



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 1886A -

ANNO: 2016

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Busca Francesco

MATERIA: Idraulica - Prof Ridolfi (teoria + esercizi)

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

28/09/14

Programma:

- statica
- cinematica
- Dinamica fluidi perfetti
- Dinamica fluidi viscosi
- Moto laminare / turbolento
- Correnti in pressione
- Correnti a superficie libera  $\checkmark$
- Moti a potenziale  $\checkmark$
- Moti di filtrazione  $\checkmark$

Libri:

- Citrini Nosedà, "Idraulica"  $\leftarrow$
- De Marchi
- Fluid Mechanics
- Fluid Dynamics

Esame:

scritto + orale

Esercitazioni: martedì pomeriggio

Verso la fine del corso, a squadre laboratorio

Ci occuperemo di fluidi "freddi", non teniamo conto dell'effetto della temperatura (lasciamo fuori problemi grandi)

Fluido = entità materiale che oppone poca resistenza alla deformazione

resistenza tende a 0 se deformato  
+ lentamente (mano che si muove in  
piscina)

↑  
cambiare forma,  
non volume

+ massa muscolare, + velocità, + deformazione

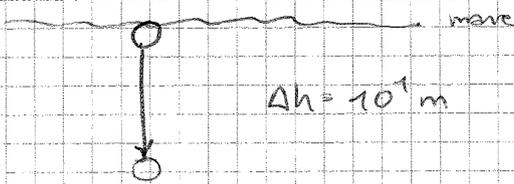
Ricordo che ha influenza velocità

Nei fluidi c'è relazione tra velocità e deformazione

Inoltre un'altra variabile è il tempo che in scienza delle costruzioni non è

variabile  $(x, t) \rightarrow$  derivate parziali

Gas - liquidi  $\rightarrow$  liquidi oppongono molto + resistenza a cambiare volume



$$\Delta h = 10^1 \text{ m}$$

$$\Delta p = \gamma \cdot \Delta h \quad (\text{STEVINO})$$

$$\approx 10^4 \cdot 10^1 = 10^5 \text{ N/m}^2$$

per avere un'idea

$$\frac{\Delta V}{V} = - \frac{\Delta p}{E} \approx - \frac{10^5}{10^9} \approx 10^{-4}$$

ordine di grandezza dell'variazione di volume dell'acqua

Per le applicazioni che studiamo noi, le variazioni di volumi sono trascurabili, e in ordine di grandezza basso

Posso dire che  $\rho = \text{cost}$

⇕  
 IL FLUIDO INCOMPRESSIBILE - LIQUIDO

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

celerità delle onde di pressione - velocità del suono

$$E \uparrow \rightarrow c \uparrow \quad (\text{nell'acqua maggiore dell'aria})$$

140.000 m/s                      300 m/s

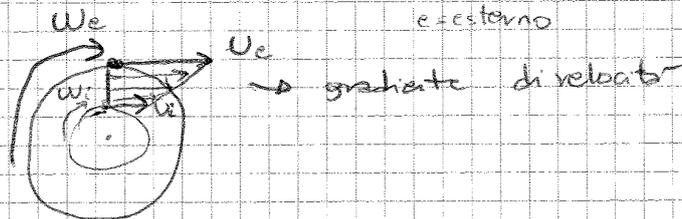
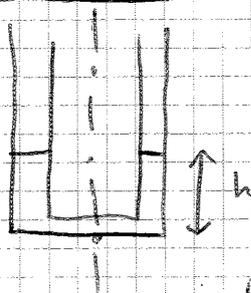
I tempi di percorrenza sono talmente brevi che non si tiene conto del tempo tra l'invio e fine propagazione → INSTANTANEA

Fluido è incompressibile quando tempi di percorrenza dell'onda sono piccoli da considerare c infinito

$$\rho = \text{cost} \Leftrightarrow c \rightarrow \infty$$

Aria di per sé sembra comprimibile ma c è altissimo nell'aria → ing. avvolta più dire che anche aria è fluido incompressibile → grandi vantaggi

### VISCOSITÀ



Dando velocità al cilindro esterno, si mette in movimento cilindro interno. Come mai? c'è trasmissione di sforzi tra le "pivotti" cilindriche dei fluidi e delle pareti cilindriche di contenitore.

T = coppia che devo applicare x tenere fermo cilindro interno

$$T = f \left( \Delta U = U_e - U_i, \Omega = 2\pi r_2 \cdot h, \frac{1}{\Delta r} \right) \quad \Delta r = r_i - r_e$$

$$T = \mu \Delta U \Omega$$

μ = viscosità dinamica

$$[\mu] = \left[ \frac{Ns}{m^2} \right] \text{ = viscosità dinamica}$$

$\frac{\mu}{\rho}$  → questa è la vera misura che conta → VISCOSITÀ CINEMATICA  
 rapporto in gioco massa  $\frac{\mu}{\rho} = \nu \Rightarrow [\nu] = \left[ \frac{m^2}{s} \right]$

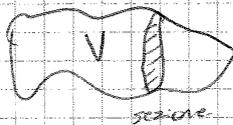
$$\mu_{H_2O} > \mu_{aria}$$

$$\nu_{H_2O} < \nu_{aria}$$

Acqua è uno dei fluidi con  $\nu$  + bassa  $\nu \approx 10^{-6} \frac{m^2}{s}$   
 Aria  $\nu \approx 10^{-5} \frac{m^2}{s}$

STATO DEGLI SFORZI

2 categorie di sforzi



- 1) forze di massa come forza-peso
- 2) forze di superficie

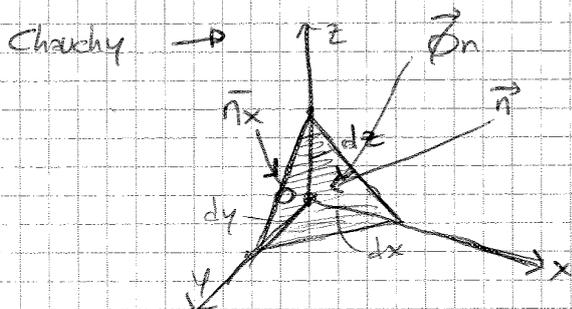
Tolgo parte dx, x mantenere ferma parte sx devo applicare forze xk prima classe delle interazioni tra parte dx e sx → forze di superficie



Convenzione:  $\vec{n}$  entrante (in scienza delle costruzioni uscente)

$$\lim_{dS \rightarrow 0} \frac{d\vec{F}}{dS} = \vec{\phi}_n(\vec{n}) = \left[ \frac{N}{m^2} \right]$$

stato di sforzo dipende da  $\vec{n}$ , conta l'inclinazione



Approssimazione di dS a un piano localmente che è un tetraedro

$$dm = \rho \kappa dx dy dz \quad \text{- 3° ordine}$$

(costante  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ )

$$d\vec{F}_n = dS \vec{\phi}_n \quad \text{- 1° ordine}$$

forze di massa - 3° ordine  
 forze di superficie - 2° ordine  
 → costano forze di superficie

$$d\vec{F}_x = -\vec{\phi}_x dS \cos(\hat{n}_x) \quad (dS_x = -dS \cos \hat{n}_x)$$

Il - lo mette xk n entrante, l'angolo è ottuso, quindi  $\cos(\hat{n}_i)$  negativo

$$d\vec{F}_y = -\vec{\phi}_y dS \cos(\hat{n}_y)$$

$$d\vec{F}_z = -\vec{\phi}_z dS \cos(\hat{n}_z)$$

$$\vec{\phi}_n dS - \vec{\phi}_x dS \cos(\hat{n}_x) - \vec{\phi}_y dS \cos \hat{n}_y - \vec{\phi}_z dS \cos \hat{n}_z = 0$$

Quindi dire statica dei fluidi significa che sono tutti 0 tutti i  $\Phi_{ij}$  ( $i \neq j$ )

$\rightarrow \Phi_{xy} = \Phi_{yx} = \dots = \Phi_{zy} = 0$

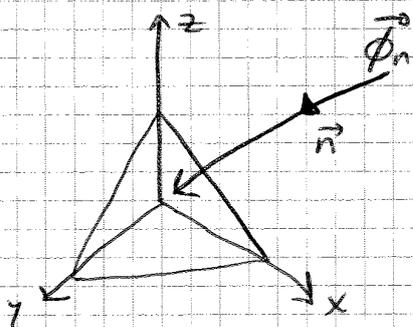
Fuori dalla diagonale tutti 0 qualunque sia la diagonale.

mette tutti gli autovalori sono uguali sulla diagonale quindi il TENSORE degli sforzi si riduce ad 1 SCALARE

$$\begin{pmatrix} \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

Quindi nella statica si avranno solo SFORZI / FORZE NORMALI e non  $\tau$ .

Cioè se metto un biccio nell'acqua e lo lascio fermo sulla pelle avrà solo forze normali sul biccio; se incomincio invece a muoverlo si avranno anche forze tangenziali ( $\tau$ ).



Se noi si hanno componenti tangenziali il  $\vec{\Phi}_n$  è parallelo a  $\vec{n}$

caso di direttore

Lungo asse X

$$\Phi_{nx} = \Phi_n \cdot \cos \hat{n}_x = \Phi_{xx} \cos \hat{n}_x + 0 + 0$$

↑  
essendo  
nella formula di  
Cauchy
↖  
componenti  
lungo y e z

$\Downarrow$

$$\Phi_n = \Phi_{xx} \rightarrow \text{sfuerzo lungo asse n deve essere uguale a quello lungo asse X}$$

Lungo asse Y

$$\Phi_{ny} = \Phi_n \cdot \cos \hat{n}_y = 0 + \Phi_{yy} \cos \hat{n}_y + 0$$

↖  
componenti  
x e z

$\downarrow$

$$\Phi_n = \Phi_{yy}$$

Lungo asse z

$$\Phi_{nz} = \Phi_n \cdot \cos \hat{n}_z = 0 + 0 + \Phi_{zz} \cdot \cos \hat{n}_z$$

COSA VOLE SIGNIFICARE TUTTO CIÒ?

Lo stato di tensione che è normale è ISOTROPO, cioè che dipende dal punto in cui sei nello spazio.

Faccio la stessa cosa dell'asse X.

$$p dx dz - \left( p + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) dx dz = - \frac{\partial p}{\partial y} dy \underbrace{dx dz}_{\text{area}}$$

• LUNGO ASSE Z

$$\left( - \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) dx dy$$

metto tutto insieme

siamo in STATICA

$$p dx dy dz \vec{F} - \left( \frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right) dx dy dz = 0$$

non possiamo stati in STATICA devono mettere uguale alle FORZE D'INERZIA

$$\rho \vec{F} = \text{grad } p$$

EQUAZIONE INDEFINITA

forza di massa  
density

• Se non ci fossero  $\vec{F}$  avrei che  $\text{grad } p = 0 \rightarrow$  pressione è costante ovunque su una superficie isobara (GUARDO PERCHÉ DOPO)

• Posso avere delle forze che ammettono POTENZIALE

Cosa significa, perché è una cosa positiva?

Perché  $\vec{F} = \text{grad } U$

Quindi una forza che ammette potenziale significa che:

a sx dell'equale sono vettori e sono difficili da determinare, calcolare invece a sx ho un gradiente di uno scalare (U).

Quindi invece di lavorare nel campo vettoriale (INTEGRALI) che sono str-difficili posso lavorare invece su delle derivate (perché il gradiente ~~è~~ nel linguaggio pratico non è altro che fare delle derivate)  $\rightarrow$  + facile

se  $\vec{F} = \text{grad } U$

$\downarrow$  per EQ. INDETERMINATA

$$\rho \text{grad } U = \text{grad } p$$

se  $\vec{e} = 0$  significa che  $\text{grad } p = 0$  quindi è come se stessi su una superficie ISOBARA cioè è più facile nuotare sulla superficie che nuotare sulla diagonale del solido perché sono su una sup. isobara  $\rightarrow$  P COSTANTE

SE DICO CHE IL LIQUIDO È INCOMPRESSIBILE ( $\rho = \text{cost}$ )

$$\vec{F} = \text{grad} \left( \frac{p}{\rho} \right)$$

$\rho \text{ grad}(-gz) = \text{grad } p$   $\leftarrow 1^{\circ} \text{ Mp}$   
 parte (con)

$-\gamma \text{ grad } z = \text{grad } p$   
 $\rho \cdot g$   
 PESO SPECIFICO  $\leftarrow 2^{\circ} \text{ ipotesi}$

$-\text{grad}(z) = \text{grad}\left(\frac{p}{\gamma}\right)$

$\text{grad}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = 0 \rightarrow \left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = \text{cost} = h$

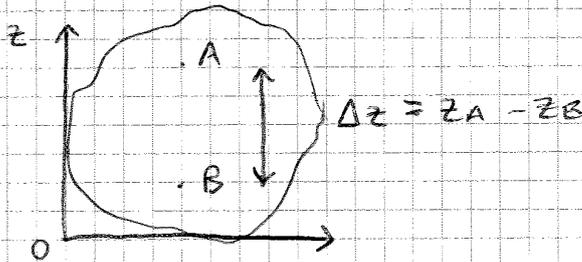
LEGGE DI STEVINO

$h = \left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = \text{cost}$

QUOTA GEODETICA  $\quad$  QUOTA PIEZOMETRICA che è una lunghezza

ESEMPIO

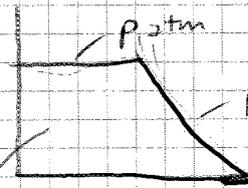
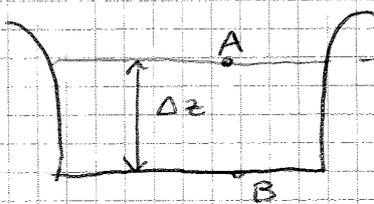
Voglio det. la pressione in B



$h_A = h_B$

$\left(z_A + \frac{p_A}{\gamma}\right) = \left(z_B + \frac{p_B}{\gamma}\right)$

$p_B = p_A + \gamma(z_A - z_B)$



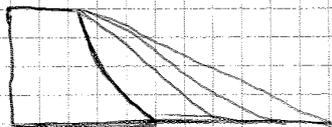
pressione cresce linearmente

$p_B = p_A + \gamma \Delta z$   
 $p_{atm}$

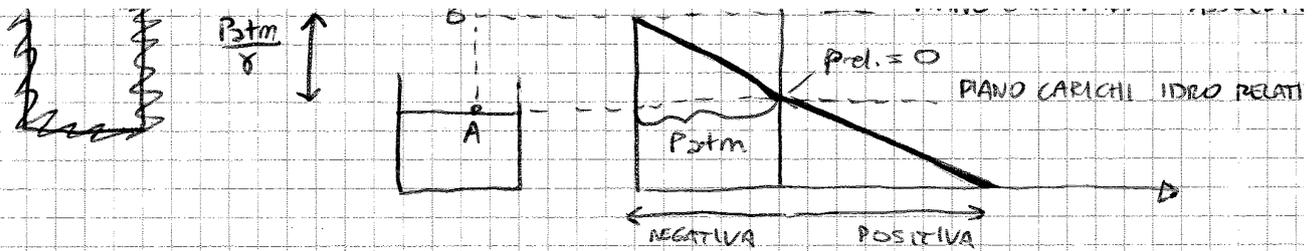
SONO PRESSIONI ASSOLUTE

DISTRIBUZIONE IDROSTATICA

Se  $\gamma$  cresce la linea è sempre + pendente



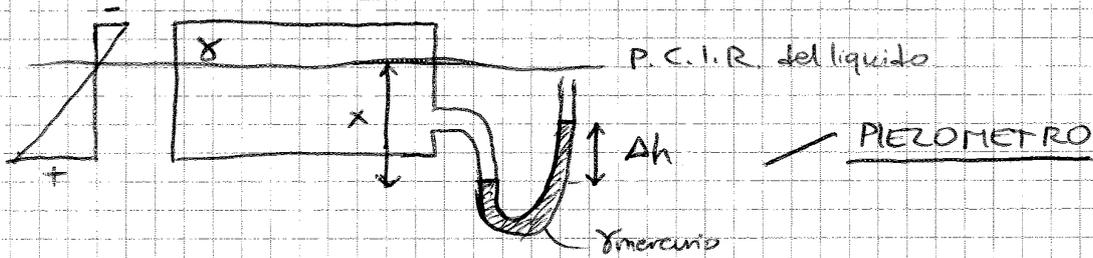
PRESSIONE RELATIVA =  $p - p_{atmosferica}$



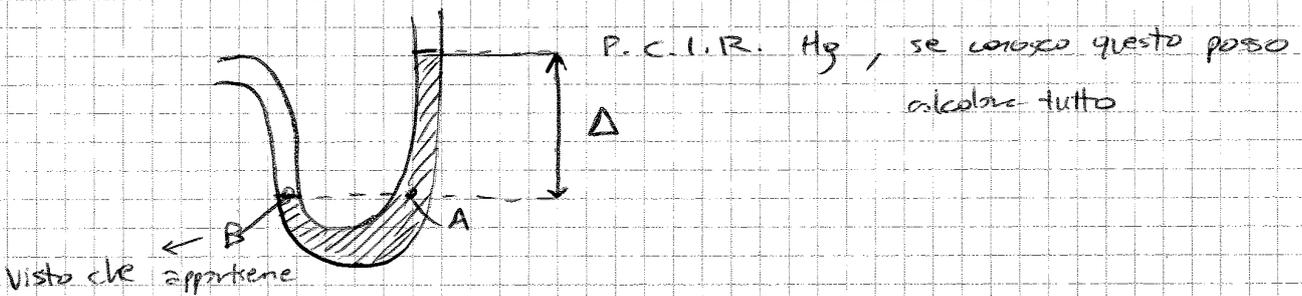
Ecco che scopro che  $\frac{P_{atm}}{\gamma}$  nell'acqua è  $\approx 10$  m. Ecco perché la pompa non tira su più di 10 m. (CAVITAZIONE se la metto sopra) punto B esempio(!)

