NUMERO: 1887A - ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Busca Francesco

MATERIA: Netodi Numerici e statistici per l'ingegneria - Prof. Gasparini, Grillo, Falletta

METODI NUMERICI E STATISTICA

28/09/16

3 moduli:

- Probabilità (Gasparini) ~ 22 ore
- Eq. differenziali e sistemi dinamici (Grillo)
- Calcolo numerico (Biletta)

gasparini@calvino.polito.it
francesco.cruciano@gmail.com

Libro: - "Probabilità e statistica per l'ingegneria e le scienze", Ross
- Devore
- Vicario

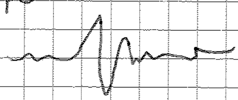
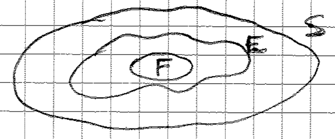
Francesca Romana
MAR 14:30-16 MERC 16-17:30

PROBABILITÀ

Fenomeni aleatori, che non riusciamo a prevedere con certezza

Esperimento aleatorio: operazione che non si può prevedere con certezza

S = insieme dei possibili esiti dell'esperimento

Esperimento	S	ESEMPI DI EVENTI
- Lancio un dado	$\{1,2,3,4,5,6\}$	"esce un numero pari" = $\{2,4,6\}$
- Lancio una moneta	$\{T, C\}$	$\{T\}$, $\{C\}$, $\emptyset$
- Lancio 2 tetraedri	$\{(1,1), (1,2), \dots (4,4)\}$	"La somma è superiore a 6" = $\{(4,3), (3,4), (4,4)\}$
- Corsa di 7 cavalli	7! possibili classifiche	"Il 5 arriva tra i primi 3" = E
- Misuro una resistenza elettrica	$[0, +\infty)$	F = "Il 5 arriva primo"
- Osservo un tempo di vita	R^+	$\underset{S}{F \cap} \subseteq \underset{S}{E \cap}$ ovvero "F implica E"
- ECG	insieme di funzioni del tipo 	

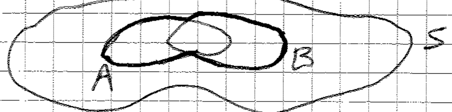
Evento = un sottoinsieme di **S** (a meno di sottigliezze matematiche)
o
proposizione, una volta fatto l'esperimento risulterà <u>vero</u> o <u>falso</u>

S : evento certo (si verifica certamente)

$\emptyset$: evento impossibile o insieme vuoto

OPERAZIONI LOGICHE

- <u>unione</u> $A \cup B = C$ C è vero sse o A o B o entrambi si verificano



- Intersezione $A \cap B$
- Negazione (o complemento logico) $A^c = {}^1A = \bar{A}$ a seconda degli autori

Prima conseguenza (teorema) degli assiomi

$$P(A \cup A^c) = P(S) = 1$$

3° assioma — assioma 2.

$$P(A) + P(A^c)$$

$$\boxed{P(A^c) = 1 - P(A)}$$

Altra conseguenza:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) + P(A \cap B)}$$

se $A \cap B = \emptyset$, cioè A e B disgiunti, si ricade nel 3° assioma

ESEMPIO: TETRAEDRO EQUO
(= bilanciato, simmetrico)

$$P(\text{"esce 1"}) = \frac{1}{4} \quad \forall i$$

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\})$$

questa notazione è "precisa" perché $\{1\}$ è un sottoinsieme di $\{1, 2, 3, 4\}$

meno pedantemente $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = 1$

A = "esce un pari"

$A = \{2, 4\} = \{2\} \cup \{4\}$

$$P(A) = P(\text{"2"} \cup \text{"4"}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

ESEMPIO: TETRAEDRO SBILANCIATO

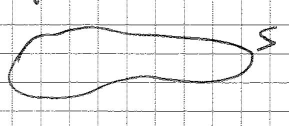
$$P(\text{"1"}) = \frac{2}{5}$$

$$P(\text{"2"}) = P(\text{"3"}) = P(\text{"4"}) = \frac{1}{5}$$

$$P(A) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

ESEMPIO CAVALLI Non tutte le 7! classifiche hanno la stessa probabilità

SPAZIO DI PROBABILITÀ UNIFORMI - In alcuni casi di simmetria (o ignoranza) possiamo assumere che ogni esito di un insieme S finito abbia la stessa probabilità



$$P(\cup \text{esiti}) = P(S) = 1$$

Se ogni esito e_n ha la stessa probabilità x, allora

$$\Sigma P(e_i) = \Sigma x = \text{card}(S) \cdot x = 1 = \# S \cdot x = 1$$

dove $\# S = \text{card}(S) =$ n° di elementi di S

Allora deve essere $x = \frac{1}{\# S}$

Le disposizioni senza ripetizione di n elementi, r alla volta sono

$$n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)$$

Le disposizioni senza ripetizione di n elementi, n alla volta sono

$$n!$$

e si chiamano <u>PERMUTAZIONI</u>

<u>ESEMPIO</u> Le permutazioni delle cifre $0\ldots9$ sono $10!$

Il n° di modi in cui 6 tra 120 studenti si possono sedere in prima fila (da 6 posti) é $120\cdot119\cdot118\cdot117\cdot116\cdot115$.

Il n° di modi con cui tutti i 120 posti possono essere occupati é $120!$

Chiediamoci ora quante commissioni (sottoinsiemi) di 6 persone si possono fare con una classe di 120 - n° di disposizioni di 120, 6 alla volta

$$\frac{120\cdot\ldots\cdot115}{6!}$$

Un sottoinsieme di ampiezza r da un insieme di ampiezza n si dice <u>COMBINAZIONE</u> di n elementi, r alla volta.

n° combinazioni di n elementi, r alla volta $=\dfrac{\text{n° disposizioni di } n \text{ elementi, } r \text{ alla volta}}{r!}$

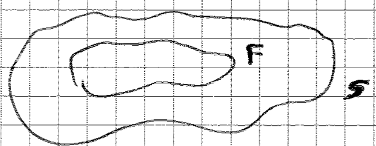
$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)(n-r)!}{r!\,(n-r)!}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}=\binom{n}{r}$$

"n su r" coeff. binomiale

<u>PROBABILITÁ CONDIZIONATA</u>

RICORDO: $(a+b)^n=\sum\binom{n}{r}a^r b^{n-r}$

29/09/'15



Nuovo stato di informazione: immaginiamo che evento F si verifichi.

Cerchiamo la <u>nuova</u> probabilità di un evento E, sapendo che (dato che) F si verifica

si definisce <u>PROBABILITÁ CONDIZIONATA</u> di E dato F

$$\boxed{P(E/F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}} \qquad \text{se } P(F)>0$$

<u>ESEMPIO TARGHE</u> (esercitazione 29/09)

(e) $P(\text{"due cifre e tre numeri"} / \text{"non c'è ripetizione"}) = P(D/B) =$

$$=\frac{P(D\cap B)}{P(B)}=\frac{0{,}0253}{\frac{30\cdot29\cdot28\cdot27\cdot26}{30^5}}=0{,}0362=3{,}62\%$$

$$P(D\cap B)=\frac{10\cdot9\cdot20\cdot19\cdot18}{30^5}\cdot\binom{5}{2}=0{,}0253$$

$$\boxed{P(F_j/E) = \frac{P(F_j)\cdot P(E/F_j)}{\sum_i P(F_i)\cdot P(E/F_i)}}$$ FORMULA DI BAYES

02/10/'15

3 ASSIOMI: ripasso

$$P(C/s\bar{i}) = \frac{200}{1130} = \frac{P(C\cap s\bar{i})}{P(s\bar{i})} = \frac{P(C)\cdot P(s\bar{i}/C)}{P(s\bar{i})}$$

ESEMPIO - TEST DIAGNOSTICO/SCREENING

$P(+/M)$ = sensitività (a volte il test viene negativo anche se malattia c'é)

+ = "test positivo"

M = "persona malata"

$P(-/M^c)$ = specificità

se i test fossero perfetti dovrebbero venire entrambi uno

Esperimento: screening, scegliamo a caso una persona dalla popolazione e facciamo il test

$P(M)$ = proporzione di malati nella popolazione = prevalenza

le probabilità condizionate sono dati originari del problema (sensitività e specificità)

ESEMPIO (ROSS, 3.7.4)

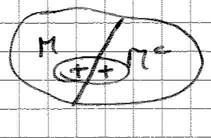
$P(+/M) = 0{,}99$ sensitività

$P(-/M^c) = 1 - P(+/M^c) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$ specificità

NON C'É RELAZIONE TRA SENSITIVITÀ E SPECIFICITÀ

$P(M) = 0{,}005 = 5\%$

$$P(M/+) = \frac{P(M)\cdot P(+/M)}{P(M)\cdot P(+/M) + P(M^c)\cdot P(+/M^c)} =$$



$$= \frac{0{,}005\cdot 0{,}99}{0{,}005\cdot 0{,}99 + (1-0{,}005)(0{,}01)}$$ = formula di Bayes

$= 0{,}332 \cong 33\%$ basso rispetto all'intuizione

É basso perché la prevalenza é bassa

Con un solo test non posso dire che la persona é malata o sana

$P(E)$ = probabilità dell'evento E

$P(E/F)$ = " " nell'eventualità che F si verifichi

$P(M) = 0{,}005$

$P(M/+) = 0{,}33$

$P(+/M) = 0{,}99$

Se $\boxed{P(E) = P(E/F)}$ allora E e F si dicono EVENTI INDIPENDENTI

quindi, per eventi indipendenti

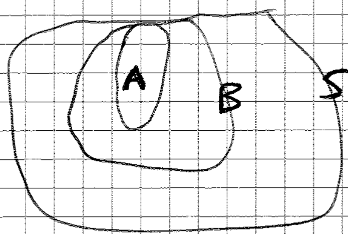
$$\boxed{P(E\cap F) = P(E)\cdot P(F)}$$

Spesso ci interessano eventi del tipo $\left| \begin{array}{l} X = c \\ X \leq c \\ X < c \end{array} \right.$ con c costante

Nell'esempio "$X = 4$" $= \{s : X(s) = 4\} = A$

cioè l'antimmagine del numero 4

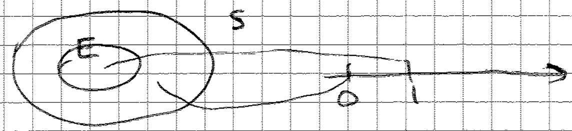
oppure "$X \leq 4$" $= \{s : X(s) \leq 4\} = B$



VARIABILI ALEATORIE NOTEVOLI

- V.A. DI BERNOULLI

Dato un evento fissato E, consideriamo la variabile $X(s) = \begin{cases} 1 & \text{se } s \in E \\ 0 & \text{se } s \notin E \end{cases}$



ESEMPIO lancio un dado equo E = "esce il 6"

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se esce } 6 \\ 0 & \text{se non esce } 6 \end{cases}$$

$P(X=1) = P(E) = \frac{1}{6}$

$P(X=0) = \frac{5}{6}$

In generale X si dice v.a. di Bernoulli con parametro $p = P(E)$

ESEMPIO del dado X è Bernoulli con parametro $p = \frac{1}{6}$

VARIABILI ALEATORIE BINOMIALI

Consideriamo n prove bernoulliane, cioè ogni prova può essere o successo (E verificato) o insuccesso (E non si verifica)

Una v.a. di interesse è X = numero di successi sulle n prove

ESEMPIO

$X_1, X_2, \ldots X_{10}$ risultati di 10 prove indipendenti bernoulliane, ciascuna con probabilità 1/6

6, 5, 4, 1, 2, 6

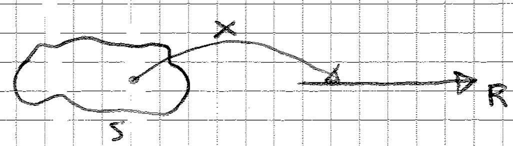
$X_1 = 1$ $X_2 = 0$ $X_3 = 0$ $X_4 = 0$ $X_5 = 0$ $X_6 = 1$

$X = \Sigma X_i = 3$

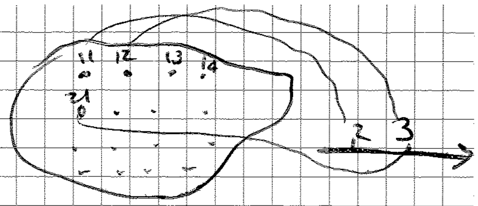
05/10/'15

RIPASSO

v.a. $X : S \to R$



x \ y	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8



$P(s=0)=0$

$P(s=1)=0$

$P(s=2)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$

$P(s=2)=P(x=1 \cap Y=1)=P(x=1)\cdot P(y=1)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}$

$P(s=3)=P[\underbrace{(x=1 \cap Y=2)}_{*} \cup \underbrace{(x=2 \cap Y=1)}_{**}]=P(*)+P(**)=$

$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}$

x \ y	1	2	3	4	
1	2/20	1/20	1/20	1/20	1/4
2	2/20	1/20	1/20	1/20	1/4
3	2/20	1/20	1/20	1/20	1/4
4	2/20	1/20	1/20	1/20	1/4
	2/5	1/5	1/5	1/5	

$P(s=4)=4/20$

$P(s=5)=5/20$

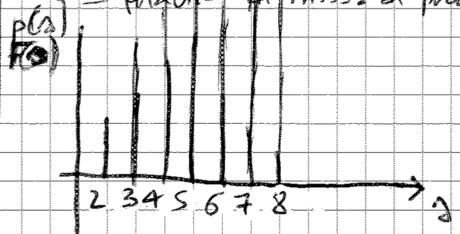
$P(s=6)=3/20$

$P(s=7)=2/20$

$P(s=8)=1/20$

s	$P(S=s)$	$F(x)=P(S\le s)$
2	2/20	2/20
3	3/20	5/20
4	4/20	9/20
5	5/20	14/20
6	3/20	17/20
7	2/20	19/20
8	1/20	20/20

$p(s)$ — funzione di massa di probabilità di S



Una v.a. che può assumere valori in un insieme finito (o numerabile) con probabilità positiva, si dice <u>DISCRETA</u> e la funzione

$p(x)=P(X=x)$ si dice <u>FUNZIONE DI MASSA DI PROBABILITÀ</u> (fmp)

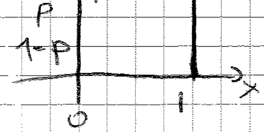
<u>ESEMPIO</u>

La f.m.p. di X v.a. Binomiale (n,p)

$$p(k)=\binom{n}{k}p^k\cdot(1-p)^{n-k} \quad \text{per } k=0,1,\dots n$$

<u>ESEMPIO BERNOULLI</u>

La f.m.p. di X v.a. Bernoulli (p)



