



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1876A -

ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Barbero Alessandra

MATERIA: Meccanica delle macchine, Teoria + schemi - prof.
Eula

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

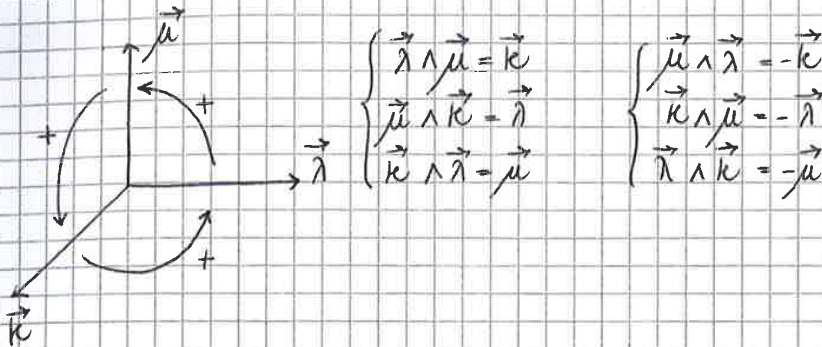
**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

CINEMATICA

Dato un vettore che ruota nel piano con velocità ω è sempre possibile definire la relazione $\frac{d(\vec{r}\lambda)}{dt} = \omega \vec{k} \wedge (\vec{r}\lambda)$ $\vec{\lambda}$: verso del vettore

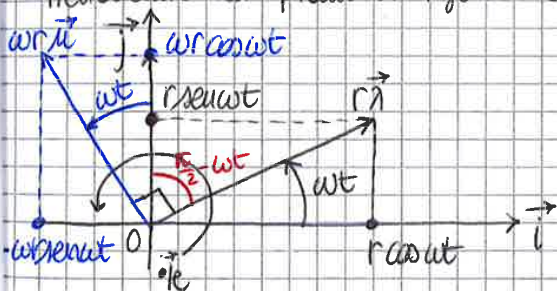
Relazioni importanti perché la derivata della posizione è la sua velocità, in questo modo calcoliamo la velocità tramite dei prodotti esterni, (così noi abbiamo derivati per calcolare che spesso sono molto complicati)

DIMOSTRAZIONE



Consideriamo vettori rotanti con velocità ω

Prendiamo un piano di riferimento



Il secondo vettore è ortogonale al primo e ha modulo moltiplicato per ω . Questo secondo vettore ha le proiezioni che sono le derivate delle proiezioni del primo

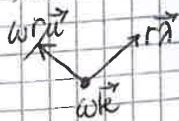
$$\frac{d(\vec{r}\lambda)}{dt} = \omega r \vec{\mu} = \omega r [\vec{k} \wedge \vec{\lambda}] = \omega \vec{k} \wedge (\vec{r}\lambda)$$

\Rightarrow vale anche sul versore (cioè se $r=1$) $\frac{d\vec{\lambda}}{dt} = \omega \vec{k} \wedge \vec{\lambda}$

$$\vec{\mu} = \vec{k} \wedge \vec{\lambda}$$

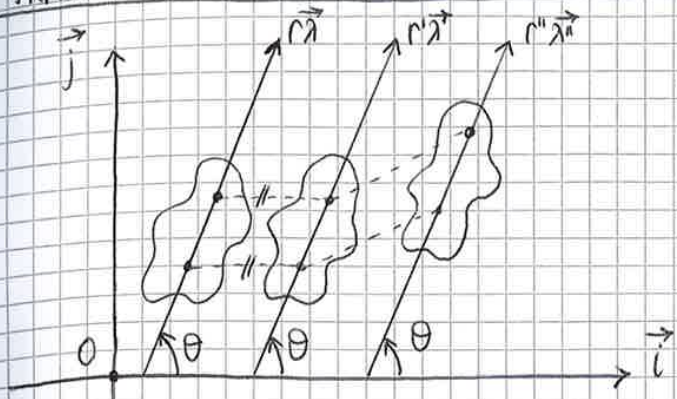
Fare la derivata di un vettore rotante nel piano, graficamente corrisponde a prendere un secondo vettore ruotato di 90° e con modulo moltiplicato per ω quando vorremo calcolare la velocità fare la derivata della posizione di un vettore e utilizzeremo questo metodo

Torna



TRASLAZIONE NEL PIANO DEL CORPO RIGIDO

gli



$$\theta = \text{cost}$$

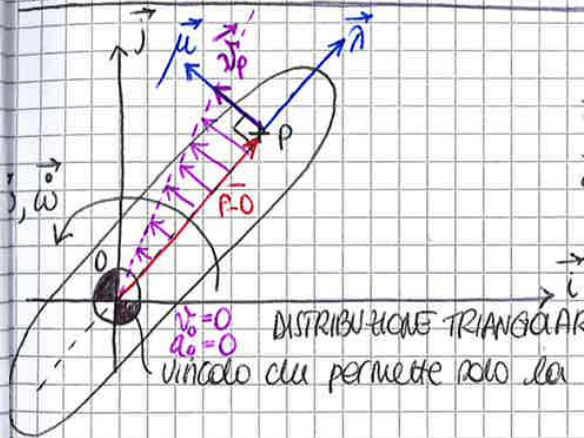
$$\left. \begin{aligned} \omega &= 0 \\ \dot{\omega} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{non c'è rotazione}$$

$$\vec{v}_A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{AA'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{BB'}{\Delta t} = \vec{v}_B$$

caratteristiche del moto traslatorio: $\vec{v}_A = \vec{v}_B$ (velocità)
 $\vec{a}_A = \vec{a}_B$ (accelerazione)

enti

ROTAZIONE INTORNO AD UN ASSE FISSO NEL PIANO



$$PO = r = \text{cost}$$

O: origine vettore Posizioni e centro di rotazione

$$\begin{aligned} \vec{v}_p &=? \\ \vec{a}_p &=? \end{aligned}$$

$$\vec{v}_p = \frac{d(\vec{PO})}{dt} = \frac{d(r\hat{\lambda})}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{\lambda} + r\frac{d\hat{\lambda}}{dt} = r[\omega\vec{k} \wedge \hat{\lambda}] = \boxed{\omega\vec{k} \wedge r\hat{\lambda} = \vec{v}_p}$$

