z} = 0$$

Stiamo studiando una concente, cioè la velocità media è solo lungo x, quindi $U_y = U_z = 0$. Inoltre studiamo una concente disturbata dalle spinte che non sente l'effetto di z (trasversale) e quindi $\frac{\partial}{\partial z} \approx 0$, cioè sappiamo il modo preciso. L'equazione diviene:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial U_x C}{\partial x} - \frac{\partial w_s C}{\partial y} = - \frac{\partial \langle u_x c \rangle}{\partial x} - \frac{\partial \langle u_y c \rangle}{\partial y} \quad (4)$$

Inoltre ipotizzando che la concente dovuta al modo medio sia più importante di quella che è dovuta ai flussi turbolenti $\frac{\partial U_x C}{\partial x} \gg \frac{\partial \langle u_x c \rangle}{\partial x}$ quindi:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial U_x C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (w_s C - \langle u_y c \rangle) \quad (5)$$

Vogliamo ricavare $C = C(x, y, t)$, U_x e w_s sono noti, il problema sta nello scrivere la concente $\langle u_y c \rangle$ dove c'è la componente u_y della turbolenza di fronte o le particelle.

Nell'equazione il primo termine tiene conto delle varie temperature, il secondo termine è quello correttivo lungo x, il terzo termine ha il termine correttivo dovuto alla velocità di caduta lungo y e il flusso legato alle correlazioni ha le fluttuazioni della componente turbolenta lungo y e le fluttuazioni di concentrazione.

Bisogna modellare il termine di correlazione.

Ne usciamo ricorrendo ai modelli di diffusione della turbolenza creando quindi di modellare la correlazione in funzione delle variabili macroscopiche mediate. Ricorriamo al modello di diffusione alla Boussinesq, il quale fece questo ragionamento: dicendo si calcolava τ nel modo laminare di un fluido newtoniano si usava alla seguente espressione:

$$\tau = \mu \frac{dU}{dy} \quad (6)$$

introducendo per p i viscosità:

$$\frac{\tau}{p} = \nu \frac{dU}{dy} \quad (7)$$

sappiamo che ci sono le turbolenze che sono essenzialmente quelle di Reynolds che sono tipo:

$$\tau_{turb} = -p \langle u v \rangle \quad (8)$$

e si possono scrivere come una stiffa simile alle Teoreme

$$\tau_{turb} = -p \epsilon_e \frac{dU}{dy} \quad (9) \quad \epsilon_e = \text{eddy viscosity (viscosità turbolenta)}$$