Bernoulli è caso particolare della binomiale con n=1

$$p(k)=p^k\,(1-p)^{1-k} \quad k=0,1$$

In generale, il valore atteso di funzione $g(\cdot)$ di X è

$$E(g(x)) = \sum_i g(x_i)\, p(x_i)$$

ESEMPIO

$X \sim \text{Bernoulli}\left(p = \frac{1}{3}\right)$ $\quad X = \begin{cases} 0 & \text{con prob. } \frac{2}{3} \\ 1 & \text{con prob. } \frac{1}{3} \end{cases}$

x	$p(x)$
0	2/3
1	1/3

Se X rappresenta una scommessa, consideriamo

$$g(x) = \begin{cases} 10 \text{ €} & \text{se } x = 1 \\ -10 \text{ €} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Allora

$$E(g(x)) = g(0)\,p(0) + g(1)\cdot p(1) = -10 \cdot \frac{2}{3} + 10 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{10}{3}$$

Se volessimo una $g^*(\cdot)$ equa, dovremmo scegliere

$$E(g^*(x)) = 0 = g^*(0)\cdot\frac{2}{3} + g^*(1)\cdot\frac{1}{3}$$

$$g(0) = \frac{-g(1)}{2}$$

per esempio $\quad g^*(1) = 10$

$\qquad\qquad\qquad g^*(0) = -5$

$E(x)$ è un <u>operatore lineare</u>, cioè se $g(x) = a + bx$

allora

$$E(g(X)) = \sum g(x)\,p(x) = \sum (a+bx)\,p(x) =$$
$$= a + b \sum x\, p(x) = a + b\,E(X)$$

e similmente $\quad E(X+Y) = E(X) + E(Y) \quad (*)$ vediamo la prossima volta

ESEMPIO BINOMIALE

Se $X \sim \text{Binomiale}(n,p)$

$$E(X) = \sum x_i\, p(x_i) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \cancel{k} \cdot \frac{n!}{(n-k)!\,\cancel{k!}_{(k-1)!}}\, p^k (1-p)^{n-k}$$

poniamo $j = k-1$

BINOMIO DI NEWTON

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!\,j!}\, p^{j+1}(1-p)^{n-1-j} = np \boxed{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!\,j!}\, p^j (1-p)^{n-1-j}} =$$

$$= np\,(p + 1 - p)^{n-1} = np$$

Infatti, poiché $X = \sum_{i=1}^{n} x_i$ dove x_i è Bernoulli(p) allora per $(*)$

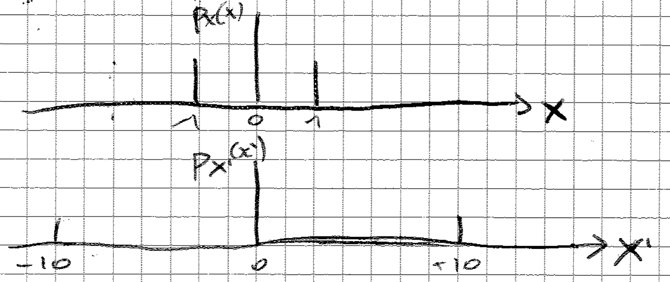
$$E(x) = E\left(\sum x_i\right) = \sum E(x_i) = \sum p = np$$

Per dare un significato preciso a $(*)$, occorre definire un vettore aleatorio (X, Y).

... un vettore aleatorio

$a\,E(X) + b\,E(Y)$ per linearità vista la volta scorsa

stiamo facendo <u>ALGEBRA DEI VALORI ATTESI</u>, cioè una serie di regole di manipolazione dei valori attesi



X e X' hanno lo stesso valore atteso
$E(X) = E(X')$

Se $E(X) = E(X') = 0$
e X e X' sono guadagni aleatori da giochi equi

la seconda legge è + incerta
(+ dispersa)

Vogliamo quantificare l'incertezza

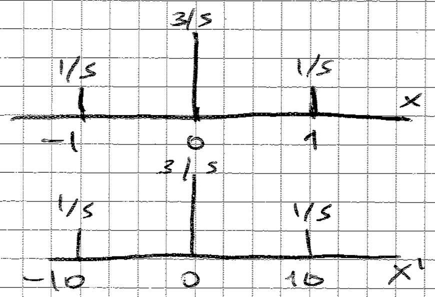
$X - E(X)$ = scarto

$E(X - E(X)) = E(X) - E(E(X)) = 0$

x linearità

scarto quadratico $(X - E(X))^2$

$E[(X - E(X))^2]$ = valore atteso dello scarto al quadrato = varianza di X
$= Var(X)$



$E(X) = -1 \cdot \frac{1}{5} + 0 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{1}{5} = 0 € = E(X')$

$Var(X) = E((X-0)^2) =$
$= (-1-0)^2 \times \frac{1}{5} + (0-0)^2 \times \frac{3}{5} +$
$+ (1-0)^2 \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}\ €^2$

$Var(X') = (-10-0)^2 \cdot \frac{1}{5} + (0-0)^2\ \frac{3}{5} + (10-0)^2 \cdot \frac{1}{5} = 100 \cdot \frac{1}{5} \cdot 2 =$
$= 40\ €^2$

$\sigma = \sqrt{Var(X)}$ = <u>SCARTO QUADRATICO MEDIO</u> o <u>DEVIAZIONE STANDARD</u>

(a volte $Var(X) = \sigma^2$
$E(X) = \mu$)

$Var(X) = E((X - E(X))^2)$ = poniamo $\mu = E(X)$ = $\sum_i (x_i - \mu)^2 p(x_i)$

Proprietà

$Var(X) = E(X^2 + \mu^2 - 2\mu X)$ = quadrato di binomio
$= E(X^2) + E(\mu^2) - E(-2\mu X)$ linearità di E
$= E(X^2) + \mu^2 - 2\mu \underbrace{E(X)}_{\mu} = E(X^2) - \mu^2 =$

$$\boxed{Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2}$$

Matematicamente, possiamo "passare al limite" $n(*)$ $n \to \infty$

$$p = \frac{\lambda}{n} \to 0 \quad \text{con } \lambda > 0$$

$$P(X=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\lambda^k}{n^k} \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k} =$$

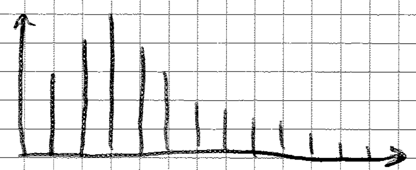
$$= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n \cdot n \dots n} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k} =$$

k volte; 1, 1, 1; $e^{-\lambda}$; $\to 1$

$$\xrightarrow{n \to +\infty} \boxed{\frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

DISTRIBUZIONE DI POISSON

La f.m.p. $p(k) = P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}}{k!} \cdot \lambda^k$ è detta di Poisson e se X ce l'ha come f.m.p., $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$



X è Poisson con parametro λ

(Applicazioni geografiche)

Verifichiamo che $\sum p(k) = \sum \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} =$

e^{λ} SERIE ESPONENZIALE

$= e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$. C.V.D.

Calcoliamo $E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k\,p(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda}}{k!} \lambda^k = \dots = \lambda$

ES.

X = n° richieste ad un server in un'ora

Se $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

λ = n° medio richieste in un'ora

In particolari condizioni di omogeneità, con X = n° richieste in t ore, sarà ragionevole dire $X_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$

Per esempio $\lambda = 1.2$ = n° medio di richieste per un'ora

Calcoliamo la probabilità di avere almeno una chiamata

$$P(X \geq 1) = \cancel{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}}{k!} \lambda^k} = 1 - P(X=0) =$$

$$= 1 - \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = 1 - e^{-1.2}$$

Si dimostra che $\text{Var}(X) = \sum (k - \underbrace{\lambda}_{E(X)})^2 \frac{e^{-\lambda}}{k!} \lambda^k = \dots = \lambda$

Ricordo che $\text{Var}(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (k - E(X))^2 p(k) =$

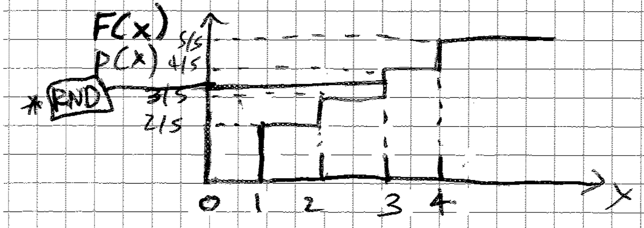
$= \sum_{k=0}^{\infty} (k-\lambda)^2 \frac{e^{-\lambda}}{k!} \lambda^k = \dots = \lambda$

se $\boxed{RND} < 400$ $\quad X = 1$

se $400 < '' < 600$ $\quad X = 2$

se $600 < '' < 800$ $\quad X = 3$

se $800 < '' \leq 1000$ $\quad X = 4$



Se $\boxed{RND}^{*} = 0{,}639$ $\quad X \leftarrow 3$

In generale qualsiasi v.a. discreta si può simulare "invertendo la f.d.r." cioè inserendo $\boxed{RND}$ in ordinata e restituendo X corrispondente

Nei software spesso questo algoritmo è già codificato

ESEMPIO

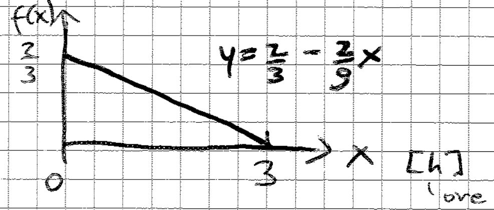
$X \sim$ Binomiale $\left(10, \frac{1}{3}\right)$

Allora una qualche funzione "RND BIN" che mi fornisce X.

V.A. CONTINUE

Es.

X = il tempo

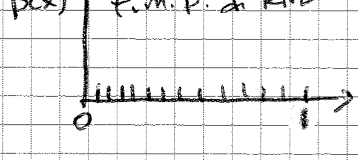


f(x) sia la densità della v.a. X.

In generale la densità di una v.a. X continua svolge un ruolo simile alla f.m.p. per X discreta

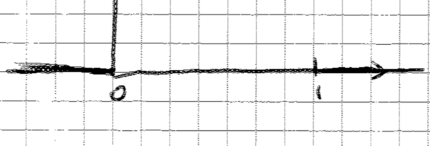
ESEMPIO : X uniforme tra 0 e 1

Abbiamo visto $\boxed{RND}$ è uniforme discreto su $\frac{1}{1000}, \ldots, \frac{1000}{1000}$



$\boxed{RND}$

La versione continua di $\boxed{RND}$ è X uniforme tra 0 e 1,

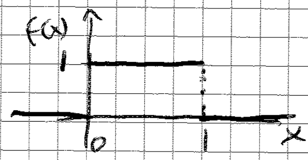


la densità sarà

$$f(x) \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La f.m.p. di una v.a. discreta serve per calcolare diverse probabilità

Caso particolare $a=0$, $b=1$



$$K = \frac{1}{1-0} = 1$$

$X \sim$ Uniforme $(0,1)$

Valore atteso di v.a. X continua:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx \quad \text{(quando esiste)}$$

v.a. di funzione $g(x)$ di v.a. X

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f(x)\, dx$$

x esempio $g(x) = (X - E(X))^2$

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)\, dx = Var(X) \quad \text{è la VARIANZA}$$

L'algebra dei valori attesi vale uguale

Esempio

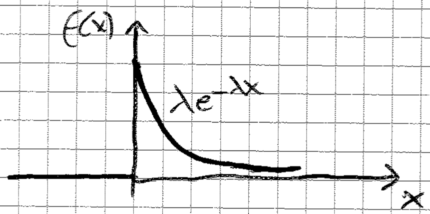
$X \sim$ Uniforme (a,b)

$$E(X) = \int_a^b x \frac{1}{(b-a)}\, dx = \frac{1}{(b-a)} \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\, dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_a^b \frac{1}{b-a} - \frac{(a+b)^2}{4} =$$

$$= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} = \dots = \frac{(b-a)^2}{12}$$



Si dice che $X \sim$ Esponenziale (λ) se

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

verifica

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \left[\frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^{\infty} = 1$$

Calcoliamo

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x}\, dx = (\text{per parti}) = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Le v.a. esponenziali si usano per modellizzare tempi di attesa

($\rightarrow$ esempio reazione chimica)

<u>V.A. GAUSSIANE</u> (o <u>NORMALI</u>)

si dice che X ha legge normale con parametri μ e σ^2,

$X \sim$ Normale (μ, σ^2), se la sua densità è

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}$$

Per cosa si usa F?

Per esempio, se X ha densità $f(x)$

$$P(X \leq a) = F(a)$$

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Caso particolare della normale: $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$

normale standard — $Z \sim$ Normale $(0,1)$ con densità $f(z) = \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$

Per calcolare la f.d.r. di una v.a. normale generica

$X \sim$ Normale (μ, σ^2)

$$F(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

questa trasformazione lineare di X è proprio $Z \sim$ Normale $(0,1)$ (si dimostra)

$$= P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \phi(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\,dz$$

Morale: se $X \sim$ Normale (μ, σ^2)

$$F(x) = P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

cioè ci siamo ricondotti alla normale standard

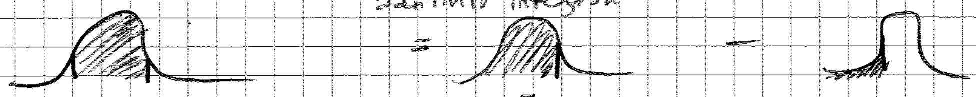
è una STANDARDIZZAZIONE

Per la fdr normale standard Φ ci sono tavole opportune (o computer)

(nel disegno $\mu \neq \mu_0$, fuori controllo)

$$P(\mu_0 - z < X < \mu_0 + z) = P(X < \mu_0 + z) - P(X < \mu_0 - z)$$

additività integrali



$$(\text{standardizziamo}) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{\mu_0 + z - \mu}{\sigma}\right) - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{\mu_0 - z - \mu}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{\mu_0 + z - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu_0 - z - \mu}{\sigma}\right)$$

Fdr della normale standard, tabulata

(il numero di tubi entro specifica è binomiale ...)