Ma se la metto sotto (esempio sotto A) posso tirare su 100 m oppure di +.

MISURATORI DI PRESSIONE DI CONTENITORE CHIUSO



metto nel tubo ad U un liquido con  $\gamma >$  di quello dentro contenitore  $\rightarrow$  + PESANTE



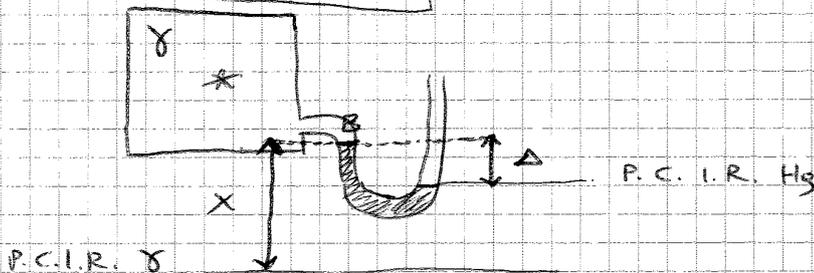
sia  $\gamma$  che  $\gamma_{Hg}$  + 1 parte dell'uguale ho che se appartiene al liquido con  $\gamma$  avrà

$$P_A = \gamma_{Hg} \cdot \Delta = P_B = x \cdot \gamma$$

$$x = \frac{\gamma_{Hg}}{\gamma} \Delta$$

$x \cdot \gamma$ . Se invece dico che appartiene al mercurio allo stesso quota avrà un altro punto (A) per il quale dirò che la sua pressione è uguale a quella di prima però in A avrà  $\gamma_{Hg} \cdot \Delta$

IN DEPRESSIONE

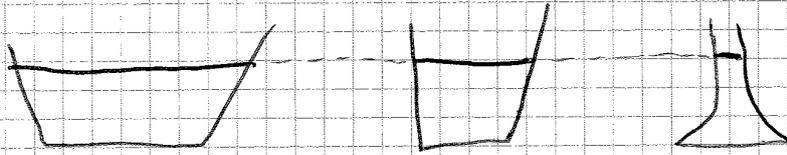


$$P_B = -\gamma_m \cdot \Delta = x \cdot \gamma$$

\* VADO AVANTI DI 15 FOGLI

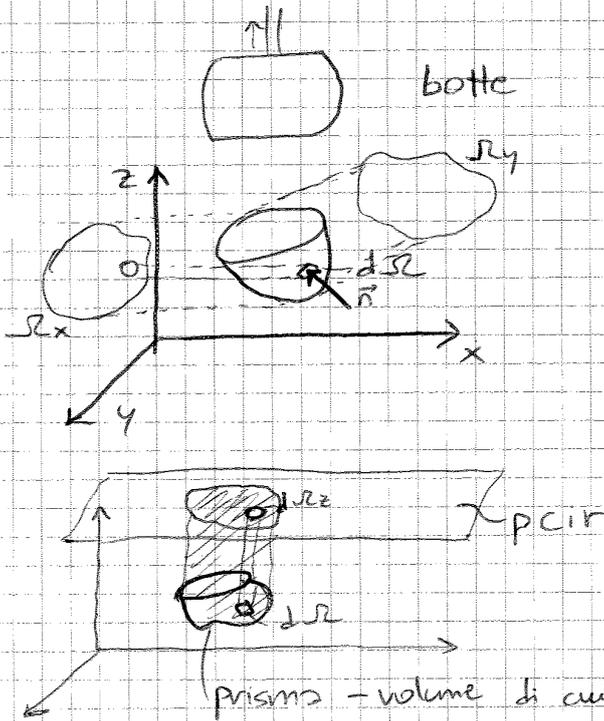
$\sigma = C$  solo quando sup. // piano cerchi idrostatici

Baricentro sta sempre sopra il centro di spinta, al massimo vanno a coincidere spostando piano dei cerchi verso linea di spinta



3 contenitori con stesso piano dei cerchi, ho stesso spinto (non dipende da massa di fluido)

X alzare pressione nel contenitore, basta alzare il livello



$$d\vec{S} = \vec{n} \cdot p dS$$

$$dS_x = p \cos \alpha_x dS = p dS_x$$

proiezione di dS su x=0

$$S_x = \int_{S_x} p dS_x \rightarrow \text{è uno spinto su sup. piana}$$

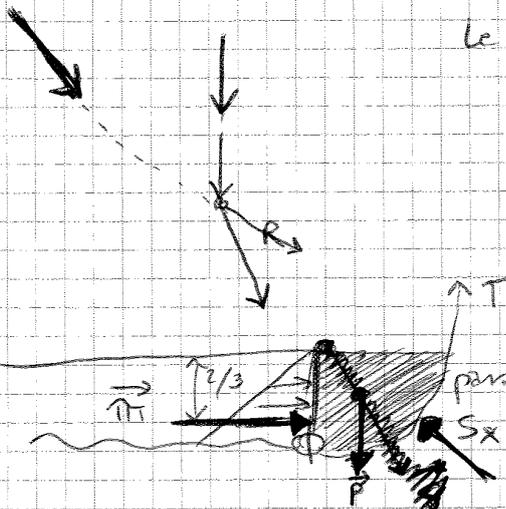
$$S_y = \int p dS_y$$

$$S_z = \int_{S_z} p dS_z = \int_{S_z} \gamma h dS_z$$

affondamento (a)

ricordo h non è fino al livello del fluido che vedo, ma fino al p.c.i (che potrebbe anche essere + basso del livello del fluido)

Le forze si traslano lungo le rette di azione

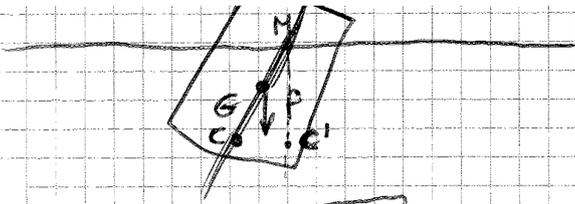


$$P \vec{F} = \gamma h dP$$

Centro di spinta cade a  $\frac{2}{3}$

$$\vec{P} + \vec{F}_c = 0$$

equazione fondamentale x non ingegneri

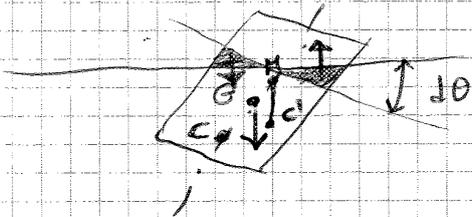


C = centro di carena prima dell'inclinazione  
 C' = " " " " dopo " "  
 M = metacentro = intersezione tra linee di simmetria e verticale passante per C'

Se  $\overline{CM} > \overline{GC}$  EQUILIBRIO STABILE  
 CONDIZIONE DI STABILITÀ

05/10/15

Abbiamo inclinato il corpo, il centro sta sempre lì davanti (è il caso che studiamo noi)



$\overline{CM} > \overline{GC}$  STABILE

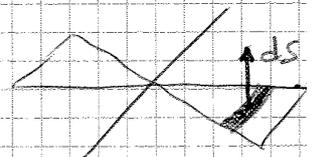
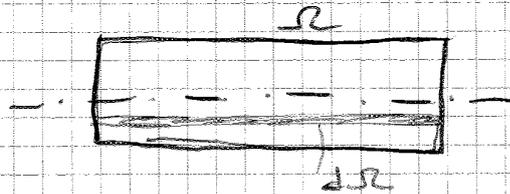
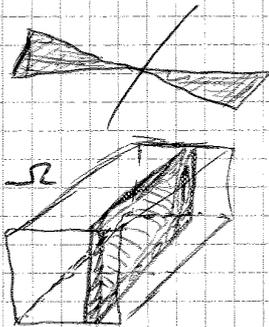
(Se il corpo non fosse inclinato, M sarebbe sulla congiungente tra M e C e sarebbe tutto diverso.)

Come troviamo CM?

Una porzione di corpo che prima era emerso ora sta sott'acqua (rosso), per cui nasce un spinto di Archimede nuovo. In modo uguale il cono rosso a sx è emerso ed è come se gli abbiamo tolto lo spinto di Archimede

→ Coppia che ha spostato spinto di Archimede da C a C', ovvero che è stato traslazione dello spinto di A.

Momento della coppia rossa deve essere = a momento della spinta in C e



$$dV = x d\theta dS$$

$$dS = \gamma dV = \gamma x d\theta dS$$

$$dM = x dS = \gamma x^2 d\theta dS$$

spinto di Archimede infinitesimo

momento della forza infinitesima di Archimede di integrale

$$M = \int dM = \int \gamma x^2 d\theta dS = \gamma d\theta \int x^2 dS = \gamma d\theta I_0$$

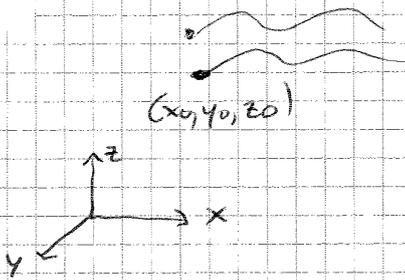
(area sottratta dalla sup. libera)

Questo momento è uguale a spinto di A. in C' per la distanza tra C e C' (in modo ortogonale, braccio) →  $CC' \cdot \sin(\text{angolo})$

CINEMATICA - descrizione del moto

Ma compare massa ma tempo si.

→ APPROCCIO LAGRANGIANO



Particelle generano traiettorie, luogo dei punti occupato nel tempo da particelle in moto

La traiettoria è il punto centrale della cinematica

$$\text{Studio } \begin{cases} x = x(t, x_0, y_0, z_0, t_0) \\ y = y(\dots) \\ z = z(\dots) \end{cases}$$

← Lagrange lavora su  $qst$

Qualcuno ha scelto un'altro strada → EULERO - ISTANTE DI TEMPO CONGELATO

Ad ogni istante descrivo vettore velocità  $\vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$

indipendentemente dalle particelle, come (scatta una foto)

Si parla di DARE IL CAMPO DI MOTO

$$\begin{cases} u = u(x, y, z, t) \\ v = v(\dots) \\ w = w(\dots) \end{cases}$$

← Eulero lavora su  $qst$

Che relazione tra Lagrange ed Eulero?

$$dx = u(x, y, z, t) dt$$

$$dy = v(\dots) dt$$

$$dz = w(\dots) dt$$

Col passare del tempo, diventa dominante pensiero di Eulero xk approccio lagrange, purq seppur sembri + semplice, porta a eq. integro-differenziali

Noi studieremo Eulero → eq. differenziali

$$\vec{F} = m \cdot \vec{A}$$

per Lagrange

tutto è descritto da  $qst$  principio fondamentale

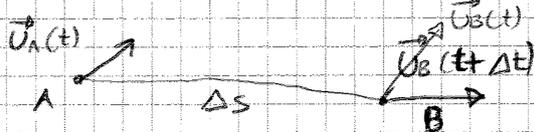
$$\vec{A} = \frac{d\vec{u}}{dt}$$

accelerazione di un certa particella di flu

per Eulero

le stesse formul. ha un significato diverso perché il tempo è congelato, noi posso usare quelle formul. con  $dt$

Considero punto generico A



$$\vec{A} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{u}_B(t + \Delta t) - \vec{u}_A(t)}{\Delta t}$$

A numerare zingano e sottraigo  $\vec{u}_B(t)$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{u}_B(t + \Delta t) - \vec{u}_B(t) + \vec{u}_B(t) - \vec{u}_A(t)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\vec{u}_B(t + \Delta t) - \vec{u}_B(t)}{\Delta t} + \frac{\vec{u}_B(t) - \vec{u}_A(t)}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta s} \right] = \dots$$

non è lo stesso caso di prima, un è variazione locale di  $\vec{u}$  indipendentemente dal

• MOTO PERMANENTE

non ho variazioni temporali ma spaziali (sottocaso del moto vario)

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad \frac{D}{Dt} \neq 0$$

Useremo quasi sempre moto permanente

• MOTO UNIFORME (sottocaso del permanente)

Su ciascuna traiettoria velocità non cambia



Quando variazioni lungo una direzione sono 0, si parla di MOTO PIANO

W=0

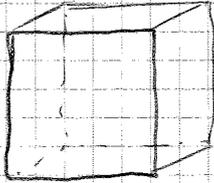
x, y

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0$$

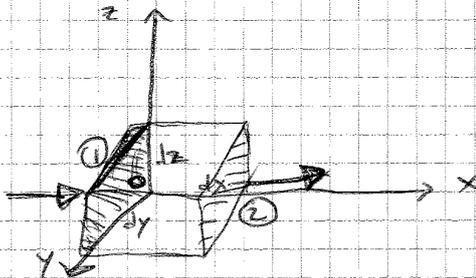
u, v

EQ CONSERVAZIONE MASSA • EQ DI CONTINUITA'

massa continua



vettori velocità sono vincolati in modo che la massa si conservi, non possono muoversi a caso



$$\vec{u} \{u, v, w\}$$

$$\textcircled{x} \rho u \, dt \, dy \, dz \quad \text{velocità su sup. } \textcircled{1}$$

$$\left( \rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx \right) dt \, dy \, dz \quad \text{''} \quad \textcircled{2}$$

se moltiplico x densità allora parlo di massa, senza sarebbe discorso su volume, ma io non posso dire che V ~~continua~~

$$x) \quad \textcircled{2} - \textcircled{1} = \left( \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx \right) dy \, dz \, dt \quad \left| \quad \text{BILANCIO DI MASSA che sistema } \rho \text{ entra e uscire lungo direzione } x$$

$$y) \quad \frac{\partial \rho v}{\partial y} \, dx \, dz \, dt$$

$$z) \quad \frac{\partial \rho w}{\partial z} \, dx \, dy \, dt$$

x) + y) + z) = (flusso netto di massa lungo tutte e 3 le direzioni ovvero variazione di massa dentro la stanza)

$$\rho \, dx \, dy \, dz$$

massa contenuta nel volume  $dx \, dy \, dz$



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \, dx \, dy \, dz \, dt$$

variazione di massa dentro volume

$$dx \, dy \, dz \, dt \left[ \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right] = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dx \, dy \, dz \, dt$$

$$\int_{\Sigma} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} d\Sigma dt = dt \int_{\Sigma} \vec{u} \cdot \vec{n} d\Sigma$$

Ogni elemento contiene  $\rho dV \rightarrow$  totale  $\int \rho dV$

Ma: vogliamo conoscere variazione della massa

$$\frac{d}{dt} \left[ \int \rho dV \right] dt = \left[ \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \right] dt$$

scambio termine rispetto a cui integro

Da uguagliamo questa variazione con quella trovata sopra

$$dt \int_{\Sigma} \vec{u} \cdot \vec{n} d\Sigma = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV dt$$

integrando doppio

triplo

EQ. GENERALE DI CONSERVAZIONE MASSA X VOLUME DI FLUIDO

con  $\rho = \text{cost}$  INCOMPRESSIBILE

$$\int_{\Sigma} \vec{u} \cdot \vec{n} d\Sigma = 0 \rightarrow Q = \int_{\Sigma} v_n d\Sigma = 0$$

$\rho = \text{cost}$

$$Q = Q_e + Q_u + Q_o$$

entrante
uscite
no entrante no uscite

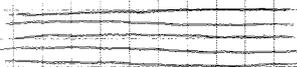
$$\int_{\Sigma} v_n d\Sigma = \int_{\Sigma_e} v_n d\Sigma + \int_{\Sigma_u} v_n d\Sigma + \int_{\Sigma_o} v_n d\Sigma = 0$$

partito entrante
-  $Q_u$ 
0

$$Q_e = Q_u$$

con fluido INCOMPRESSIBILE (che useremo noi)

