NUMERO: 1889A - ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Casari Silvia

MATERIA: Analisi dei segnali (teoria + esercizi + temi d'esame + tabelle) - Prof. Olmo

SEGNALE

È qualcosa che PORTA UN'INFORMAZIONE
Non sempre un segnale può essere ricondotto a una funzione

La VARIABILE INDIPENDENTE è quasi sempre il tempo

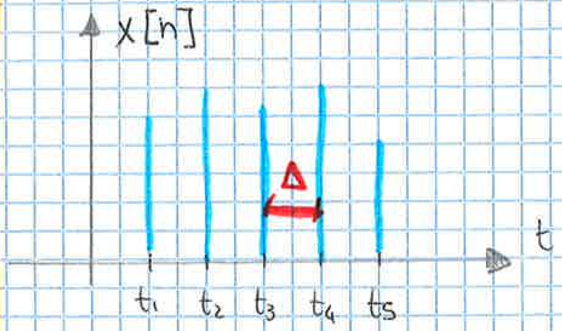
1) TEMPO CONTINUO
2) TEMPO DISCRETO

} Ampiezze DETERMINISTICHE, note

3) PROCESSI CASUALI

Un segnale è di tempo continuo se l'AMPIEZZA è NOTA per QUALUNQUE valore di t

Un segnale è di tempo discreto se esiste solo un insieme di certi valori di t per cui il segnale è definito



Δ → serve per denormalizzare l'asse dei tempi

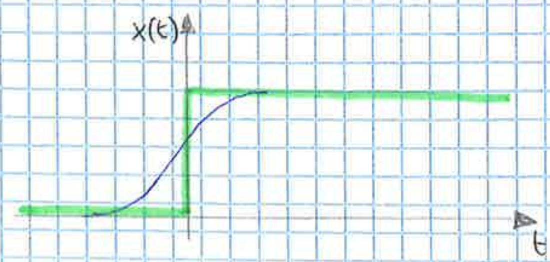
n → asse dei tempi NORMALIZZATO

Con l'asse normalizzato non abbiamo più $\underbrace{x(t)}_{\text{t. continuo}}$, ma $\underbrace{x[n]}_{\text{t. discreto}}$.

es.

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

funzione **GRADINO UNITARIO**



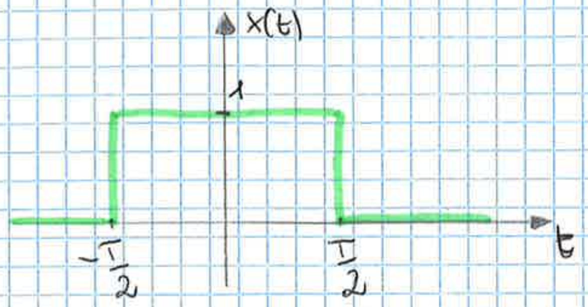
Useremo segnali del genere per MODELLARE segnali fisici

È il modello di un segnale fisico.

es. $x(t) = p_T(t) = \begin{cases} 1 & |t| \le \frac{T}{2} \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases}$

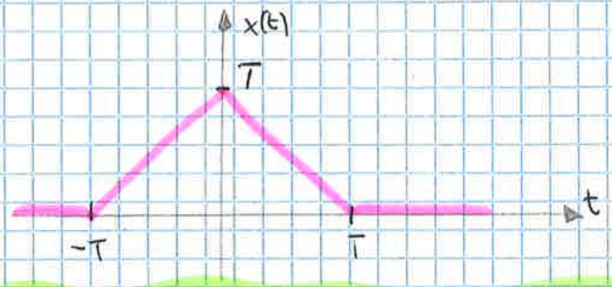
PORTA

(IMPULSO O FINESTRA RETTANGOLARE)



es. $x(t) = \begin{cases} T - |t| & |t| \le T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$

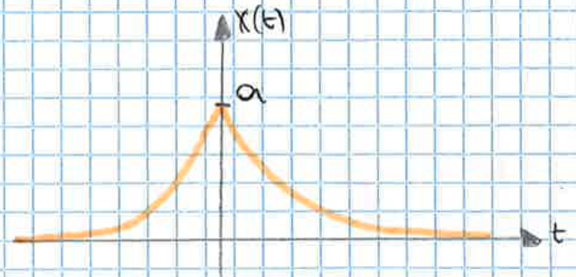
C'è il modulo
⇓
SEGNALE PARI
(disegno una parte e poi la replico)



IMPULSO TRIANGOLARE

es. $x(t) = e^{-a|t|}$ $\quad a$ = costante ≥ 0

ESPONENZIALE BILATERA



es. $x(t) = e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$ $\quad m, \sigma^2$ (varianza) = costanti ≥ 0

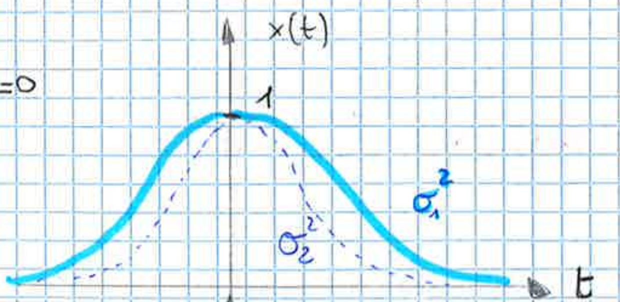
GAUSSIANA

σ grande → decrescita lenta (curva ampia)

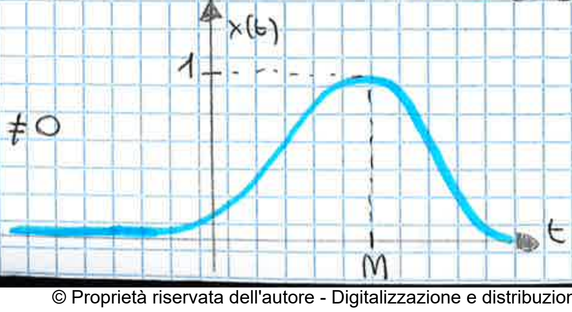
σ piccola → decrescita rapida (curva stretta)

$\sigma_2^2 \le \sigma_1^2$

m = 0



m ≠ 0



② SUPPORTO LIMITATO

es. PORTA

SUPPORTO
intervallo sull'asse dei tempi in cui il segnale è diverso da zero

$x(t) \neq 0$ in $t = [a, b]$ $\quad a, b \neq \pm\infty$

se non verificata

$x(t)$ ILLIMITATO $[-\infty, +\infty]$, $[0, +\infty]$, $[-\infty, 0]$ ...

③ SEGNALE a ENERGIA FINITA

$x(t)$

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

È un'energia che NON ha unità di misura, è NORMALIZZATA

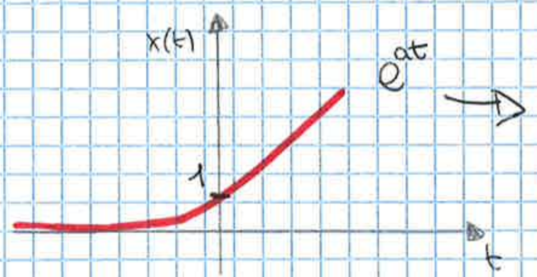
Infatti $x(t)$ può essere qualsiasi cosa

L'esponenziale bilatera converge se integriamo tra $-\infty$ e $+\infty$

↳ è a energia finita

La Gaussiana converge se integro tra $-\infty$ e $+\infty$

↳ è a energia finita



→ NO a energia finita

ENERGIA FINITA
Faccio l'integrale del modulo al quadrato e vedo se converge o diverge

ENERGIA FINITA => SUPPORTO LIMITATO

Il supporto illimitato può essere a ENERGIA FINITA e INFINITA

FUNZIONE PERIODICA => energia INFINITA

SUPPORTO ILLIMITATO
- se CRESCONO ↳ EN. INFINITA
- se DECRESCONO ↳ EN. FINITA

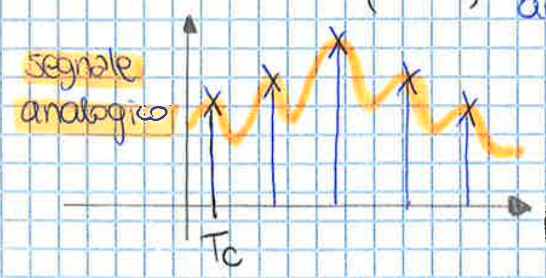
Segnali tempo-discreto (numerici)

$$\boxed{f_c = \frac{1}{T_c}}$$

$x(t) \to x(nT_c)$ forma analogica

f_c → FREQUENZA di campionamento

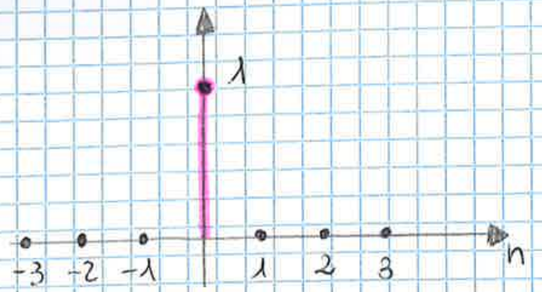
T_c → PASSO di campionamento (intervallo)



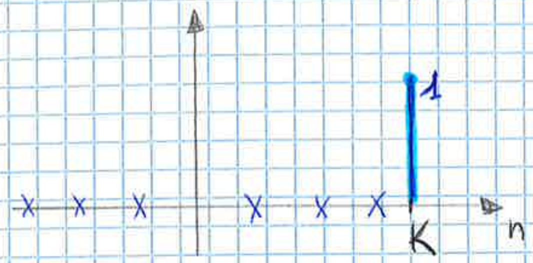
La frequenza di campionamento è misurata in base all'uso di trasmissione

$x[n]$ → indichiamo in questo modo il segnale discreto, omettendo T_c. È normalizzato, perciò uso le [ ]

IMPULSO UNITARIO (DELTA DI KRONECKER)



$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases}$$



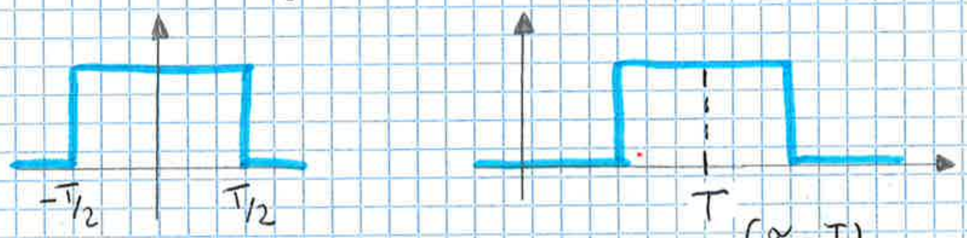
$\delta[n-k]$ traslata

Traslazioni

① TEMPO CONTINUO

può assumere un valore reale qualsiasi

$$x(t) \Rightarrow y(t) = x(t-\tau)$$



$(\tau = T)$

② TEMPO DISCRETO

$$x[n] \Rightarrow y[n] = x[n-k]$$

k = intero

$$x[n] = x[0]\,\delta[n] + x[1]\,\delta[n-1] + \dots = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x[i]\,\delta[n-i]$$

SISTEMI TEMPO-INVARIANTI

Se $\mathcal{L}\{x[n]\} = y[n]$

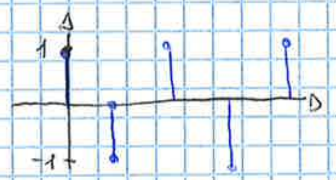
$\mathcal{L}\{x[n \pm k]\} = y[n \pm k]$

* Segnale in ingresso ritardato, uscita uguale, anch'essa ritardata

Se mando un segnale, la risposta ha la stessa forma d'onda

Se mando un segnale fra un'ora, lo fa partire fra un'ora

es. RITARDATORE, QUADRATORE, SOMMATORE } tempo-invarianti



DECIMATORE NO tempo-invar.