Consideriamo la media campionaria

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_i X_i$$

Qual è la sua legge? Per un teorema generale combinazioni lineari di normali sono normali

Nel ns caso, $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum X_i$ è Normale $(?, ?)$

ALORE ATTESO ELLA MEDIA AMPIONARIA $= E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} \sum X_i\right) = \frac{1}{n} \sum E(X_i) = \frac{1}{n} \sum \mu = \frac{n\mu}{n} = \mu = E(X_i)$

$$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{1}{n} \sum X_i\right) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum Var(X_i) =$$

indipendenti, ripasso

$$= \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$SD(\bar{X}) = \sqrt{Var(\bar{X})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

La variabilità della media diminuisce diminuisce di un fattore $\sqrt{n}$

Dato un campione $X_1, \dots, X_n$ una statistica è una qualunque sua funzione

ESEMPI DI STATISTICHE

Conteggio: $Y_c = \# \{i : X_i \leq c\}$ = numero di $X \leq c$

(vedi esempio fusibili, dove $Y = 100 - Y_{50}$)

Media campionaria $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum X_i$

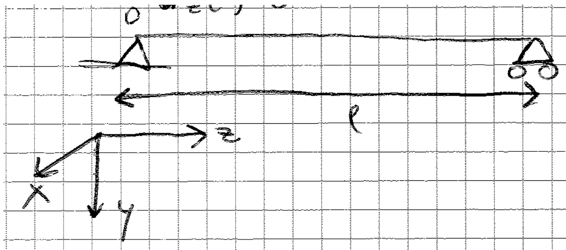
Una statistica è una v.a. (perché funzione di v.a.)

La sua distribuzione si chiama distribuzione campionaria

Esempio fusibili: la distribuzione campionaria di Y è Binomiale $(100, e^{-50\lambda})$

Esempio tubi: la distribuzione campionaria di $\bar{X}$ è Normale $\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 158



$U_z(\ell) = U_B$ $\quad$ B= BORDO

in $(0, \ell) = \Omega$

$\partial\Omega = \{0, \ell\}$ bordo

Condizioni al bordo sono imposte sulla frontiera

ES. 2 - Eq. di Laplace

$f = 0$ $\qquad$ in $\Omega \to \mathbb{R}$

$$-\Delta u = 0$$

$\mathcal{L}$ (LAPLACIANO) $= -\Delta = -\nabla^2$ = operatore di classe C^2 che restituisce numero reale

(∇: nabla)

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

$n = \dim(S)$, $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{L}[u] = -\Delta u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

Affinché eq. di Laplace e Poisson abbiano senso,

1) - u deve essere di classe C_2 $\quad (u \in C^2(\Omega))$

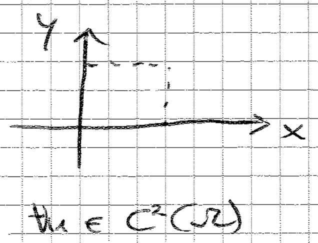
2) - $f \in C^0(\Omega)$ $\quad$ f = termine noto

$$-\mathcal{L} = + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) = A = A_+ A_-$$

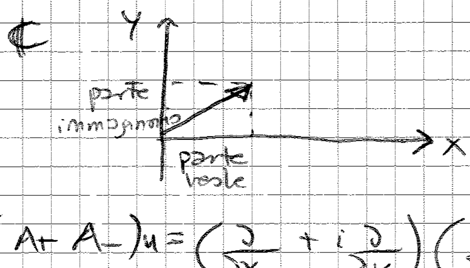
$$A_+ = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}$$

$$A_- = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}$$

$\mathbb{R}^2$



$\mathbb{C}$



$\forall u \in C^2(\Omega)$ $\qquad Au = (A_+ A_-)u = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}\right)$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \cancel{i\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}} + \cancel{i \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

TH SCHWARZ → non conta ordine di integrazione

$Au = A_- A_+ u = A_-(A_+ u)$

Eseguo un cambio lineare di variabili

$$\xi = x + iy = z$$

$$\eta = x - iy = \bar{z}$$

ENERGIA $\mathcal{E}(v)$ - FUNZIONALE, testa in uno spazio di funzioni e restituisce numeri reali

$$\mathcal{E}(v) = -\frac{1}{2}\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] d\mu$$

area ~~volume~~

Problema: cerco minimo di $\mathcal{E}$; soluzione che minimizza energia, soddisfa il sistema.

Supponiamo v sia minimo; perturbo un po' a dx un po' a sx

$$\mathcal{E}(v+\varepsilon w)$$

w = funzione test, al bordo $w = 0$ (?)

$$\mathcal{E}(v+\varepsilon w) = -\frac{1}{2}\int_\Omega \left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \varepsilon\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\} d\mu =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_\Omega \left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 2\varepsilon\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \varepsilon^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\varepsilon\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial y} + \varepsilon^2\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\} d\mu =$$

$$= \mathcal{E}(v) - \varepsilon\int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right) d\mu - \frac{1}{2}\varepsilon^2\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] d\mu$$

$$\mathcal{E}(v+\varepsilon w) = \underbrace{\mathcal{E}(v) - \varepsilon\int_\Omega \left\{\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right\} d\mu + \varepsilon^2\mathcal{E}(w)}_{= \tilde{\mathcal{E}}(\varepsilon)}$$

Se derivata prima di qst ultimo è 0, punto di estremo (minimo)

$$\frac{d\tilde{\mathcal{E}}}{d\varepsilon}(0) = -\int\left\{\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right\} d\mu = 0$$

$$\nabla v = \frac{\partial v}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial v}{\partial y}\vec{e}_y$$

$$\nabla w = \frac{\partial w}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial w}{\partial y}\vec{e}_y$$

$$\frac{d\tilde{\mathcal{E}}}{d\varepsilon}(0) = -\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w = 0$$

Introduco l'identità vettoriale

$$\mathrm{div}(w\nabla v) = \nabla v\,\nabla w + w\,\mathrm{div}(\nabla v)$$

$$\nabla v\,\nabla w = \mathrm{div}(w\nabla v) - w\,\mathrm{div}(\nabla v)$$

$n = 2$ $$\mathrm{div}(\nabla v) = \frac{\partial}{\partial x}(\nabla v)_x + \frac{\partial}{\partial y}(\nabla v)_y$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \nabla v$$

Se trave omogenea e sezione costante → EA costante

$$-\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EA \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

celerità $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ — celerità del suono nella trave

Diff. celerità è scalare, velocità vettoriale

+ astringito + E alto + alto c

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

EQUAZIONE DELLE ONDE o DI D'ALEMBERT x trave a sezione costante e omogenea

introduco cambio di variabili

$\xi = z - ct$

$\eta = z + ct$

$u(z,t) = f(z-ct) + g(z+ct)$

Perché +, − ? Onda si può propagare da una parte o dall'altra

DIFFERENZA LAPLACE / D'ALAMBERT ?

eq. ellittiche — eq. iperboliche

eq. EULERO-TRICOMI

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0}$$

$x > 0$ iperbolica

$x < 0$ ellittica

Transizione dell'equazione tra ellisse a iperbole a seconda dell'intervallo

ES EQ. DEL CALORE

- Conduttore di calore

Si definisce una EN. INTERNA e → variabile di stato del materiale

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} = \underbrace{-\,\mathrm{div}(q)}_{\text{flusso termico, vettore}} + \underbrace{Q}_{\text{sorgente di calore}}$$

Si definisce calore specifico, $c = c(t)$

$$\rho \underbrace{\frac{\partial e}{\partial T}}_{\text{CALORE SPECIFICO}} \frac{\partial T}{\partial t} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

Per Fourier $q = -K\nabla T$ con K conducibilità termica del mezzo

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{div}(K\nabla T) + Q$$

se $K = cost$

$$\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = K\,\mathrm{div}(\nabla T) + Q}$$

eq. di Laplace applicata alla T

Quando dipende da spazio e tempo, non è gestibile

La PDE, indipendentemente dai coefficienti e dalla sua omogeneità, è:

- **ellittica** in un punto $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ se $A(x) = [a_{ik}(x)]_{i,k=1}^{n}$ è definita **positiva**

$$H = \begin{bmatrix} \text{matrice hessiana} \end{bmatrix}$$

$$a_{ik} \cdot H_{ik} = tr(AH^T) = tr(AH)$$

Ricordo A matrice quadrata

$$A = \underbrace{\frac{A + A^T}{2}}_{\text{parte simmetrica di } A} + \frac{A^T - A^T}{2} \qquad \text{identità}$$

$$Sigm(A) = \frac{A + A^T}{2}$$

$$Sigm(A)^T = \frac{A^T + A}{2} = \frac{A + A^T}{2}$$

$$skew(A)^T = \frac{A^T - A}{2} = -\frac{A - A^T}{2} = -skew(A)$$

$$A \in M \qquad H \in Sigm(M) \qquad (\Rightarrow H = H^T)$$

$$tr(AH) = tr[(Sigm(A) + skew(A))\, H]$$

$$= tr[Sigm(A) H] + tr[skew(A) H]$$

$$tr[skew(A) H] = tr\left[\frac{A - A^T}{2} H\right]$$

$$= \frac{1}{2} tr[AH - A^T H] = 0$$

$$tr(AH) = A_{ik} H_{ki} = (A^T)_{ki} (H^T)_{ik} =$$

$$= (A^T)_{ki} H_{ik} = tr(A^T H)$$

Da qst risultato arrivo a dire che matrice simmetrica è ortogonale a matrice antisimmetrica.

$$tr(AH) = tr[Sigm(A) H]$$

Posso quindi supporre che matrice A sia simm. perché anche non lo fosse, parte antisimmetrica verrebbe uccisa.

- **iperbolica** in un punto $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, se $A = \{a_{ik}\}_{ik=1}$ ha un autovalore negativo e $(n-1)$ autovalori positivi

Es.

$n = 2 \qquad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\boxed{-a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_1} - 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} - a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_2}} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + cu = f$$

mi interessa

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Diffusività tanto maggiore quanto k grande e ρ, c piccoli

ρc = capacità termica, capacità che ha un materiale di accumulare energia senza cambiare temperatura

$\Omega = (0, \ell)$ ℓ = lunghezza barra conduttrice

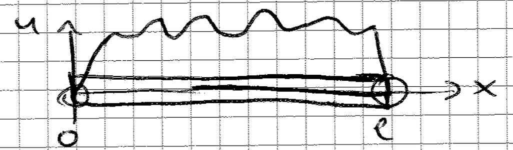
$\partial\Omega = \{0, \ell\}$

Devo imporre c.i. e c. al bordo x risolvere equazione

$u(x,0) = f(x)$ $\forall x \in (0,\ell)$

$\left.\begin{array}{l} u(0,t) = 0 \\ u(\ell,t) = 0 \end{array}\right\} \forall t \in [0,+\infty)$

Eq. vale nei punti interni, al bordo impongo delle condizioni



La prima cosa da fare → COMPATIBILITÀ CON LE CONDIZIONI AL BORDO

Se a^2 dipende dal punto x → si può trascurare

Se dipendesse anche da t → non si può

METODO DELLA SEPARAZIONE DELLE VARIABILI

ES. 23/10/15

$$\begin{cases} \rho c \dfrac{\partial u}{\partial t} = \lambda \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \lambda = \text{conducibilità termica} \\ \text{per } x \in (0, l) \\ \quad \text{barra conduttrice di calore, sezione uniforme e materiale omogeneo} \\ \text{Condizioni al bordo:} \\ \left.\begin{array}{l} u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{array}\right\} t \in [0,+\infty) \\ u(x,0) = f(x) \quad x \in (0,\ell) \\ \quad\ \ _{t=0} \end{cases}$$

Le eq. paraboliche sono definite solo per t strettamente maggiore di 0

Il problema è ben posto quando condizioni al bordo e iniziali sono in numero giusto

$a^2 = \dfrac{\lambda}{\rho c} > 0$ se fosse $= 0$ eq. degenera in eq. alle derivate totali

DIFFUSIVITÀ TERMICA o COEFFICIENTE DI DIFFUSIONE TERMICA $[a^2] = \dfrac{L^2}{T}$

con $\phi_n(0)=0$, & $\phi_n(l)=0$. $\forall n \geq 1,\ n \in \mathbb{N}$

$u(x,t)$ $\quad \dim(\mathbb{V}) = k \in \mathbb{N}$

$\forall$ autovalore $i = 1, \dots, n$ $\quad \dim(V_i) = m(\lambda_i) = 1$

$\mathbb{V} = = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$

$v = \sum_{i=1}^{n} v_i b_i$

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(t)\, \phi_n(x)$

sommatoria dei mi coefficienti dipendenti dal tempo moltiplicati per la loro autofunzione

Se $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $n,m \geq 1$, $n \neq m$ $\quad \phi_n \cdot \phi_m = 0$

$\Rightarrow \{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ è ortogonale

Ricordo $f \cdot g = \int_0^l f(x) g(x)\, dx$ (?)

$\int_0^l \phi_n(x) \cdot \phi_m(x)\, dx = 0$ Devo dimostrarlo

$B_n B_m \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{l} x\right) dx = 0$ per $n \neq m$

$\boxed{\phi_n(x) \perp \phi_m(x) \quad \forall n,m \geq 1,\ n \neq m,\ n,m \in \mathbb{N}}$

$\phi_n \cdot \phi_n = \|\phi_n\|^2 =$

$= \int_0^l \phi_n(x) \cdot \phi_n(x)\, dx =$

$= \int_0^l B_n^2 \left(\sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)\right)^2 dx = B_n^2 \int_0^l \left(\sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)\right)^2 dx = 1$

Poiché è noto che

$\int_0^l \left(\sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)\right)^2 dx = \frac{l}{2}$

La condizione di normalizzazione delle autofunzioni è:

$B_n^2 \cdot \frac{l}{2} = 1 \Rightarrow B_n^2 = \frac{2}{l}$

Abbiamo dimostrato che è possibile trovare una base ortonormale di funzioni

$\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ t.c. $\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$ è una base **orto-normale di autofunzioni**

$$= \sum_{n=1} u_{n0} \underbrace{\int_0^l \Phi_m(x) \cdot \Phi_n(x)\,dx}_{=\delta_{nm}} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n0}\, \delta_{nm} = *$$

$= \delta_{nm}$ DELTA DI KRONECKER

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & n=m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

$$* = u_{m0} = \int_0^l f(x)\, \Phi_m(x)\,dx = \int_0^l f(x) \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{l} x\right) dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{m\pi}{l} x\right) dx$$

"si fattorizza" $\sqrt{\frac{2}{l}}$, non si dice "si porta fuori"

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n0}\, e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2} t}\, \Phi_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\int_0^l f(y) \cdot \Phi_n(y)\,dy \right] e^{\frac{-n^2\pi^2 a^2}{l^2}} \Phi_n(x)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^l f(y)\, \Phi_n(y)\, \Phi_n(x)\,dy \cdot e^{\frac{-n^2\pi^2 a^2}{l^2} t}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^l \left[e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2}} \Phi_n(x)\, \Phi_n(y) \right] f(y)\,dy =$$

$$= \int_0^l \left[\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2} t}\, \Phi_n(x)\, \Phi_n(y) \right] f(y)\,dy$$

DEF.