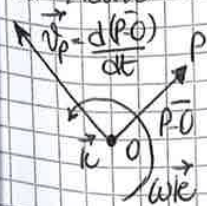
0 (perché r=cost)

$$\vec{v}_p = \omega\vec{k} \wedge (\vec{P}-\vec{O})$$

→ i tre termini costituiscono una terna

$$\begin{aligned} \vec{v}_p &\perp \vec{k} \text{ appartiene al piano} \\ \vec{v}_p &\perp \vec{PO} \end{aligned}$$

\vec{v}_p è la derivata di \vec{PO} quindi il vettore derivato è ruotato di 90° rispetto a quello iniziale nel senso di ω . (ricordo le regole grafiche che abbiamo visto prima)



$$\vec{v}_p = \begin{cases} \text{modulo: } v_p = \omega PO \\ \text{direzione: } \perp \vec{PO} \\ \text{verso: } (\vec{\omega})^+ \end{cases}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B} = \boxed{\vec{a}_B + \vec{a}_{A/B_N} + \vec{a}_{A/B_T}} \quad \text{TEOREMA DI RIVALS}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B - \omega^2 [\vec{A-B}] + \dot{\omega} \vec{k} \wedge (\vec{A-B})$$

1) $\omega = 0$
 $\dot{\omega} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_A = \vec{v}_B \\ \vec{a}_A = \vec{a}_B \end{cases} \quad \text{TRASLAZIONE}$

2) $\vec{v}_B = 0$
 $\vec{a}_B = 0 \Rightarrow B \text{ \u00c9 un punto fisso} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_A = \vec{v}_{A/B} = \omega \vec{k} \wedge (\vec{A-B}) \\ \vec{a}_A = -\omega^2 (\vec{A-B}) + \dot{\omega} \vec{k} \wedge (\vec{A-B}) \end{cases}$

 ROTAZIONE PURA
 INTORNO A UN PUNTO FISSO

In questo modo non abbiamo bisogno di fissare un sistema di riferimento ma utilizziamo la posizione del punto

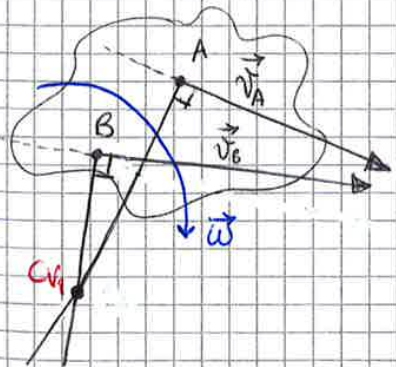
6/3/15

Metodo alternativo per il calcolo delle velocità: **CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE** (centro delle velocità)

$\vec{v}_{C_v} = 0$: In ogni istante esiste un punto del corpo rigido in cui la velocità \u00e9 nulla (o del piano)

CASI PARTICOLARI:

1) \vec{v}_A, \vec{v}_B $\vec{v}_A \not\parallel \vec{v}_B$: *due direzioni*

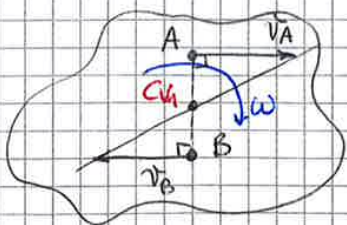


$$\vec{v}_A = \vec{v}_{C_v} + \vec{v}_{A/C_v} = \boxed{\omega \vec{k} \wedge (\vec{A-C_v})}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{C_v} + \vec{v}_{B/C_v} = \boxed{\omega \vec{k} \wedge (\vec{B-C_v})}$$

2) $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_B$: *modulo, direzione, verso*

\vec{v}_A, \vec{v}_B *di verso* $\Rightarrow C_v$ *interno al segmento AB*



Per la formula fondamentale

$$\vec{v}_G = \frac{\vec{v}_{C_{v_1}}}{0} + \vec{v}_{G/C_{v_1}} = \vec{\omega} \wedge (\vec{G} - \vec{C}_{v_1})$$

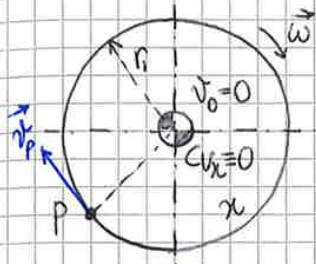
$$\vec{v}_H = \frac{\vec{v}_{C_{v_1}}}{0} + \vec{v}_{H/C_{v_1}} = \vec{\omega} \wedge (\vec{H} - \vec{C}_{v_1})$$

$$\vec{v}_P = \frac{\vec{v}_{C_{v_1}}}{0} + \vec{v}_{P/C_{v_1}} = \vec{\omega} \wedge (\vec{P} - \vec{C}_{v_1})$$

$$\vec{v}_E = \frac{\vec{v}_{C_{v_1}}}{0} + \vec{v}_{E/C_{v_1}} = \vec{\omega} \wedge (\vec{E} - \vec{C}_{v_1})$$

{ modulo $v_p = \omega (P - C_{v_1})$
 direzione $\perp \vec{P} - \vec{C}_{v_1}$
 verso $(\vec{\omega})$