CORRENTE = MOTO DEI FLUIDI LE CUI TRAIETTORIE SONO RETILINEE E PARALLELE



Arrivare non esiste qst cosa, ma è una cosa troppo complicata il caso reale

Allora la nostra definizione di corrente è moto dei fluidi le cui traiettorie sono PRATICAMENTE rettilinee e parallele

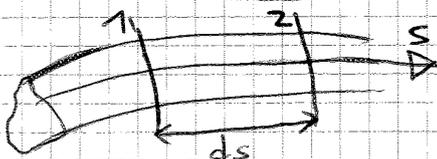
Qst eccezione la facciamo per poter usare tutte le approssimazioni e i risultati ottenuti con moto rett. e ll

Tanti problemi antichi e moderni vengono risolti facendo le giuste approssimazioni

Le sezioni trasversali sono piani trasversali alle correnti e sono semplici

EQ. CONTINUITÀ PER LE CORRENTI

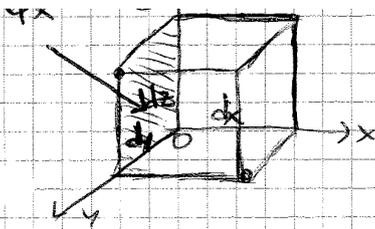
06/10/11



deboli curvature

Considero positive velocità verso dx della corrente

SUPERFICIE 1  $\rightarrow$  partito  $\psi$



$$* \int_V \rho \vec{F} dx dy dz - \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} dx dy dz - \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} dx dy dz - \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} dx dy dz$$

massa  
forza di massa

$\Phi_x$  agisce su superficie  $x=0 \rightarrow \Phi_x dy dz$  ①  
forza di superficie

$(\Phi_x + \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} dx) dy dz$  ②

① - ② =  $-\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} dx dy dz$  = gradiente tra le 2 superfici parallele

$$* \int_V \rho \vec{F} dx dy dz - \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} dx dy dz - \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} dx dy dz - \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} dx dy dz = \rho dx dy dz \cdot \vec{A}$$

$$\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z}$$

EQUAZIONE INDEFINITA DELLA DINAMICA  
DEL FLUIDO

①  $\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z}$  eq. vettoriale  $\Rightarrow$  3 eq. scalari

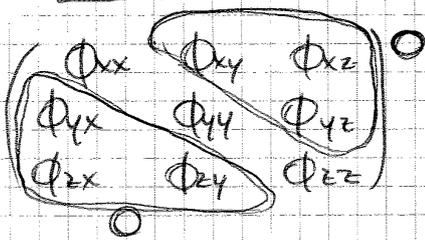
5 eq. scalari  
Però ottenere eq. costitutive / conservazione meccanica  
 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0$  eq. scalare  
 $\rho = \rho(\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z) \rightarrow$  da cosa dipende lo densità eq. scalare

Incognite nelle 5 eq. scalari:  $\rho, u, v, w, \Phi_{xx}, \Phi_{yy}, \Phi_{zz}, \Phi_{xy}, \Phi_{xz}, \Phi_{yz}$   
10 INCOGNITE

Modello MALPOSTO - mancano delle eq. x risolvere

5 vincoli che mancano? Quelle 5 incognite in + c'è qualcosa che lega le varie equazioni, dipende anche dal moto e dal tipo di fluido.

FLUIDO PERFETTO



Tensore degli sforzi ha tutti 0 fuori dalla diagonale, gli autovalori sono tutti uguali e lo chiamano

PRESSIONE  $\begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \vec{\Phi}_x &= P \vec{e}_x \\ \vec{\Phi}_y &= P \vec{e}_y \\ \vec{\Phi}_z &= P \vec{e}_z \end{aligned}$

In ogni punto un unico valore di tensione, chiamato pressione

Allora ① =  $\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \frac{\partial \rho}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \vec{k}$

EQUAZIONE DINAMICA  
FLUIDI PERFETTI  
0  
EQ. DI EULERO  
(1775)

5 eq. scalari  
 $\rho, u, v, w, P$   
5 incognite  
 $\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad } P$   
 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0$   
 $\rho = \rho(P)$

X fluidi perfetti riduce a 5 il n° di incognite  $\rightarrow$  OK!

$$\begin{aligned}
 &= - \int_V \rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \right) dV = \\
 &= - \int_V \left( \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \underbrace{\rho u \frac{\partial \vec{u}}{\partial x}}_{\left[ \frac{\partial(\rho u \vec{u})}{\partial x} - \vec{u} \frac{\partial \rho u}{\partial x} \right]} + \rho v \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + \rho w \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \right) dV = \\
 &= - \int_V \left[ \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u \vec{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \cdot \vec{u})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w \cdot \vec{u})}{\partial z} - \vec{u} \left( \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) \right] dV.
 \end{aligned}$$

Ricordo  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0 \rightarrow \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t}$   
 $\text{div}(\rho \vec{u}) = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$

Quindi  $-\vec{u} \text{div}(\rho \vec{u}) = + \vec{u} \frac{\partial \rho}{\partial t}$

Quindi rimane  $\beta = - \int_V \left( \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u \vec{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \cdot \vec{u})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w \cdot \vec{u})}{\partial z} \right) dV$   
 $\beta = - \int_V \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} dV - \int_V \left( \frac{\partial \rho u \cdot \vec{u}}{\partial x} + \frac{\partial \rho v \cdot \vec{u}}{\partial y} + \frac{\partial \rho w \cdot \vec{u}}{\partial z} \right) dV$   
 $+ \int_V \rho \vec{u} (u \cos \hat{n}_x + v \cos \hat{n}_y + w \cos \hat{n}_z) dV$

Avanti  $\beta = - \int_V \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} dV + \int_V \underbrace{\rho \vec{u} V_n dR}_{\text{portata}}$   
 $\left\{ \begin{array}{l} V_n dR = \text{portata} \\ \rho \cdot V_n dR = \text{flusso di massa} \\ \rho \vec{u} V_n dR = \text{flusso di q} \end{array} \right.$   
 $V_n$  - velocità normale

① =  $\vec{I} =$  sommatoria della variazione di quantità di moto  $= - \int_V \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} dV$

$\beta$ : tutte le forze d'inerzia

$\vec{I}$  = componenti locale delle forze d'inerzia = **INERZIA LOCALE**

② = flusso di quantità di moto attraverso il generico elemento (cioè che è dentro in Eq)  
 $\vec{M}$  (momentum)

$\beta = \vec{I} + \vec{M}$

**EQ. GLOBALE DINAMICA FLUSSI**

- eq. vettoriale  
 3 eq. scalari

$\vec{P} + \vec{I} + \vec{M} + \vec{F}_c = 0$

↑ ↑ ↑  
 calcoli su superficie  
 calcoli su volume  
 ma nei moti permanenti  $\vec{I} = 0$

Con moto permanente  $\vec{I} = 0$  e così ho solo forze di superficie, non mi serve avere info su tutti i punti del fluido → GRANDE SEMPLIFICAZIONE

MOTO PERMANENTI molto + semplici del moto VARIAB. Perché?

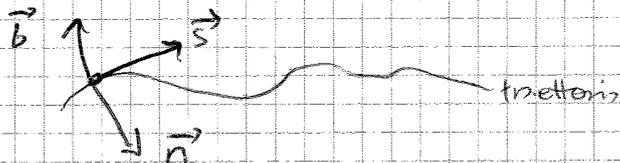
TEOREMA DI BERNOULLI

- 1)  $\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad } p$       1° IPOTESI - FLUIDO PERFETTO
- 2) gravitatore  $\rightarrow \vec{F} = \text{grad}(-gz)$       2° HP
- 3)  $\rho = \text{cost}$       3° HP

Quindi  $-\rho \text{grad}(gz) - \rho \vec{A} - \text{grad } p = 0$   
 $\text{grad}(\gamma z) + \text{grad}(p) + \rho \vec{A} = 0$   
 $\text{grad}\left(\frac{z}{\gamma} + \frac{p}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho} \vec{A} = 0$

$\gamma = \rho g$

$\text{grad}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = -\frac{1}{\rho} \vec{A}$       EQ VETTORIALE



sistema di riferimento intrinseco

- ①  $\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = -\frac{1}{\rho} \frac{DU}{Dt}$       N.B.
- ②  $\frac{\partial}{\partial n} \left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = -\frac{1}{\rho} \frac{U^2}{r}$       \*
- ③  $\frac{\partial}{\partial b} \left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = 0$

è sempre una direzione per cui è come se fossimo nella statica, il unico parametro resta costante

② unico parametro può verso centro del cerchio ~~di~~ osculatore

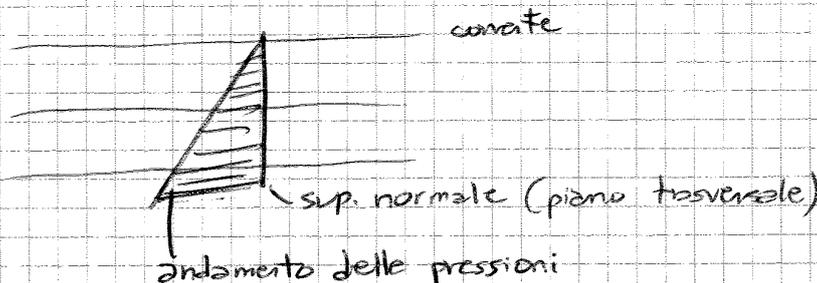
Tanto + raggio di curvatura è alto, tanto + unico parametro lungo  $\vec{n}$  è piccolo  
 se  $r \rightarrow \infty$  curvo  $\rightarrow 0$ ; se  $r$  è enorme traiettoria rettilinea

$\vec{n}$  e  $\vec{b}$  descrivono tutto il piano normale, lungo qst piano unico parametro costante all'interno di una corrente

Lungo la superficie convessa l'andamento della pressione è come la statica!



Molto agevole qst cosa perché altrimenti è impossibile farlo



Quale cose possono conservarsi? Fisicamente

- ① Massa
- ② Quantità di moto
- ③ Energia
- ④ momento della Q. di moto

-  $\frac{v^2}{2g}$  ?

$$\frac{\frac{1}{2} m v^2}{mg} = \frac{v^2}{2g}$$

è un'energia per unità di peso [m]

-  $\frac{P}{\gamma}$  ?

Cos'è pressione?



Pressione = risultato dell'effetto delle particelle che stanno passando a livello MACROSCOPICO

A scala microscopica 2 tipi di energia. Passando da mondo micro a mondo macro effetto delle particelle → PRESSIONE, ma esiste solo a scala macroscopica, come la T

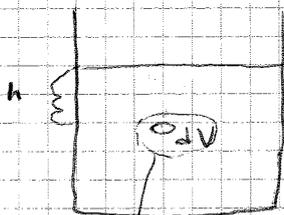
SCALA MICRO

SCALA MACRO

NO P, NO T, NO calore

Faccio integrali con cui trovo P, T, calore

SOLO EP, Ec



pressione in dV =  $p = \gamma \cdot h$

$$\frac{p}{\gamma} = h$$

Se spostato sistema a risultante nulla (dV), non faccio lavoro



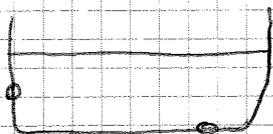
Legato alla pressione c'è un'energia, se parto dV da -h a 0, guadagno energia potenziale

ANNULLO PRESSIONE → QUADAGNO EP = H

Or capisco che  $\frac{p}{\gamma}$  è un'energia legato a pressione, che è microscopico

Bravura di Bernoulli e ricavare la eq. Eulero la CONSERVAZIONE E MECCANICA

FORONOMIA



Faccio un tubo e voglio sapere la velocità con cui esce

liquido

In idraulica FORI = LUCI

LUCE SOTTOBATTEME ⇒ quando foro tutto sotto livello del liquido



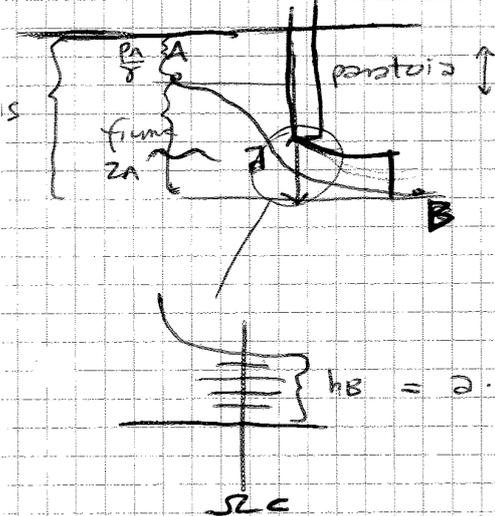
fino a 0  $\rightarrow P_B = 0$

Aumento velocità andando verso  $Sc$  e diminuisce pressione

Cresce  $\rightarrow V_{max}, p=0$

$$Q = Sc \cdot U_B = C_c \frac{\pi d^2}{4} C_v \sqrt{2gh_s} = \frac{C_c \cdot C_v}{0.61 \cdot 0.99} \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2gh_s} \approx \frac{0.6}{4} \pi d^2 V$$

coeff. di contrazione



Q sotto la paratoia?

$$H_A = H_B$$

$$Z_A + \frac{P_A}{\rho} + \frac{U_A^2}{2g} = Z_B + \frac{P_B}{\rho} + \frac{U_B^2}{2g}$$

$h_s = 0$   $h_B = C_c \cdot a$

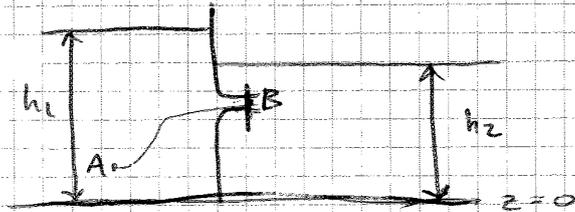
$$U_B = \sqrt{2g(h_s - h_B)} = \sqrt{2g(h_s - a \cdot C_c)}$$

0.61

stessa  $h_B$  in tutti i punti nella sezione normale

$$Q = Sc \cdot U_B = \left( \frac{C_c \cdot a}{h_a} = 1 \right) \sqrt{2g(h_s - a \cdot C_c)}$$

↑  
lunghezza  
unitaria (scelta io)



$$H_A = H_B$$

$$Z_A + \frac{P_A}{\rho} + \frac{U_A^2}{2g} = Z_B + \frac{P_B}{\rho} + \frac{U_B^2}{2g}$$

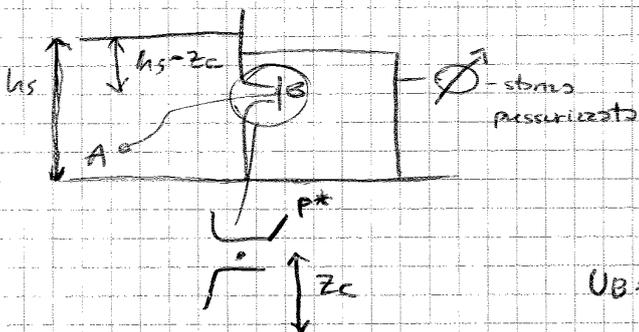
$h_1$   $h_2$

$$U_B = \sqrt{2g(h_2 - h_1)}$$

① se  $h_2$  cresce  $U_B$  fallente

② velocità non dipende linearmente ma quadraticamente

$$Q = Sc \cdot U_B = C_c \cdot C_v \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2g(h_2 - h_1)}$$



$$H_A = H_B$$

$$Z_A + \frac{P_A}{\rho} + \frac{U_A^2}{2g} = Z_B + \frac{P_B}{\rho} + \frac{U_B^2}{2g}$$

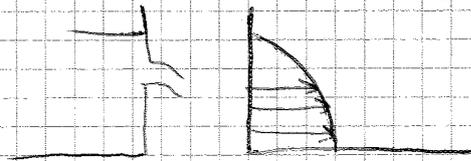
$h_s$   $z_c + \frac{P_A}{\rho}$

$$U_B = \sqrt{2g \left[ h_s - \left( z_c + \frac{P_A}{\rho} \right) \right]}$$

$h_s - z_c$

$$U_B = \sqrt{2g(h_s - z_B)} \cdot C_u \approx 0.99$$

Distribuzione di velocità parabolica

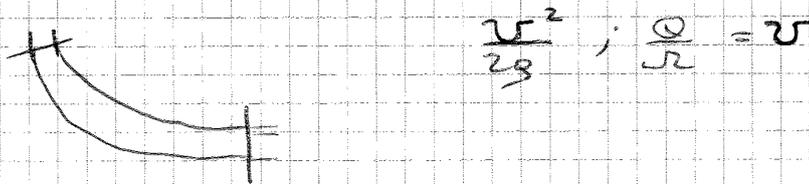


Portata = sezione x velocità  $Q = \int U =$  velocità media

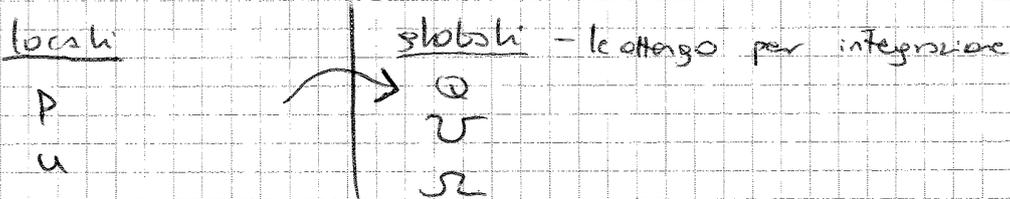
$$= \frac{C_c}{C_d} \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot \sqrt{2g(h_s - z_g)}$$