SISTEMI LTI → (lineari + tempo-invarianti)

RISPOSTA ALL'IMPULSO

↳ ciò che esce dalla "scatola"

RISPOSTA ALL'IMPULSO $h[n]$

* Uscita del sistema quando all'ingresso è mandato un impulso

$x[n] \rightarrow \boxed{\text{LTI}}_{h[n]} \rightarrow y[n]$

Conoscendo $h[n]$ si riesce ad esaminare l'ingresso

$$x[n] = \sum_{k=}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k]$$

$$y[n] = \mathcal{L}\{x[n]\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k]\right\} =$$

se il sistema NON è lineare mi fermo qui

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\mathcal{L}\{\delta[n-k]\} \leftarrow \text{(linearità)}$$

se il sistema NON è tempo invariante mi fermo qui

Def.

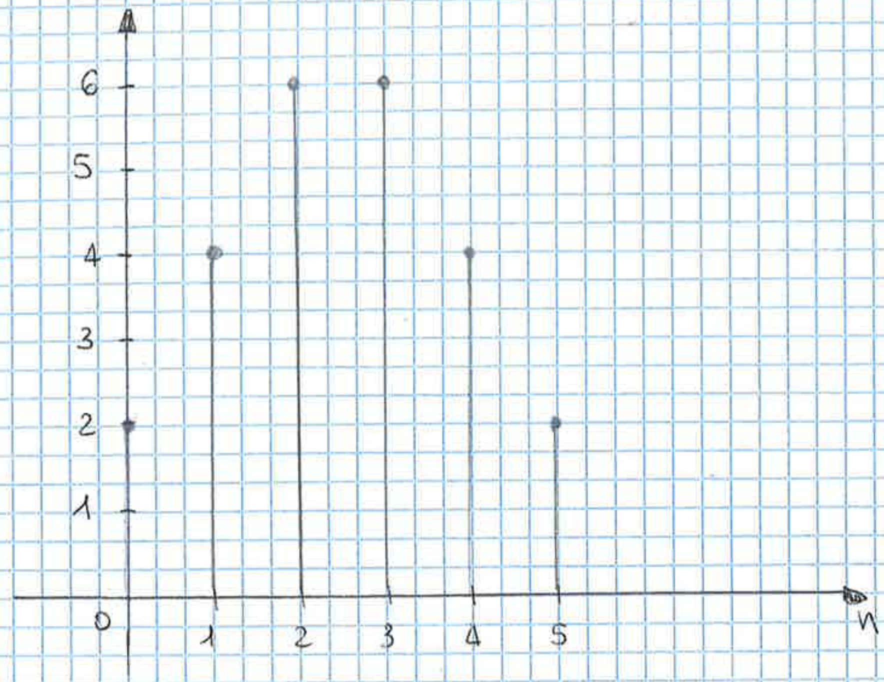
$h[n] \triangleq \mathcal{L}\{\delta[n]\}$ se tempo-invariante $\Rightarrow \mathcal{L}\{\delta[n-k]\} = h[n-k]$

LTI

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k]$$

Il sistema opera solo su $n-k$ poiché $x[k]$ è COSTANTE.

$y[n] = x[n] * h[n]$ → convoluzione discreta



Moltiplico i segnali sovrapposti e li sommo

CONVOLUZIONE CON IMPULSO UNITARIO

$$x[n] * \delta[n] = x[n]$$

$$x[n] * \delta[n-i] = x[n-i]$$

REGOLA DEL SUPPORTO TEMPORALE

Il risultato della convoluzione tra un segnale $x(t)$ con supporto $[A, B]$ e un segnale $y(t)$ con supporto $[C, D]$ è il segnale convoluzione $w(t)$ con supporto $[A+C, B+D]$

$y[n]$: $n=0$ $\quad a_0 x[0] - b_1 \underbrace{\cancel{y[n-1]}}_{0} + b_2 \underbrace{\cancel{y[n-2]}}_{0}$

per la CI

$$y[0] = a_0 x[0]$$

$$y[1] = a_0 x[1] + a_1 x[0] - b_1 y[0]$$

SISTEMI IN SERIE

l'uscita del precedente è l'ingresso del successivo

$$\xrightarrow{x[n]} \boxed{h_1[n]} \xrightarrow{z[n]} \boxed{h_2[n]} \xrightarrow{y[n]}$$

$$\xrightarrow{x[n]} \boxed{h_{eq}[n]} \xrightarrow{y[n]}$$

$h_{eq}[n]$?

Mando il segnale δ ed esce la sua risposta all'impulso

$$\xrightarrow{\delta[n]} \boxed{h_1[n]} \xrightarrow{z[n] - h_1[n]} \boxed{h_2[n]} \xrightarrow{y[n]} = h_{eq}[n]$$

$$\xrightarrow{\delta[n]} \boxed{} \xrightarrow{h_{eq}[n]}$$

$$\boxed{h_{eq}[n] = h_1[n] * h_2[n]}$$

CONVOLUZIONE

Serie

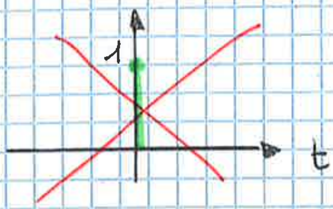
18 Marzo 2015

DELTA DI DIRAC $\delta(t)$

(tempo continuo)

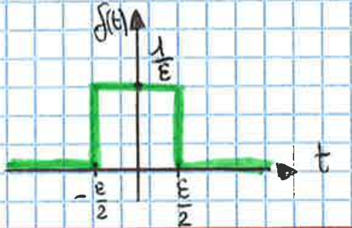
$\delta[n]$ vale 1 in $n=0$, vale 0 in $n \neq 0$

Non esiste una funzione come $\delta[n]$



$\nexists$ come funzione!

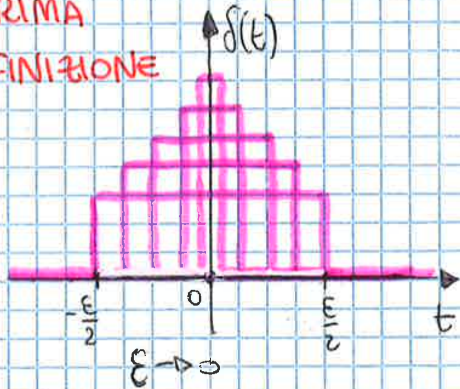
Ciò che più si avvicina è una PORTA MOLTO PICCOLA!



PORTA CON SUPPORTO MOLTO PICCOLO

$$\boxed{\delta(t) \triangleq \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} p_\varepsilon(t)}$$

PRIMA DEFINIZIONE

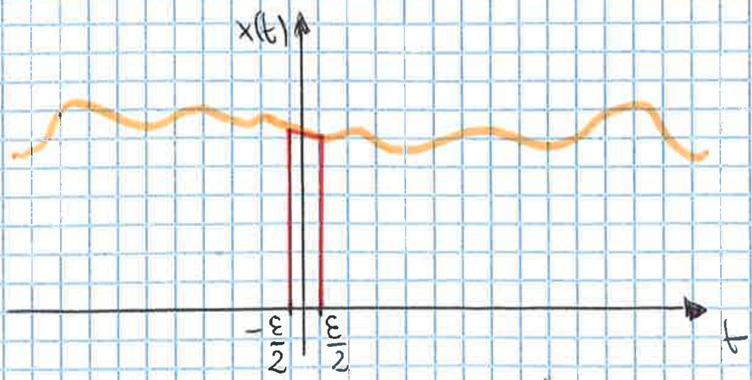


Più stringo il supporto, più la porta è alta

$\delta(t)$ è un limite di successioni di funzioni il cui risultato NON è PIÙ UNA FUNZIONE

→ è una DISTRIBUZIONE

$\left(x[n] = \sum x[k]\, \delta[n-k] \right.$ RISPOSTA ALL'IMPULSO $\left. \right)$



$x(t) \cdot p_\varepsilon(t) \simeq x(0) \cdot p_\varepsilon(t)$

se ε è piccolo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, \delta(t-\tau)\, d\tau = x(t)$$

La **δ di Dirac È PARI**

(In realtà non essendo una funzione non potrebbe essere pari)

$$\lambda[n] = \sum x[k]\, \delta[n-k]$$ ← ricorda molto questa funzione

SEGNALE T. CONTINUO → integrale
SEGNALE T. DISCRETO → sommatoria

RISPOSTA ALL' IMPULSO (QUANDO ALL'INGRESSO HO δ di Dirac)

Uscita del sistema quando all'ingresso c'è $\delta(t)$

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{h(t)} \xrightarrow{y(t)} \qquad \underbrace{h(t)}_{\text{RISPOSTA ALL' IMPULSO}} \triangleq \mathcal{L}\{\delta(t)\}$$

$$y(t) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, \delta(t-\tau)\, d\tau\right\}$$

Se il sistema NON è lineare mi fermo qui.
Se è lineare: ($\int$ e $x(\tau)$ sono lineari)

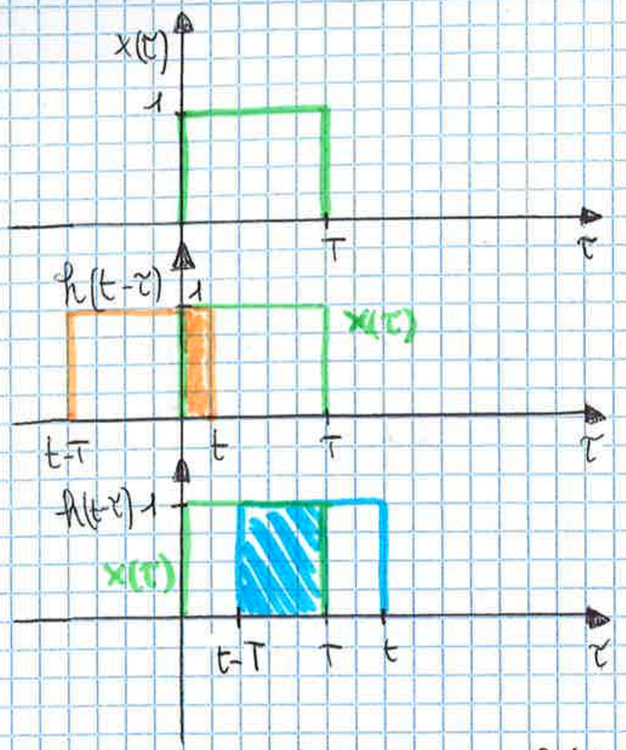
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \mathcal{L}\{\delta(t-\tau)\}\, d\tau$$ → se NON è tempo invariante mi fermo qui

Se è tempo-invariante

$$h(t) = \mathcal{L}\{\delta(t)\}$$
$$\Downarrow$$
$$\mathcal{L}\{\delta(t-\tau)\} = h(t-\tau)$$

$$= \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = y(t) = x(t) * h(t)}$$ CONVOLUZIONE tra 2 segnali

CONVOLUZIONE nel tempo continuo



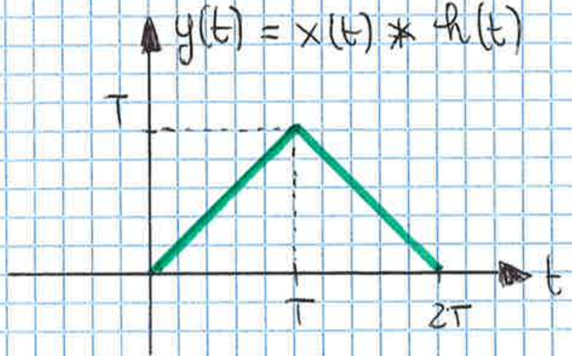
Prodotto: dove entrambe sono 1
↳ = 1
dove una è nulla
↳ = 0

$0 < t < T$

$y(t) = t$ → AREA = base × altezza

$T < t < 2T$

$y(t) = 2T - t$ → AREA = b × h



$x(t)$ → supporto T

$h(t)$ → supporto T

$y(t)$ → supporto $T + T = 2T$

Il supporto della convoluzione è la somma dei supporti dei segnali

F.Z. COMPL. { Per la convergenza vale solo la parte reale

TRASFORMATA DI LAPLACE

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$\mathbb{C} \ni s = \underbrace{\sigma}_{Re} + j\underbrace{\omega}_{Im} = \sigma + j\,2\pi f$$

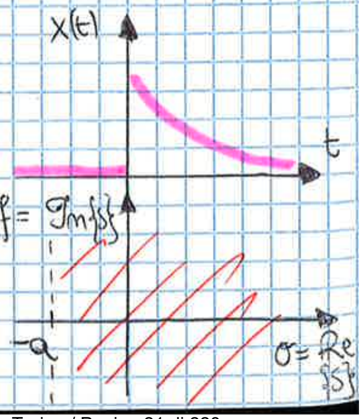
La trasformata di Fourier è la trasformata di Laplace in un sottoinsiem

$x(t) = e^{-at}\, u(t)$

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-at}\, e^{-st}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t}\, dt$$

$$= \frac{1}{a+s} \quad \text{valido per } \sigma > -a$$

Se $\sigma = 0 \Rightarrow$ FOURIER



Le trasformate di Fourier a volte sono delle DISTRIBUZIONI.