Da non confondere con:



$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{v}_{P/O} = \omega \wedge (\vec{P} - \vec{O})$$

{ modulo ωPO
 direzione $\perp PO$
 verso $(\vec{\omega})$

Tutto quello che abbiamo visto è stato deciso da una CONFIGURAZIONE ISTANTANEA

TIPI DI VINCOLI



CARREUO

Gradi di libertà

2

Moti permessi

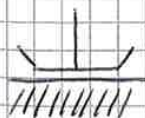


CERNIERA

1



stato
invariante



PATINO

1

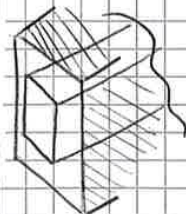


INCASTRO

0

zero

patino: guida prismatica che permette solo traslazioni



scatto

2) GdL $\kappa = 3(m-1) - 2C_1 - C_2$

$m = 4$ (compreso il telaio)

$C_1 = 4$ (O, A, B, C)

$C_2 = 0$

$\Rightarrow \kappa = 1$ Infatti abbiamo fornito solo la ω_1 quindi un solo motore



AO:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{v}_{A/O} = \omega_1 \vec{k} \wedge (\vec{AO})$$

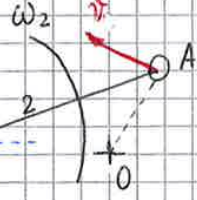
$$\omega_1 = \frac{2\pi N_1}{60} = 157,07 \text{ rad/s}$$

modulo $\omega_1 AO = v_A = 38,98 \text{ m/s}$
 direzione $\perp AO$
 verso (ω_1)

a

minimo

AB:



conosciamo la direzione della \vec{v}_B

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} = \vec{v}_A + \omega_2 \vec{k} \wedge (\vec{BA})$$

M	?	?	$\omega_2 BA = ?$
D	?	orizzontale	$\perp BA$
V	?	rotazione	(ω_2) ?

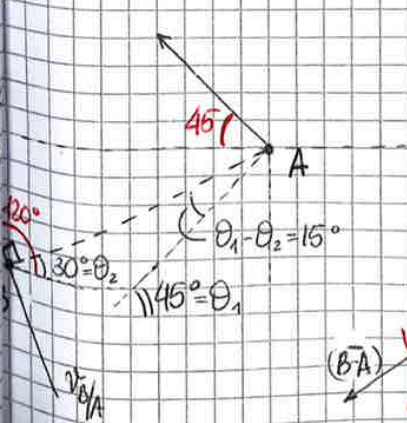
modulo
 direzione
 verso

\Rightarrow minimo numero di dati noti

1 velocità nota \neq
 le altre due note almeno in direzione

devo sommare ① e ② quindi i due vettori devono essere in serie. Posso mettere il verso a ②
 ③ è la risultante

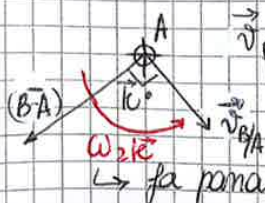
e del m
 un po' più



$$\frac{v_A}{\sin 120^\circ} = \frac{v_{B/A}}{\sin 45^\circ} \Rightarrow v_{B/A} = 26,93 \text{ m/s}$$

$$\frac{v_A}{\sin 120^\circ} = \frac{v_B}{\sin 15^\circ} \Rightarrow v_B = 9,85 \text{ m/s}$$

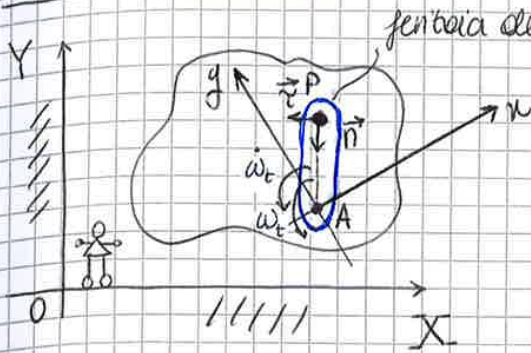
$$\vec{v}_{B/A} = \omega_2 \vec{k} \wedge (\vec{BA}) \Rightarrow \omega_2 = \frac{v_{B/A}}{AB} = 44,15 \text{ rad/s}$$



\hookrightarrow fa partire dal vettore perpendicolare al vettore velocità

12/3/15

MOTO COMPOSTO



fenestra dentro della quale il punto P si può muovere

Moto composto = cioè un corpo dentro ad un corpo rigido che si può muovere

Moto semplice: le distanze sono costanti (si parla solo di corpi rigidi con vincoli esterni)

Moto composto: le distanze/lunghezze che cambiano DENTRO il sistema
Ad esempio qua $PA \neq \text{cost}$

1. RELATIVO: moto di P nel corpo rigido ($PA \neq \text{cost}$)
2. DI TRASCINAMENTO: moto di P con $[A; x; y]$ (moto del punto bloccato come nei forni solidali)
3. ASSOLUTO: composizione dei moti 1 e 2; quello che vede un osservatore su OXY

numero di rotazioni

FORMULE DEL MOTO COMPOSTO

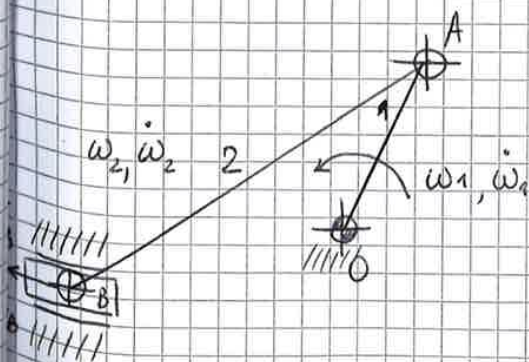
$$\vec{v}_{P_{\text{ASS}}} = \vec{v}_{P_{\text{rel}}} + \vec{v}_{P_{\text{Tr}}} \quad (\text{velocità})$$

triangolo

$$\vec{a}_{P_{\text{ASS}}} = \vec{a}_{P_{\text{rel}}} + \vec{a}_{P_{\text{Tr}}} + \vec{a}_{Co} \quad (\text{accelerazione})$$

$$\vec{a}_{Co} = 2\omega_{\text{Tr}} \vec{k} \wedge \vec{v}_{P_{\text{rel}}} \quad \text{ACCELERAZIONE COMPLEMENTARE o DI CORIOLIS}$$

SISTEMA BIELLA MANOVELLA



AO = cost
AB = cost

È un moto semplice quindi applico semplicemente il teorema fondamentale e il teorema di RIVALS.