si definisce "Funzione di Green" del problema ai valori iniziali e ai valori al bordo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in (0,l) \\ & t \in (0,+\infty) \\ u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in (0,l) \end{cases}$$

$$G(x,y,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2} t}\, \Phi_n(x)\, \Phi_n(y) =$$

$$= \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2} t} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} y\right)$$

$$u(x,t) = \int_0^l G(x,y,t)\, f(y)\,dy$$

Se ci dà la $G(x,y,t)$, funzione di Green del problema, deve solo farci intendere

Green prende l'ingresso $f(y)$ e restituisce l'uscita $u(x,t)$

$$\frac{\cos(a-b)}{2} - \frac{\cos(a+b)}{2} = \frac{\cos(a)\cdot\cos(b) + \sin(a)\sin(b)}{2} - \frac{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}{2}$$

$$= \sin(a)\sin(b)$$

$$G(x,y,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{l} e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2} t} \left[\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{l}(x-y)\right)}{2} - \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{l}(x+y)\right)}{2} \right] =$$

$v(x) = ax + b$

$v(0) = b = u_1$ $\Rightarrow$ $b = u_1$

$v(l) = al + b = u_2$ $\Rightarrow$ $a = \frac{u_2 - u_1}{l}$

$$\boxed{v(x) = \frac{u_2 - u_1}{l} x + u_1}$$

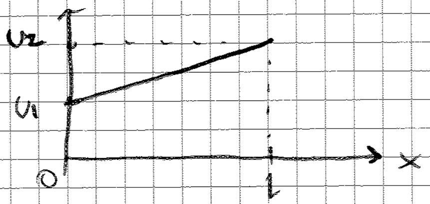
$$w(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{w_{n0}\, e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2} t}}_{w_n(t)} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$w_{n0} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \left(f(x) - v(x)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$w(x) = \int_0^l G(x,y,t)\left[f(y) - v(y)\right] dy$$

26/10/15

Se $u_2 > u_1$



$w(x,t)$

$$\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx} \\ w(x,0) = f(x) - v(x) \\ w(0,t) = 0 \\ w(l,t) = 0 \end{cases} \quad \forall x \in (0,l) \quad \forall t \in (0,+\infty)$$

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_{n0}\, e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2} t} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$w(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_{n0} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) = f(x) - v(x)$$

$$w_{n0} = \int_0^l \left[f(x) - v(x)\right] \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx$$

Supponiamo che $f(x) = u_0$ $\forall x \in (0,l)$

$$w_{n0} = \int_0^l \left[(u_0 - u_1) - \frac{u_2 - u_1}{l} x\right] \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l (u_0 - u_1) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx - \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \frac{u_2 - u_1}{l}\, x \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx$$

$$\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx = \left[-\frac{l}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right)\right]_0^l = -\frac{l}{n\pi}(-1)^n + \frac{l}{n\pi} =$$

$$= \frac{l}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right]$$

$$u_t = a^2 u_{xx} - hu$$
$$-K\sigma\, u_x(0,t) = q_1$$
$$K\sigma\, u_x(l,t) = q_2$$
$$u(x,0) = f(x)$$

Diagonalizzo l'operatore ma c'è il termine hu

$$-a^2 \frac{d^2\phi}{dx^2} + h\phi = \lambda\phi$$

$$a^2 \frac{d^2\phi}{dx^2} + (\lambda - h)\phi = 0$$

NON SI FA COSÌ

λ sarebbe l'autovalore di (ammesso che fosse)

$$-a^2 \frac{d\phi^2}{dx^2} + h$$

Eseguiamo un cambio di variabili

$$\hat{u}(x,t) = e^{ht}\, u(x,t)$$
$$\Rightarrow u(x,t) = e^{-ht}\, \hat{u}(x,t)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -he^{-ht}\, \hat{u}(x,t) + e^{-ht} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(x,t)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -hu(x,t) + e^{-ht}\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(x,t)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-ht}\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2}(x,t)$$

$$\cancel{-hu} + e^{-ht}\hat{u}_t = e^{-ht} a^2 \hat{u}_{xx} \cancel{-hu}$$

$$\begin{cases} \hat{u}_t = a^2 \hat{u}_{xx} \\ K\sigma e^{-ht}\hat{u}_x(l,t) = q_2 \\ -K\sigma e^{-ht}\hat{u}_x(0,t) = q_1 \\ \hat{u}(x,0) = f(x) \end{cases}
\qquad
\begin{cases} \hat{u}_t = a^2 \hat{u}_{xx} \\ \hat{u}(x,0) = f(x) \\ -K\sigma\, \hat{u}_x(0,t) = q_1 e^{ht} \\ K\sigma\, \hat{u}_x(l,t) = q_2 e^{ht} \end{cases}$$

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t)$$

$0 = a^2 \frac{d^2 v}{dx^2} - hv$	$w_t = a^2 w_{xx} - hw$
$-K\sigma \frac{dv}{dx}(0) = q_1$	$-K\sigma\, w_x(0,t) = 0$
$K\sigma \frac{dv}{dx}(l) = q_2$	$K\sigma\, w_x(0,t) = 0$
	$w(x,0) = f(x)$

$$w \longmapsto \hat{w}(x,t) = e^{ht}\, w(x,t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\hat{w}_t = a^2 \hat{w}_{xx} \\ &-K\sigma\, \hat{w}_x(0,t) = 0 \\ &K\sigma\, \hat{w}_x(l,t) = 0 \end{aligned}}$$

$$C_2 = \frac{\left| -e^{\frac{\sqrt{h}}{a}l} \quad \frac{a}{\sqrt{h}} R_2 \right|}{2\sinh\left(\frac{\sqrt{h}}{a}l\right)} = \frac{\frac{a}{\sqrt{h}} R_2 + \frac{a}{\sqrt{h}} R_1 e^{\frac{\sqrt{h}}{a}l}}{2\sinh\left(\frac{\sqrt{h}}{a}l\right)}$$

$$V(x) = C_1 e^{-\frac{\sqrt{h}}{a}x} + C_2 e^{\frac{\sqrt{h}}{a}x} = \frac{\frac{a}{\sqrt{h}}}{2\sinh\left(\frac{\sqrt{h}}{a}l\right)} \left\{ R_1 e^{-\frac{\sqrt{h}}{a}(x-l)} + R_2 e^{-\frac{\sqrt{h}}{a}x} + R_2 e^{\frac{\sqrt{h}}{a}x} + R_1 e^{\frac{\sqrt{h}}{a}(x-l)} \right\}$$

$$V(x) = \frac{2\frac{a}{\sqrt{h}}\left[R_1 \cosh\left(\frac{\sqrt{h}}{a}(x-l)\right) + R_2 \cosh\left(\frac{\sqrt{h}}{a}x\right)\right]}{2\sinh\left(\frac{\sqrt{h}}{a}l\right)}$$

$$V(x) = \frac{a}{\sqrt{h}} \, \frac{\frac{q_1}{k_0}\cosh\left(\frac{\sqrt{h}}{a}(x-l)\right) + \frac{q_2}{k_0}\cosh\left(\frac{\sqrt{h}}{a}x\right)}{\sinh\left(\frac{\sqrt{h}}{a}l\right)}$$

$$\begin{cases} -a^2 \dfrac{d^2\phi}{dx^2} = \lambda \phi \\ -\dfrac{d\phi}{dx}(0) = 0 \\ \dfrac{d\phi}{dx}(l) = 0 \end{cases}$$

Dirichlet $\longrightarrow$ vincoli allo spostamento

Neumann $\longrightarrow$ condizioni sforzo

$$\phi(x) = A\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a}x\right)$$

$$\frac{d\phi}{dx}(x) = A\frac{\sqrt{\lambda}}{a}\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a}x\right) + B\frac{\sqrt{\lambda}}{a}\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a}x\right)$$

$$\frac{d\phi}{dx}(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

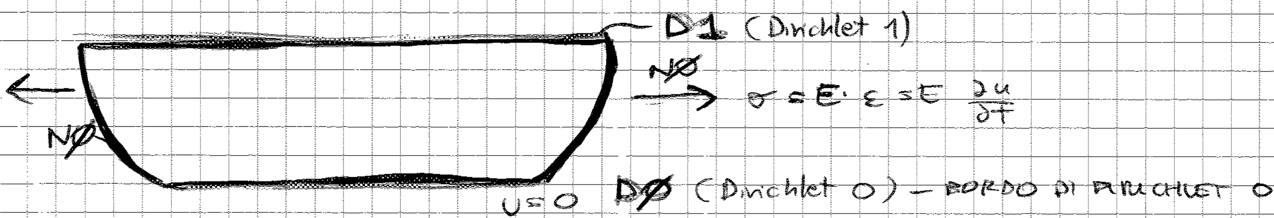
$$\frac{d\phi}{dx}(l) = 0 \Rightarrow A\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a}l\right) = 0$$

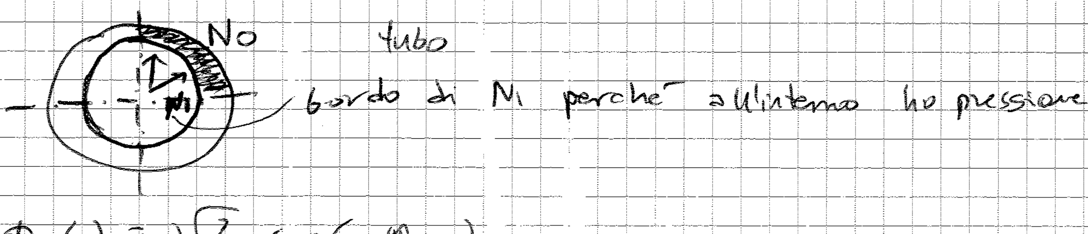
$$\frac{\sqrt{\lambda}}{a}l = n\pi, \; n \in \mathbb{N}$$

$$\phi_n(x) = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

condizioni al bordo studiate fino ad ora erano di DIRICHLET

Quelle studiate ora sono condizioni di NEUMANN





$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Le autofunzioni del problema 2 sono

$$\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{+\infty} = \left\{B_n \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right)\right\}_{n=0}^{+\infty} = \left\{\sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right)\right.$$

$$\forall n \geq 0 \quad \phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right)$$

$$0 = \phi'(0) = B = 0$$

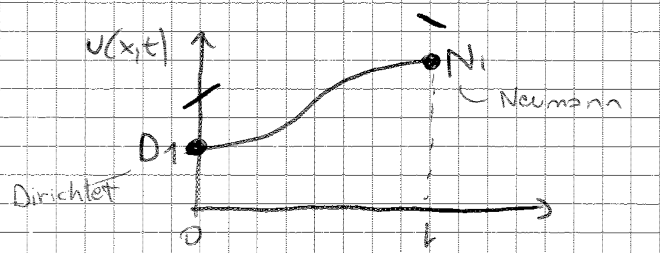
$$0 = \phi(l) = A\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}l\right) = 0$$

$$\frac{\sqrt{\lambda}}{2}l = \frac{(2n+1)\pi}{2}$$

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right) \qquad n \geq 0$$

$$u_x(0,t) = -\frac{q_0}{k_0}$$

$$u(l,t) = u_0$$



Discorso su punti e tangenti
se ho punti nelle condizioni bordi
allora Dirichlet
Neumann → conosco tangenti ai bordi
ma non la posizione di
esse, per quale punto passano

$$u(x,t) = Q_0 x + u_0$$
$$+ \sum_{n=0}^{+\infty} w_{n0}\, e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 a^2}{4l^2}t} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right)$$

$$w_{n0} = \int_0^l \left[f(x) - v(x)\right] \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right) dx$$

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n(t)\cdot\phi_n(x)$$

$$w_t(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dot{w}_n(t)\cdot\phi_n(x)$$

$$w_{xx}(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n(t)\cdot\phi_n''(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} w_n(t)\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2}\phi_n(x)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \dot{w}_n(t)\,\phi_n(x) = -a^2 \sum_{n=0}^{+\infty} w_n(t)\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2}\phi_n(x)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{\dot{w}_n(t) + \frac{(2n+1)^2\pi^2 a^2}{4l^2} w_n(t)\right\}\phi_n(x) = 0$$

$$w_n(t) = w_{n0}\cdot e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 a^2}{4l^2}t}$$

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_{n0}\, e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 a^2}{4l^2}t} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right)$$

$V''(x) - \frac{h}{a^2} V(x) = 0 \; ; \quad m = \frac{\sqrt{h}}{a} > 0$

$V''(x) - m^2 V(x) = 0$

$V(x) = Ae^{-mx} + Be^{mx}$

$V(0) = A + B = U_1 - U_0$

$V(L) = Ae^{-mL} + Be^{mL} = U_2 - U_0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{-mL} & e^{mL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1 - U_0 \\ U_2 - U_0 \end{Bmatrix}$$

$$A = \frac{\begin{vmatrix} U_1 - U_0 & 1 \\ U_2 - U_0 & e^{mL} \end{vmatrix}}{e^{mL} - e^{-mL}} = \frac{(U_1 - U_0)e^{mL} - (U_2 - U_0)}{2\sinh(mL)}$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} 1 & U_1 - U_0 \\ e^{-mL} & U_2 - U_0 \end{vmatrix}}{2\sinh(mL)} = \frac{(U_2 - U_0) - (U_1 - U_0)e^{-mL}}{2\sinh(mL)}$$

$$V(x) = \frac{(U_1 - U_0)e^{-m(x-L)} - (U_2 - U_0)e^{-mx}}{2\sinh(mL)} + \frac{(U_2 - U_0)e^{mx} - (U_1 - U_0)e^{m(x-L)}}{2\sinh(mL)}$$

$$V(x) = -\frac{(U_1 - U_0)\left(e^{m(x-L)} - e^{-m(x-L)}\right)}{2\sinh(mL)} + \frac{(U_2 - U_0)\left(e^{mx} - e^{-mx}\right)}{2\sinh(mL)}$$

$$V(x) = \frac{(U_2 - U_0)\sinh(mx) - (U_1 - U_0)\sinh\left(m(x-L)\right)}{\sinh(mL)}$$

$$V(0) = \frac{(U_1 - U_0)\sinh(mL)}{\sinh(mL)} = U_1 - U_0$$

$$U(x,t) = U_0 + \frac{(U_2 - U_0)\sinh(mx) - \dots}{\sinh(mL)} + e^{-ht} \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{L}}\, \hat{W}_{n0}\, e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{L^2} t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$\hat{W}_{n0} = \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L \left[f(y) - U_0 - V(y) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L} y\right) dy$$

se devo calcolare $\sinh(my) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)$ ← INTEGRALE

$$= \frac{e^{my} - e^{-my}}{2} \; \frac{e^{i\frac{n\pi}{L}y} - e^{-i\frac{n\pi}{L}y}}{2i}$$

$$\int_0^L \sinh(my)\sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) dy = \frac{1}{4i} \int_0^L e^{\overbrace{\left(m + i\frac{n\pi}{L}\right)}^{a_1} y} dy \; +$$

$$- \frac{1}{4i} \int_0^L e^{-\underbrace{\left(m + \frac{n\pi}{L}\right)}_{\bar{a}_1} y} dy - \frac{1}{4i} \int_0^L e^{-\underbrace{\left(m - i\frac{n\pi}{L}\right)}_{\bar{a}_1} y} dy + \frac{1}{4i} \int_0^L e^{-\underbrace{\left(m + i\frac{n\pi}{L}\right)}_{\bar{a}_1} y} dy$$

$$= \underbrace{\int_0^l f(x,t)\cdot \phi_m(x)\,dx}_{f_m(t)}$$

$$\dot u_m(t) + \frac{m^2\pi^2 a^2}{l^2}\, u_m(t) = f_m(t)$$

$$u_m(t) = u_m^h(t) + u_m^p(t)$$

Calcolo la soluzione particolare con il metodo di Lagrange

$$u_m^h(t) = C_n\, e^{-\frac{m^2\pi^2a^2}{l^2}t}$$

$$u_m^p(t) = p(t)\, e^{-\frac{m^2\pi^2a^2}{l^2}t}$$

$$\dot p(t)\, e^{-\frac{m^2\pi^2a^2}{l^2}t} - \cancel{\frac{m^2\pi^2a^2}{l^2}\, p(t)\, e^{-\frac{m^2\pi^2a^2}{l^2}t}} + \cancel{\frac{m^2\pi^2a^2}{l^2}\, p(t)\, e^{\dots}}$$

$$\dot p(t) = f_m(t)\, e^{\frac{m^2\pi^2a^2}{l^2}t}$$

$$p(t) = \int_0^t f_m(\tau)\, e^{\frac{m^2\pi^2a^2}{l^2}\tau} \to u_m^p(t) = \int_0^t f_m(\tau)\, e^{-\frac{m^2\pi^2a^2}{l^2}(t-\tau)}\, d\tau$$