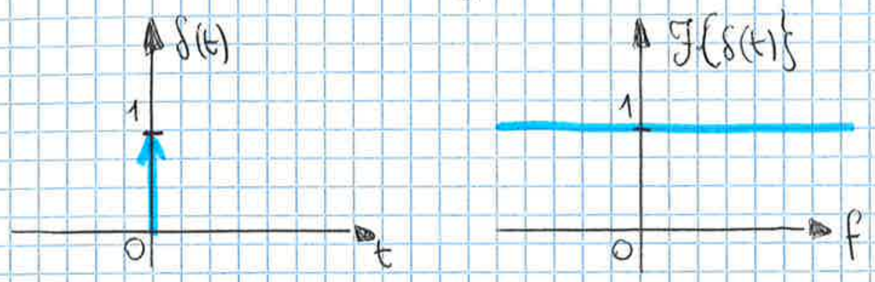
TRASFORMATA DI FOURIER DEL DELTA DI DIRAC

$\mathcal{F}\{\delta(t)\}$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt = 1$$

NON NUMERO, ma funzione costante

$e^{j2\pi ft}$



Tanto più un segnale è stretto nel dominio del tempo, tanto più è larga la trasformata nel dominio della frequenza

25 Marzo 2015

... continuo TRASFORMATA DI FOURIER

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt \qquad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi ft}\, df$$

condizione sufficiente (NON necess.) $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt < \infty$

Non bisogna calcolare gli integrali => tabelle

PRINCIPALI PROPRIETÀ

1) Linearità

$$\mathcal{F}\{(a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\} = a_1 X_1(f) + a_2 X(f)$$

Se devo fare la trasformata di 2 segnali cerco sulla tavola e poi uso questa proprietà

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 228

4) Modulazione

NO MODULAZIONE

Posso centrare la trasformata dove voglio

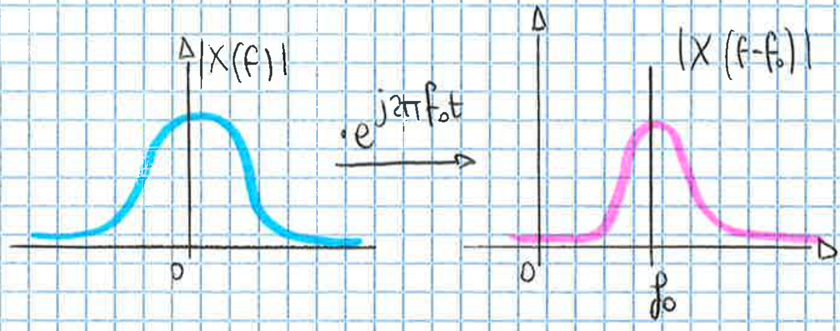
$$x(t) \longleftrightarrow X(f)$$

$$y(t) = x(t)\, e^{j2\pi f_0 t}$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x(t)\, e^{j2\pi f_0 t}}_{y(t)}\, e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi (f-f_0)t}\, dt = X(f-f_0)$$

Funzione complessa
↳ disegno il modulo



UMTS → 1,8 GHz

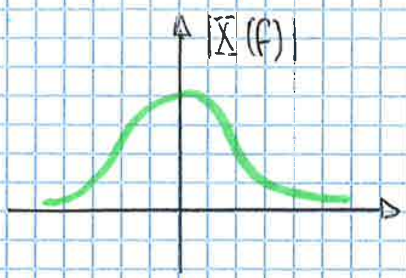
---

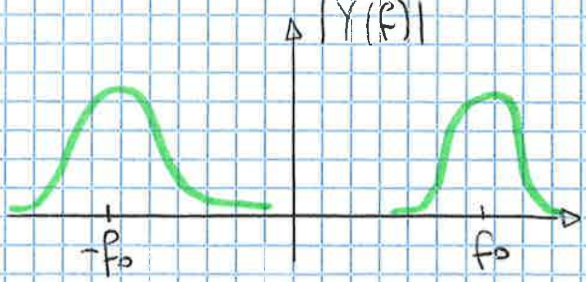
26 Marzo 2015

4) Modulazione

$$y(t) = \underbrace{x(t)\cos(2\pi f_0 t)}_{\text{segnale reale}} = x(t)\,\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}$$

$$Y(f) = \frac{1}{2}\left\{X(f-f_0) + X(f+f_0)\right\}$$





6) Convoluzione

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$x(t) \longleftrightarrow X(f)$

$h(t) \longleftrightarrow H(f)$

stessa cosa

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f) \quad = \quad y(t) = x(t) * h(t)$$

scambio l'ordine di integrazione

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \right] e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \right] d\tau =$$

Moltiplico e divido per $e^{j2\pi f \tau}$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\, e^{-j2\pi f (t-\tau)}\, dt \right] e^{-j2\pi f \tau}\, d\tau =$$

$t - \tau = \alpha$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\, e^{-j2\pi f \alpha}\, d\alpha \right] e^{-j2\pi f \tau}\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, H(f)\, e^{-j2\pi f \tau}\, d\tau = H(f) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, e^{-j2\pi f \tau}\, d\tau \right] =$$

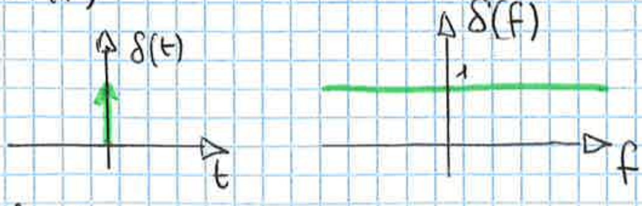
$$= X(f) \cdot H(f)$$

$H(f) \rightarrow$ FUNZIONE DI TRASFERIMENTO o RISPOSTA IN FREQUENZA del sistema LTI

$x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$ (segnale sinusoidale in ingresso)

$\hookrightarrow Y(f) = H(f) \cdot X(f)$

$X(f)$?



$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$

$\mathcal{F}\{1\} = \delta(f)$

} dualità

$\mathcal{F}\{1 \cdot e^{j2\pi f_0 t}\} = \delta(f - f_0)$ [modulazione]

Qual è la risposta del sistema a:

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}$$

Y(f)

$$Y(f) = \frac{1}{2} H(f_0)\,\delta(f-f_0) + \frac{1}{2} H(-f_0)\,\delta(f+f_0)$$

supponiamo che $h(t)$ sia REALE e torniamo nel DOMINIO DEL TEMPO

$$y(t) = \frac{1}{2}\left\{ H(f_0)\, e^{j2\pi f_0 t} + H(-f_0)\, e^{-j2\pi f_0 t} \right\}$$

$$H(f) = M(f)\, e^{j\varphi(f)} \qquad (h(t) \text{ reale})$$

$$H(f_0) = M(f_0)\, e^{j\varphi(f_0)}$$

$$H(-f_0) = M(f_0)\, e^{-j\varphi(f_0)}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} M(f_0) \left\{ e^{j[2\pi f_0 t + \varphi(f_0)]} + e^{-j[2\pi f_0 t + \varphi(f_0)]} \right\} =$$

$$= M(f_0) \cos\left[2\pi f_0 t + \varphi(f_0)\right]$$

Ingresso → sinusoide reale

Uscita → stessa sinusoide con la stessa frequenza, ma modificata in MODULO e FASE da $H(f_0)$

Il COSENO è un' AUTOFUNZIONE del sistema se e solo se $H(f_0)$ è REALE

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 228

9 aprile 2015 (NON C'ERO)

SISTEMI CONTINUI

$y(t) = \overset{\text{segnale}}{x(t)} * h(t)$ (LTI)

$Y(f) = X(f) * H(f)$ (LTI)

le trasformate di $x(t)$ e $h(t)$ devono esistere => esiste anche la trasformata di $y(t)$

Se non specifichiamo si parla di sistemi LTI

Quando H(f) esiste? - Condizioni di fisica realizzabilità -

Quando i sistemi sono REALI e CAUSALI

1) Sistemi REALI

Hanno RISPOSTA ALL'IMPULSO REALE => $h(t)$ reale

Se il sistema è reale: $H(f)$ (non è detto che sia reale)

$H(f) = M(f)\, e^{j\varphi(f)}$

MODULO PARI $\quad M(-f) = M(f)$

FASE DISPARI $\quad \varphi(-f) = -\varphi(f)$

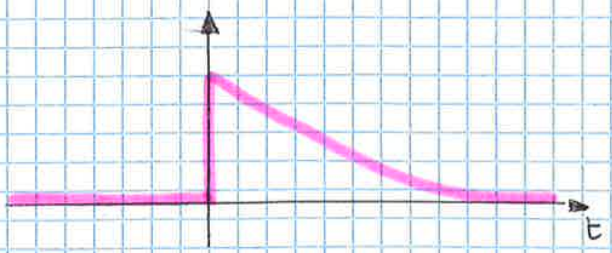
parte significativa parte positiva (freq. negative non significative)

2) C'è un'altra condizione: il sistema deve essere CAUSALE ovvero NON RISPONDE prima di ricevere la SOLLECITAZIONE ($\delta(t)$ quando parliamo di risposta all'impulso)

Condizione di causalità: $h(t) = 0 \quad \forall t < 0$ --> NON PARI

Qual è la conseguenza su $H(f)$?

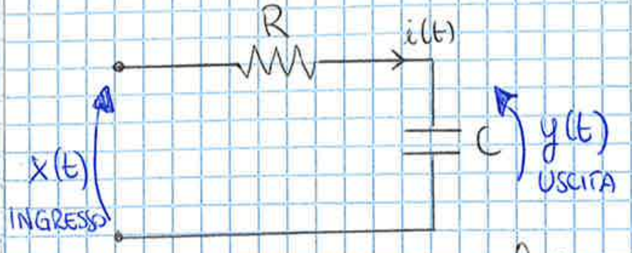
↳ $H(f)$ NON è REALE ($H(f)$ è reale se $h(t)$ è reale e pari)



REALE
CAUSALE $\Big\}$ => sistemi fisicamente realizzabili

esempio FILTRO RC

(LTI, fisicamente realizzabile, stabile)



$h(t)$?

$H(f)$?

lavoriamo in frequenza

$H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ (per definizione) Ma posso NON passare da $h(t)$?