DEPO
 ② $\vec{v}_P_{ASS} = \vec{v}_P_{rel} + \vec{v}_P_{Tr}$

$\vec{v}_P_{rel} = \pm v_{P_{rel}} \vec{\lambda}$ (traslazione)

$\vec{v}_P_{Tr} = \frac{v_{P_{Tr}}}{0} + \vec{v}_{P/O_1} = \omega_1 \vec{k} \wedge (\vec{P}-\vec{O}_1)$ (rotazione)

rt
 $\vec{v}_P_{ASS} = \pm v_{P_{rel}} \vec{\lambda} + [\omega_1 \vec{k} \wedge (\vec{P}-\vec{O}_1)]$

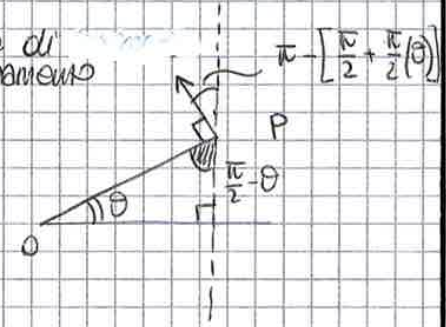
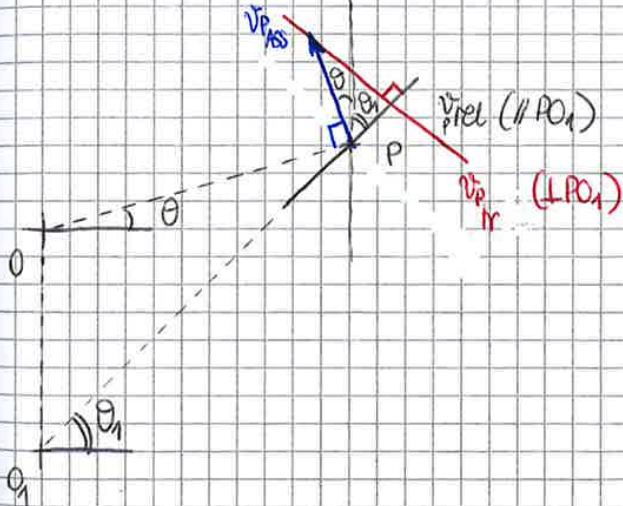
$O_1 P = 0,6$

$\omega_1 \vec{k} \wedge (\vec{P}-\vec{O}_1)$

Nota (calcolata prima)
 di rot. lungo $\vec{\lambda}$
 $\perp PO_1$
 $\vec{\omega}_1$
 $\omega_1 PO_1 = ?$

A questo punto traccio le direzioni delle velocità relative e di trascorramento

1) - 2.2 -

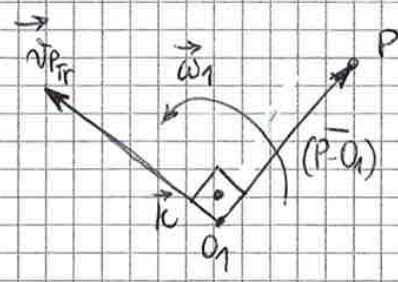


armatura

$v_{P_{rel}} = v_{P_{ASS}} \cos(\theta + \theta_1) = 24,91 \text{ m/s}$

$v_{P_{Tr}} = v_{P_{ASS}} \sin(\theta + \theta_1) = 34,93 \text{ m/s}$

da O_1
 (all. di P)
 $\omega_1 = \frac{v_{P_{Tr}}}{O_1 P} = 63,22 \text{ rad/s}$



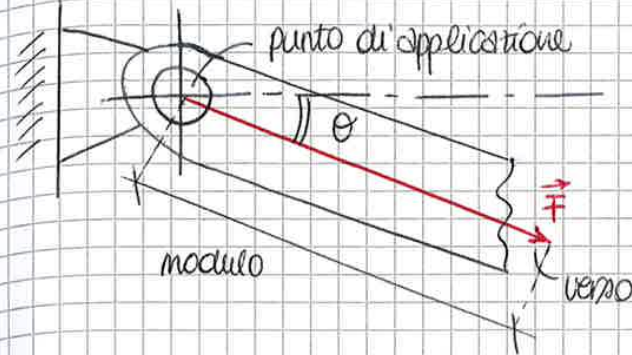
ACCELERAZIONI

$\vec{a}_{P_{ASS}} = \vec{a}_{P_{rel}} + \vec{a}_{P_{Tr}} + \vec{a}_{co}$

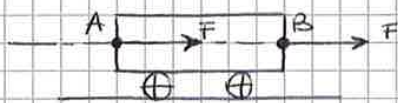
$\vec{a}_{P_{rel}} = \pm a_{P_{rel}} \vec{\lambda}$
 $\vec{a}_{P_{Tr}} = \vec{a}_{O_1} + \vec{a}_{P/O_1} = \omega_1 \vec{k} \wedge (\vec{P}-\vec{O}_1) + \omega_1^2 (\vec{P}-\vec{O}_1) = \vec{a}_{P/O_1 tg} + \vec{a}_{P/O_1 n}$