Gradiente parabolico piccolo, posso approssimare a caso lineare, quindi posso prendere come  $U$  media la velocità nel centro del getto  
 lo vedo un pezzo di parabola al centro del suo andamento, punto punto concentrico della sezione\*

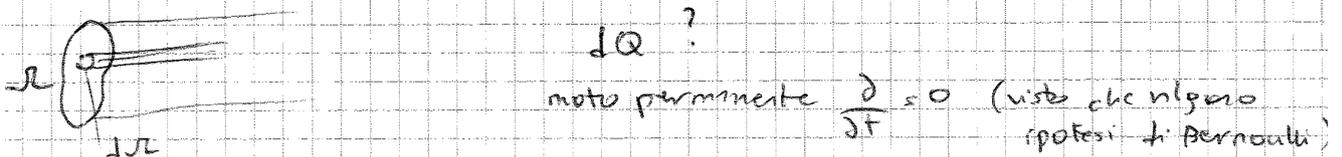
Problema di Bernoulli e' che vale solo su una traiettoria. Varei ragionare su velocità media delle correnti senza guardare quale traiettoria considerata



Voglio passare da variabili locali a variabili globali (portata, velocità media)  
 (pressione, vettore velocità)



~~Problema di Bernoulli~~ Varei utilizzare Bernoulli in modo generale  
ESTENSIONE TH BERNOLLI AD UNA CORRENTE



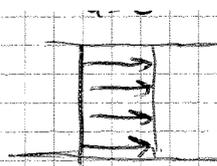
$$\frac{\partial \rho Q}{\partial s} + \frac{\partial \rho s \Omega}{\partial t} = 0 \quad (\text{eq. continuita' + moto permanente})$$

fluido incompressibile  $\rho = \text{cost}$   $\rightarrow \frac{\partial Q}{\partial s} = 0$

Q resta costante nello spazio e nel tempo

$$\underbrace{\rho dQ}_{\text{portata in massa arbitraria}} \cdot g = \underbrace{\gamma dQ}_{\text{massa in peso nell'unità di tempo}}$$

$\alpha \approx 1$  se  $u$  costante



$\alpha$  tanto + distante da 1 tanto + profilo di velocità si allontana da un'  $u = \text{cost}$

Nel moto turbolento (caso che ci interessa)  $\alpha \approx 1$

Nel moto laminare  $\alpha \approx 2$

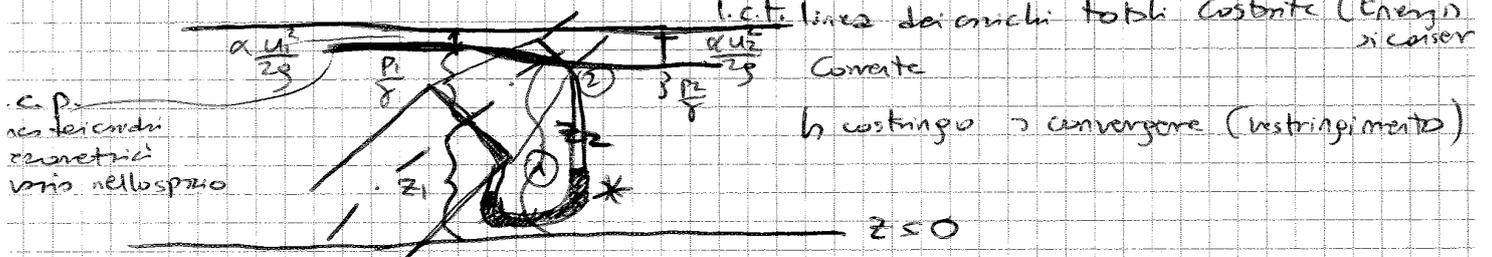
Ricordo che se  $z$  e  $p$  sono lochi, so che  $z + \frac{p}{\rho}$  è sempre costante quindi c'è un coefficiente globale che raggruppa tutte le quantità di moto

$$\boxed{(\alpha - 1) = 3(\beta - 1)}$$

che legame tra  $\alpha$  e  $\beta$    
 lo vedremo

### VENTURIMETRO (da Venturi, 1800 italiano)

Venturi si chiede: come misuro  $Q$  di una corrente?



Conosco  $H = \left( z + \frac{p}{\rho} + \frac{\alpha u^2}{2\beta} \right) = \text{cost}$

Posso usarlo con le dovute ipotesi? Fluido incompr. moto permanente

Posso considerarlo come fluido perfetto se considero tratto piccolo di fluido

② Effetto restringimento, aumento  $\rightarrow$  dissipazioni di energia

\* ②  $\rightarrow$  FLUIDO PERFETTO  $\rightarrow$  VISCOSITÀ TRASCURABILE

$\frac{\alpha u_2}{2\beta} > \frac{\alpha u_1}{2\beta}$   $Q$  si termina e aumenta nell'②   
 Quindi  $\frac{p_2}{\rho} < \frac{p_1}{\rho}$

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{\alpha u_1^2}{2\beta} = z_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{\alpha u_2^2}{2\beta}$$

$h_1$

$$\frac{\alpha(u_2^2 - u_1^2)}{2\beta} = h_1 - h_2; \quad \begin{cases} u_1 = \frac{Q}{S_1} \\ u_2 = \frac{Q}{S_2} \end{cases} \quad \text{Portata è sempre la stessa}$$

$$\frac{\alpha}{2\beta} \left[ \frac{Q^2}{S_1^2} - \frac{Q^2}{S_2^2} \right] = h_1 - h_2$$

$$\frac{\alpha Q^2}{2\beta} \left[ \frac{1}{S_1^2} - \frac{1}{S_2^2} \right] = h_1 - h_2$$

\* MANOMETRO DIFFERENZIALE  $\rightarrow$  misur. unico piezometrico



B<sub>0</sub>

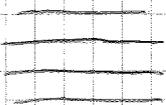
filo metallo  
conduttore  
collegato a  
generatore di  
corrente elettrica  
x mantenere T cost

Metodo con lunghezze d'onda e interferenza x calcolo velocità nei moti turbolenti (guarda su libro se c'è) → strumenti LDA (Laser Doppler Anemometro)

Perché tutti gli metodi a ho detto? Per fare capire che non è semplice misurare velocità, infatti diversi studiosi hanno tentato di trovare un metodo,

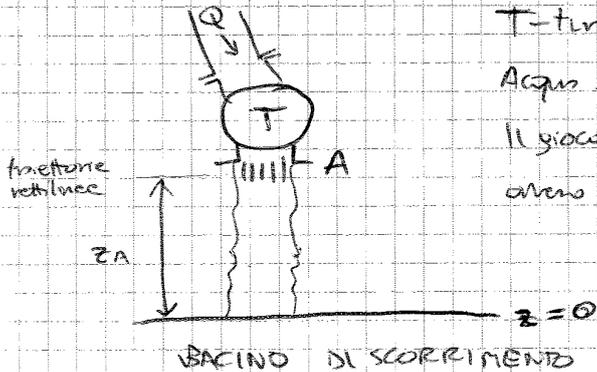
**ALTRO MODO:**

segnale  
sonoro



onde sonore viaggiano su fluido,  
velocità con cui vanno dipende dalla velocità del fluido

**CENTRALE IDROELETTRICA**



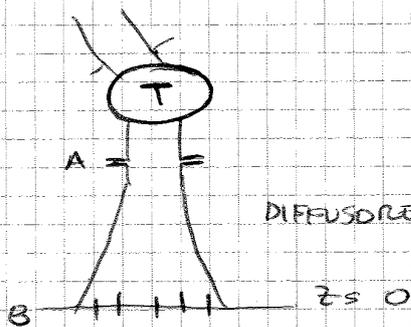
T-turbina

Acqua arriva con un certa corrente.

Il gioco è sottrarre all'acqua la maggior quantità di energia, ovvero farla uscire con livello E + basso possibile

$$H = z_A + \frac{p_A}{\rho} + \frac{\alpha U_A^2}{2g} \quad (1)$$

= 0



DIFFUSORE (divergente)

$H_A = H_B$

energia è la stessa, se considero tratto piccolo A-B

$H_A = H_B$

$$z_B + \frac{p_B}{\rho} + \frac{\alpha U_B^2}{2g} \quad (2)$$

= 0

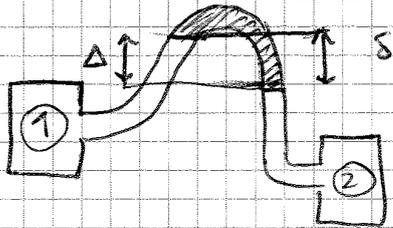
Riesco a parlar via + E con qst diffusore, perché confrontato (1) con (2) z<sub>B</sub> è minore di z<sub>A</sub>, U<sub>B</sub> è minore di U<sub>A</sub> perché, se parlo è lo stesso, se sezione di B è + grande di sezione A, U<sub>B</sub> < U<sub>A</sub>!

( Q = S<sub>2</sub> · U )

Dighe servono x accumulare acqua d'inverno e lasciarla andare d'estate x avere grandi cambi di altezza d'acqua (sbalzi) xK se voglio poter usare

$$\delta = \frac{\rho_m - \rho}{\gamma} \cdot \Delta$$

$\delta > \Delta$  significa che  $\Delta$  è più piccolo perché  $\rho_m > \rho$   
 mercurio  $\gg \gamma_{H_2O}$



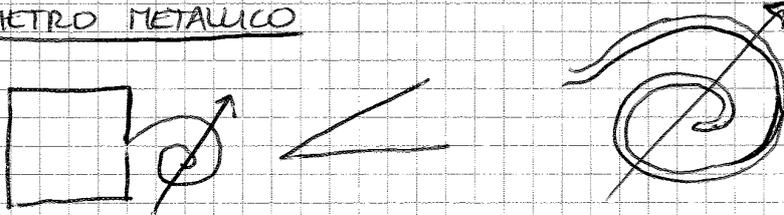
P.C.I.R. 1  
 P.C.I.R. 2

$$\delta = \frac{\rho - \rho_m}{\gamma} \cdot \Delta$$

NON USO MERCURIO ma  $\rho \approx \rho_m$

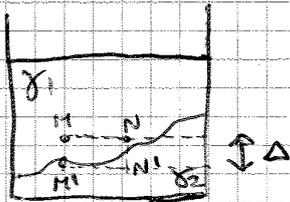
Questo lo uso quando ho  $\delta$  molto piccolo quindi non riesco a misurarlo  $\rightarrow$  lo amplifico con un  $\Delta \gg \delta$  così posso rilevarlo senza problemi. Nel caso precedente viceversa

• MANOMETRO METALLICO



• SUPERFICIE DI CONTATTO DI 2 LIQUIDI

DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO CHE IN STATICA LA SUP. DI CONTATTO È ORIZZONTALE



$$\rho_1 < \rho_2$$

$$\begin{aligned} P_{N'} &= P_N + \rho_2 \cdot \Delta \\ P_{M'} &= P_M + \rho_1 \cdot \Delta \end{aligned}$$

ma se sono così significa che

$$P_N + \rho_2 \cdot \Delta = P_M + \rho_1 \cdot \Delta$$

ma dal disegno vedo che

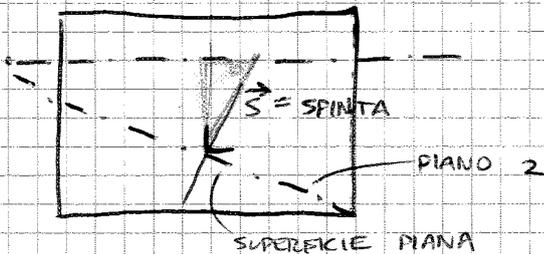
$$P_N = P_M \quad \text{e} \quad P_{N'} = P_{M'}$$

$\downarrow$

$$\rho_2 \cdot \Delta = \rho_1 \cdot \Delta \rightarrow \Delta = 0$$

ORIZZONTALE

• SUPERFICI PIANE ALL'INTERNO DI 1 FLUIDO

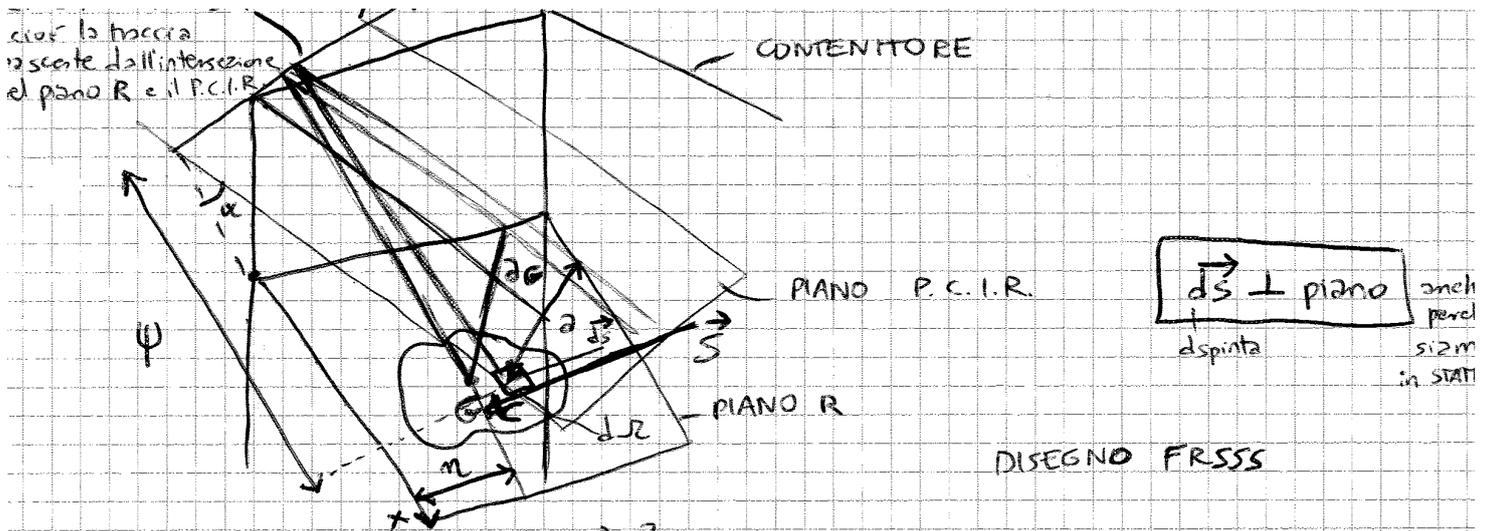


P.C.I.R.

Come lo determino la pressione su questa superficie?