$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$ relazione ingresso/uscita

$\Rightarrow H(f) = \dfrac{Y(f)}{X(f)}$

stessa corrente che passa nel condensatore

$$x(t) = y(t) + R \cdot i(t) = y(t) + RC \frac{dy(t)}{dt}$$

$$\mathcal{F} \downarrow \quad X(f) = Y(f) + RC\, j2\pi f\, Y(f)$$

" proprietà della DERIVATA (anche sulle tavole)

$$X(f) = Y(f)\left[1 + j2\pi f RC\right]$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{1}{1 + j2\pi f RC} = \frac{\frac{1}{RC}}{\frac{1}{RC} + j2\pi f}$$

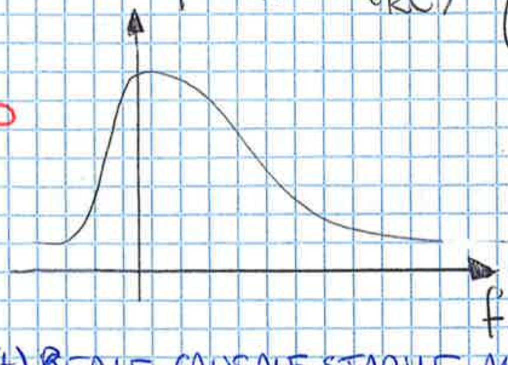
dalle tavole: $H(f) = \dfrac{1}{a + j2\pi f}$ $\quad h(t) = e^{-a(t)} u(t)$

$$a = \frac{1}{RC} \qquad h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC} t} u(t)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{-j2\pi f}$$

$$|H(f)|^2 = \left(\frac{1}{RC}\right)^2 \frac{1}{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + (j2\pi f)^2}$$

FILTRO PASSA BASSO



$H(f)$ PARI, Modulo DISPARI, $h(t)$ REALE, CAUSALE, STABILE, MODULO INTEGRABILE

15 aprile 2015

DIMOSTRIAMO CHE È UGUALE INTEGRARE NEL TEMPO O IN FREQUENZA

Partiamo dall' UGUAGLIANZA DI PARSEVAL

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x^*(t)\, dt$$

$$x^*(t) \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(\varphi)\, e^{-j2\pi\varphi t}\, d\varphi$$

$$x(t) \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df$$

Andiamo a sostituire e otteniamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(\varphi) \cdot e^{-j2\pi\varphi t}\, d\varphi\, df\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, X^*(\varphi)\, e^{j2\pi (f-\varphi) t}\, df\, d\varphi\, dt =$$

Iniziamo a integrare in dt. Porto tutto fuori e risolvo a parte in dt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{j2\pi (f-\varphi)t}\, dt = \delta(f-\varphi)$$

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$$

$$\mathcal{F}\{1\} = \delta(f)$$

Ora lo vado a sostituire

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, X^*(\varphi)\, \delta(f-\varphi)\, df\, d\varphi = \qquad ?\ \varphi = f\ ?$$

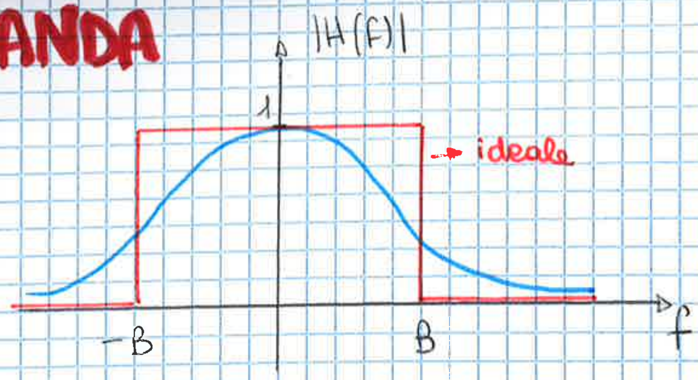
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, X^*(f)\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

PARSEVAL GENERALIZZATO

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, y^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, Y^*(f)\, df$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 228

BANDA



FILTRO PASSA BASSO (FILTRO RC)
(NON IDEALE)

La BANDA ASSOLUTA valore oltre il quale è nulla.

- banda al 90 % (95%, 99 %)

$$\int_{-B_{90}}^{B_{90}} |H(f)|^2 df = 0{,}9 \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df$$

dipende dal valore Q % richiesto

Identifico il valore di frequenza tale per cui il 90% di energia sta confinata all'interno di quel valore (ERRORE MINIMO)

Più è grande questo numero, più si sposta B

- banda a 3 dB

Valore di frequenza alla quale il valore di $|H(f_0)|^2$ si è ridotto di 3dB (=> alla metà di H(0)) rispetto al valore di picco

$f_0 = B_{3dB}$

$$\boxed{|H(f_0)|^2 = \frac{1}{2} |H(0)|^2}$$

PRINCIPIO DI INDETERMINAZIONE

Se $h(t)$ è LIMITATO nel tempo, $H(f)$ è ILLIMITATO in FREQUENZA.

Banda 20 dB (non esiste, solo per l'esercizio)

$$-20\,dB \Rightarrow 10 \log \left| \underbrace{\frac{H(B_{20})}{H(0)}}_{\eta^2} \right|^2 = -20$$

$$20 \log \eta = -20$$

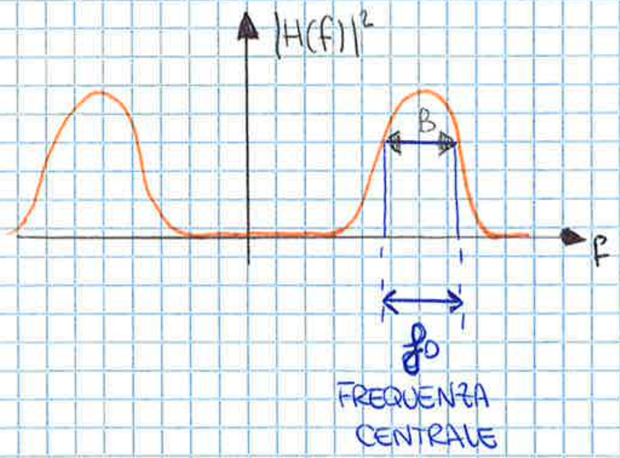
$$\eta = \frac{1}{10}$$

$$\underbrace{\frac{e^{-2\frac{B_{20}^2}{B^2}}}{1}}_{\eta^2} = \frac{1}{100}$$

BANDA UNILATERA → consideriamo la banda a destra, POSITIVA (banda 20 Hz → da 0 a B)

BANDA BILATERA → il doppio della banda UNILATERA (banda 40 Hz → da -B a 0 e da 0 a B)
Non porta informazioni importanti la banda negativa, perciò la bilatera è meno usata

FILTRO PASSA BANDA



Generalmente, se non viene specificato nulla si intende considerare le BANDE UNILATERE

SERIE DI FOURIER - introduzione

Consideriamo dei segnali appartenenti a un determinato spazio vettoriale

$$x(t),\ y(t) \rightarrow x, y \in X$$

Definiamo la DISTANZA tra $x, y \in X$ come $d(x,y)$. Proprietà:

1) $d(x,y) \geq 0$
2) $d(x,y) = d(y,x)$
3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

n = dimensione dello spazio vettoriale

$\|x\| \geq 0$

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

Scegliamo come norma la distanza

$$\|x-y\| = d(x,y)$$

$$\Downarrow$$

$$\|x\| = d(x,0)$$

- Spazio vettoriale di segnali $\mathcal{X}$

NORMA: $\|x-y\| = d(x,y)$

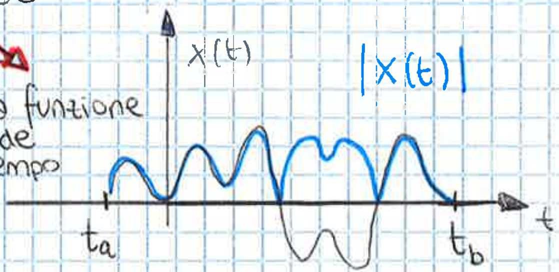
NORMA L^2

$$\|x\| = d(x,0) = \sqrt{\int_{t_a}^{t_b} |x(t)|^2 \, dt} = \sqrt{\mathcal{E}_x} \quad \text{distanza dall'origine}$$

NORMA $\neq$ MODULO

NORMA: è un numero reale e positivo

MODULO: è una funzione dipende dal tempo



- **PRODOTTO SCALARE**

$$\boxed{(x,y) = \int_{t_a}^{t_b} x(t)\, y^*(t)\, dt}$$

$(\cdot , \cdot)$ indica il prodotto SCALARE

$\|x\|^2 = (x,x)$ prodotto scalare di x per se stessa

$$\boxed{\|\underbrace{(x,y)}_{\text{prodotto scalare}}\|^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2}$$

DISUGUAGLIANZA DI SWARTZ

es. $x(t)$

$y(t) = k\, x(t)$

$$\int_{t_a}^{t_b} x(t)\, y^*(t)\, dt = k^* \int_{t_a}^{t_b} x(t)\, x^*(t)\, dt = k^* \|x\|^2$$

Due segnali sono PARALLELI se vale la disug. di Swartz col segno =

ovvero UGUALI A MENO DI UNA COSTANTE MOLTIPLICATIVA

$f_0 = \frac{1}{T}$ FREQUENZA FONDAMENTALE

$n = 0 \rightarrow$ costante tra $-\frac{T}{2}$ e $\frac{T}{2}$

$n = 1 \rightarrow e^{-j\frac{2\pi t}{T}}$ Re $\cos(\ )$ Im $\sin(\ )$ ma tra $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$

=> un ciclo completo; è un PEZZO DI SINUSOIDE $f = \frac{1}{T}$

POTENZA MEDIA

$$\boxed{P_x = \lim_{a \to \infty} \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} |x(t)|^2 \, dt}$$

se diverge NON lo studiamo

se CONVERGE → POTENZA MEDIA

Se l'energia è finita → potenza $= 0$

Se il segnale è periodico lavoriamo solo su 1 periodo (va bene anche tra 0 e T, tra 10T e 11T ...)

$$\boxed{P_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \, dt}$$

SEGNALI PERIODICI

22 aprile 2015

... Sviluppi in serie di Fourier

X = segnali definiti in $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ (non per forza a supporto limitato)

↳ base ortonormale $\left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j\frac{2\pi n}{T}t} \right\}_{n=-\infty}^{+\infty} = \varphi_n(t)$

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{e^{j\frac{2\pi n t}{T}}}_{\varphi_n} \cdot \underbrace{e^{-j\frac{2\pi m t}{T}}}_{\varphi_m^*} \, dt$$

← prodotto scalare

$n = m \rightarrow \|\varphi_n(t)\|^2 = 1 \rightarrow$ {stiamo facendo il prod. scalare di un segnale con sé stesso ovvero l'energia

$n \neq m \rightarrow \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j\frac{2\pi(n-m)t}{T}} \, dt = 0$

anche se n va da 0 a $+\infty$ è ortonormale, ma NON SARÀ COMPLETA (per esserlo => n da $-\infty$ a $+\infty$)

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \varphi_n(t) \quad , \quad a_n = (x(t), \varphi_n(t))$$

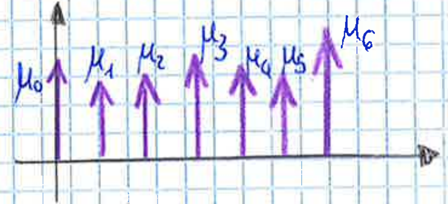
$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\frac{2\pi n t}{T}} e^{-j2\pi f t} \, dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi\left(\frac{n}{T}-f\right)t} \, dt$$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n \, \delta\left(f-\frac{n}{T}\right)$$

$$\mu_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-j\frac{2\pi n t}{T}} \, dt$$

Un segnale PERIODICO ha lo SPETTRO A RIGHE perché la sua trasformata di Fourier è la SOMMA PESATA



23 aprile 2015

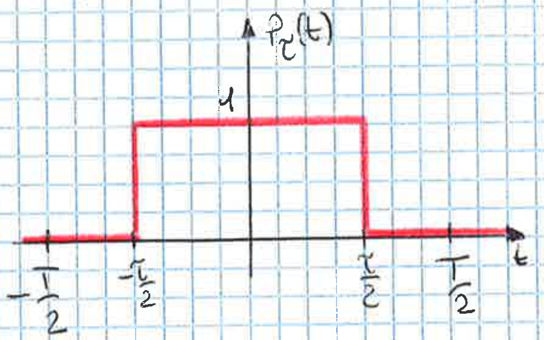
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{j\frac{2\pi n t}{T}}$$

coefficiente

$$\mu_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-j\frac{2\pi n t}{T}}$$

definita su $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$

Supporto di definizione delle serie di Fourier



$$\mathcal{F}\{P_\tau(t)\} = \frac{\sin(\pi f t)}{\pi f}$$

$$\mu_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} P_\tau(t)\, e^{-j\frac{2\pi n t}{T}} \, dt =$$

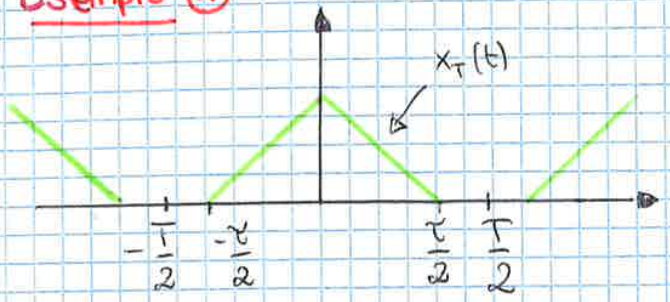
$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\frac{2\pi n t}{T}} \, dt =$$

$$= \frac{1}{T} \, 2\int_{0}^{T/2} \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt =$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 228

La trasformata di Fourier e le serie di Fourier sono la stessa cosa, ma scritte in modo diverso: per entrambe uso le tabelle (Non c'è bisogno di fare l'integrale per le serie).