13/3/15

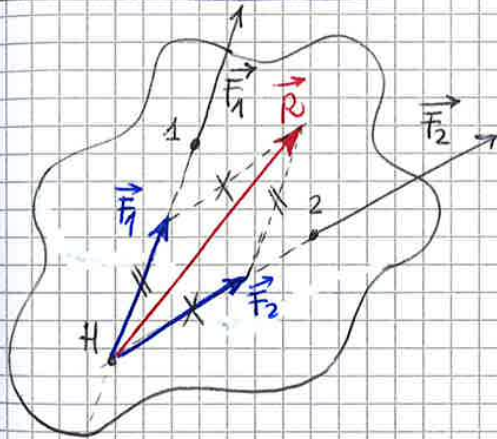
FORZA



nei corpi rigidi esiste il **PRINCIPIO DI TRASMISSIBILITÀ** (traslare la forza lungo la stessa retta d'azione)



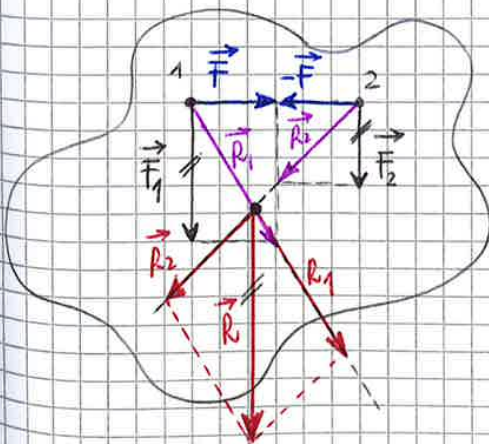
COMPOSIZIONE DI VETTORI



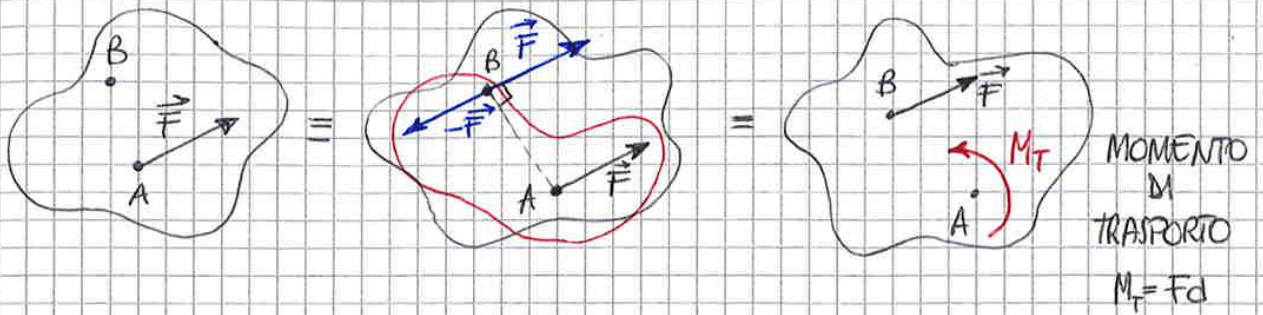
$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

COMPOSIZIONE DI FORZE PARALLELE $\vec{F}_{1,2} \parallel$

regole
della
velocità



$= b\vec{F} \cdot \vec{k}$ TRASPORTO DI UNA FORZA (fuori dalla retta d'azione)



19/3/15

TIPI DI FORZE

- > FORZE CONCENTRATE
- > FORZE DISTRIBUITE
- > FORZE ESTERNE : forza peso e forze di inerzia
- > FORZE INTERNE : (quando separiamo i vari componenti di un oggetto in corrispondenza dei vincoli) reazioni vincolari (sono sempre incognite)

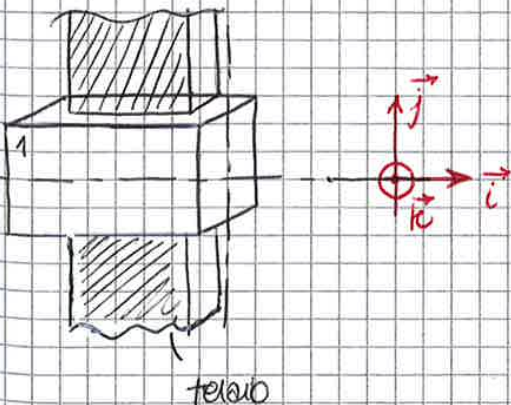
$|\vec{T}| = |\vec{F}|$

le $\vec{F} \parallel$

REAZIONI VINCOLARI DEI SISTEMI

vincoli \Rightarrow coppie cinematiche \Rightarrow moto relativo tra le parti che dipende dalla forma delle superfici

a) COPPIA PRISMATICA:



$$\begin{cases} v_x \neq 0 & \Rightarrow \text{unica possibilit\`a di movimento} \\ v_y = 0 \\ \omega_i = 0 \end{cases}$$

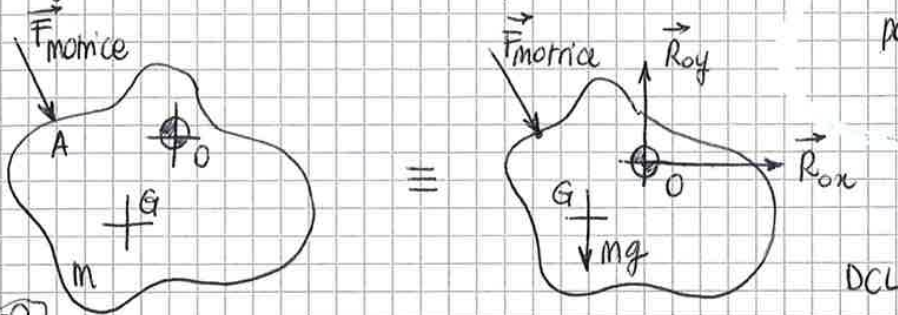
REAZIONI VINCOLARI (senza scritto!)