• VISTO DALL'ALTO

DISEGNO PAGINA DOPO  $\searrow$



Quanto vale il modulo dello  $\vec{S}$ ?

$$|\vec{S}| = p \cdot dR$$

pressione del punto che stava esaminando

Pero abbiamo visto che  $p = \gamma \cdot a$  (affondamento rispetto al P.C.I.R.)

$$|\vec{S}| = p \cdot dR = \gamma \cdot a \cdot dR$$

$\downarrow$   
sen  $\alpha$

$$|\vec{S}| = \gamma \times \text{sen } \alpha \cdot dR$$

$$|\vec{S}| = \int_R \gamma \times \text{sen } \alpha \cdot dR = \gamma \text{sen } \alpha \cdot \int_R x \cdot dR = *$$

SPINTA SU SUPERFICIE PIANA

IL MOMENTO STATICO che per definizione

$$* = \underbrace{\gamma \text{sen } \alpha \times G}_{\text{AFFONDAMENTO DEL BARICENTRO (aG)}} \cdot R = P_G \cdot R$$

$$M = \int_R x \cdot dR = \underbrace{R \times G}_{\text{area per coordinate } x \text{ del baricentro}}$$

- Quindi ai fini del modulo se ho un rettangolo e lo noto di pochi gradi parallelamente al piano, il modulo sarà sempre lo stesso perché il modulo dipende solo dalla  $P_G = \underline{\underline{\text{AREA}}}$

N.B. La forza non sarà però applicata nel BARICENTRO, ma in un punto + basso del baricentro (C) che si chiama CENTRO DI SPINTA.



$$-T = \gamma \cdot \Omega \left[ \left( z_2 + \frac{\rho_3}{\gamma} \right) - \left( z_1 + \frac{\rho_1}{\gamma} \right) \right]$$

$$T = \gamma \cdot \Omega (h_1 - h_2)$$

$$= \gamma \cdot \Omega \cdot L$$

risultante delle tensioni tangenziali dipende da differenza del conico piezometrico

N.B. Mai confondere L con tratto orizzontale e obliquo + i grande, + T grande, + perdita di energia

$$\Omega \cdot L = \text{Volume}$$

$$\gamma \cdot V = \text{PESO}$$

$$\frac{\partial h}{\partial s} = - \frac{\partial H}{\partial s} \quad \text{variazione di } E \text{ per unita di peso per unita di spazio}$$

T = tensione totale

$$\underline{T} = \text{tensione per unita di superficie} = \frac{T}{L \cdot P}$$

P = CONDIZIONE BAGNATO (perimetro della sezione)

$$\frac{T}{L \cdot P} = \frac{\gamma \cdot \Omega \cdot L}{L \cdot P} = \gamma \cdot \left( \frac{\Omega}{P} \right)$$

$$R = \frac{\Omega}{P}$$



RAGGIO MEDIO

RAGGIO IDRAULICO - info geometrica che influenza meccanica dei fluidi



$$R = \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2}$$

sezione circolare R = metà del raggio geom.



$$R = \frac{ab}{2(a+b)}$$

con  $a \gg b \quad R \approx \frac{b}{2}$

Rapporto tra quanto consente uscire a portata e quanto perimetro riesce a frenare (le R sono su perimetro e frenano)  
 "  $\downarrow$  (quella sezione) "  $\downarrow$  perimetro R concepito come FRENNO  
EFFICIENZA IDRAULICA

Quindi a parità di E che da, se voglio far passare + fluido possibile, prendo quella forma che ha rapporto superficie perimetro migliore

Cerchio - forma che a parità di perimetro, ha maggior area > parità di area, ha minor perimetro

CERCHIO è utilizzato per questo

$\downarrow$   
 tutte le sezioni sono circolari x spendere - Energia possibile

sezioni "poco efficienti": Fiumi

hanno sezione rettangolare molto larga  $\rightarrow$  centro di cerchio



tra molti e meno

Fiume come si autangola! (le "grande eccesso di E" che

viene speso in sezione poco efficiente e ② ante diga non rettilinea

$$\rho (\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad } p - \mu \nabla^2 \vec{u} \quad (1) \quad \text{eq. Navier-Stokes}$$

Ex. moto aeroplano e moto zanzara → scale completamente diverse

Ciascun moto avrà una propria scala (tipica del corpo (di lunghezza))

Perciò sarà scala delle velocità tipica: scala  $U_0$

③ scala dei tempi  $\frac{l}{U_0}$  → potrebbe non essere molto diversa, tranne in zero (e in rapporto in case piccole o in case grandi)

④ scala delle pressioni

$$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{m}^2 \cdot \text{s}^2} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Ho introdotto scale tipiche x ciascuna grandezza che mi interessa

$$\tilde{x} = \frac{x}{l}$$

$\tilde{x}$  è adimensionale, va da 0 a 1

Se sono > 95 sono → metri della scala

$$\tilde{y} = \frac{y}{l}$$

Con rapporto lo mio coordinate x alla scala

$$\tilde{z} = \frac{z}{l}$$

X si muove su valori completamente diversi (in base al corpo che sta studiando (cm → mm) mentre

$$\tilde{u} = \frac{u}{U_0}$$

$$0 < \tilde{x} < 1$$

Ho proiettato tutte le lunghezze possibili sull'intervallo 0

$$\tilde{v} = \frac{v}{U_0}$$

Faccio lo stesso con le velocità

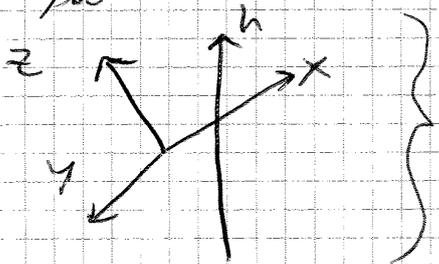
$$\tilde{w} = \frac{w}{U_0}$$

ORA VOGLIO SCRIVERE EQ. INIZIALE IN TERMINI DI VARIABILI ADIMENSIONALI

$$\tilde{t} = \frac{t}{l/U_0}$$

h → non dentro p.c.i.v. i.e. solo la verticale

$$\tilde{p} = \frac{p}{\rho U_0^2}$$



$$\vec{F} = \text{grad} (-gh) \Rightarrow$$

non è + z, perché on z non è la verticale

⇒ divideremo (1) per densità

$$(1) \Rightarrow \vec{F} - \vec{A} = \frac{1}{\rho} \text{grad } p - \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{u}$$

$\mu$  - viscosità dinamica

$$\boxed{\nu = \frac{\mu}{\rho}}$$

viscosità cinematica

è il valore che mi interessa, il rapporto rispetto alla densità

Quindi

$$\vec{F} - \vec{A} = \frac{1}{\rho} \text{grad } p - \nu \nabla^2 \vec{u}$$

Tutte le volte che c'è lo stesso viscosità cinematica, vedo sempre la stessa cosa

Se hai introdotto qst coefficiente dovrai chiedere ogni volta zifato al posto di 1.

proietto (in p  $\vec{i}$ )  $\frac{\partial}{\partial x} (-gh) - \frac{Du}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 u$

$$\rightarrow \left[ -\frac{1}{Fr^2} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial x} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u} \right]$$

I problemi si distinguono in base a  $Re$  e  $Fr$

A seconda di qst valori, ha comportamenti di fluidi completamente diversi.

1)  $\frac{Re \text{ molto alti}}{Re \rightarrow \infty} \Rightarrow \frac{1}{Re} \rightarrow 0 \Rightarrow$  Navier-Stokes collasso in Eulero  
 perché termine viscoso tende a 0 e tende a fluido perfetto

Fluido perfetto si studia con  $Re$  altissimo

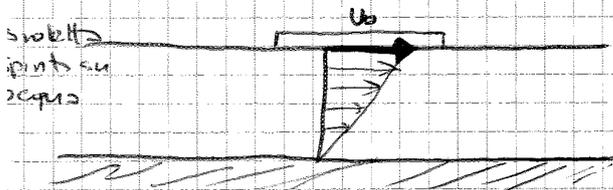
2)  $\frac{Re \text{ tende a } 0}{Re \rightarrow 0} \Rightarrow$  termine viscoso alto  $\Rightarrow$  Eq. molto semplificate  
 ma si spegne il termine non lineare  $\frac{D\vec{u}}{Dt} \rightarrow 0$   
 che è la fonte di complessità

1) - Ex. sole

2) Ex. ghiacciai

### MOTO LAMINARE

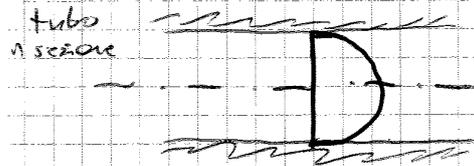
Motoregolare di tante lamine le une sulle altre



Profilo di velocità in cui assano il tratto di quello sopra e tracciano quello sotto.

Tutti tracci paralleli

Idem x tubo



**MOTO LAMINARE  $\rightarrow$   $Re$  molto basso**

$$Re = \frac{\rho U \cdot D(\text{diametro})}{\mu} < \underline{2000}$$

moto laminare, stato stabile di quel moto



Nel tubo avviene a  $2000$

A mano a mano che aumentano forze d'inerzia rispetto a forze viscosi,  $Re$  aumenta.

$\mu = \dots$  "solido di rivoluzione"

$v = w = 0$

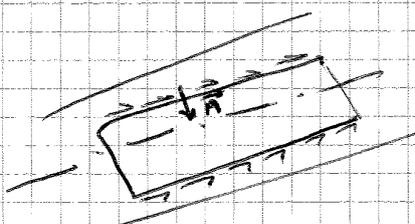
$u(r=R) = 0$  perché fluido viscoso, alla parete il fluido non si muove

$|\tau| = \mu \left| \frac{du}{dr} \right|$  rispetto profilo parabolico della velocità da qst ds

Ricordo  $T = \gamma \pi r^2 c L$

$\vec{T} = \mu \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} d\Omega$

Dentro  $\vec{T}$  c'è qualcosa legato al gradiente di velocità



cerchio gate delle proprietà di simmetria

$\frac{du}{dn}$

$\vec{T} = \mu \frac{du}{dn} \int_{\Omega} 2\pi r L = \mu \frac{du}{dr} 2\pi r L$

$r = -n + \text{cost} \Rightarrow dr = -dn$

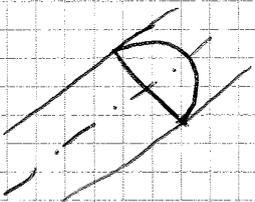
$\gamma \pi r^2 c L = -\mu \frac{du}{dr} 2\pi r L$

$\frac{du}{dr} = -\frac{\gamma c}{2\mu} r$

$u(r) = -\frac{\gamma c}{4\mu} r^2 + \text{cost}$

$u(r=R) = 0$

$\rightarrow u(r) = \frac{\gamma c}{4\mu} (R^2 - r^2) = \frac{\gamma c}{4\mu} \left( \frac{D^2}{4} - r^2 \right)$



sezione circolare

$U_{max} = \frac{\gamma c}{16\mu} D^2 \quad (r=0)$

Dimezzo D, Umax diventa 1/4

$\bar{U} = \text{valore } \rightarrow \text{metà del valore max} = \frac{1}{2} U_{max} = \frac{\gamma c}{32\mu} D^2$   
 x geometria paraboloidale

$Q = \int_{\Omega} \vec{U} = \pi \frac{D^2}{4} \bar{U} = \pi \frac{D^2}{4} \frac{\gamma c}{32\mu} D^2 = \frac{\pi}{128} \frac{\gamma c}{\mu} D^4$

LEGGE DI POISEUILLE

$i = \frac{Q \cdot 128 \cdot \mu}{\pi \gamma D^4}$

Valore parte doppia? Raddoppio energia i

Ha viscosità che raddoppia? Devo raddoppiare i

CIRCUITO MANTO CLINICIRIE ALLA PARAFINIA →

Se in un moto vedo solo derivate pari — MOTO SIMMETRICO nello spazio

LAPLACIANO — solo der. pari — descrive moto simmetrico

Che rompe la simmetria?  $\frac{Dv}{Dt}$

Il tempo compare sempre in derivate pari! Moto non è simmetrico rispetto al tempo,

Altrimenti andare avanti e indietro nel tempo non cambierebbe

$$U_{max} = \frac{\gamma L}{2\mu} h^2$$

$$U = \frac{2}{3} \frac{\gamma L}{2\mu} h^2 = \frac{\gamma L}{3\mu} h^2$$

Con striscia larga 1

$$Q = \int U = (1 \cdot 2h) \cdot \frac{\gamma L}{3\mu} h^2 = \frac{2}{3} \frac{\gamma L}{\mu} h^3$$

$$i = \frac{3\mu Q}{2\gamma h^3}$$

(p. 184)

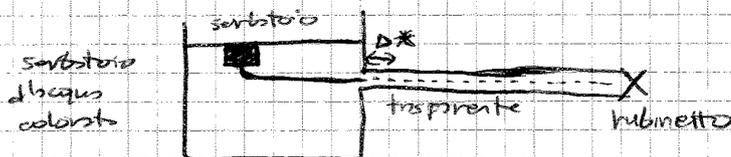
21/10/95

## MOTO TURBOLENTO

Maggior parte dei casi reali

Devo studiarlo per questo motivo, se non servisse lo eviterei perché è molto complesso.

ESPERIENZA DI REYNOLDS — permette di intuire complessità m.t.



Apri poco rubinetto — portata bassa

Esce acqua colorata dal tubo, i sottili filamenti si muovono restano su asse del condotto

Quindi si muoverà di moto rett. uniforme lungo stesso asse centrale in cui l'acqua

l'uscita all'inizio → VISUALIZZAZIONE TRAIETTORIA COLORANDO

↳ MOTO LAMINARE

Con  $Re = \frac{U \cdot D}{\nu} \lesssim 2000$  moto laminare stabile

$Re \approx 2000$  rubinetto aperto un po' di +, non vedo + quello che vedevo prima  
 Ingrandendo vedo ancora un po' rosso uscire dal <sup>tubicino</sup> ~~serbatoio~~ piccolo  
 (una lunghezza breve ( $D \approx 2$  cm) ovvero il diametro  $D$  del condotto  
 trasparente, l'acqua diventa tutta colorata nel condotto

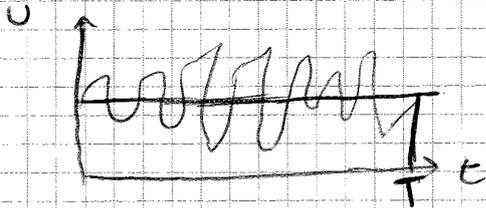
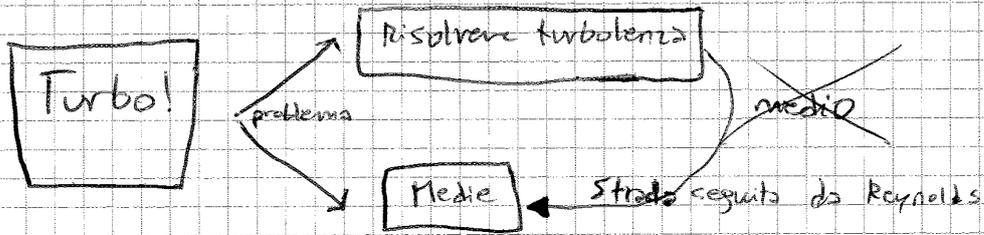


CATASTROFE DINAMICA

traiettorie vettoriali uniformi → traiettorie qualsiasi

Non viene il dubbio che sia curva la traiettoria e cambia continuamente

Di tutto quello che ho mi interessa saper molto meno



$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(t) dt$$

In generale, per qualsiasi grandezza dip. dal tempo

$$\bar{\phi} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \phi(t) dt$$

1° PROBLEMA

Come scelgo T? tempo suff. lungo per dire che sistema ha dato vita a tutte le sue manifestazioni.

Se sistema complesso & dinamico, vedo continuamente cose nuove

Non esiste T a riprova. Quindi?

Altri problemi...