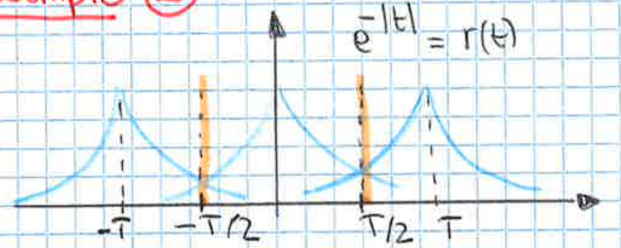
Esempio (1)



Il segnale troncato sta sulle tavole → TRIANGOLO

$$\sum_n (\alpha_n)\,\delta\left(f-\frac{n}{T}\right)$$

Esempio (2)



Segnale periodico se si ripete da $-\infty$ a $+\infty$. (da 0 a $+\infty$ NO)

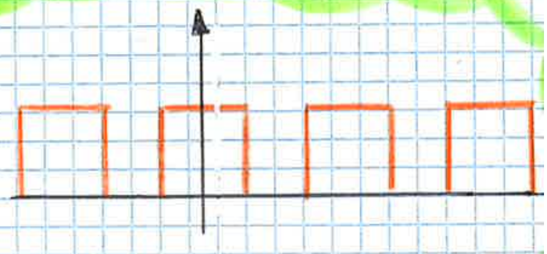
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r(t-nT)$$

TRENO DI δ

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$ è periodico

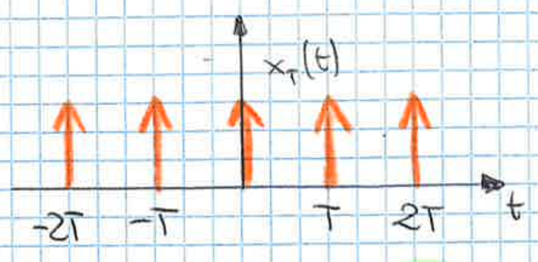
⇓

Spettro a righe

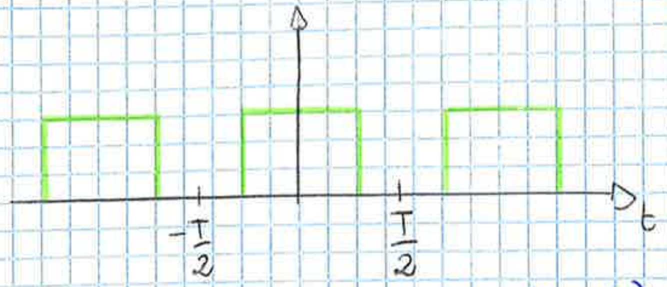


$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n\,\delta\left(f-\frac{n}{T}\right)$$

La trasformata del treno di delta è ancora un treno di δ, ma nella frequenza



$X_T(f) = 1 \longrightarrow \alpha_n = \frac{1}{T}$



$$P_x = \lim_{a \to +\infty} \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} |x(t)|^2 \, dt \overset{\text{(segnale per.)}}{=} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \, dt$$ potenza media

CALCOLO POTENZA MEDIA DI UN SEGNALE PERIODICO

$$x(t) = \sum \mu_n e^{j\frac{2\pi n t}{T}}$$

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_n \sum_m \mu_n \mu_m^* e^{j\frac{2\pi(n-m)t}{T}} \, dt = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\mu_n|^2 \cdot T$$

$$= \sum_n |\underbrace{\mu_n}_{\text{coeff. di Fourier dei segnali periodici}}|^2$$

La potenza MEDIA di un segnale periodico è data dalla somma del modulo quadro dei coeff. di Fourier.

$$X(f) = \sum \mu_n \, \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

serie di Fourier - segnale troncato -

$$P_x = \sum |\mu_n|^2$$

Così come $\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) \, df = \mathcal{E}_x$ (spettro)

allora cerchiamo $G_x(f) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f) \, df = P_x$

$$G_x(f) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\mu_n|^2 \, \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$ Spettro di POTENZA

$$\int G_x(f) \, df = P_x = \underbrace{\sum |\mu_n|^2 \cdot 1}$$ risultato dell'integrazione

29 aprile 2015

Segnali periodici → energia infinita

$$P_x = \lim_{a \to \infty} \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} |x(t)|^2 dt$$

PERIODICO $\to \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\mu_n|^2$$

$$G_x(f) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\mu_n|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f)\, df = P_x$$

1) $x(t) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow y(f)$

2) $\mathcal{F}^{-1}\{G_x(f)\}$?

1) $x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$

$$X(f) = \sum \mu_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \qquad Y(f) = H(f) \cdot X(f)$$

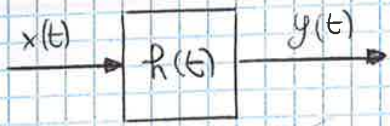
$$= H(f) \cdot \sum \mu_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = H(f) X(f) =$$

$$= \sum \underbrace{\mu_n H\left(\frac{n}{T}\right)}_{\nu_n} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

$$G_y(f) = \sum |\nu_n|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = |H(f)|^2$$

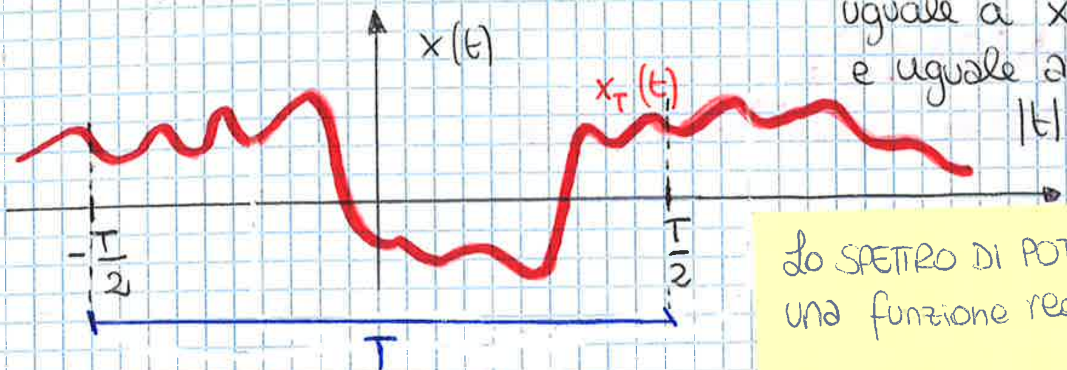
30 aprile 2015

... continuo ANALISI ARMONICA GENERALIZZATA



Fissiamo un intervallo $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ e definiamo un Segnale TRONCATO $x_T(t)$ come uguale a $x(t)$ per $|t| \leq \frac{T}{2}$ e uguale a 0 per $|t| > \frac{T}{2}$

$\cancel{Y(f) = H(f)\,X(f)}$ non esiste



Lo SPETTRO DI POTENZA è una funzione reale

Se $x(t)$ è REALE

$G_x(f) \rightarrow$ sarà PARI

$x_T(t) \rightarrow$ è REALE

$X_T(f) \rightarrow$ ha MODULO PARI e FASE DISPARI

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

$X(f)$ NON ESISTE perché NON è periodico e ha supporto illimitato

$X_T(f) = \mathcal{F}\{x_T(t)\}$ esiste la trasformata del segnale troncato

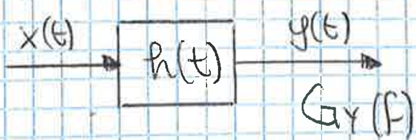
$\frac{|X_T(f)|^2}{T}$ PERIODOGRAMMA

$$\boxed{G_x(f) \triangleq \lim_{T \to +\infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T} = \lim_{T \to +\infty} S_T(f)}$$

DENSITÀ SPETTRALE o SPETTRO DI POTENZA di segnali NON periodici

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f)\, df = P_x$

2)



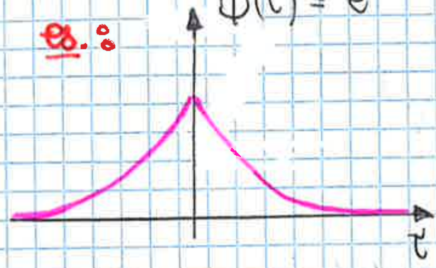
$G_y(f) = G_x(f)\,|H(f)|^2$

Lo spettro di potenza del segnale in uscita dipende dallo spettro di potenza del segnale in entrata

$$\Phi_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{G_x(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f)\, e^{j2\pi f\tau}\, df$$

P_x ?

es.: $\Phi(\tau) = e^{-|t|}$

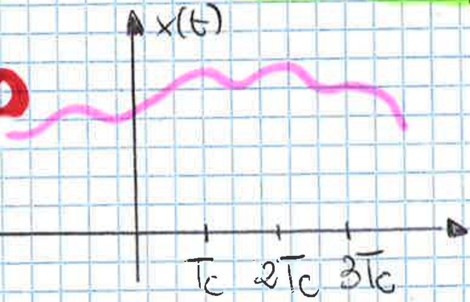


Calcolo $G_x(f)$ dalle tavole $G_x(f) = \frac{2}{2+4\pi^2 f^2}$

1. Uso la definizione
2. $P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f)\,df$
3. $P_{x\tau} = \Phi_x(0)$

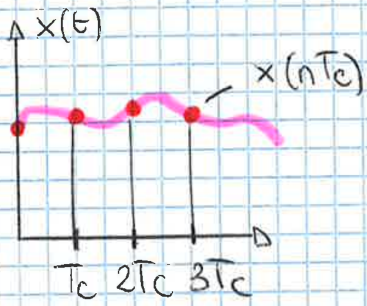
$$\Phi_x(0) = \mathcal{F}^{-1}\{G_x(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f)\, e^{j2\pi f 0}\, df = P_x$$

SEGNALE ANALOGICO



$T_c \rightarrow$ intervallo di campionamento

Il CAMPIONAMENTO è il primo passo verso il segnale DISCRETO



Consideriamo il segnale ogni T_c secondi. Tiriamo fuori un punto ogni T_c e "buttiamo via" il resto, ovvero ciò che è compreso tra gli estremi di ogni intervallo lo dimentichiamo.

CAMPIONAMENTO IDEALE

TRENO DI δ

$$x_c(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_c) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c)\, \delta(t - nT_c)$$

Ipotizziamo che esista la trasformata di x campionato di t; vale:

$$X_c(f) = \frac{1}{T_c} X(f) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_c}\right) \rightarrow \text{trasformata treno di delta}$$

$$= \frac{1}{T_c} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T_c}\right)$$

CAMPIONARE $\rightarrow$ vuol dire applicare il treno di δ
qual è il suo effetto sulla trasformata? Si ottengono INFINITE REPLICHE

Il CAMPIONAMENTO trattiene il segnale solo dove c'è la δ
ANTITRASFORMANDO il segnale campionato si ottiene la CURVA PRECEDENTE

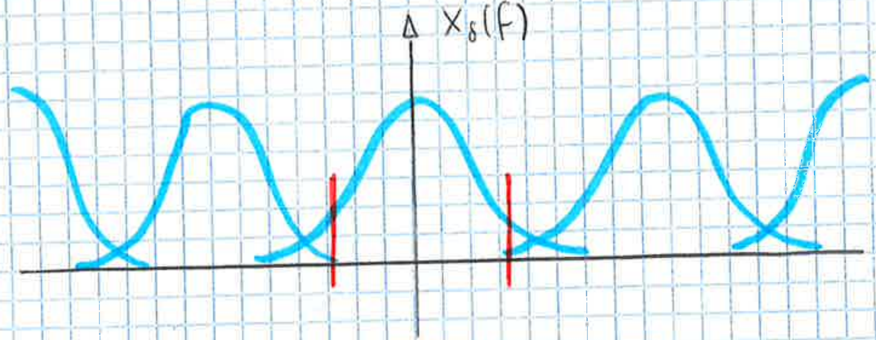
INTERPOLATORE IDEALE → funzione attraverso la quale i segnali che soddisfano Nyquist vengono ricostruiti in modo perfetto.