$$\begin{cases} R_x = 0 & \text{non c'è impedimento di moto lungo } x \\ R_y \neq 0 \\ M_i \neq 0 \end{cases}$$

Nelle direzioni dove è impedito il movimento nascono le reazioni vincolari

DCL : DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO

Diagramma che esprime tutte le forze interne ed esterne che agiscono su una parte del meccanismo



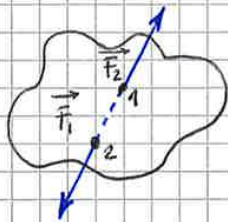
1 METODO

3 REGOLE GRAFICHE DEGLI EQUILIBRI

EQUILIBRIO $\left\{ \begin{array}{l} R_x = 0 \\ M_R = 0 \end{array} \right.$

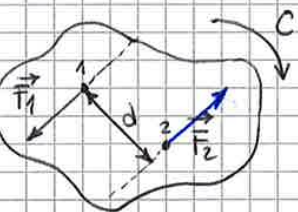
da non essere trascurati e trascurare il peso dei corpi rigidi

1) Corpo rigido soggetto a due forze :



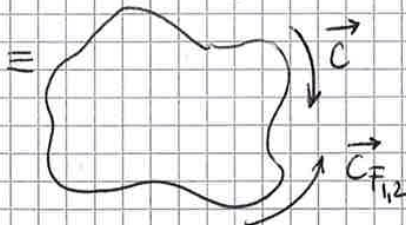
- M | $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$
- D | stessa retta d'azione
- v | verso opposto

2) Corpo rigido soggetto a due forze e una coppia :

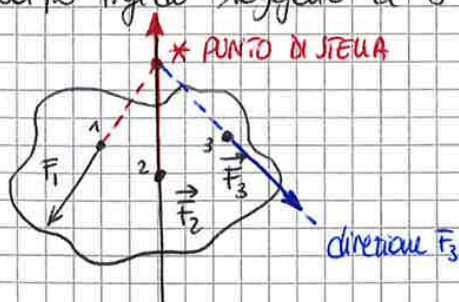


- M | $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$
- D | $\vec{F}_1 \parallel \vec{F}_2$
- v | \vec{F}_1 e \vec{F}_2 verso opposto

Equilibrio $C = F_2 d$

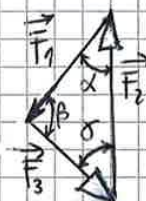


3) Corpo rigido soggetto a 3 forze :



$\sum M_i = 0$

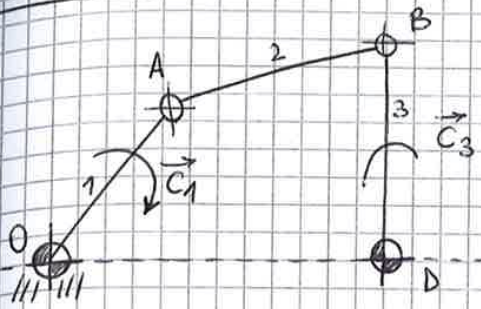
$\ast) F_1 \cdot 0 + F_2 \cdot 0 + F_3 \cdot 0 = 0$



$F_1 + F_2 + F_3 = 0$

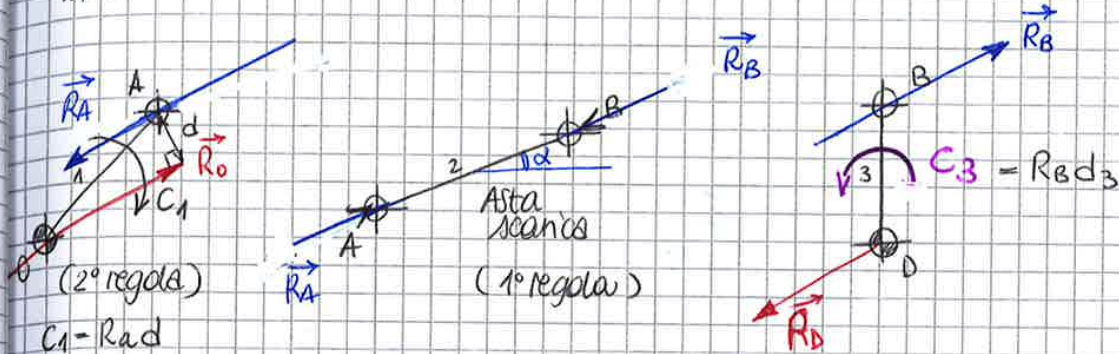
Col triangolo delle forze individuati i versi delle forze incognite

ESEMPIO



Determinare il verso di \vec{C}_3

parati



(2° regola)

$C_1 = R_0 d$

mo oppo
suo della
pla for
R0 e R

contiene sempre partire o dalle forze esterne o dalle aste scricce

METODO ANALITICO = 3 LEGGI DELLA DINAMICA o DI NEWTON

1) Una particella resta a riposo o continua a muoversi di moto rettilineo uniforme se la risultante di tutte le forze applicate ad essa è uguale a zero.

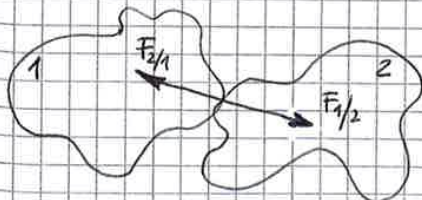
2) L'accelerazione di una particella è proporzionale alla risultante di tutte le forze ad essa applicate.