03/11/15

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dot u_n(t) + \frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}\, u_n(t)\right)\phi_n(x) = f(x,t)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dot u_n(t) + \frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}\, u_n(t)\right)\underbrace{\int_0^l \phi_n(x)\,\phi_m(x)\,dx}_{\phi_n\cdot\phi_m = (\phi_n,\phi_m)} = \int_0^l f(x,t)\,\phi_m(x)\,dx$$

→ scrittura del prodotto scalare

$$\int_0^l \phi_n(x)\cdot\phi_m(x)\,dx = \underset{\text{DELTA DI KRONECKER}}{\delta_{nm}} = \begin{cases} 1 & n=m \\ 0 & n\neq m\end{cases}$$

$$f_m(t) := \int_0^l f(x,t)\,\phi_m(x)\,dx = \underbrace{(f,\phi_m)}_{\text{prodotto scalare}}$$ ← introdotto ora

$$\dot u_m(t) + \frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}\, u_m(t) = f_m(t) \qquad \forall m\geq 1,\ m\in\mathbb{N}$$

$$u_m(t) = \underbrace{u_{m_h}(t)}_{\text{omogenea}} + \underset{\text{particolare}}{u_{m_p}(t)}$$

$$\dot u_{m_h}(t) + \frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}\, u_{m_h}(t) = 0$$

$$u_{m_h}(t) = C_m\, e^{-\frac{m^2\pi^2a^2}{l^2}t}$$

$$u_{m_p}(t) = p(t)\, e^{-\frac{m^2\pi^2a^2}{l^2}t}$$

$$\dot p(t)\, e^{-\frac{m^2\pi^2a^2}{l^2}t} - p(t)\,\frac{m^2\pi^2a^2}{l^2}\, e^{-\frac{m^2\pi^2a^2}{l^2}t} + \frac{m^2\pi^2a^2}{l^2}\, e^{\left(-\frac{m^2\pi^2a^2}{l^2}t\right)}\cdot p(t)$$

$$= f_m(t)$$

$$\dot p(t) = f_m(t)\, e^{\frac{m^2\pi^2a^2}{l^2}t}$$

$$p(t) = \int_0^t f_m(\tau)\, e^{\frac{m^2\pi^2a^2}{l^2}\tau}\, d\tau$$

Man mano che τ aumenta l'esponenziale diverge → lo vediamo mansueto

06/11/'15

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u_x(0,t) - Hu(0,t) = -Hu_1 \\ u_x(l,t) + Hu(l,t) = Hu_2 \\ u(x,0) = f(x) \quad x \in (0,l) \end{cases} \quad t > 0$$

CONDIZIONI AL BORDO DI **ROBIN**

flusso totale $\vec{j} = -K\nabla T + cT\vec{v}$

$$\vec{j} \cdot \vec{e}_x = -K T_x + cTu_x = q_1$$

$$T_x - \frac{c}{K} u_x T = \frac{q_1}{K}$$

$$u_x - Hu = -Hu_1$$

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t)$$

Problema stazionario

$$\begin{cases} 0 = a^2 v''(x) \\ v'(0) = -Hv(0) = -Hu_1 \\ v'(l) + Hv(l) = Hu_2 \end{cases}$$

$$V(x) = c_1 x + c_2$$
$$V'(x) = c_1$$
$$V(0) = c_2$$
$$V(l) = c_1 l + c_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 - Hc_2 = -Hu_1 \\ c_1 + H(c_1 l + c_2) = Hu_2 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} c_1 - Hc_2 = -Hu_1 \\ (1+Hl)c_1 + Hc_2 = Hu_2 \end{cases}$$

$\xleftarrow{\text{somma x colonna}}$

$$\begin{cases} c_1 - Hc_2 = -Hu_1 \\ (2+Hl)c_1 = H(u_2-u_1) \end{cases}$$

$$c_1 = H \cdot \frac{u_2-u_1}{2+Hl}$$

$$c_1 + Hu_1 = Hc_2$$

$$c_2 = \frac{c_1 + Hu_1}{H}$$

$$c_2 = \frac{u_2-u_1}{2+Hl} + u_1 = \frac{u_2 - u_1 + 2u_1 + Hlu_1}{2+Hl} =$$

$$= \frac{u_2 + (1+Hl)u_1}{2+Hl}$$

Quindi $V(x) = H\frac{u_2-u_1}{2+Hl}x + \frac{u_2+(1+Hl)u_1}{2+Hl}$

Con la $v(x)$ ci siamo. Passiamo a $w(x,t)$

$$\cot g(kl) = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{H} - \frac{H}{k}\right)$$

$$\phi_n(x) = \cos(K_n x) + \frac{H}{K_n}\sin(K_n x) \qquad n = 1, 2, \dots$$

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n(t)\,\phi_n(x)$$

Sostituisco nell'eq. di partenza

$$w_t = a^2 w_{xx}$$

$$w_t(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dot{w}_n(t)\cdot\phi_n(x)$$

$$w_{xx}(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n(t)\,(-K_n^2)\,\phi_n(x)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \dot{w}_n(t)\,\phi_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -a^2 K_n^2\, w_n(t)\,\phi_n(x)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\dot{w}_n(t) + a^2 K_n^2\, w_n(t)\right)\phi_n(x) = 0$$

$$\forall n \geq 1 \qquad \dot{w}_n(t) + a^2 K_n^2 \cdot w_n(t) = 0$$

$$w_n(t) = w_{n0}\cdot e^{-a^2 K_n^2 t}$$

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_{n0}\cdot e^{-a^2 K_n^2 t}\,\phi_n(x)$$

$$w(x,0) = f(x) - v(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_{n0}\,\phi_n(x) \qquad (1)$$

Unico caso in cui non scrivo funzioni ortonormalizzate

$$\phi_n(x) = \cos(K_n x) + \frac{H}{K_n}\,\text{sen}(K_n x) \rightarrow \boxed{\|\phi_n(x)\| = \int_0^l (\phi_n(x))^2\,dx = \frac{(K_n^2 + H^2)l + 2H}{2K_n^2}}$$

$\downarrow$

sono ORTOGONALI ma NON NORMALIZZATE

$$(1) \quad \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} w_{n0}\,\phi_n(x)\,\phi_m(x)}_{\text{si salva solo } n=m} = (f(x) - v(x))\,\phi_m(x)$$

$$w_{m0}\int_0^l \phi_m(x)^2\,dx = \int_0^l (f(x) - v(x))\,\phi_n(x)\,dx$$

$$w_{m0} = \frac{2K_m^2}{(K_m^2 + H^2)l + 2H}\int_0^l (f(x) - v(x))\,\phi_m(x)\,dx$$

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2K_n^2}{(K_m^2 + H^2)l + 2H}\, e^{-a^2 K_n^2 t}\int_0^l \phi_n(z)\,(f(z) - v(z))\,dz\;\phi_n(x)$$

$K = K(E, I, \ell) = \frac{EI}{\ell} \Rightarrow [K] = \frac{m^2 \cdot m^4}{m} = Nm$ 9/11/15

$E_{f \, \text{flessione}} = \frac{1}{2} K (y''(x))^2$

$E_q = -q(x) \cdot y(x)$
energia potenziale

$$\mathcal{E}(y) = \int_0^\ell [K(y''(x))^2 - q(x) y(x)] \, dx$$
funzionale

$\mathcal{E}, \; C \to R$ i minimi vanno cercati nei punti stazionari

Suppongo y soluzione

$$y \to y + \varepsilon \gamma = \tilde{y}$$
ε cost, γ perturbazione della soluzione

$$\mathcal{E}(y + \varepsilon\gamma) = \hat{\mathcal{E}}(\varepsilon) = \frac{1}{2} K \int_0^\ell (y''(x) + \varepsilon \gamma''(x))^2 dx + - \int_0^\ell q(x)(y(x) + \varepsilon\gamma(x)) dx \Rightarrow$$

$$\frac{d\hat{\mathcal{E}}}{d\varepsilon}(\varepsilon) = K \int_0^\ell (y''(x) + \varepsilon \gamma''(x)) \cdot \gamma''(x) dx - \int_0^\ell q(x) \gamma(x) dx$$

$$\frac{d\hat{\mathcal{E}}}{d\varepsilon}(0) = K \int_0^\ell y''(x) \gamma''(x) dx - \int_0^\ell q(x) \gamma(x) dx$$

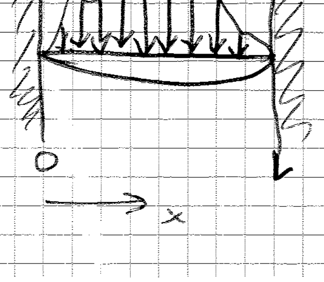
$$y'' \gamma'' = \frac{d}{dx}(y''\gamma') - y''' \gamma' = \frac{d}{dx}(y''\gamma') - \frac{d}{dx}(y'''\gamma) + y^{IV} \gamma$$

$$\frac{d\hat{\mathcal{E}}}{d\varepsilon}(0) = \int_0^\ell \frac{d}{dx}(K y'' \gamma' - K y''' \gamma) dx + \int_0^\ell (K y^{IV}(x) - q(x)) \gamma(x) dx$$

Impongo $\frac{d\hat{\mathcal{E}}}{d\varepsilon}(0) = 0 = \boxed{K y''(\ell)\gamma'(\ell) - K y'''(\ell) \cdot \gamma(\ell) - K y''(0) \cdot \gamma'(0) + K y'''(0)\gamma(0)} + \int_0^\ell (K y^{IV}(x) - q(x)) \gamma(x) dx = 0$

TERMINI DI BORDO = B

1° caso: trave incastrata



$y(0) = 0$ $y(\ell) = 0$

$y'(0) = 0$ $y'(\ell) = 0$

$= l\int_0^l q(x_2)\,dx_2 - \int_0^l x\,q(x)\,dx = 0$

Indeterminazione alla rotazione e alla traslazione

$y_p = \frac{1}{K}\int_0^l (x-z)^{n-1} q(z)\,dz$

solux particolare

$y_h(x) = C_1 x + C_0$

Il problema funziona se e solo se

$\int_0^l q(x)\,dx = 0 \quad , \quad \int_0^l x\,q(x)\,dx = 0$

$K y^{IV}(x) = q(x) \qquad \left(K\frac{d^4}{dx^4}\right) y = q$

funziona quando il termine noto è $\perp$ al nucleo dell'operatore

$Ker\left(K\frac{d^4}{dx^4}\right) = \left\{ u \text{ t.c. } K\frac{d^4u}{dx^4} = 0 \right\} = \{C_0, C_1 x\}$

$0 = \int_0^l C_0\, q(x)\,dx = C_0\int_0^l q(x)\,dx$

$0 = \int_0^l C_1 x\, q(x)\,dx = C_1\int_0^l x\,q(x)\,dx$

$\int_0^l q(x)\,dx = 0 \qquad \int_0^l x\,q(x)\,dx = 0$

13/11/15

<u>RISONANZA</u>

$\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = f(t)$

$m\ddot{u}(t) + Ku(t) = f(t)$

massa dell'oscillatore

forza elastica cambiata di segno

divido per la massa

$\ddot{u}(t) + \frac{K}{m} u(t) = \frac{f(t)}{m} \qquad \omega^2 = \frac{K}{m} \qquad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

pulsazione

cambio di coordinate

$w(t) = \dot{u}(t) + i\omega u(t)$

$\dot{w}(t) = \ddot{u}(t) + i\omega \dot{u}(t) \qquad i\omega w(t) = i\omega\dot{u}(t) - \omega^2 u(t)$

$\dot{w}(t) - i\omega w(t) = \ddot{u}(t) + \omega^2 u(t)$

$\dot{w}(t) - i\omega w(t) = f(t)$

$w(t) = w_h(t) + w_p(t)$

$w_h(t) = C\cdot e^{i\omega t}$

$w_p(t) = p(t)\, e^{i\omega t}$

$\dot{w}_p(t) = \dot{p}(t)\, e^{i\omega t} + i\omega\, p(t)\, e^{i\omega t} = \dot{p}(t) e^{i\omega t} + i\omega\, w_p(t)$

$\dot{p}(t)\, e^{i\omega t} + i\omega\, w_p(t) - i\omega\, w_p(t) = f(t)$

EQUAZIONI DI D'ALAMBERT

$$U_{tt} - c^2 U_{xx} = f$$

$$u(x,0) = U_0$$

$$u_t(x,0) = V_0$$

$$\left.\begin{array}{l} u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{array}\right\}$$

Autofunzioni: $-c^2 \phi_{xx} = \lambda \phi$

$$\phi(0) = 0$$

$$\phi(l) = 0$$

$$\phi_{xx} + \frac{\lambda}{c^2}\phi = 0 \qquad \phi(x) = A\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x\right) + B\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x\right)$$