$h(t)$ è un sinc ($H(f)$ è un FILTRO PASSA BASSO IDEALE)

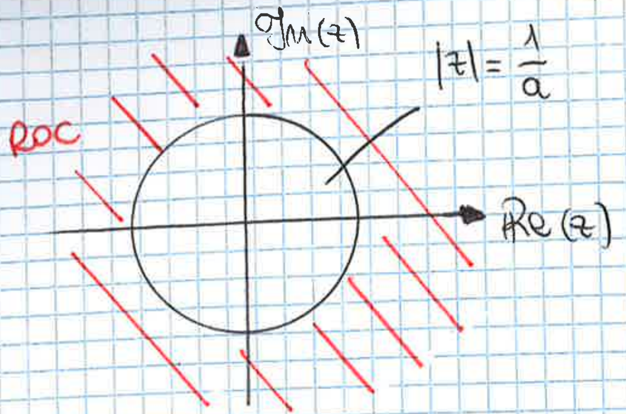
ALIASING

Quando NON viene rispettato il VINCOLO DI NYQUIST, ovvero quando $f_c < 2B_x$ si verifica un SOTTOCAMPIONAMENTO.

Le repliche adiacenti a quella centrale creano una distorsione del segnale originale ora divenuto NON PIÙ FEDELE.



Le "codine" della funzione non terminano a | ma sono infinite e si vanno a sommare → errore diffuso



REGIONE DI CONVERGENZA della trasformata zeta

TRASFORMATA ZETA:
è una trasformazione che associa ad ogni segnale $x[n]$ un'opportuna funzione a variabile complessa $X(z)$ definita su una corona circolare

7 Maggio 2015

$$x[n] \rightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n} \qquad z \in \mathbb{C}$$

$\downarrow$ ROC

La trasformata zeta è BIUNIVOCA

$x[n] = a^n u[n]$ (causale: 0 $n<0$)

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a^n z^{-n}}_{(az^{-1})^n} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

Gli zeri del NUMERATORE sono ZERI

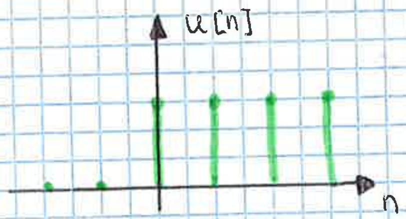
Gli zeri del DENOMINATORE sono POLI

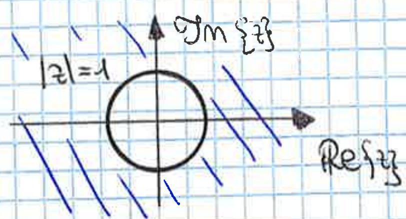
$|az^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > a$ ROC

- $x[n] = u[n]$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

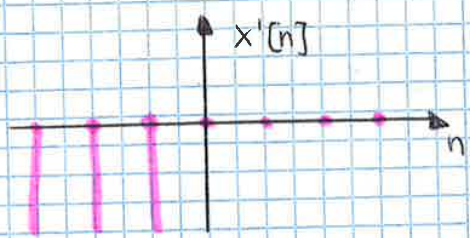
$|z| > 1$ ROC





GRADINO ANTICAUSALE

$$x'[n] = \begin{cases} 0 & n \geq 0 \\ -1 & n<0 \end{cases}$$



$-n = m$

$$X'(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^{-n} = -\sum_{m=1}^{\infty} z^{m} =$$

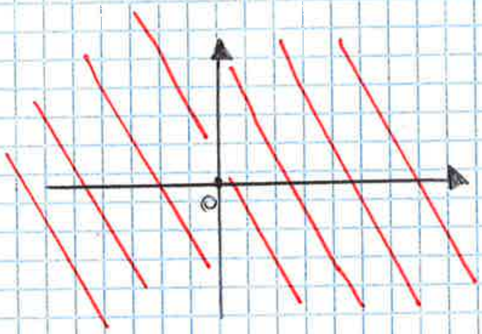
$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 < n < N \\ 0 & n<0, \quad n>N \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N} z^{-n} = \frac{1-(z^{-1})^{N+1}}{1-z^{-1}}$$

$\left|\frac{1}{z}\right| > 1$ ragione $\frac{1}{z}$, ma per $z=0 \Rightarrow \infty$ e non può essere

Perciò la ROC sarà

ROC
dappertutto tranne zero
eccetto $(|z|=0)$



Se $x[n]$ è una sequenza finita la trasformata zeta converge dappertutto

Il sistema LTI è CAUSALE e STABILE se tutti i poli cadono all'interno della circonf. di raggio unitario $\Rightarrow |P|<1$

Caso particolare

4) Se $x[n]$ è a SUPPORTO LIMITATO

ROC = tutto z eccetto $z=0$

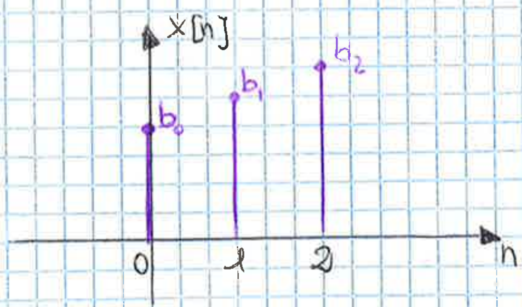
INVERSIONE $X(z) \to x[n]$

1) INVERSIONE DIRETTA

$$X(z) = \sum_{n} b_n z^{-n}$$

$$\Downarrow$$

$$x[n] = \sum b_k \delta[n-k]$$



$$A_1 = \lim_{z \to 0} X'(z)\, z = 8 \qquad A_3 = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{4}} = -16$$

$$A_2 = \frac{1}{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}} = 8$$

$$X'(z) = \frac{8}{z} + \frac{8}{z-\frac{1}{2}} - \frac{16}{z-\frac{1}{4}} = \frac{X(z)}{z}$$

$$X(z) = \frac{8}{z} + \frac{8}{z-\frac{1}{2}} - \frac{16}{z-\frac{1}{4}}$$

$$\downarrow$$

$$x[n] = 8\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \delta[n]\right]$$

$(x[0] = 0$ nota$)$

PROPRIETÀ:

Se $x[n]$ ha come trasformata zeta $X(z)$ allora:

$$x[n-k] \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[\underbrace{n-k}_{i}]\, z^{-n}$$

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} x[i]\, z^{-(i+k)} = z^{-k} \sum_i x[i]\, z^{-i} = z^{-k} X(z)$$

Altro metodo per risolvere l'es. senza funzione ausiliaria

$$X(z) = \frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)} = \frac{B_1}{z-\frac{1}{2}} + \frac{B_2}{z-\frac{1}{4}}$$

$$B_1 = \lim_{z \to \frac{1}{2}} X(z)\left(z-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = 4$$

$$B_2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)} = -4$$

11 maggio 2015

$x[n] = z^n$ (LTI $h[n]$)

$y[n] = z^n \, H(z)$ $z \in \mathbb{C}$

$$H(z) = \sum_n h[n] \, z^{-n}$$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO (trasformata zeta di $h[n]$)

PROPRIETÀ trasformata z

1) RITARDO

$x[n] \longleftrightarrow X(z)$

$y[n] = x[n-m] \rightarrow Y(z) = z^{-m} X(z)$

2) CONVOLUZIONE

$y[n] = x_1[n] * x_2[n]$

$Y(z) = \underbrace{X_1(z)}_{ROC\,1} \cdot \underbrace{X_2(z)}_{ROC\,2}$ $(ROC_y = ROC_1 \cap ROC_2)$

Teorema Valore Iniziale

$x[n]$ CAUSALE

$$x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

Teorema Valore Finale

Se $X(z)$ esiste $|z| > r$ $r < 1$ $*$

$x[n] \to 0$ $n \to \infty$

TRASFORMATA DI FOURIER A TEMPO DISCRETO

$$\text{DTFT}\{h[n]\} \triangleq \sum h[n]\, e^{-j2\pi fn} = H(e^{j\pi f})$$

$\downarrow$ gener.

$$\text{DTFT}\{x[n]\} \triangleq \sum x[n]\, e^{-j2\pi fn} = X(e^{j2\pi f})$$

DISCRETE TIME FOURIER TRANSFORM

PROPRIETÀ DTFT

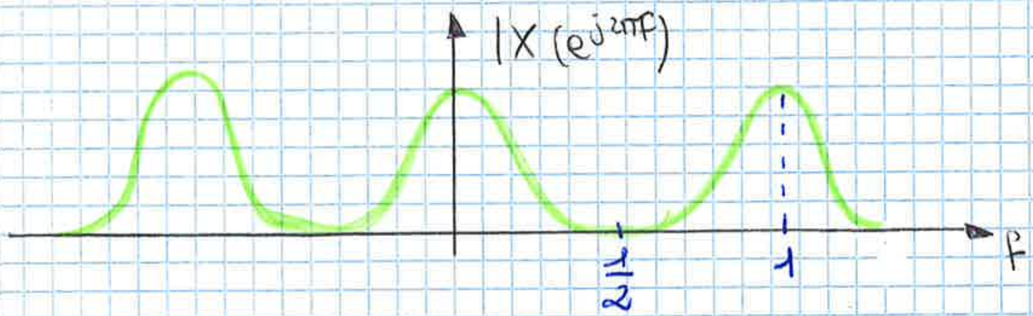
1) ESISTENZA

DTFT esiste se

$$\sum_n |x[n]| < \infty$$

2) PERIODICITÀ

$X(e^{j2\pi f})$ è periodica (in f) di periodo 1, in ω di 2π

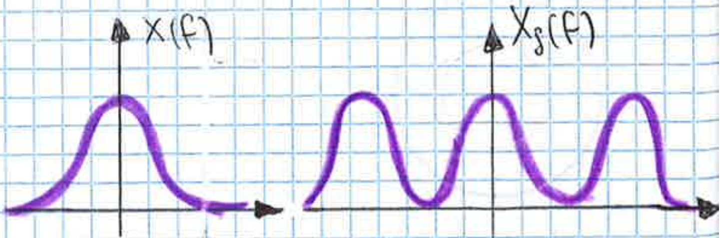


dal campionamento abbiamo

$$x_\delta(t) = \sum_n x(nT_c)\,\delta(t-nT_c)$$

$$X_\delta(f) = \sum X(f-nf_c)$$

sono uguali!