Qst metodo di calcolo  $\bar{u}$  non va bene

KOLMOGOROV trova il modo giusto x calcolare velocità medie

$$u(t) = \bar{u} + u'$$

DECOMPOSIZIONE DI REYNOLDS

valore di oscillazione intorno al medio



COMPONENTE DI AGITAZIONE TURBOLENTA

$$\hat{u}(t) = \bar{u} + u'$$

valore istantaneo      valore medio      scarto rispetto al medio

$$\hat{p}(t) = \bar{p} + p'$$

istantaneo      valore medio

$$\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad } \bar{p} - \mu \nabla^2 \hat{u}$$

Vogliamo Eq. in cui ci siano solo  $\bar{u}, \bar{p}$  (valori medi). Proviamo con:

$\text{div } \hat{u} = 0$  vincolo posto x fluido incompressibile (sempre verificato in un punto)

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0$$

Cambia notazione  $\{X, Y, Z\} = \{X_1, X_2, X_3\}$

$$\vec{u} = (u, v, w)$$

$$u = (u_1, u_2, u_3)$$

solo per  $\sum_{i=1}^3 u_i$

26/10/19

$\bar{v}_i, \bar{p} \Rightarrow$  eq. moto medio

$v_i, p \Rightarrow$  eq. moto turbolento

$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_i} = 0$  eq. continuità  $\begin{cases} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0 & \text{moto medio} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 & \text{turbolenza} \end{cases}$

$\hat{u}_i = \bar{v}_i + u_i$

$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \hat{v}_j \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + G$

$\frac{\partial (\bar{v}_i + u_i)}{\partial t} + (\bar{v}_j + u_j) \frac{\partial (\bar{v}_i + u_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\bar{p} + p)}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 (\bar{v}_i + u_i)}{\partial x_j \partial x_j} + G$

(se di grado 3)

$\textcircled{1} \frac{\partial (\bar{v}_i + u_i)}{\partial t} = \frac{\partial (\bar{v}_i + u_i)}{\partial t} = \frac{\partial (\bar{v}_i)}{\partial t} + 0 = \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t}$

(medio degli scarti)

$\textcircled{3} \frac{-1}{\rho} \frac{\partial (\bar{p} + p)}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\bar{p} + p)}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\bar{p})}{\partial x_i} + 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}$

$\textcircled{4} \nu \frac{\partial^2 (\bar{v}_i + u_i)}{\partial x_j \partial x_j} = \nu \frac{\partial^2 (\bar{v}_i + u_i)}{\partial x_j \partial x_j} = \nu \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j \partial x_j}$

viscosità costante (fluido)

$\textcircled{2} (\bar{v}_j + u_j) \frac{\partial (\bar{v}_i + u_i)}{\partial x_j} = \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \bar{v}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$

$\underbrace{\bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}}_{\text{medio, utile}} \quad \underbrace{u_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}}_{\bar{u}_j = 0} \quad \underbrace{\bar{v}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{\textcircled{2c}} \quad \underbrace{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{\textcircled{2d}}$

$\bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = 0$

se ci fosse solo gli termini e gli altri 3 zero, avrei fatto scomparire turbolenza perché ci sarebbero solo grandezze medie

$\textcircled{2c} \bar{v}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \bar{v}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \bar{v}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = 0$

$\textcircled{2d} \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$

= 0 per la divergenza

$= \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j)$

$\bar{u} = 0 \quad \bar{u}_j = 0 \quad \cancel{\bar{u}_i \cdot u_j} = 0$

$\tau$  Reynolds  $-\rho \begin{pmatrix} \overline{u_2 u_1} & \overline{u_2^2} & \overline{u_2 u_3} \\ \overline{u_3 u_1} & \overline{u_3 u_2} & \overline{u_3^2} \end{pmatrix}$

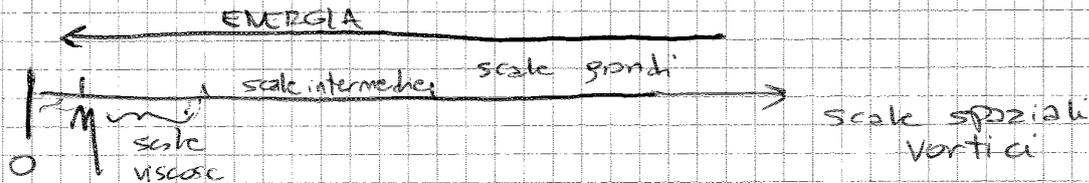
MATRICE DEGLI SFORZI DI REYNOLDS

Anomalia si manifestano nei fluidi cercano di vedere cross-correlazioni per vedere turbolenza

MOTI TURBOLENTI POSSONO ESSERE INTERP. COME SOMMA DI  $\tau$  SCALE

$\tau$  Reynolds Si ripresentano dai termini non lineari di Navier-Stokes

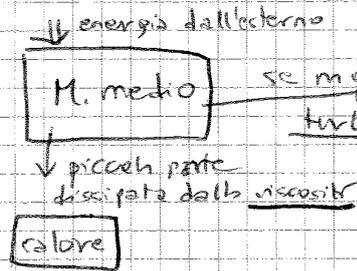
$\tau$  turbolente molto  $\tau$  grandi di  $\tau$  viscoso (che possono non essere considerate)



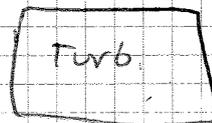
Scale grandi

Chi detta le dimensioni delle scale grandi lo determinano le condizioni al contorno

- dettate dalle c.c.
  - sensibili alle c.c.
  - energetiche
- non viscoso (vedono come se non ci fosse viscosità, più detto sotto esopo)

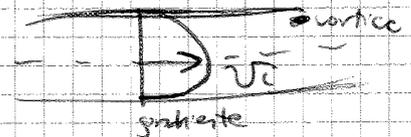


Se fosse moto nel corpo, energia finisce tutto in calore (MOTO LAMINARE)



Turbolenza è come un microbo che succhia quasi tutta l'energia data. Prende energia tramite SCALE GRANDI, dette appunto SCALE ENERGETICHE

Perché scale grandi? Perché devo vedere qualcosa che è 2 scale grandi, se sono 2 scale piccole (un vortice singolo) non vedo niente



\* Delfini benissimo polimeri che indicano turbolenza

Scale intermedie

ho perso le info delle scale grandi quindi non vengono più le c.c.

Entro in una scala universale

Range  $\pm$  scale INERZIALE che è UNIVERSALE

Così fanno per scale  $\tau$  trasferiscono energia alla turbolenza

$$1) \begin{cases} \log q_1 = \alpha_1 \log \lambda + \beta_1 \log \tau + \gamma_1 \log \mu \\ \log q_2 = \alpha_2 \log \lambda + \beta_2 \log \tau + \gamma_2 \log \mu \\ \log q_3 = \alpha_3 \log \lambda + \beta_3 \log \tau + \gamma_3 \log \mu \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \log \lambda = S_1 \log q_1 + E_1 \log q_2 + W_1 \log q_3 \\ \log \tau = S_2 \log q_1 + E_2 \log q_2 + W_2 \log q_3 \\ \log \mu = S_3 \log q_1 + E_3 \log q_2 + W_3 \log q_3 \end{cases}$$

$$\det \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

cioè det delle dimensioni delle equazioni nuove è diverso da 0

abbiamo soluzioni

$$y = f(Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n)$$

Non so come è fatto lo f

$$\frac{y}{Q_1^{\alpha} Q_2^{\beta} Q_3^{\gamma}} = g(Q_1, Q_2, Q_3, \underbrace{\frac{Q_4}{Q_1^k Q_2^p Q_3^r}}_{N_4}, N_5, \dots, N_n)$$

(numero)

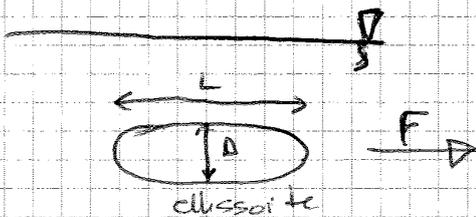
$$N = f(\underbrace{Q_1, Q_2, Q_3}_{\text{PRINCIPALI}}, \underbrace{N_4, \dots, N_n}_{\text{derivate da } Q_1, Q_2, Q_3})$$

(dimensionale, inseribile al combinate di  $Q_1, Q_2, Q_3$ )

Se cambio dimensione  $\rightarrow Q_i$ , cambio solo quello quindi lo posso togliere  $Q_i$

$$N = g(N_4, N_5, \dots, N_n)$$

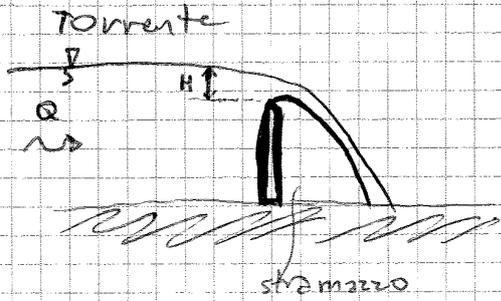
$$\begin{aligned} f &\Rightarrow \dim = n+1 \\ g &\Rightarrow (n-3)+1 \quad \text{dimensioni} \end{aligned}$$



$$F = F(p, M, U, D, L, g)$$

↑ ↑ ↑

di 7 incognite riduco a 4 togliendo quelle con la freccia



$H \rightarrow Q$  solo dipendenti  
 Quanto vale rapporto fra  $H$  e  $Q$ ?

**N-S**

Caso + complicato di quello di prima

eq. N.S. sempre difficile

Invece di scegliere cosa è il dominio del sistema, qui no  $\rightarrow$  PROBLEMA A

FRONTIERA LIBERA

Non so neanche in quale spazio risolvere il problema.

$$Q = f(H, L, g)$$

lunghezza stramazzo

Viscosità trascurabile? Flusso turbolento  $\rightarrow$  Reynolds alto, viscosità trascurabile

(poco intuitivo) ~~X~~

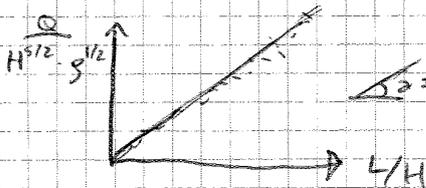
4 parametri ora

Combinare  $H$  si può fare,  $L$  e  $g$  è difficile da combinare

Problema  $Q$  su  $H$  e  $g$  e gli esponenti sono  $\frac{3}{2}$  e  $\frac{1}{2}$  affinché sia adimensionale il rapporto

$$\frac{Q}{H^{3/2} \cdot g^{1/2}} = h\left(\frac{L}{H}\right)$$

Ora 2 dimensioni  $\rightarrow$   $h$  vive su un piano



$$\Delta \alpha = \tan \theta$$

Basta combinare  $H$  (rubinetto o monte) e passo  
 fanno tutti punti su grafico

Risultato  $\rightarrow$  retta  $\rightarrow \frac{Q}{H^{3/2} \cdot g^{1/2}} = a \frac{L}{H}$

LEGGE DELLO STRAMAZZO

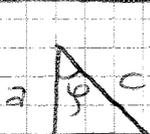
$$Q = a H \sqrt{g H} \cdot L$$

①  $[Q] = [L^3 \cdot T^{-1}]$

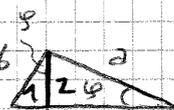
②  $[Q] = [H^{3/2} \cdot g^{1/2}]$

Accademia delle Scienze di Mosca  $\rightarrow$  Kolmogorov e Landau insegnavano

O. b. hukov studente



$$a^2 + b^2 = c^2$$

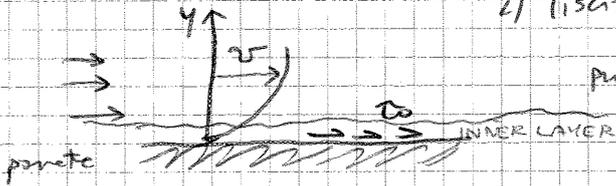


$$S = S_1 + S_2$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial (u_i v_j)}{\partial x_i} &= \\ \frac{\partial (u_i v_j)}{\partial x_i} &= f(U_i, P, \mu, \rho, \dots) \end{aligned} \right.$$

Non riesco a scrivere un n° finito di equazioni perché c'è un numero infinito di incognite, anche usando TH II.

Millikan



- 1) parete perfettamente piana
- 2) liscia ( $\epsilon \ll \delta$ )

tensione tangenziale

profilo  $U = U(y, \rho, \mu, \tau_0, \delta)$

fluido viscoso  $\rightarrow \tau_0$  sul fondo  $\rightarrow$  su parete tensione che tende a portar via parete e parete inlata fluido

$\delta$  = scala globale del fluido (c'è differenza tra Kinnickattolo e Missisipi)

$\tau_0$  = motore del fluido

$\rho, \mu$  = costanti del fluido

$y$  = coord. che dice che c'è un profilo

Esiste zona, ZONA VISCOSA (INNER LAYER)

in cui  $\delta$  posso dimenticarlo vicino alla parete

$$U = U(y, \rho, \mu, \tau_0)$$

Esiste zona in cui tensioni di Reynolds prevalgono su viscosità e allora posso eliminarla con parametro  $\rightarrow$  distante da parete  $\rightarrow$  OUTER LAYER

$$U = U(y, \rho, \tau_0, \delta)$$

Ho spezzato i 2 domini

Inner layer

$$\begin{aligned} \tau_{visc.} &= \mu \frac{\partial U}{\partial y} \\ \tau_{turb.} &= \rho u_i v_j \end{aligned}$$

02/11/11

Vicino alla parete  $\tau_{turb.}$  tendono a sreggersi, per questo  $\tau_{visc.}$  sono piccole, prevalgono su  $\tau_{turb.}$

$$U = U(y, \rho, \mu, \tau_0) \rightarrow \text{INNER LAYER}$$

$\tau$  cinematico,  $y$  geometrico,  $\rho$  dinamico,  $\mu$  dinamico (introduce cinematico)

$\tau_0$  dinamico

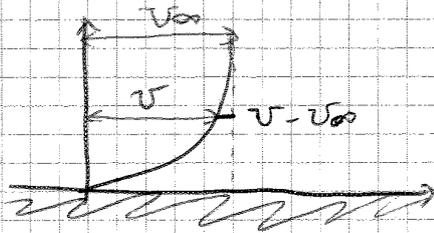
$\rho$  e  $\tau_0$  dinamiche  $\rightarrow$  si devono combinare in modo che massa vada via

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \text{dimensione di } \frac{L^2}{T^2} \rightarrow \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \text{velocità come dimensioni}$$

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = U^* \quad \text{VELOCITÀ D'ATTRITO} \text{ o VELOCITÀ STAR}$$

$$\rightarrow U = U(y, U^*, \nu)$$

$v - v_{\infty} = v(y, U^*, \delta) \rightarrow$  DIFETTO DI VELOCITÀ  
quando grafico



Molto distante da parete, come se parete non ci fosse

$y$  e  $U^*$  gr. fond  $\rightarrow \frac{v - v_{\infty}}{U^*} = F\left(\frac{y}{\delta}\right)$

Scrivere  $\frac{y}{\delta}$  non cambia rispetto  $\frac{\delta}{y}$  perché al massimo resta un  $( )^{-1}$

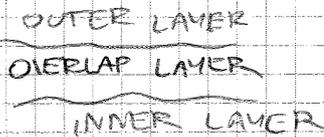
Solo che con  $\frac{y}{\delta}$  sta tra 0 e 1 mentre con  $\frac{\delta}{y}$  posso andare a  $+\infty$ .

OUT LAYER  $\frac{v - v_{\infty}}{U^*} = F\left(\frac{y}{\delta}\right)$

$U^*$  = scala tipica delle velocità

$\delta$  = " " " lunghezza

Immagino ZONA DI TRANSIZIONE TRA INN. e OUT.



suff. vicino a parete  $\rightarrow$  ereditare risultati inner  
 /- lontano da parete  $\rightarrow$  ereditare risultati outer

validi contemporaneamente entrambe le leggi:

$\frac{dv}{dy} = U^* f' \frac{U^*}{v}$   
INNER  
(densità di  $y + \delta \frac{y U^*}{v}$ )  
 =  $U^* f' \cdot \frac{1}{\delta}$   
OUTER  
densità rispetto  $y$

OVERLAP

$U^* f' \frac{U^*}{v} = U^* f' \frac{1}{\delta}$

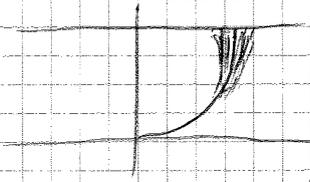
$\frac{f' y U^*}{v} = \frac{f' y}{\delta}$  dipende da  $\frac{y}{\delta}$   
 dipende solo da  $y +$

$= \frac{1}{K}$

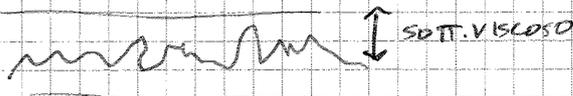
Se dipendono da cose differenti, allora possono solo essere una costante

Come se 1° membro dipendesse solo da  $x$  e 2° membro solo da  $y$   
 $g(x) = h(y)$  quando? Entrambi costanti

Gradiente di velocità → segue scala logaritmica solo in grande approssimazione  
 In realtà ci sono parecchie cose da dire.