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

perché $\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{c}l\right) = 0 \qquad \frac{\sqrt{\lambda}}{c}l = n\pi$

$$\sqrt{\lambda} = \underbrace{\frac{n\pi}{l}}_{[m]}\ \underbrace{c}_{\text{celerità } \left[\frac{m}{s}\right]}$$

$$K_n = \frac{n\pi}{l} \qquad \sqrt{\lambda_n} = K_n \cdot c \qquad \phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\,\mathrm{sen}(K_n x)$$

Riscrivo la soluzione in serie di Fourier:

$$u(x,t) = \sum u_n(t)\,\phi_n(x)$$

$$u_{tt}(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ddot{u}_n(t)\cdot\phi_n(x)$$

$$\phi''_n(x) = -K_n^2\,\phi_n(x)$$

Sostituisco in D'Alambert

$$U_{xx}(x,t) = -\sum K_n^2\,u_n(t)\,\phi_n(x)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ddot{u}_n(t)\cdot\phi_n(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} c^2 K_n^2\,u_n(t)\,\phi_n(x) = \sum f_n(t)\,\phi_n(x)$$

$$\Rightarrow f(x,t) = \sum f_n(t)\,\phi_n(x) \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$$

$$\ddot{u}_n(t) + \underbrace{c^2 K_n^2}_{=\omega_n^2}\,u_n(t) = f_n(t)$$

Ho infiniti oscillatori per infinite frequenze forzanti

In vettori d'onda:

$$\left(\frac{K_n}{2\pi}\right)^{-1} = \left(\frac{n}{2l}\right)^{-1} \quad \text{LUNGHEZZA D'ONDA}$$

$$\ddot{u}_n(t) + \omega_n^2\,u_n(t) = f_n(t) \qquad \text{con } \omega_n^2 = c^2 K_n^2$$

$\omega_n = \pm c K_n$ RELAZIONE DI DISPERSIONE (è lineare) DELLA BANDA ACUSTICA

$$\omega(K_n) = c K_n$$

$$K_{n+1} - U_n = \frac{\pi}{l}$$

$$\omega(K) = cK$$

$$\frac{d\omega}{dK} = c$$

VELOCITÀ DI GRUPPO dell'onda

DIM **FD → FF**

Sia u una soluzione di FD → sicuramente $u(l) = g$ e $\forall w \in V$

$$\int_0^l w'(x) \cdot u'(x) dx = \int_0^l w(x) f(x) dx + w(0) \cdot h$$

Scriviamo

$$w'u' = (wu')' - wu'' \quad \text{se } u'' \text{ esiste su tutto } (0,l)$$

Allora

$$\int_0^l \frac{d}{dx}\left(w(x) \cdot u'(x)\right) dx - \int_0^l w(x) \cdot u''(x) dx = \int_0^l w(x) f(x) dx + w(0) h$$

$$-w(0) \cdot u'(0) + \overset{0}{w(l)} \cdot u'(l) - \int_0^l w(x) \cdot u''(x) dx = \int_0^l w(x) f(x) dx + w(0) h$$

$$\int_0^l w(x)\left[u''(x) + f(x)\right] dx + w(0)\left[u'(0) + h\right] = 0 \qquad \forall w \in V$$

L'obiettivo è riottenere la forma forte

Poiché w è arbitraria prendiamo $w(x) = \phi(x)\left[u''(x) + f(x)\right]$

$$\phi(x) = x(l-x)$$

Allora

$$w(0) = 0 \rightarrow \text{ottengo } \int_0^l w(x)\left[u''(x) + f(x)\right] dx \overset{(1)}{=} \int_0^l \phi(x)\left[u''(x) + f(x)\right]^2 dx = 0$$

Ma $\phi(x) > 0 \quad \forall x \in (0,l)$ mentre $\left[u''(x) + f(x)\right]^2 \geq 0$

L'unico modo per soddisfare (1) è che

$$\phi(x)\left[u''(x) + f(x)\right]^2 = 0 \qquad \text{ossia} \qquad u''(x) + f(x) = 0$$

$$w(0)\left[u'(0) + h\right] + \int_0^l w(x)\left[u''(x) + f(x)\right] dx = 0$$

Abbiamo però appena dimostrato che

$$\int_0^l w(x)\left[u''(x) + f(x)\right] dx = 0$$

Otteniamo quindi

$$w(0)\left[u'(0) + h\right] = 0 \qquad (2)$$

Se ora vogliamo che (2) sia soddisfatta $\forall w \in V$ cioè anche quando $w(0) \neq 0$ allora deve succedere $u'(0) + h = 0 \rightarrow u'(0) = -h$

CONDIZIONE NATURALE $u'(0) = h$

CONDIZIONE ESSENZIALE $u(l) = g$

$$\int_0^l w'(x) u'(x) dx = \int_0^l w(x) f(x) dx + w(0) h$$

La FD prende anche il nome di <u>PPV</u> (<u>PRINCIPIO DELLE POTENZE VIRTUALI</u> o <u>LAVORO VIRTUALE</u>)

③ costruisco U^h

$$U^h = V^h + \underbrace{P^h}_{\text{particolare}} \qquad p^h = g$$

forma astratta $a(w^h, u^h) = a(w^h, v^h + p^h) = a(w^h, v^h) + a(w^h, p^h)$

p^h è tale che $p^h(l) = g$

$$a(w^h, v^h) = \underbrace{(w^h, f) + w^h(0)\,h - a(w^h, p^h)}_{\text{QUESTO È NOTO} = F}$$

$\boxed{a(w^h, v^h) = F}$ FORMA DI GALERKIN (FG)

FORMULA BUBUNOV-GALERKIN

Dati f, h, g trovare $u^h = v^h + p^h$

con $v^h \in \mathcal{V}^h$ t.c. $\forall w^h \in \mathcal{V}^h$,

$$a(w^h, v^h) = (w^h, f) + w^h(0)\,h - a(w^h, p^h)$$

$\mathcal{V}^h = \{ v^h \text{ t.c. } v^h \in \mathcal{V} \}$

$\mathcal{V} = \{ v \text{ t.c. } \underbrace{\int_0^l |v_x|^2 dx < +\infty,\ v(l) = 0}_{v \in H_0} \}$

Sviluppo delle funzioni test rispetto ad una base finita

① $w^h \in \mathcal{V}^h$ = spazio delle funzioni test approssimate

② $u^h = v^h + p^h$ = "spazio delle funzioni "trial" approssimate

p^h è costituito in modo che $p^h(l) = g$ mentre v^h, invece, deve essere t.c. $v^h(l) = 0$

Stiamo scrivendo la soluzione come sovrapposizione

v che appartiene allo stesso spazio delle funzioni test $v \in \mathcal{V}$

+ funzione che deve essere compatibile con le condizioni al bordo Dirichlet quindi con le condizioni essenziali

Non abbiamo più una soluzione, ce la costruiamo, spalmandola su tutto il dominio

③ costruisco una griglia computazionale, in questo caso è una partizione dell'intervallo in un sottointervallo, e definisco i nodi (7 in questo caso), in generale mi serve risolvere con un numero di nodi molto grande. Posso rifinire "REFINING" aggiungendo nodi e quindi elementi (elementi definiti dai nodi e dalle congiungenti dei nodi) se chiamo elemento fissato la discretizzazione, ciò che è individuato da 2 nodi consecutivi, le funzioni sono lineari per ogni elemento ma globalmente non sono lineari. Queste funzioni affini o ROOF.

Hanno una proprietà essenziale :

$N_A(x_B) = \delta_{AB} \quad \forall A, B = 1, \dots n$ nodi importante avere qst identità

perché $v^h(x) = \sum_{A=1}^{n\,nodi-1} d_A N_A(x)$

$$v^h(x_B) = \sum_{A=1}^{n\,nodi-1} d_A N_A(x_B) = \sum_{A=1}^{n\,nodi-1} d_A \delta_{AB} = d_B$$

Adesso mi manca da definire p^h, siccome su l abbiamo imposto la condizione di Dirichlet.

$p^h(x) = g N^P(x)$ dobbiamo fare in modo che $N_7(x) = 0$

allora riscrivo gli sviluppi in modo che n nodi − DIRICHLET = 0

Ho due costruzioni w^h, v^h

M = numero di nodi da usare nello sviluppo di v^h e w^h

$$\boxed{\begin{aligned} w^h(x) &= \sum_{A=1}^{M} c_A N_A(x) \\ v^h(x) &= \sum_{A=1}^{M} d_A N_A(x) = \sum_{B=1}^{M} d_B \cdot N_B(x) \end{aligned}}$$

Forma bilineare e sostituisco

$$F^h = a(w^h, v^h) = a\left(\sum_{A=1}^{M} c_A N_A, \sum_{B=1}^{M} d_B N_B \right) =$$

$$= \sum_{A=1}^{M} \sum_{B=1}^{M} c_A\, a(N_A, N_B)\, d_B$$

$$a(N_A, N_B) = \int_0^l \frac{dN_A}{dx}(x) \frac{dN_B}{dx}(x)\,dx \Rightarrow \int_0^l N_A'(x) N_B'(x)\,dx = K_{AB}$$

K è la matrice di rigidezza del sistema. Quindi la forma bilineare assume questa forma

$$a(w^h, v^h) = \sum_{A,B=1}^{M} c_A K_{AB} d_B =$$

$$= \{c_1, \dots, c_M\} \begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1M} \\ K_{21} & & \\ \vdots & & \\ K_{M1} & \cdots & K_{MM} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_M \end{Bmatrix}$$

$F^h = (w^h, f) - a(w^h, p^h) + w^h(0) \cdot h$

$$F = (w^h, f) + w^h(0) \cdot h - \sum_{A=1}^{M} c_A\, a(N_A, N^P)\, g$$

$$= \int_0^l \sum_{A=1}^{M} c_A N_A(x) f(x)\,dx + c_1 h - \sum_{A=1}^{M} c_A\, g \int_0^l N_A'(x) N^{P'}(x)\,dx$$

$$= \sum_{A=1}^{M} c_A \int_0^l N_A(x) f(x)\,dx + \sum_{A=1}^{M} c_A \delta_{A1} h - \sum_{A=1}^{M} c_A \cdot g \int_0^l N_A'(x) N^{P'}(x)\,dx$$

$$F = \sum_{A=1}^{M} c_A F_A'$$

$$F_A' = \int_0^l N_A(x) f(x)\,dx + \delta_{A1} h - g \int_0^l N_A'(x) N^{P'}(x)\,dx$$

Se n_p è il # nodi punti "staccati" dalla discretizzazione

$\Rightarrow n_{nodi} = n_p - 1$

Poniamo $n_{nodi} = M \in \mathbb{N}$

M # di nodi escluso il nodo corrispondente al bordo di Dirichlet

$\sum_{B=1}^{M} K_{AB}\, d_B = F_A, \quad \forall A = 1, \dots M$

Sistema di m equazioni in m incognite, come faccio a vedere se c'è soluzione

① CONDIZIONE DI ORTOGONALITÀ

② $\ker(K) = \{d \text{ t.c. } Kd = 0\} = \ker(K^T)$

$F \perp \ker(K^T) = \ker(K)$

Il problema ammette sicuro soluzione $\forall F$, se Ker è un vettore nullo (visto che il problema ha i vincoli ben posti, non dobbiamo imporre anche l'ortogonalità di F al nucleo)

$K_{AB} = a(N_A, N_B) = \int_0^1 N_A'(x)\, N_B'(x)\, dx$

$F_A = (N_A, f) + N_A(0)h - g\, a(N_A, N_{M+1}) = \int_0 N_A(x)\, f(x)\, dx + N_A(0)h$

ESERCIZIO - PROBLEMA IN FORMA FORTE

$$\begin{cases} u'' = 0 \\ u(1) = g \\ u'(0) = -h \end{cases}$$

$u'(x) = C_0$

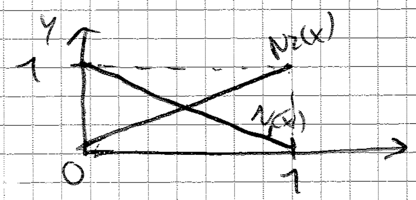
$u(x) = C_0 x + C_1$

$$\begin{cases} u'(1) = C_0 + C_1 = g \\ u'(0) = C_0 = -h \end{cases}$$

$$\boxed{u(x) = -hx + g + h}$$

RISOLVERE $Kd = F$, K ed E assegnate, devo solo calcolarle

supponiamo di prendere la discretizzazione peggiore $n=1$, un solo nodo



$x_1 = 0$ $\quad$ $x_2 = 1$

D

FUNZIONI DI FORMA

$N_2(x) = x$

$N_1(x) = 1 - x$

Costruiamo la matrice, qual è l'incognita?

SOLUZIONE APPROSSIMATA $= u^h(x) = d_1 N_1(x) + g N_2(x) = d_2$

L'incognita è d_1. Il problema si riduce a $K_{11} d_1 = F_1$

- $K_{11} = a(N_1, N_1) = \int_0^1 N_1'(x)\, N_1'(x)\, dx = \int_0^1 (-1)(-1)\, dx = 1$

 (la fortuna di avere funzioni di rigidezza sul bordo)

- $F_1 = N_1(0)h - g\int_0^1 N_1'(x)\, N_2'(x)\, dx = h - g\int_0^1 (-1)(1)\, dx =$
 $= h + g$

CALCOLARE MATRICE DI RIGIDEZZA

2 gradi di libertà $\to 2\times 2 \to$ 4 conti? Me ne bastano 3 (matrice simmetrica)

$$K_{11} = \int_0^1 N_1'(x)\, N_1'(x)\, dx = \int_0^{1/2} (-2)(-2)\, dx = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$K_{22} = \int_0^1 N_2'(x)\, N_2'(x)\, dx = 2 + \int_{1/2}^1 2(1-x)\, dx = 4$$

$$K_{12} = K_{21} = -2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_0/4 \\ f_0/2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \to 2d_1 - 2d_2 = f_0/4 \quad *_1 \\ \to -2d_1 + 4d_2 = f_0/8 \quad *_2 \end{matrix}$$

$*_1 \quad d_1 - d_2 = f_0/8$

$*_2 \quad -d_1 + 2d_2 = f_0/4$

Metodo di eliminazione $\quad d_1 = \frac{f_0}{2} \qquad d_2 = \frac{3}{8} f_0$

Posso calcolare la soluzione

$u^h(x) = d_1 N_1(x) + d_2 N_2(x)$ SOLUZIONE APPROSSIMATA

Non devo mettere altro perché Dirichlet nullo per ipotesi

$$u^h(x) = \begin{cases} f_0 \frac{1}{2} - f_0 \frac{x}{4} & x \in [0, 1/2] \\ \frac{3}{4} f_0 (1-x) & x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

occhio, ho 1 punto angoloso

CALCOLARE ERRORE

$u \le \delta(x) = |u(x) - u^h(x)|$

Però voglio la continuità $\qquad \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} u^h(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} u^h(x) = \frac{3}{8}$