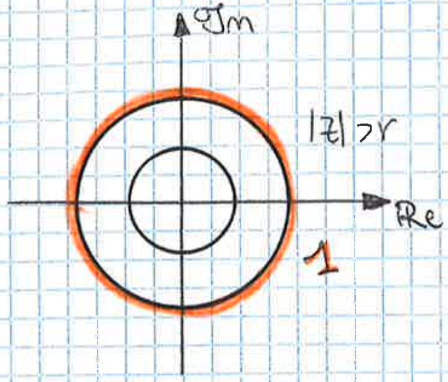


$$X_\delta(f) = \sum_n x(nT_c)\cdot 1\cdot e^{-j2\pi f nT_c}$$

$$\text{DTFT}\{x[n]\} = X(e^{j2\pi f}) = \sum x[n]\, e^{-j2\pi fn}$$

Stabilità rappresentata dalla circonferenza di raggio Unitario

Più il filtro si avvicina a 1, più è simile al filtro ideale



FILTRI $h[n]$

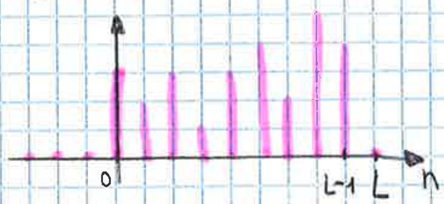
↳ Sistema LTI

① FIR Risposta all'Impulso Finita

② IIR Risposta all'Impulso Infinita

1- FIR

Supporto limitato



$h[n] = 0 \quad n<0, \; n>L$

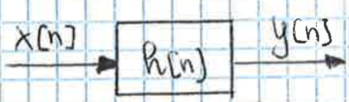
NON È MAI INSTABILE, È SEMPRE CAUSALE

2- IIR

$$H(z) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} b_n z^{-n}}{\sum_{M=0}^{M-1} a_M z^{-M}}$$

NON È VERO CHE È SEMPRE STABILE

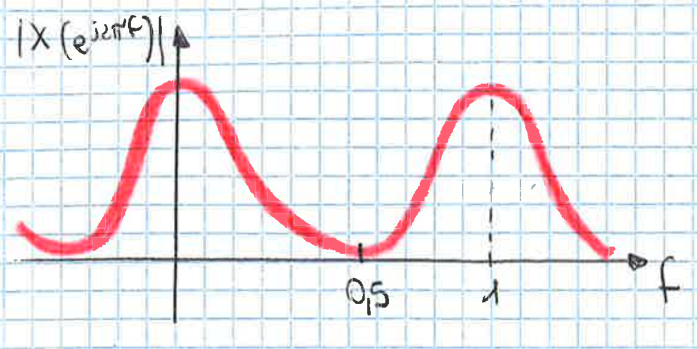
Svantaggi



FIR $y[n] = \sum_{k=0}^{L-1} h[k]\, x[n-k]$

IIR $y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]\, x[n-k]$ → NON usabile in pratica
se scrivessi un programma in C sarebbe impossibile scrivere la somma INFINITA

1) DISCRETIZZO f



La parte negativa porta informazione quando il segnale x è reale

Posso considerare l'intervallo $[0, 0{,}5]$ perché è simmetrica

Prendo N campioni in $f \in [0,1]$

$$f_k = \frac{k}{N} \qquad k = 0, \dots, N-1$$

$$X(e^{j2\pi \frac{k}{N}}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j2\pi n \frac{k}{N}} \equiv X[k] = DFT\{x[n]\} \quad \begin{cases} 0 \le n \le N-1 \\ 0 \le k \le N-1 \end{cases}$$

Se non specificassi $0 \le k \le N-1$ otterrei una funzione periodica perché da N (compreso) in poi si ripetono le stesse funzioni

INVERSIONE DFT

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi k n}{N}} \quad \text{(DFT)}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{j\frac{2\pi k n}{N}} \quad \text{(IDFT)}$$

funzione periodica di periodo N

$$[0 \le \underset{n}{k} \le N-1]$$

$$x_T(t) = x(t) \cdot p_T(t)$$ → x troncata per fare in modo che il supporto sia limitato

$$\Downarrow$$

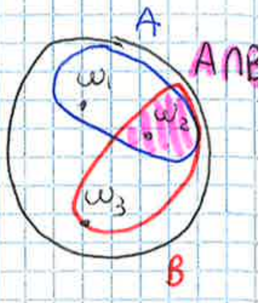
$$X_T(f) = X(f) * P_T(f)$$

$A \subset \Omega$ → A contenuto in Ω

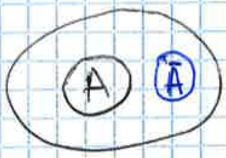
$A \subseteq \Omega$ → A contenuto in Ω e può coincidere con esso

$A \cup B$ → elementi $\in$ A oppure B (UNIONE)

$A \cap B$ → elementi $\in$ A e anche a B (INTERSEZIONE)



$\bar{A}$ → insieme complementare
elementi di Ω $\notin A$



$A \cup \bar{A} = \Omega$

$A \cap \bar{A} = \emptyset$

Prodotto cartesiano

$\Omega_1 \times \Omega_2$ Coppie ordinate (ω_1, ω_2) di tutti i possibili esiti degli esperimenti 1 e 2

esempio: $\Omega_1 = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

$\Omega_2 = \{a, b, c, \dots, z\}$

$\Omega = \{(0,a)(1,a) \dots (9,a),(0,b) \dots (9,z)\}$

DEFINIZIONI ASSIOMATICHE DELLA PROBABILITÀ

Ω
$A \subset \Omega$

assioma 1) $P(A) \geq 0$ la probabilità è un numero POSITIVO

assioma 2) $P(\Omega) = 1$

la probabilità è un numero compreso tra 0 e 1

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

assioma 3) A, B "mutuamente esclusivi" → se capita un evento sicuramente non capita l'altro

$[A \cap B = \emptyset]$ NON SI VERIFICANO INSIEME

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

la probabilità delle loro unioni è l'unione delle loro probabilità

Riassumendo:

1) $0 \leq P \leq 1$

2) $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ $\quad (= \text{se } A \cap B = \phi)$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

3) $P(\Omega) = 1$

4) $P(\phi) = 0$

N esperimenti   cento: "1" N_1 volte
"2" N_2 volte

$P(\text{"1"}) = \frac{N_1}{N}$ "frequenza statistica"   "6" $\rightarrow$ N_6 volte

PROBABILITÀ CONGIUNTA di A, B

Probabilità dell' INTERSEZIONE di 2 elementi

Devono capitare insieme SIA A CHE B

$$P(A \cap B) = P(A, B)$$

a) A, B SONO MUTUAMENTE ESCLUSIVI : $P(A, B) = 0$

b) Statisticamente indipendenti
NON statisticamente indipendenti

b.1.) STATISTICAMENTE INDIPENDENTI

$$\boxed{P(A, B) = P(A) \cdot P(B)}$$

(M, M)	$\frac{1}{4}$
(M, F)	$\frac{1}{4}$
(F, M)	$\frac{1}{4}$
(F, F)	$\frac{1}{4}$

$P(M, M) = P(M) \cdot P(M) = \frac{1}{4}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 228

$$P(A|B) = \frac{N_A}{N_B} = \frac{\frac{N_A}{N}}{\frac{N_B}{N}} = \frac{P(A,B)}{P(B)} \quad \frac{\text{probabilità congiunta}}{\text{probabilità di } B}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)} \Rightarrow \boxed{P(A,B) = P(A|B) \cdot P(B)}$$

FORMULA DI BAYES

Mette in relazione probabilità congiunte, probabilità condizionate e le probabilità

$P(A,B) \rightarrow$ probabilità che due cose capitino

$P(A|B) \rightarrow$ probabilità che una cosa capiti sapendo che ne è capitata un'altra

$$P(A|B) \neq P(B|A)$$

$$P(A,B) = P(B,A) \quad \text{commutativa}$$

$$\boxed{P(A,B) = P(A|B)\, P(B) = P(B|A)\, P(A)}$$

Supponiamo che A B siano statisticamente indipendenti ovvero NON SI CONDIZIONANO l'un l'altro. Allora

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

$$\boxed{P(A|B) = P(A)}$$ SOLO SE A, B sono STATIST. INDIPENDENTI

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)} \qquad P(B|A) = \frac{P(A,B)}{P(A)}$$

$$P(A|B) = P(A) \qquad P(B|A) = P(B)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 228

VARIABILE CASUALE

ξ → esperimento i cui RISULTATI sono NUMERI

DISCRETA

$\xi \in (1, 2, 3, \dots, N, \dots)$

infinite, ma numerabili

CONTINUA

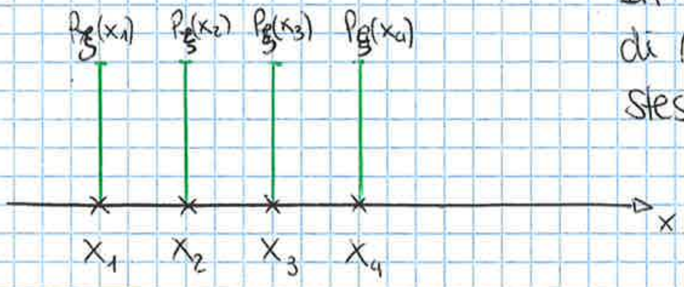
$\xi \in I \subset \mathbb{R}$

intervalli dell'asse reale

• Variabili Casuali DISCRETE

DISTRIBUZIONE DI MASSA

$$P_\xi(x_i) = P(\xi = x_i)$$



In questo caso ho una distribuzione di massa UNIFORME, con la stessa probabilità di avvenire

$$\sum_{i=1}^{N} P_\xi(x_i) = 1$$

probabilità dell'evento certo

2

Il caso in cui il valor medio coincide con la media aritmetica avviene quando la probabilità dei valori è uguale per tutti gli elementi.

es. Nel lancio del dado la probabilità che escano gli elementi (1, 2, 3, 4, 5, 6) è sempre $\frac{1}{6}$, quindi il valore atteso $E[X] = \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot P(X=x_i)$ è uguale alla media aritmetica

dado $\rightarrow$ $\frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3{,}5$ MEDIA ARITMETICA (= VALORE ATTESO)

x_i può essere negativo, ma non le probabilità

$$\boxed{E[X^2] \triangleq \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \cdot P[X = x_i]}$$ VALORE QUADRATICO MEDIO

$$E[X^M] = \sum_i x_i^M \, P[X = x_i]$$ MOMENTO DI ORDINE M

$$\boxed{E[(X-m_x)^2]} = \text{varianza } (\sigma_x^2)$$ VARIANZA

$$m_x = E[X]$$

ad ogni valore sottraggo il valor medio

Va a finire che i valori "ballano" intorno a zero

varianza $\rightarrow$ quanto X in modulo quadro si distanzia dal valor medio

$$\sigma_x^2 = E[X^2 - 2m_x X + m_x^2] = E[X^2] - 2m_x \underbrace{E[X]}_{= m_x} + m_x^2$$

$$\sigma_x^2 = E[X^2] - m_x^2$$

es. lancio del dado:

$E[X] = 3{,}5$ valore atteso

$E[X^2] = \frac{91}{6} = 15{,}6$ valore quadratico medio

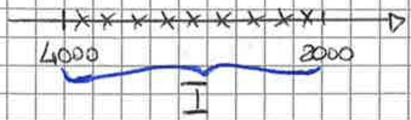
$\sigma_x^2 = E[X^2] - 3{,}5^2 = 2{,}91$ varianza

$|\sigma_x| = 1{,}70$ DEVIAZIONE STANDARD

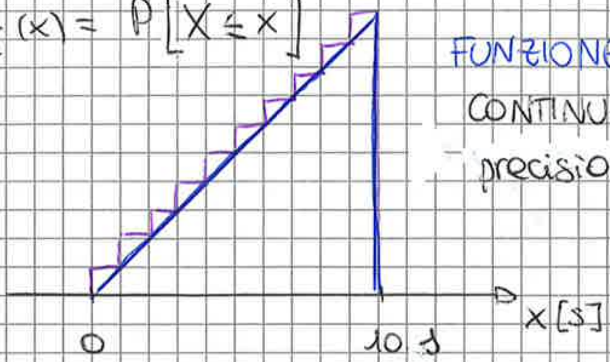
• Variabili casuali CONTINUE

$X \in$ intervallo $I \subset \mathbb{R}$

$P[X = x_0] = \phi$ → NON accade nel DISCRETO lì ci sono solo numeri



$F_X(x) = P[X \leq x]$



FUNZIONE CUMULATIVA è una funzione CONTINUA. I gradini dipendono dalla precisione dello strumento che uso

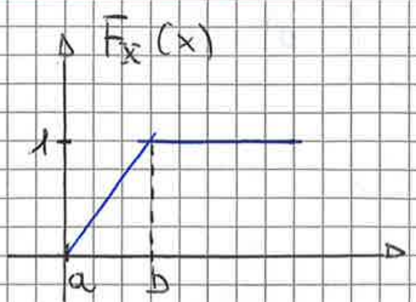
$0 \leq F_X(x) \leq 1$

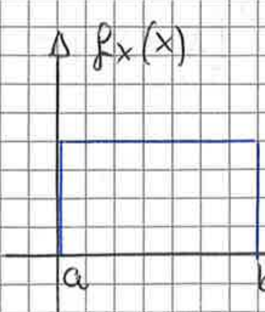
$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