è nota
xi sul
oggetto

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{ext,i} = m \vec{a}$$

$m = \text{massa [kg]} \Rightarrow$ da l'inerzia del corpo a modificare la sua velocità lineare

3° regola) Le forze di azione e di reazione tra corpi che interagiscono sono uguali in modulo, stessa retta d'azione e verso opposto



$|F_{1/2}| = |F_{2/1}|$

Seconda legge applicata al corpo rigido:

Il corpo rigido nel piano trasla e ruota. Essendo un corpo rigido dobbiamo

parlare di $G = \text{baricentro}$. Allora la 2) diventa

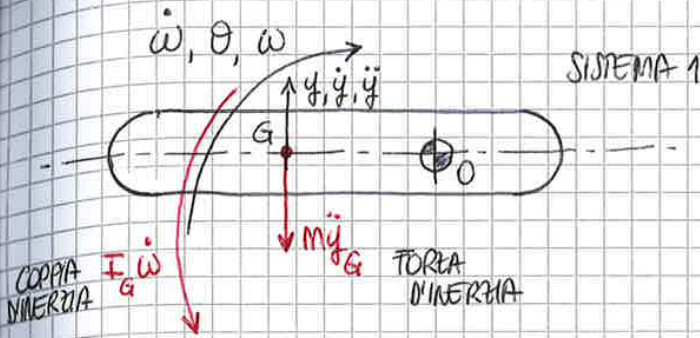
$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{ext,i} = m \vec{a}_G$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_{ext,G,i} = I_G \vec{\omega}$$

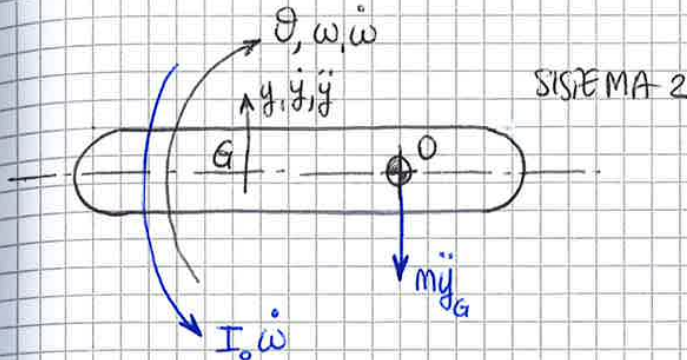
$I_G = \text{MOMENTO D'INERZIA BARICENTRICO [kg m^2]} \Rightarrow$ l'inerzia del corpo a variare la velocità angolare

20/3/15

AZIONI DI INERZIA



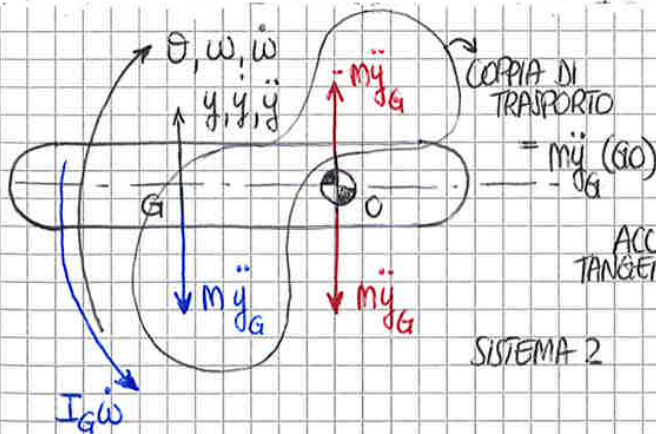
SISTEMA 1 sistema con entrambe le azioni d'inerzia concentrate nel baricentro



SISTEMA 2 sistema con le forze d'inerzia riferite al punto

TEOREMA DI HUYGENS $I_O = I_G + m(GO)^2$

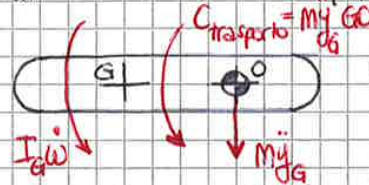
GIDO



$$\vec{a}_G = \vec{a}_G^n + \vec{a}_G^{\tan} + \vec{a}_{G/O}^{\tan}$$

ACC. TANGENZIALE $\ddot{y}_G = \dot{\omega} r \wedge (G-O)$ $\left\{ \begin{array}{l} M \\ D \\ V \end{array} \right. \begin{array}{l} \dot{\omega} GO = |y_G| \\ I_{GO} \\ \dot{\omega} \end{array}$

SISTEMA 2



come equazioni di equilibrio faccio un'equazione dei momenti (equilibrio alla rotazione intorno ad O)

1) $I_G \dot{\omega} + mÿ_G GO + \dots = 0$

↳ tutti contributi che non sto considerando

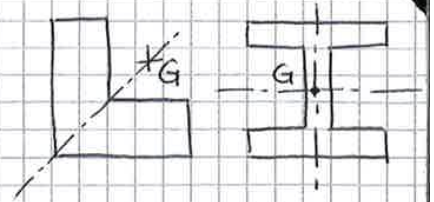
il problema è che le reazioni restano riferite a G (1° sistema)

2) $I_O \dot{\omega} + \dots = 0$ (2° sistema)

ERRORE TIPICO: $I_O \dot{\omega} + mÿ_G (GO) + \dots = 0$ NO!

Fare i momenti rispetto ad O non vuol dire trasformare I_G in I_O perché I_O è come una qualcosa d'altro coppia!