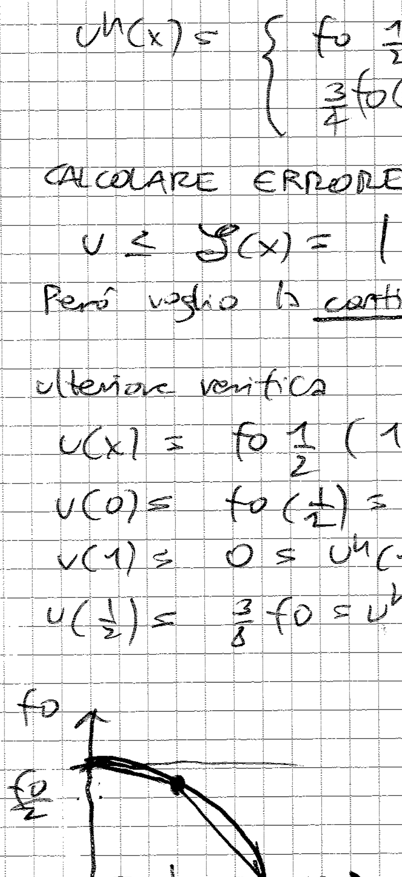
ulteriore verifica

$u(x) = f_0 \frac{1}{2}(1 - x^2)$

$u(0) = f_0 \left(\frac{1}{2}\right) = u^h(0)$

$u(1) = 0 = u^h(1)$

$u\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8} f_0 = u^h\left(\frac{1}{2}\right)$ approssimata e soluzione esatta coincidono in $\frac{1}{2}$



Ecco perché non soddisfa Neumann perché la $tg = 0$

Per soddisfare Neumann devo infittire solo per un assottigliamento $\to 0$ solo al limite

DERIVO SOL. APPROSSIMATA

$$u^{h\prime}(x) = \begin{cases} -\frac{f_0}{4} & x \in (0, \frac{1}{2}) \\ -\frac{3}{4} f_0 & x \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

Così mi associa la locale a quella globale

Dominio $[x_A, x_{A+1}]$ e $[\xi_1, \xi_2]$ sono legati tra loro da trasformazioni di riferimento di tipo affine

$$\xi = c_1 + c_2 x, \quad \forall x \in [x_A, x_{A+1}]$$

$$x = \frac{\xi - c_1}{c_2}$$

$$\begin{cases} \text{quando } x = x_A \\ \qquad \xi_1 = c_1 + c_2 x_A \\ x = x_{A+1} \\ \qquad \xi_2 = c_1 + c_2 x_{A+1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi_2 - \xi_1 = c_2 \underbrace{(x_{A+1} - x_A)}_{h_A} = c_2 h_A \\ c_2 = \dfrac{\xi_1 - \xi_2}{h_A} \end{cases}$$

. La convenzione che si adotta è che: posso dare ξ_1, ξ_2 valore assegnato

→ posso definire che

$$\xi_1 = -1; \quad \xi_2 = 1 \quad \Rightarrow c_2 = \frac{2}{h_A}$$

$$c_1 = -1 - \frac{2}{h_A} x_A$$

$$\boxed{\xi = \frac{2x - x_A - x_{A+1}}{h_A} \quad G \to L} \quad \to \quad \boxed{x = \frac{h_A \xi + x_A + x_{A+1}}{2} \quad L \to G}$$

NOTAZIONI

- e = numero di elementi
- a, b = indice di nodo nella descrizione locale
- A, B = " " globale

$\forall e = 1, \ldots$ N elementi

d_a^e = g d l dell'elemento l-esimo riferito al nodo a-esimo

$d_2^1 = d_2$

$N_a^l(\xi) = N_A(x^e(\xi))$ → la x^e è la fine che prende la coordinata l-sima locale e la restituisce elemento dell'l-simo

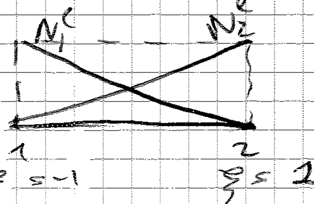
La FUNZIONE DI FORMA

$$N_a^e(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi_a \xi), \quad a = 1, 2$$

$$N_1^e(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)$$

$$N_1^e(-1) = 1$$

$$N_1^e(1) = 0$$



$$\frac{dN_a^e}{d\xi}(\xi) = \frac{\xi_a}{2} = \begin{cases} -1/2, & a = 1 \\ 1/2, & a = 2 \end{cases}$$

$$\frac{dN_a}{dx}(x) = \frac{dN_a}{d\xi}(\xi)\ \frac{1}{dx^e/d\xi(\xi)}$$

$$K^e_{ab} = \int_{-1}^{+1} \frac{dN^e_a}{d\xi}(\xi)\ \frac{dN^e_b}{d\xi}(\xi)\ \frac{1}{dx^e/d\xi(\xi)}\ d\xi = \frac{(-1)^{a+b}}{h_e}$$

$$K^e = \frac{1}{h_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \text{per il nostro es. diventa} =$$

- quando sono sulla diagonale ho un valore pari → positivi
- Altrimenti → negativi

$$\boxed{K^e = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}}$$

- ALGORITMO DI ASSEMBLAGGIO

Location Matrix, inizializzo la $K = 0$

$\forall e = 1, \dots, N_{elementi} - 1$

$K(\text{matrice globale})_{ee} \leftarrow K_{ee} + K^e_{11}$

- $K_{e,e+1} \leftarrow K_{e,e+1} + K^e_{12}$ → fuori dalla diagonale

$K_{e+1,e+1} \leftarrow K_{e+1,e+1} + K^e_{22}$

es $\quad e = 1,\ N = 2$

$K_{11} = 0 + 2 = 2$

$K_{12} = 0 - 2 = -2$

$K_{21} = 0 - 2 = -2 \qquad K_{22} = 0 + 2 = 2$

Siccome arrivo nel nodo Dirichlet, dove cambiare il modo di assemblare

$K_{Nd,Nee} \leftarrow K_{Nel,Nee} + K^{Nel}_{11}$

$e = 2 = N_d$

quello prima

$K_{2,2} = K_{22} + K^e_{22} = 2 + 2 = 4$

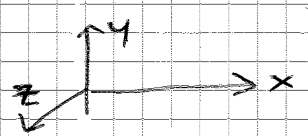
quello globale

$$K(\text{globale}) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

11/01/16

$EI\, y^{(4)} = q \qquad$ su $(0, L)$

modulo di Young — momento d'inerzia rispetto asse z



$y(L) = 0$ (incastro)

$y'(L) = 0$

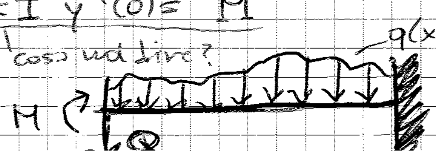
$\underline{EI\, y''(0) = M}$

cosa vuol dire?

$\mathcal{X}(x)$ curvatura flessionale

$\mathcal{M}(x) = EI\, y''(x)$

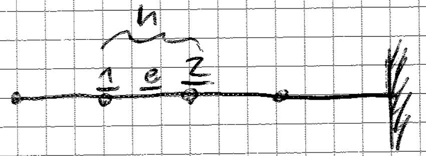
momento flettente



non è definito → PROIBITO USARE FX A TETTO

Prendere fx di forma di qst tipo:

SPAZIO DI SOBOLEV H^2 : $\sqrt{\int_0^1 |w''(x)|^2 dx} < +\infty$



riferito all'e-simo elemento, riferimento locale

$$N_1(x) = \frac{-(x-x_2)^2 [-h + 2(x_1 - x)]}{h^3}$$

$$N_4(x) = \frac{(x-x_1)^2 (x-x_2)}{h^2}$$

$$N_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)^2}{h^2}$$

$$N_3(x) = \frac{(x-x_1)^2 [h + 2(x_2 - x)]}{h^3}$$

N_1 e N_3 adimensionali, N_2, N_4 lunghezza dimensionale lineare

$$\begin{cases} (1) \; w^h(x) = N_1(x) w^h(x_1) + N_2(x) \frac{dw^h}{dx}(x_1) + N_3(x) w^h(x_2) + N_4(x) \frac{dw^h}{dx}(x_2) \\ (2) \; \boxed{w^h(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3} \end{cases}$$

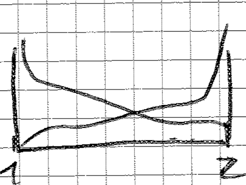
Uguaglio (1) e (2) e trovo come inserire c_1, c_2, c_3, c_4 in

$N_1, N_2, N_3, N_4 \to N_1(c_1, c_2, c_3, c_4), N_2(c_1, c_2, c_3, c_4), N_3(c_1, c_2, c_3, c_4), \ldots$

Poi riscrivo $w^h(x)$ in funzione di N_1, N_2, N_3, N_4

* Con funzioni di forma a tetto, per ogni intervallo 2 funzioni di forma, erano lineari.

Qui funzioni di forma cubiche →



Impongo 4 funzioni di forma per ogni intervallo

Poi risolvo sistema

$$\begin{cases} w^h(x_1) = c_1 + c_2 x_1 + c_3 x_1^2 + c_4 x_1^3 \\ w^h(x_2) = c_1 \; \_\_ \; \_\_ \\ \frac{dw^h}{dx}(x_1) = \_\_ \; \_\_ \\ \frac{dw^h}{dx}(x_2) = \_\_ \; \_\_ \end{cases}$$

Trovo c_1, c_2, c_3, c_4

↳ Inserisco in (1) esprimendo $N_1(x), N_2(x), N_3(x)$ e $N_4(x)$ in fx di c_1, c_2, c_3, c_4 e riscrivo $w^h(x)$

$-2KH \operatorname{cotg}(Kl) = H^2 - K^2$

$2KH \operatorname{cotg}(Kl) = h^2 - H^2$

Per risolvere dovrei

$$\operatorname{cotng}(Kl) = \frac{1}{2}\left(\frac{K}{H} - \frac{H}{K}\right) \rightarrow \text{Non se può fa!}$$

Se mi capita problemi del genere, lo imposto e mi limito a dire che ci sono infinite soluzioni

METODO DI GALERKIN (riprendo)

$$F^h = a\left(\sum_A c_A \cdot N_A(x), \sum_B d_B N_B(x)\right) = F^h$$

$$F^h = (w^h, f) - a(w^h, p^h) + w^h(0) \cdot h$$

$$= \sum_A c_A (N_A, f) - \sum_A c_A (N_A, p^h) + w^h(0) h$$

$$\sum_A \sum_B a(N_A, N_B) c_A d_B = \sum_A c_A \underbrace{\left[(N_A, f) - (N_A, p^h) - N_A(0) \cdot h\right]}_{F_A}$$

$K_{AB} = a(N_A, N_B)$

$$\sum_A \sum_B c_A K_{AB} d_B = \sum_A c_A F_A$$

$$\sum_A c_A \left(\sum_B K_{AB} d_B - F_A\right) = 0$$

Siccome la FD deve valere $\forall$ scelta di w, allora la forma algebrica deve valere $\forall$ scelta delle costanti $c_1, \dots c_{N\,nodi}$

$$\Rightarrow \sum_B K_{AB} d_B - F_A = 0 \quad \forall A = 1 \dots N_{nodi}$$

$\boxed{\sum_B K_{AB} d_B = F_A}$ Ecco qui forma algebrica che è un sistema di eq. lineari

Ho trasformato eq. integrale in eq. algebrica (sistema di eq. lineari)

Silvia Falletta - **CALCOLO NUMERICO**

silvia.falletta@polito.it

Ufficio 7506

30/10/15

Laboratorio: LAIB5 — 1° squadra LUN 11:30 - 13; 2° squadra MAR 11:30 - 13

1° LABORATORIO - 9 NOVEMBRE / 10 NOVEMBRE

Lab → Falletta + Bai
(eq. diff.) (Matlab)

Testo:

- A. Quarteroni, F. Saleri
- Moregato, Metodi e algoritmi per calcolo numerico (TEORIA)
- Scuderi, Laboratorio di calcolo numerico (ES)

① ARITMETICA CALCOLATORE (riferimento a slide)

ONDA ELASTICA 2D

$$\begin{cases} U_{tt} - (U_{xx} + U_{yy}) = 0 \\ U(x,y,0) = U_0(x,y) & \text{C.I.} \\ U(x,y,t) = g(x,y,t) \\ U_t(x,y,0) = V_0(x,y) & \text{derivata rispetto al tempo} \end{cases}$$

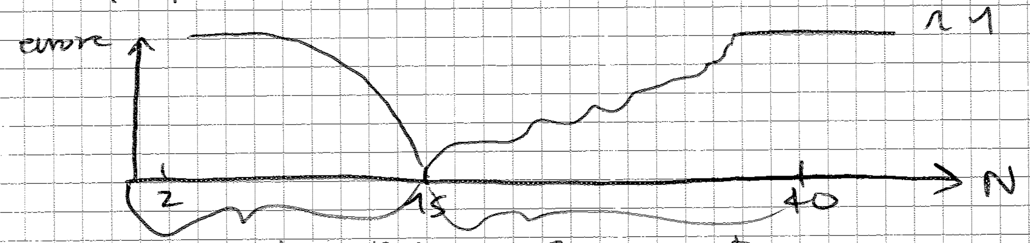
ONDA SCATTERATA 2D (da inglese, rimbalzo)

$\lim_{n \to +\infty} x_n = \pi$

Per n grande $x_n \simeq \pi$

Mi fermo ad un certo $N \to x_N \simeq \pi$?

$\frac{|x_N - \pi|}{|\pi|}$ misuro qst "errore relativo" in fx di N



IN SCALA LOGARITMICA

errore diminuisce — x_n converge a π

errore aumenta fino ad essere dell'ordine dell'unità

Valore limite è π ma c'è qlcs che non va.

Se mettiamo su calcolatore algoritmo che converge a qlcs, non x forza otteniamo risultato atteso

N.B. Dobbiamo imparare a capire come lavora calcolatore

calcolatore lavora in base ① 2, con numero ② con finito n° cifre (non più

$N = 10$ t = cifre $-127 < q < 128$

$a_1 = 10^{100}$
$a_2 = 10^{50}$ } numeri di macchina

$y = \sqrt{a_1 * a_2}$

$a_1 = \bar{a}_1$ $y = sqrt(a_1 * a_2)$

$a_2 = \bar{a}_2$

$a_1 * a_2 = 10^{150}$ OVERFLOW ($q > M$; se $q < m$ UNDERFLOW)

$y_2 = sqrt(a_1) * sqrt(a_2)$

Per noi è lo stesso cosa, per calcolatore no

$10^{50} \cdot 10^{25} = 10^{75} = 0{,}1 \cdot 10^{76}$

x qst noi dobbiamo sapere come lavora calcolatore

$a \neq \bar{a}$ di solito

errore assoluto $e_a = |a - \bar{a}|$ (a: quantità esatta; $\bar{a}$: quantità approssimata)

errore relativo $e_r = \dfrac{|a - \bar{a}|}{|a|}$

N.B.