$\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$

$P[a \leq x \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$

$$\boxed{f_X(x) \triangleq \frac{d}{dx} F_X(x)}$$ densità di probabilità





$\frac{1}{b-a}$ coeff. angolare

l'area vale $\frac{b-a}{\frac{1}{b-a}} = 1$

l'area in generale vale $\int f_X(x)\,dx = 1$

6

CONTINUE

$$E[g(X)] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\, f_X(u)\, du$$

$$E[X] = m_X = \int_{-\infty}^{+\infty} u\, f_X(u)\, du$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 f_X(u)\, du$$

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (u - m_X)^2 f_X(u)\, du = E[X^2] - m_X^2$$

DISCRETE

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{N} g(x_i)\, P_i \qquad P_i = P[X = x_i]$$

$g(X) = X = m_X$ VALORE ATTESO (media)

$g(X) = X^2$ VALOR QUADRATICO MEDIO

$g(X) = (X - m_X)^2$ VARIANZA

DENSITÀ DI PROBABILITÀ GAUSSIANA

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_X} e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}}}$$

$\sigma_X^2 \rightarrow$ Varianza

$m_X \rightarrow$ valore atteso (media)

$$f_X(x) = \mathcal{N}\{m_X, \sigma_X^2\}$$

$$X = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \qquad N \to \infty$$

FUNZIONE CARATTERISTICA

$$\boxed{C_X(u) \triangleq \mathcal{F}\{f_X(x)\}}$$

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x,y)$$

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{XY}(u,v)\, du\, dv$$

ξ, η variabili casuali

$$\vartheta = g(\xi, \eta)$$

$$E[\vartheta] = E[g(\xi,\eta)] = \iint_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\, f_{\xi\eta}(x,y)\, dx\, dy$$

Se statisticamente indipendenti

$$\boxed{f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)}$$

Esempio

$$E[\xi\eta] \neq E[\xi]\, E[\eta]$$

"media congiunta"

$$E[\xi^4 \eta^7] \neq E[\xi^4]\, E[\eta^7]$$

a meno che non siano statist. indip.

Momenti congiunti (m, n)

COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE

$$\boxed{\rho_{\xi\eta} = \frac{E[(\xi - m_\xi)(\eta - m_\eta)]}{\sigma_\xi\, \sigma_\eta}}$$

$$m_\xi = E[\xi]$$
$$m_\eta = E[\eta]$$

$$\sigma_\xi^2 = E[(\xi - m_\xi)^2] \qquad \sigma_\eta^2 = E[(\eta - m_\eta)^2]$$

? ξ = statisticamente indipendenti

$$E[\xi\eta - m_\xi \eta - m_\eta \xi + m_\eta m_\xi] = \cancel{m_\xi m_\eta} - \cancel{m_\xi m_\eta} - \cancel{m_\eta m_\xi} + \cancel{m_\eta m_\xi} = 0$$

Se STATISTICAMENTE INDIPENDENTI $\Rightarrow$ SCORRELATE

3 giugno 2015

PROCESSI CASUALI SEMI-DETERMINATI

$$x(t) = \xi \, e^{-\frac{t}{T}} u(t), \qquad \xi = \mathcal{N}\{0,1\}$$

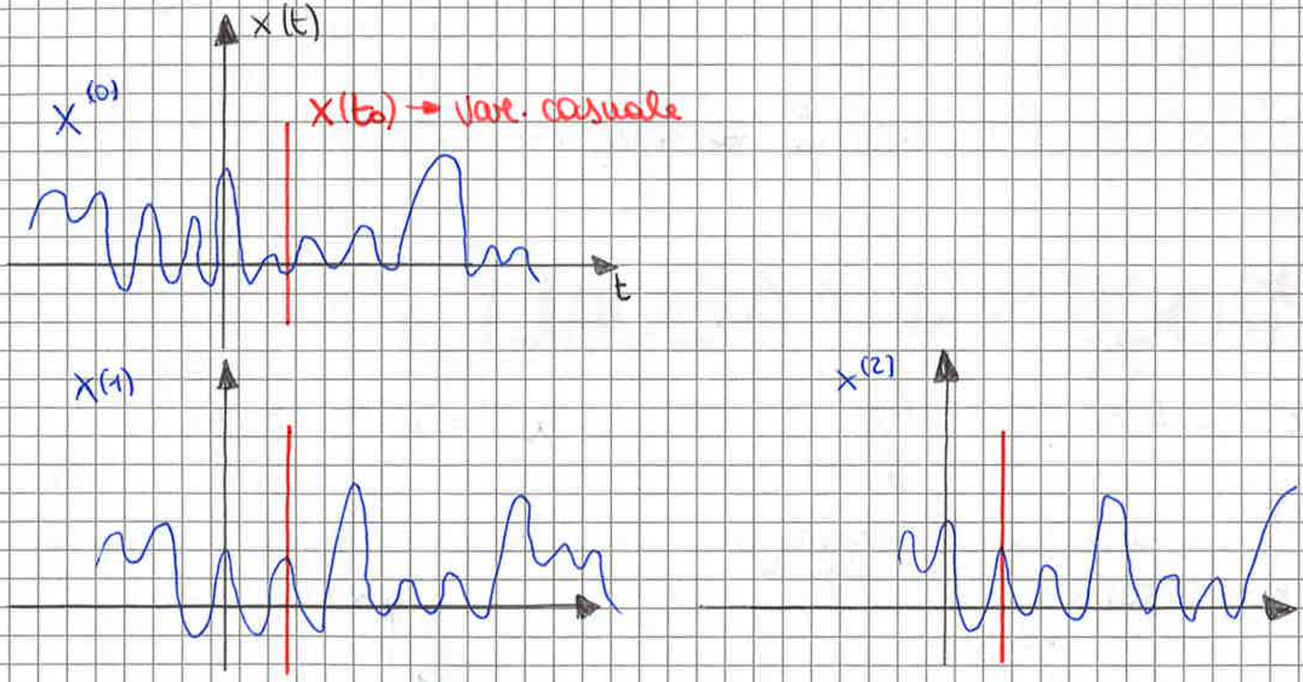
Non lavoro nel tempo, lo tratto come parametro

$$E[x(t)] = 0$$

$$E[x^2(t)] = E[\xi^2] \cdot e^{-\frac{2t}{T}} u(t) = \longrightarrow$$

in questo caso $= \sigma^2(t)$ perché $E[x(t)] = 0$

$$= \sigma_x^2(t) = 1 \cdot e^{-\frac{2t}{T}} u(t)$$



$$\left\{ \begin{matrix} x^{(0)}(t) \\ x^{(1)}(t) \\ \vdots \end{matrix} \right\} = x(t)$$

realizzazioni

approccio a) fisso un istante di tempo e vedo cosa succede

approccio b) collezione processi casuali e li studio insieme

Posso dire che il processo casuale è una variabile casuale? NO
Se prendo $t_1 \rightarrow x(t_1)$ è la stessa di prima? No, è un'altra e ha un'altra varianza nonostante la media sia la stessa

4 giugno 2015

12

STAZIONARIETÀ IN SENSO STRETTO (SSS)

Statistiche ordine N

$t_1, \dots, t_N$

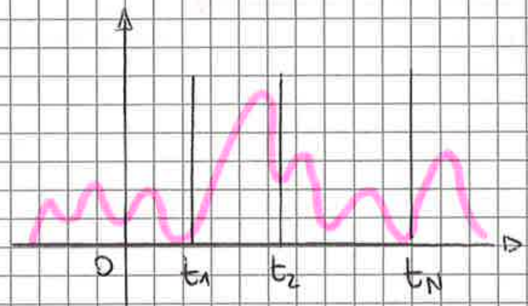
⇓ da cui prelevo

$x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_N)$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_N, t_1, t_2, \dots t_N) = P[x(t_1) \le x_1, \dots, x(t_N) \le x_N]$$

$$f = \frac{\partial}{\partial x_1, \partial x_2, \dots \partial x_N}$$

$\forall N$ NON DIPENDE da $t_1, t_2, \dots, t_N$ ma dipende da $(N-1)$ differenze tra $t_2 - t_1, t_3 - t_1, \dots$



✱ Stazionaria di I ordine

↳ $N=1$ prendo un solo istante di tempo e le statistiche di primo ordine NON devono dipendere dal tempo

$$f_x(x,t) = f_x(x)$$

⇓

$$\mu_x(t) = \mu_x \qquad \sigma_x^2(t) = \sigma_x^2$$

✱ Stazionaria di II ordine

$N=2$ prendo 2 variabili casuali $x(t_1)$ e $x(t_2)$

$$f_x(x_1, x_2, t_1, t_2) = f_x(x_1, x_2, \underbrace{|t_1 - t_2|}_{\tau}) = f_x(x_1, x_2, \tau)$$

$$R_x(t_1, t_2) = E[x(t_1), x(t_2)] = R_x(t_1 - t_2) = R_x(\tau)$$

AUTOCORRELAZIONE

a) Segnali a energia finita

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x(t+\tau)\, dt \xrightarrow{\mathcal{F}} S_x(f) = |X(f)|^2$$

b) Segnali periodici (T)

$$\Phi_x(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, x(t+\tau)\, d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} G_x(f)$$

c) Potenza media finita

$$\Phi_x(\tau) = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{a}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x(t)\, x(t+\tau)\, d\tau \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} G_x(f)$$

PROCESSI ERGODICI

medie temporali	medie statistiche
$m(x^{(0)}) = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{(0)}(t)\, dt$	$\mu_x(t) = E[x(t)]$
$\Phi^{(0)}(\tau) = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{a}\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} x^{(0)}(t)\, x^{(0)}(t+\tau)\, dt \xrightarrow{\mathcal{F}} G^{(0)}(f)$	$R_x(t, t+\tau) = E[x(t), x(t+\tau)]$

CONDIZIONI affinché il processo sia ERGODICO (in senso lato)

1) $\left.\begin{array}{l} \mu_x(t) = \mu_x \\ R_x(t, t+\tau) = R_x(\tau) \end{array}\right\}$ il processo dev'essere WSS

2) $m_x^{(0)} = m_x$ (non dipende dall'istante che sto

$\Phi_x^{(0)}(\tau) = \Phi_x(\tau)$

3) $\Rightarrow m_x = \mu_x \qquad \Phi_x(\tau) = R_x(\tau)$

TEOREMA DI WIENER

$\mu_x \rightarrow$ media delle m_i

$\mu_x = E[m^{(i)}]$

Prendo $x^{(0)}$ e ne faccio la media $m^{(0)}$

$x^{(1)}$ e ne faccio la media $m^{(1)}$

e così via. Le $m^{(0)}, m^{(1)}, m^{(2)}, \ldots$ sono per definizione una variabile casuale. Queste m hanno una loro media $E[m]$

se $x(t)$ WSS => anche $y(t)$ WSS

$$\boxed{E[y(t)] = \mu_y = \mu_x H(0)}$$

autocorrelazione di $n(t)$

$$R_y(t, t+\tau) = \boxed{R_y(\tau) = R_x(\tau) * R_h(\tau)}$$

$$\Big\downarrow \mathcal{F}$$

$$\boxed{G_y(f) = G_x(f) \cdot \underbrace{|H(f)|^2}_{\text{spettro di ENERGIA}}}$$

$$G_y(f) = \mathcal{F}\{R_y(\tau)\}$$

Rumore bianco filtrato

Rumore gaussiano bianco, $\mu_n = 0$

$$G_n(f) = \frac{N_0}{2}$$

Uscita ancora GAUSSIANA

$\mu_y = 0$

$$G_y(f) = \frac{N_0}{2} |H(f)|^2$$

10. Disegnare il grafico di

$$x(t) = \int_0^t e^{-\alpha u} du$$

per $t > 0$, supponendo $\alpha > 0$ (reale).

11. Disegnare il grafico dei due segnali:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad , \quad y(t) = \int_{-\infty}^t x(u) du, \quad t \in \mathbb{R}$$

12. Disegnare il grafico dei due segnali:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \in [kT, kT + T/2[\\ -1 & t \in [kT + T/2, kT + T[\end{cases} \qquad \text{con } k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(u) du$$