SOTT. VISCOSO → potrebbe esserci "spertito", SCABREZZA  $E^+$



$E^+ \leq y^+ \approx 5$

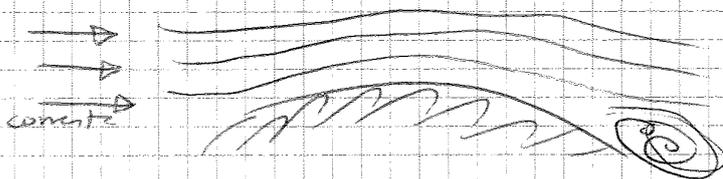
→ scabrezza non gioca alcun ruolo

con  $E^+ > 5$

sottostato viscoso distrutto da scabrezza

↓  
 nuova scala SCABREZZA, non vale quella che abbiamo letto fino ad ora → sott. viscoso non esiste più

• Se Parete curva



Dissipazione di energia, trascinamento si staccano da parete e non li seguono  
 Si formano vortici

ZONE DI SEPARAZIONE DI CORRENTE O ZONA DI SEPARAZIONE

AI BORDI

Riassumo MOTO TURBOLENTO

- eq. moto medio
- scale non divisibili
- non linearità
- tensioni Reynolds
- cascata di vortici
- $\bar{u} = \bar{u}(y)$  → liscia
- chiusura turbolenza → pismo

$$\rho \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} = \frac{\partial P}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \text{gravità}$$

$$\vec{I} = \rho \int_V \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dV$$

$$\vec{u} = \vec{\bar{u}} + \vec{u}'$$

flusso di quantità di moto  $\vec{M} = \rho \int_{\Omega} \vec{u} v_n d\Omega$

$$= \rho \int_{\Omega} (\vec{\bar{u}} + \vec{u}') (\vec{v}_n + v_n') d\Omega$$

$$= \rho \int_{\Omega} (\vec{\bar{u}} \vec{v}_n + \vec{\bar{u}} v_n' + \vec{u}' \vec{v}_n + \vec{u}' v_n') d\Omega$$

$$= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \dots dt$$

$$\vec{M} = \rho \int_{\Omega} \vec{\bar{u}} \vec{v}_n d\Omega + \rho \int_{\Omega} \vec{u}' v_n' d\Omega$$

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \vec{u}' v_n' dt$$

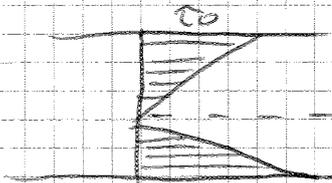
Quindi  $\vec{P} + \vec{F}_c + \vec{I} + \rho \int_{\Omega} \vec{\bar{u}} \vec{v}_n d\Omega + \rho \int_{\Omega} \vec{u}' v_n' d\Omega = 0$

Anche nell'eq. globale turbolenza lascia eredità

Perché? l'unico termine non lineare (prodotto di 2 grandezze turbolente)

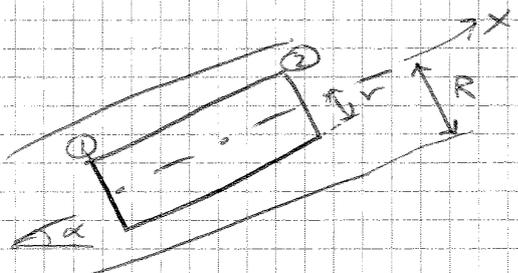
NON LINEARITÀ → IMPOSSIBILITÀ DI SEPARARE LE SCALE

laminare



$$u_0 = \gamma R_i$$

Vogliamo conoscere  $\vec{u}$ ,  $u_0$  ?



cilindro + raggio r  
dentro cilindro + raggio R

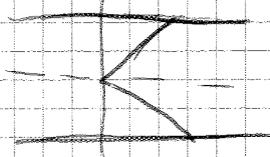
$$-\gamma \pi r^2 L \sin \alpha + \underbrace{p_1 \pi r^2 - p_2 \pi r^2}_{\text{pressione lungo l'asse del cilindro}}$$

forza peso

Scopro di nuovo che tensioni complessive sono lineari con raggio

$$\tau = \tau_{\text{visc}} + \tau_{\text{res}} = \gamma \frac{r}{2} i$$

Non sono uguali moto laminare e moto turbolento, ma hanno caratteristiche in comune



$$\tau_0 = \gamma \frac{R}{2} i = \gamma R i$$



Globalemente le cose non sono lineari, vicino a parete  $\tau_{\text{visc}}$  ha ruolo

RIPASSO

09/11/11

$$\gamma \frac{r}{2} i = -\mu \frac{d^2 U}{dr^2} + \rho \overline{u'v'}$$

Ricavato da qst equazione  $U = U(r)$  moto parabolico

$$\frac{d^2 U}{dr^2} = \frac{\gamma r i}{2\mu} + \overline{\rho u'v'}$$

nel moto laminare non c'è qst termine

laminare



$$U = -\frac{\gamma i}{2\mu} \frac{r^2}{2} + \int_0^r \rho \overline{u'v'} dr + C$$

non so in grado di far integrale. Non so trovare  $f(r) = \overline{u'v'}$

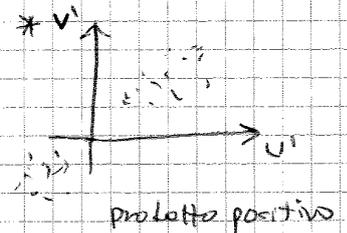
Come trovare Costante di integrazione?

Deve scendere che per

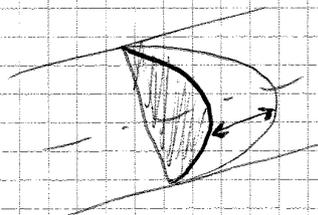
$$r = R = \frac{D}{2} \rightarrow U = 0$$

$$U = \frac{\gamma i}{4\mu} \left[ \frac{D^2}{4} - r^2 \right] - \int_r^{D/2} \rho \overline{u'v'} dr$$

integrando parabolico  
profilo di velocità?  
termine positivo \*



Profilo non so come è fatto ma sicuro sta sotto la parabola



A parità di parametri, profilo di velocità medio del moto turbolento è sempre minore dell'intensità di moto laminare. Se spesso con i fatti profilo del m.t. allora sopra come sono le correlazioni

A parità di tutti i parametri,  $Q_{\text{turbolento}} < Q_{\text{laminare}}$



DISSIPAZIONE DI E maggiore con turbolenza

moto laminare

$$\nu = \frac{1}{32} \frac{\gamma L}{\mu} D^2 \rightarrow i = \frac{32 \mu U}{\gamma D^2}$$

$$\lambda = \frac{2g D i}{U^2} = \frac{2g D}{U^2} \cdot \frac{32 \mu U}{\gamma D^2} = 64 \frac{\mu}{\gamma D} \text{Re}$$

sezione circolare

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}$$

In scala decimale IPERBOLE

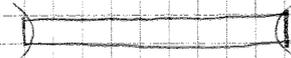
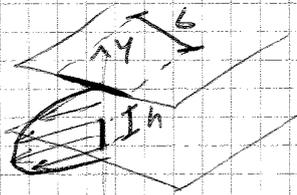
In scala log. RETTA

Moto laminare non risente della scabrezza, vince viscosità

$$\mu \rightarrow \lambda$$

Fino ad ora, corrente circolare

On flusso all'interno di sezione rettangolare molto estesa



Sezione rettangolare estesa  $\rightarrow$  a parità di area max perimetro

a parità di perimetro, min area

Tutte le sezioni esistenti (triangoli...) sono in mezzo tra sezione con sezione circolare (max area, min per.) e sezione rett. lunga

sezione circ.  $\text{Re} = \frac{U D}{\nu} = \frac{U 4 R}{\nu}$

$$R = \frac{S}{P} = \frac{\pi D^2/4}{\pi D} = \frac{D}{4}$$

In generale, a qualsiasi sezione

$D = 4 R$  valore qualsiasi sezione

$$\text{Re} = \frac{U 4 R}{\nu} (*)$$

$$\lambda = \frac{2g D i}{U^2} = \frac{2g 4 R i}{U^2}$$

sezione rett. lunga

$$v(y) = \frac{\gamma}{2\mu} (h^2 - y^2)$$

$$v_{\max}|_{y=0} = \frac{\gamma h^2}{2\mu}$$

$$\bar{v}_{\text{medio}} = \frac{\gamma h^2}{2\mu} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\gamma h^2}{3\mu} = \frac{\gamma R^2}{3\mu}$$

$$R = \frac{b 2h}{2b} = h$$

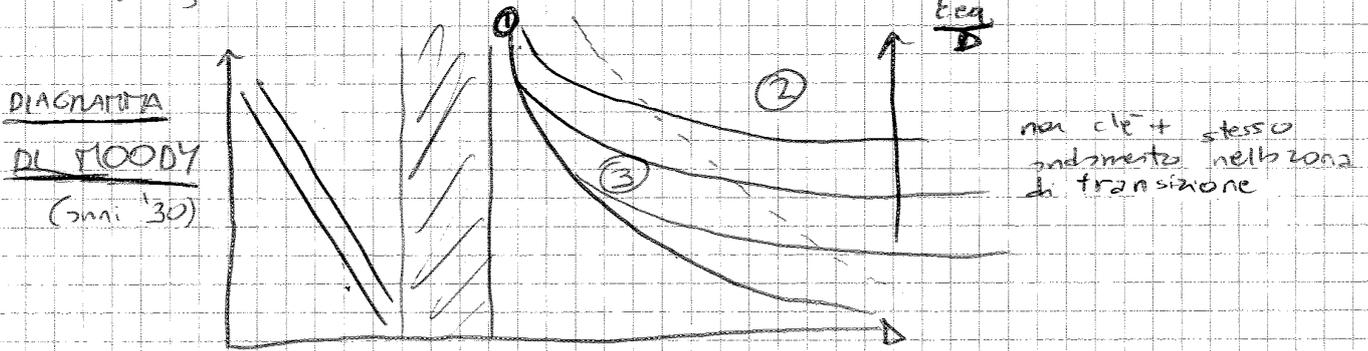
$$i = \frac{3 \mu U}{\gamma R^2}$$

$$\lambda = \frac{2g 4 R i}{U^2} = \frac{96}{\text{Re}} (*) \quad \boxed{\frac{96}{\text{Re}}} \text{ sezione rett. lunga}$$

09/11/14

Viene inventato Equivalente  $E_{eq}$  (numero) che è valore della scabrezza di Nikuradse che darebbe stessa resistenza della parete di altezza 2 mm

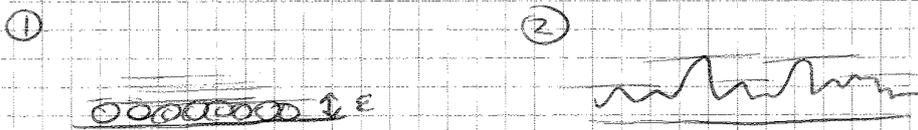
Il diagramma allora cambia.



Per valori bassi di  $Re$  stesso struttura di prima

Cambia la zona di transizione Perché?

Perché prima incremento di  $E$  era costante, ora in il secondo profilo + irregolare (nucleo + sotto retto > scabrezza totale ma passaggio graduale



$E_{eq} =$  SCABREZZA EQUIVALENTE IN SABBIA

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}}$$

① mi descrive grafico di parete liscia

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log \frac{3.71 D}{E}$$

② PARETE SCABRA

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left( \frac{E}{3.71 D} + \frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}} \right)$$

③

con  $E=0 \rightarrow$  ①

con  $E \rightarrow \infty \rightarrow$  ②

FORMULA DI COLEBROOK e WHITE

Laminare ( $Re \leq 2000$ )

$$\lambda = \frac{64}{Re} \Rightarrow \frac{2g D_1}{U^2} = \frac{C V}{U D}$$

$$C \propto \frac{U}{D^2} \rightarrow \text{notare}$$

$$U = \frac{Q}{\pi R} \Rightarrow C \propto \frac{Q}{\sqrt{2} D^2} \propto \frac{Q}{D^4} \quad \text{perché } \pi R D$$

N.B. Enorme sensibilità del diametro  $\rightarrow$  non lineare geometrico

Bazin - parete > sup. nuora  
 Kutter - ambito industriale

A seconda del materiale usato si usa una formula o l'altra

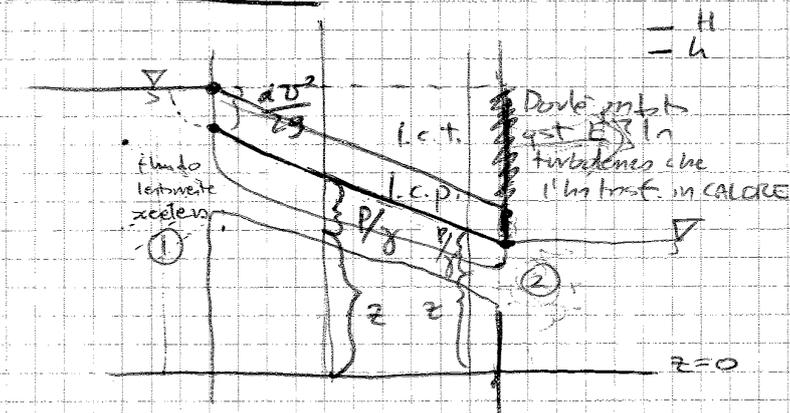
A seconda della formula che uso risultato diverso → GRADO DI SOGGETTIVITÀ  
IN X

M.B. Tutte qst formule solo per zona di parete SCABRA!

chezy  
 $U = X \sqrt{Ri} \rightarrow \boxed{D = \sqrt{2} X \sqrt{Ri}}$

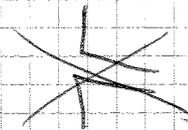
Darcy  $C = \beta \frac{Q^2}{D^5}$  solo per parete scabra

$\beta = \beta (D^{-0.33})$  → se senso qst di potenza aumentando  $D^{+0.33}$  diventa un costante



2 scabro collegati con condotto a diametro costante

All'ingresso del condotto c'è una svasatura che crea un invito all'entrata (?)



Th momento della linea che a dice come var. energia totale (H) e poi h (circa prima)

- ① All'ingresso del condotto no dissipazioni (moto lento)  
 Allora  $H =$  energia che entra dentro scabro: 0

Primo punto linee energia totale = superficie libera

$$H = h + \frac{\alpha U^2}{2g}$$

Quando ero in scabro e quando sono in condotto energia totale è la stessa H ma nel scabro c'è h + termine con pressione mentre in condotto h e termine cinetico  $\frac{\alpha U^2}{2g}$  (che aumenta)

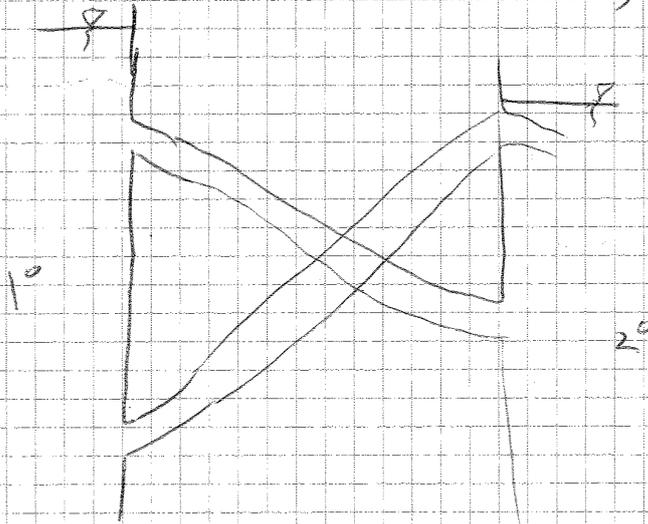
- ② Al fondo condotto getto che va lento e poi si ferma  
 Al termine del getto H sarà quella del 2° scabro

Se  $L$  cresce, deve scendere  $p$  (visto che nel 1° e 2° caso visto  $Z_1$  e  $Z_2$  erano le stesse, stessi serbatoi)

Quindi nel 2° caso  $Q$  minore  
ma le linee usate prima hanno stesso andamento.

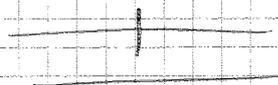
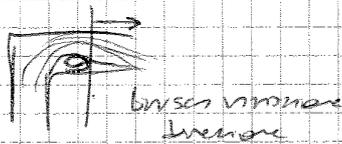
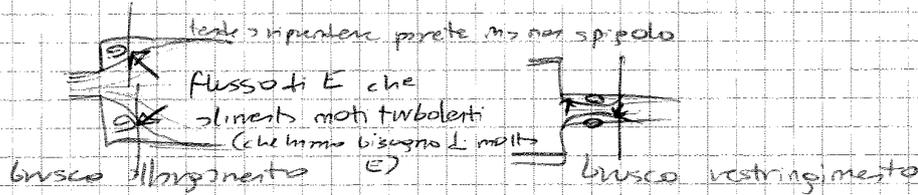
$Q$  minore  $\rightarrow$  termine cinetico  $\frac{\rho v^2}{2}$  + basso

OSS.



Sono convertiti in pressione, non cambia se rivolgo verso basso o verso alto. (stupido chi dice che è meglio metterlo in discesa)  
scambio  $Z_1$  o  $Z_2$  allora si che cambia tutto

On voglio modificare formule di prima, modificando termini geometrici (punte, ...)



solido che entra nel condotto

Cosa in comune? Formazione di strutture vorticosi

E quindi da questo punto in cui prelievo localizzato di  $E$  dalla corrente

Fino ad ora abbiamo visto dissipazioni distribuite (lungo condotto tra 1° e 2° serbatoio).