1) e_r non può essere definito se $|a| = 0$ mentre e_a sì.

2) e_r è + preciso di e_a

$a = 10^3$
$\bar{a} = 10^3 + 1$ perturbazione di a
$e_a = 1$
$e_r = 10^{-3}$

$b = 10^{-3}$
$\bar{b} = 10^{-3} + 1$
$e_a = 1$
$e_r = \dfrac{1}{10^{-3}} = 10^3$

si discosta di + $\bar{a}$ da a o $\bar{b}$ da b?

b. Infatti e_r me lo dice, mentre e_a non me lo direbbe.

$a = (-1)^s \, p \, N^q$

$\bar{a} = (-1)^s \, \bar{p} \, N^q$

$e_a = |a - \bar{a}| = |(-1)^s p N^q - (-1)^s \bar{p} N^q| = |p - \bar{p}| N^q$

$$eps = \begin{cases} N^{1-t} & \text{TRONC.} \\ \frac{1}{2} N^{1-t} & \text{ARROT.} \end{cases}$$

$$\frac{|a - \bar{a}|}{|a|} \leq eps$$

eps (il ...) = precisione di macchina

Rappresenta il + grande errore che possiamo fare andando a sostituire p con $\bar{p}$

Arrotondamento meglio di troncamento ma tecnica + cara (metà errore)

$$\varepsilon = \frac{\bar{a} - a}{a} \quad \text{senza V.a.}$$

$|\varepsilon|$ = errore relativo $e_r \leq eps$

$$\boxed{\bar{a} = a(1 + \varepsilon)} \quad \text{con} \quad |\varepsilon| \leq eps$$

NUMERO DI MACCHINA PERTURBAZIONE è uguale al numero assegnato a perturbato di una quantità dell'ordine della precisione di macchina

ES.

$N = 10$

$t = 4$

$a_1 = 0,5823 = \bar{a}_1$

$a_2 = 0,6214 = \bar{a}_2$

Sommo $\bar{a}_1 + \bar{a}_2 = 1,2037 \neq \bar{S}$

$0,12037 \cdot 10^1$

Calcolatore non può essere definito qst somma

SOMMA DI MACCHINA

$\bar{a}_1 \oplus \bar{a}_2 = \overline{\bar{a}_1 + \bar{a}_2}$ (tronc o arr.)

SOMMA DI MACCHINA

$\bar{a}_1 \ominus \bar{a}_2 = \overline{\bar{a}_1 - \bar{a}_2}$

$\bar{a}_1 \otimes \bar{a}_2 = \overline{\bar{a}_1 \times \bar{a}_2}$

$\bar{a}_1 \oslash \bar{a}_2 = \overline{\bar{a}_1 / \bar{a}_2}$

OPERAZIONI DI MACCHINA

SÌ PROP. COMM.

NO ASS.

NO DISTR.

Somma di prima con tronc. $0,1203 \cdot 10^1$

" con arrot. $0,1204 \cdot 10^1$

$\bar{x} = x(1+\varepsilon)$ $|\varepsilon| \leq eps$

$x \rightarrow \bar{a}_1 + \bar{a}_2$

$y_1 = \sqrt{x+\delta} - \sqrt{x}$

$y_2 = \dfrac{\delta}{\sqrt{x+\delta} + \sqrt{x}}$

y_1 è affetto da canc. numerica per valori di δ piccoli!

y_2 non è affetto da canc. numerica

(2) Per quali x posso avere cancellazione numerica? $x \simeq 0 \rightarrow \cos \simeq 1$

Posso razionalizzare o

$$y = \frac{1 - \cos\left(2\frac{x}{2}\right)}{x^2}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$$

$$y_1(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$y_2(x) = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \simeq \frac{1}{2} \quad \text{per } x \to 0$$

(3) $x \simeq 0 \rightarrow \operatorname{sen} x \simeq 0$

Posso avere quindi cancellazione numerica.

Ho tolto la cancellazione numerica alla fine?

$$y(x) = \frac{\left(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots\right)}{tg(x)}$$

C'è ancora la sottrazione (un termine − e un termine +)

Considero per esempio $x = 10^{-3} \Rightarrow \underbrace{x^3 = 10^{-9} \text{ e } x^5 = 10^{-15}}$

non hanno cifre in comune

NON SONO NUMERI "QUASI ="

~~SEMPRE~~

$\boxed{\text{La precisione di macchina arriva fino a } 10^{-15}}$

per cui $x^7 = 10^{-21}$ è sufficiente

La macchina non riesce a leggerlo, non vado oltre.

— o — o — o — o —

(1), (2), (3) fanno riferimento alle slide sopra

$\bar{x}$ = dato di input perturbato

se $E \simeq \dfrac{\|x - \bar{x}\|}{\|x\|}$ il problema è BENCONDIZIONATO

E: errore relativo sull'output

errore relativo sull'input

$$\frac{\|f(x) - f(\bar{x})\|}{\|f(x)\|} \leq \underbrace{K(f,x)}_{\text{NUMERO DI CONDIZIONAMENTO}} \frac{\|x - \bar{x}\|}{\|x\|}$$

$\Rightarrow$ se $\dfrac{\|x-\bar{x}\|}{\|x\|}$ è piccolo, anche $\dfrac{\|f(x) - f(\bar{x})\|}{\|f(x)\|}$ deve essere piccolo e dipende da K

→ se K è piccolo problema BENCONDIZIONATO ($\simeq 1$)

→ se K è grande " MALCONDIZIONATO

Il miglior condizionamento è quando $K=1$

(1) somma $x_1, x_2 \xrightarrow[\infty]{\text{sto lavorando in precisione infinita di } x} x_1 + x_2$

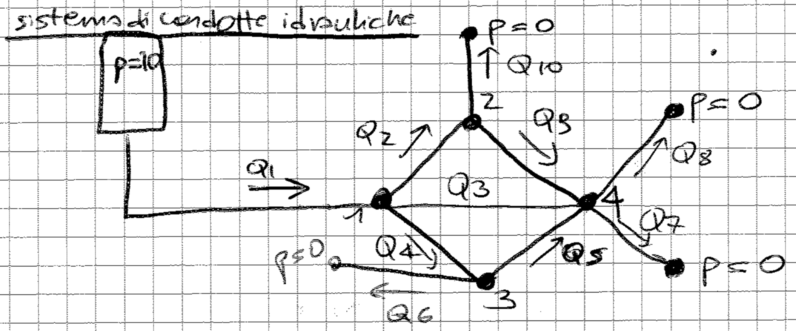
x_1, x_2 dati perturbati $\quad \bar{x}_1, \bar{x}_2 \rightarrow \bar{x}_1 + \bar{x}_2$

non metto ancora (+)

Questo scritto è uguale a quello nel capitolo stabilito, solo scritto in modo diverso.
In questo scritto da noi ho differenze rispetto a quello sulle slide x quanto riguarda errore relativo con grafico.

2) RISOLUZIONE SISTEMI LINEARI (NUMERICA)

1) sistema di condotte idrauliche



punti rossi - voglio conoscere pressione

condotto	K	L

Q_j portata d'acqua della condotta j $(j = 1, \dots 10)$
Δp_j diff. di pressione nella condotta j | INCOGNITE

$Q_j = K_j L_j \Delta p_j$ relazione tra Q e ΔP, diminuisco le incognite

In ogni nodo interno la somma algebrica delle portate deve essere nulla.

1) $Q_1 - Q_4 - Q_3 - Q_2 = 0$
2) $Q_2 - Q_9 - Q_{10} = 0$
3) $Q_4 - Q_5 - Q_6 = 0$
4) $Q_3 + Q_5 + Q_9 - Q_7 - Q_8 = 0$

1) $K_1L_1(p_1 - 10) - K_4L_4(p_3 - p_1) - K_3L_3(p_4 - p_1) - K_2L_2(p_2 - p_1) = 0$

Raccolgo il + possibile

$(K_1L_1 + K_2L_2 + K_3L_3 + K_4L_4)\underline{p_1} - K_2L_2\underline{p_2} - K_4L_4\underline{p_3} - K_3L_3\underline{p_4} =$
$= 10K_1L_1 = 2$

$K_1L_1 = 0{,}01 \cdot 20 = 0{,}2$

↳ calcoli

$$0.37\,p_1 - 0.05\,p_2 - 0.05\,p_3 - 0.07\,p_4 = 2 \qquad (1)$$

Si arriva a sistema lineare a 4 equazioni e 4 incognite

vettore incognite $p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{Ap = b}$

matrice A 4x4 $\quad A = \begin{bmatrix} 0.37 & -0.05 & -0.05 & -0.07 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}_{4\times4} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$

Guardo slide.

Studiamo condizionamento del problema

$$x \xrightarrow{\infty} f(x)$$
$$\bar{x} \xrightarrow{\infty} f(\bar{x})$$

Confronto $\frac{\|f(x) - f(\bar{x})\|}{\|f(x)\|}$ con $\frac{\|x - \bar{x}\|_2}{\|x\|_2}$

$$\boxed{Ax = b}$$

$$A, b \xrightarrow{\infty} x$$
$$\bar{A}, \bar{b} \xrightarrow{\infty} \bar{x}$$

$$\underbrace{\frac{\|f(x) - f(\bar{x})\|}{\|f(x)\|}}_{\text{OUTPUT}} \le K(f, x) \underbrace{\overbrace{\frac{\|x - \bar{x}\|}{\|x\|}}^{\text{INPUT}}}_{\text{è diventato il mio output}}$$ IN GENERALE

OUTPUT $\left[\frac{\|x - \bar{x}\|}{\|x\|}\right] \le K \frac{\|A - \bar{A}\|}{\|A\|}$ errore relativo su A

$\left[\frac{\|b - \bar{b}\|}{\|b\|}\right]$ — INPUT

VETTORI

1) NORMA EUCLIDEA vista
2) NORMA INFINITO

es. $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\|x\|_\infty = 3$

Prendo valore assoluto x ogni componente e prendo max

3) NORMA 1 $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

4) NORMA SPETTRALE $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T \cdot A)}$ | equivalente della norma euclidea x vettori

dove $\rho(B)$ = massimo dei valori assoluti degli autovalori di B
↳ RAGGIO SPETTRALE

Se A invertibile $(\det(A) \neq 0)$, $A^T \cdot A$ matrice simmetrica def. positiva
↳ autovalori reali e positivi → prendo max → calcolo radice

5) NORMA INFINITO

Si fissa riga, si sommano i valori assoluti di ogni riga e si prende max

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \|A\|_\infty = \max_{\{i=1,2,3\}} \{3, 8, 5\} = 8$$

Sommo i valori assoluti x ogni riga

2) SISTEMI TRIANGOLARI SUPERIORI

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} = U \text{ (upper)}$$

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$a_{n-1,n-1}\, x_{n-1} + a_{n-1,n}\, x_n = b_{n-1}$$

$$\Rightarrow x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}\, x_n}{a_{n-1\,n-1}}$$

"METODO DI SOSTITUZIONE ALL'INDIETRO" o BACKWARD SOSTITUTION

In generale $\quad x_n = \dfrac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j}{a_{ii}}$

leggo su slide.

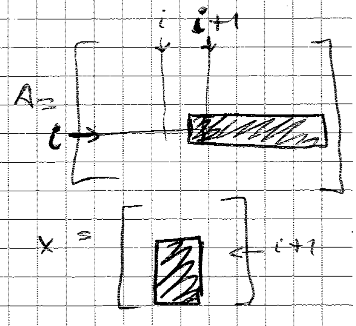
Da sistema diagonale con COSTO COMPUTAZIONALE di n operazioni aritmetiche $(+, *)$ siamo passati a sist. tr. sup. con COSTO COMP. di $\frac{n^2}{2}$

A assegnata
b assegnata

```
n = length (b);
    x(n) = b(n) / A(n,n);
for i = n-1 : -1 : 1
        s = 0
  (•) { for   j = i+1 : n
      {          s = s + A(i,j) * x(j);
      { end
        x(i) = ( b(i) - s) / A(i,i) ;
end
```

Vogliamo evitare il ciclo for. interno

$(\bullet)\quad \underbrace{s = A(i, i+1:n) * x(i+1:n)}_{\text{ho eliminato ciclo for}}$ — Cos'ho fatto?



3) SIST. TRIANGOLARI INFERIORI

metodo "sostituzione in avanti" — FORWARD SOSTITUTION

COSTO COMPUTAZIONALE : $\frac{n^2}{2}$

$A = L$ (lower)

for $k=1:n-1$

for

- Posso togliere il 3° for interno

$$A(i,k+1:n) = A(i,k+1:n) + A(i,k) * A(k,k+1)$$

PIVOTING PARZIALE - accorgimento al metodo di Gauss - è uno scambio di righe se la matrice soddisfa la definizione

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$4 > |-2| + 1$

$3 > 1 + 0$

$|-4| > 1 + 1$

GAUSS può essere pensato come FATTORIZZAZIONE DI MATRICE:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & & & \\ a_{31} & & & \\ a_{41} & & & a_{44} \end{bmatrix}$$

1° passo
$$M_1 A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} \\ 0 & a_{42}^{(1)} & a_{43}^{(1)} & a_{44}^{(1)} \end{bmatrix} = A^{(1)}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 \\ m_{31} & 0 & 1 & 0 \\ m_{41} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

perché $m_{21} a_{11} + a_{21}$

$-\frac{a_{21}}{a_{11}} a_{11} + a_{21} = 0$

2° passo
$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_{32} & 1 & 0 \\ 0 & m_{42} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_2 A^{(1)} = A^{(2)}$$

3° passo
$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m_{43} & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_3 A^{(2)} = A^{(3)} = U$$

$$\underbrace{M_3 \underbrace{M_2 \underbrace{M_1 A}_{A^{(1)}}}_{A^{(2)}}} = U$$

prodotti
$$M_2 M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

posso anche non scriverla (non serve)

$$A = (\underbrace{M_3 M_2 M_1}_{\text{devo calcolare il prodotto inverso delle matrici}})^{-1} U = M_3^{-1} M_2^{-1} M_1^{-1} U$$

$$M_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -m_{43} & 1 \end{bmatrix} \quad M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 & 0 \\ 0 & -m_{42} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 & 0 \\ -m_{41} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

cambio solo i segni ai moltiplicatori

$$M_3^{-1} M_2^{-1} M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 & 0 \\ -m_{41} & -m_{42} & -m_{43} & 1 \end{bmatrix} = \underline{L}$$

lower (inferiore)
matrice triangolare inferiore con diagonale unitaria