Se ho queste discontinuità geom. anche DISSIPAZIONI LOCALIZZATE  
 $\hookrightarrow Q$  diminuisce

$$|\bar{P}_e| = \rho g Q \sum_{i=1}^n \Delta h_i \quad \text{ovvero perdita}$$

DOMANDA: COME HA TROVATO ANDAMENTO (x2) DELLE PRESSIONI?

$$\begin{aligned} (1) \quad & -\gamma \Omega (z_2 - z_1) + (p_1 - p_2) \Omega + \rho Q (U_1 - U_2) = 0 \\ & \Omega (z_1 - z_2) + \left( \frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} \right) \Omega + \frac{Q}{g} (U_1 - U_2) = 0 \\ & \Omega \left[ \left( z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left( z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) \right] = \frac{Q}{g} (U_2 - U_1) \end{aligned}$$

$\Delta h$   $\rightarrow$  cambio dell'altezza  $< 0$  perché sezione cresta  
 $\Delta h < 0$

ovvero carico piezometrico SALE (come nel disegno)

BRUSCO ALLARGAMENTO  $\rightarrow$  termine cinetico scende sì perché h sale sì perché H scende

$$\Delta H = \Delta h + \frac{\alpha U_1^2}{2g} - \frac{\alpha U_2^2}{2g} = \frac{Q}{g \cdot \Omega} (U_2 - U_1) + \frac{\alpha}{2g} (U_1^2 - U_2^2)$$

$$Q = \Omega U_2 \rightarrow \frac{U_2}{g} (U_2 - U_1) + \frac{\alpha}{2g} (U_1^2 - U_2^2)$$

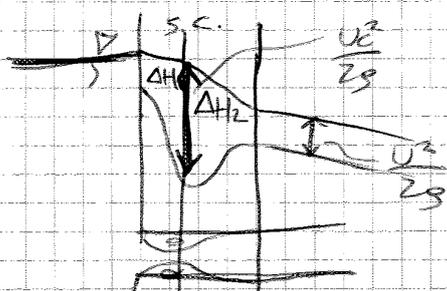
il termine costo di questo moto ... si allontana (RIPASSO)

$$\frac{(U_1 - U_2)^2}{2g} = \Delta H$$

Dissipazione e pari al termine cinetico della differenza delle velocità

Qst discorso vale per tutte le discontinuità geom. (perché in tutte c'è allargamento della corrente)

Con gli studi sperimentali è stato comprovato che con ad. di livello di regime il rispetto è



$$S.C. - \Delta H_1$$

$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2$$

inalterate

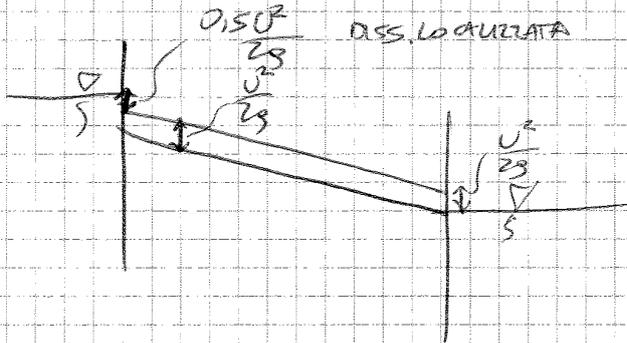
$$C_v = 0,99$$

Potrei avere depressione locale che accumula  $\rightarrow$  Tambiente  $\rightarrow$  vado bollicine  
 Qst zone perché imbocca non ricordate  
 Qst bollicine batterio contro pareti (zone chimici + zone meccanico)  $\rightarrow$  ROTTURE

Bollicine spesso implodono (perché pressione ridotta)  $\rightarrow$  picco di T (miglior di gradi)

che rompe pareti cellulari e  
 distrugge fattori interni

$\downarrow$   
 STUDIO X DISINFETTARE ACQUA



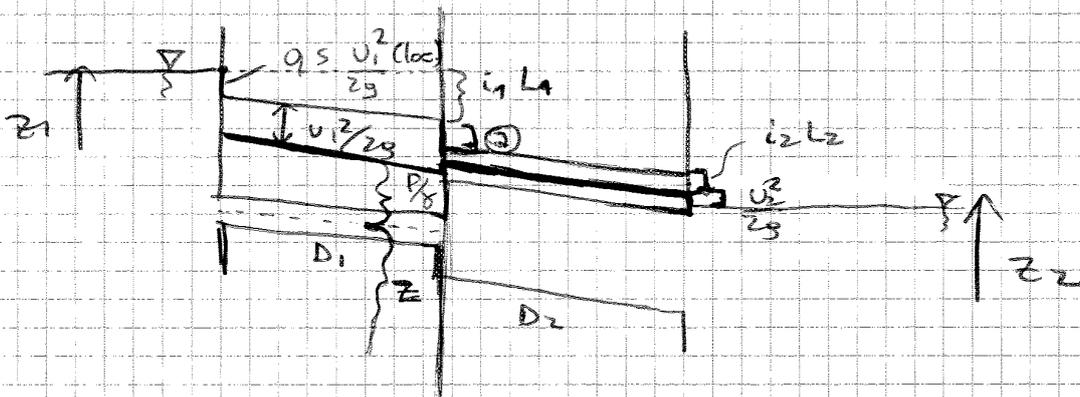
Quindi tenendo conto di diss. localizzata

$$z_1 - \left( z_2 + \frac{U^2}{2g} \right) = iL + 0.5 \frac{U^2}{2g}$$

$\uparrow$  DISS. DISTR.                       $\uparrow$  DISS. LOC.

11/11/15

Possiamo trovare h.c.t. h.c.p. anche con discontinuità geom.



$$\textcircled{2} = \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g}$$

$$z_1 - \left( z_2 + \frac{U^2}{2g} \right) = 0.5 \frac{U_1^2}{2g} + iL + \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g} + i_2 L_2$$

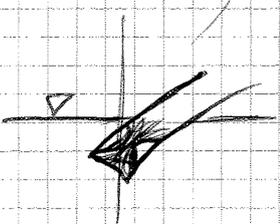
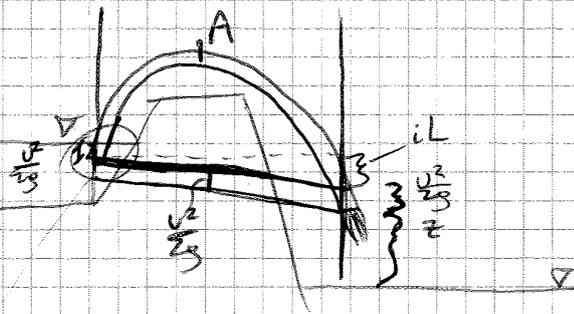
$$U = \frac{Q}{\sqrt{D_1}} \quad U_2 = \frac{Q}{\sqrt{D_2}}$$

sostituisco  $\rightarrow$  unico eq in Q di 2° grado  $\rightarrow$  2 soluzioni

Se entrambe usi positive  $\rightarrow$  problema

Ma vengono sempre 1 positivo e 1 negativo

Se noto dal disegno punto di punta ad energia maggiore



imbocco non necessitano anzi se ripasso appunti passati

Avrà  $\Delta H = \frac{U^2}{2g}$  e utilizzo  $C_c \approx 0,5$

Quindi non c'è bisogno di pompa, avviene in modo naturale in dove essere spinto all'inizio (chiuso condotto al fondo e riempito condotto al punto A)

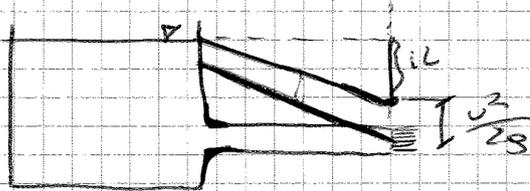
QST vale x fluidi incomprimibili

Non x fluidi bifase (ex. acqua e bolle d'aria) → non vale quella che diciamo

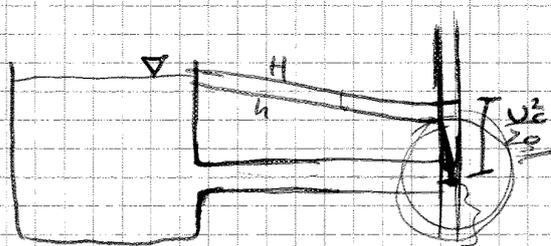
Tutto lo condotto sb sopra l.c.p. → DEPRESSIONE

Quindi se faccio forza, non entra acqua ma si

tubo che fuoriesce acqua



Condotta davanti al tubo (giroscopo)



~~non~~



DISS. LOC.

Parte dell'energia che prima giocavo in  $iL$ , ora una parte finisce qua

Di nuovo perdono motore diminuisce, meno  $E$  usata x dissipazione distribuita

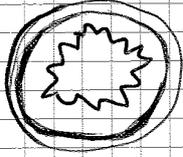
Scende  $Q$ , scende termin antico

Dal disegno, vediamo che  $\frac{u^2}{2g}$  con tubo sverto!

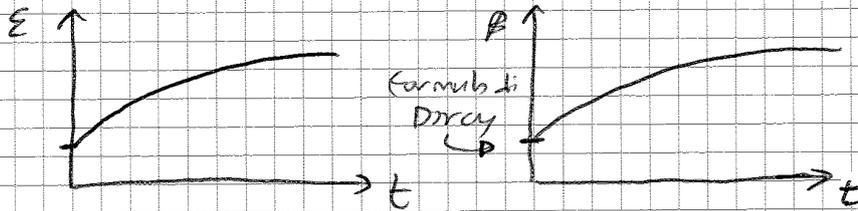
Cioè partata dentro tubo diminuisce ma velocità con cui esce acqua sverto ma se la partata che esce è molto minore

H infatti dove c'è tubo resti cost perché se accelerazione ~~non~~ non

$\beta$  dipende dal materiale ma non è costante nel tempo (coeff. scabrezza di Darcy)  
 Quando succede disastro negli acquedotti (Torino, condotte di 1 secolo fa)



Quando messa, liscia  
 Quando tolta, "DENTI DI CANE" che hanno cambiato diametro + scabrezza



se  $\beta$  cresce,  $i$  cresce, pago di + la bolletta perché serve + energia (non perché manca acqua)

### PROGETTO IMPIANTO

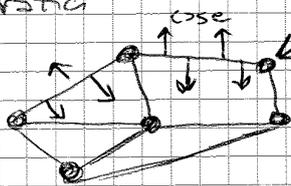
NOTE:  $Q$ ,  $\beta$ ,  $\Delta H$  (quello che voglio)

Incognite: quale diametro deve avere?

BILANCIO ENERGETICO  $\rightarrow D = 118 \text{ mm}$  (ex)

Ma non sempre è quello che voglio, o 100 mm o 125 mm  
 stiamo entrando in capitolo molto + pratico, da ingegnere

Problemi pratici



acqua arriva da molti fiumi, ...

Impianti sono fatti a moglie, è una rete di condotte

### PROGETTO RETE

Nota: utenze ( $Q, h$ , per ogni utenza), topologia (forma rete), punti di approvv., materiale condotta

Incognite: ①  $D$ , ②  $h$  di tutti gli impianti (rami) (CIELO PIEZOMETRICO)  $D, h$   
 ③  $Q$

In fase di VERIFICA

Nota: utenze, topografia, approvv., materiale,  $D$  (assegnato da committente)

Incognite: ①  $h$ , ②  $Q$

+ incognite in fase di progetto che in fase di verifica (diametro noto)

Utenze  $\rightarrow$  parametri che variano nel tempo (estate, inverno, orario, ...)

- ① VARIAZIONI DETERMINISTICHE con scale diverse (giornaliera, mensile, ...)
- ② VARIAZIONI STOCASTICHE (casuali) magari a volte voglio curare alle

MESSINA → caso su condotta principale

Rete migliori + complessi di rete ad albero, non esplicito di disegno

to dare una sequa, lo problemi o capire come giro acqua

Poi sui vari rami ho i prelevi dalle utenze

Come semplificarlo



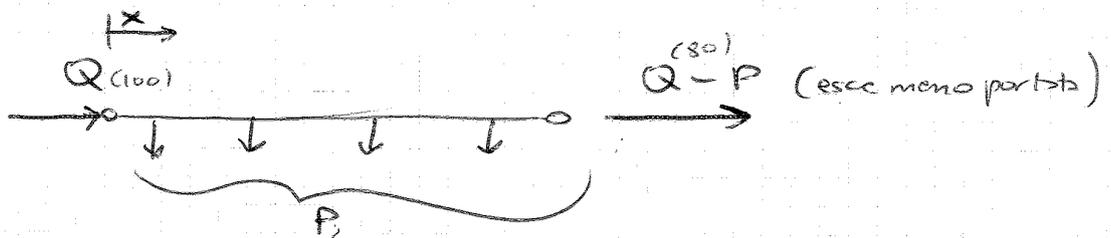
Voglio trovare modo x non vedere recipienti diffusi in concentrati di nodi

Inoltre voglio che salto di carico da nodo iniziale a finale sia sempre lo

stesso → lo qualsiasi nodo esterno vedo sempre lo stesso salto in quel ramo

Voglio quindi sost. <sup>uno</sup> ~~modo~~ con <sup>uno</sup> ~~modo~~ a portata costante in con salto di carico

cost.



Immaginando P uniforme (trascuro di differenze)

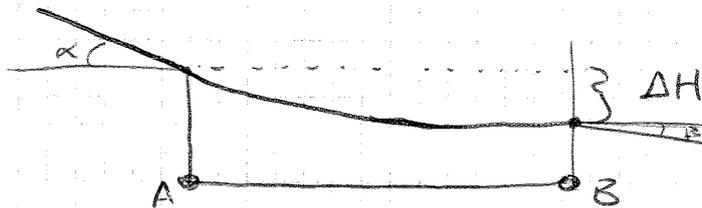
$$q = \frac{P}{L} \times \text{ogni unita di lunghezza} \quad \left(\frac{20}{L}\right)$$

$$x \rightarrow q \cdot x \parallel Q - qx$$

portata che sta passando in un generico x

Alla fine  $Q - ql = Q - P$  ok

Come varia LCP?



Esco con pendenza inferiore perché portata è diminuita

Angolo di pendenza minore (legato a portata)

$$\beta < \alpha$$

$$i_A = \beta \cdot Q^2 D^{-5}$$

Darcy

$$i_A > i_B$$

$$i_B = \beta (Q - P)^2 D^{-5}$$

↳ curva in mezzo? Se fosse retta, portata dovrebbe essere costante

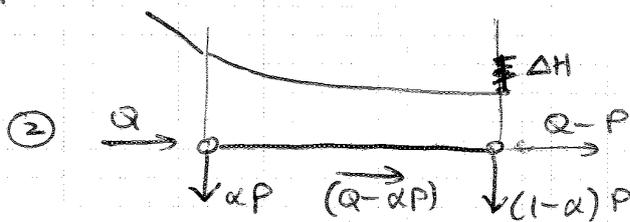
CURVA CON CONCAVITA' IN ALTO, portata sta diminuendo → curva va verso basso

vogliamo passare a



visto un (CASO REALE)

a



in cui tutte le perdite vengono assorbiti ai nodi

(CASO SEMPLIFICATO)

↳ PORTATA COSTANTE

Entrata ed esce sempre Q e Q-P

Ma voglio un in cui Q cambia ~~secondo~~ continuamente

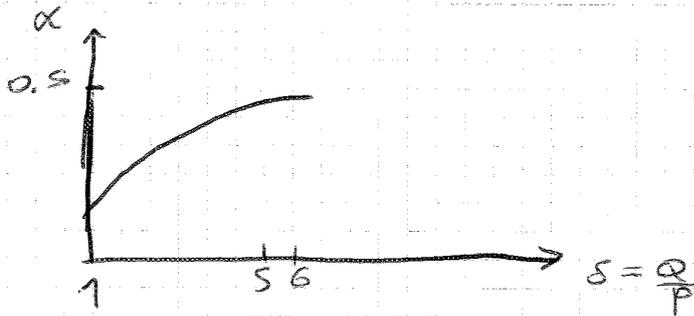
Voglio semplificare ma avere stesso dissipazione

Così voglio SEMPLIFICARE il + possibile senza perdere risultati e info

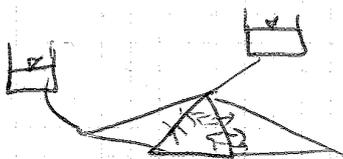
→ Trovare  $\alpha$  ←

$$\Delta H = \underbrace{\beta D^{-n} L}_{(1)} [Q^2 + \frac{1}{3} P^2 - \alpha P] = \underbrace{\beta D^{-n} L}_{(2)} (Q - \alpha P)^2$$

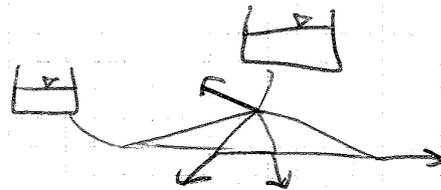
$\alpha = \text{incognita}$



Quando  $\frac{Q}{P} \approx 5/6 \rightarrow \alpha \text{ tende a } 0.5$



Portata cambia profondamente



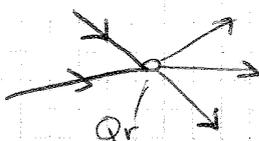
Portata cambia di poco

Come faccio? Mantengo cielo piezometrico (conchi ai nodi) e partite ai nodi

Incognite:  $Q_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )     $m$  rami  
 $h_j = H_j$  ( $j = 1, \dots, n$ )     $n$  nodi

Voglio sapere portate in tutti i rami e conchi in tutti i nodi

assumo io il verso dei rami inizialmente



$$\sum Q_e = \sum Q_u + Q_r$$

Scrivo n equazioni di qst tipo

Non è altro che CONSERVAZIONE PORTATA

AI NODI