Il baricentro si trova su assi di simmetria geometrica



MOMENTI DI INERZIA DI MASSA

a) MASSA CONCENTRATA:

$$I = m(p_0)^2 \quad [\text{kgm}^2]$$

b) SISTEMA DISCRETO

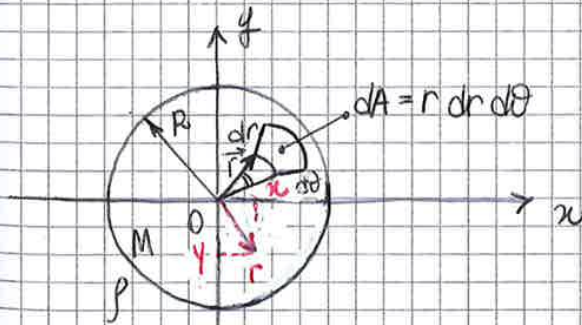
$$I_0 = \sum_{i=1}^n m_i (p_i, 0)^2$$

c) SISTEMA CONTINUO

$$I_0 = \int_M r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV = \int_A r^2 \rho h dA$$

concentra
po

ESEMPIO: DISCO SOTTILE (h minima)



a)

MOMENTO D'INERZIA ASSIALE

$$I_0 = \int_M r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV = \int_A r^2 \rho h dA = \rho h \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$I_0 = \rho h (\pi R^2) \frac{R^2}{2} = \frac{M R^2}{2}$$

e)

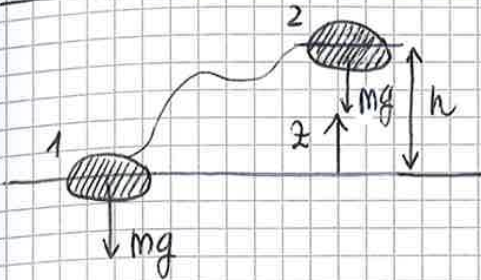
MOMENTI D'INERZIA DIAMETRALI

$$I_x = I_y = \frac{I_0}{2} = \frac{M R^2}{4}$$

$$I_x = \int_M y^2 dm \quad I_y = \int_M x^2 dm$$

$$I_0 = \int_M r^2 dm = \int_M x^2 dm + \int_M y^2 dm = I_x + I_y$$

LAVORO DELLA FORZA PESO



$$L_{\text{peso}} = \int_{z_1}^{z_2} -mg dz = -mg(z_2 - z_1) = \boxed{-mgh}$$

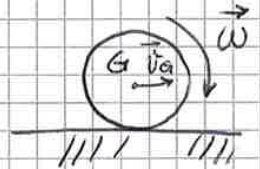
lavoro per spostare la massa dalla posizione 1 alla posizione 2

$$d_{\text{peso}} = -\Delta E_{\text{Pg}}$$

ENERGIA POTENZIALE
GRAVITAZIONALE

ENERGIA CINETICA

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$$



EQUAZIONE DELL'ENERGIA

$$L_{F_{\text{est}}} + L_{F_{\text{int}}} = \Delta E_{\text{cin}} + \Delta E_{\text{Pg}} + \Delta E_{\text{pel}}$$

(Escludere le forze peso e le forze d'inerzia perché sono già considerate nel ΔE_{cin} e ΔE_{Pg})
(contato nei vincoli)

POTENZA $P = \frac{dL}{dt} \quad [J/s = W]$

1) Potenza sviluppata da una forza: $P = \frac{dL}{dt} = F_t \frac{ds}{dt} = F_t v$

2) Potenza sviluppata da una coppia: $P = \frac{dL}{dt} = M \frac{d\theta}{dt} = M \omega$

$$\boxed{P_{\text{Tot}} = F_t v + M \omega}$$

RENDIMENTO DI UN SISTEMA

$$\eta = \frac{P_u}{P_e} \leq 1$$

P_u = potenza utile

P_e = potenza entrante

ASSI PRINCIPALI DI INERZIA : assi caratterizzati dal fatto che il momento di inerzia del corpo rispetto a uno di questi assi è MASSIMO e un altro è MINIMO. Gli assi principali di inerzia coincidono sempre con assi di SIMMETRIA del corpo
 Se gli assi principali di inerzia sono centrati nel baricentro del corpo sono detti ASSI CENTRALI DI INERZIA

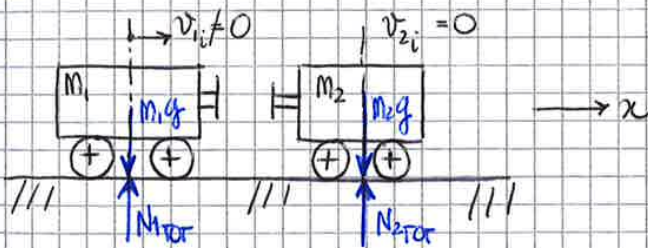
Rispetto a una terna centrale di inerzia si ha $\vec{L}_G = I_x p \vec{\lambda} + I_y q \vec{\mu} + I_z r \vec{\nu}$

$$\begin{cases} p = \vec{\omega} \times \vec{\lambda} \\ q = \vec{\omega} \times \vec{\mu} \\ r = \vec{\omega} \times \vec{\nu} \end{cases}$$

URTI

27/3/15

1) URTI ELASTICI :



- ipotesi
- si trascurano gli attriti
 - Dopo l'urto i due correlli continuano separati
 - caso ideale: no perdita di energia durante l'urto

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{ext,i} = 0 \quad (\text{ci per sono compensati dalle normali di terreno})$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{ext,i} = \frac{dQ}{dt} = 0 \Rightarrow Q \text{ è costante}$$

$$Q_i = Q_f \Rightarrow m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \quad (1)$$

$$E_{ci} = E_{cf} \quad \text{URTO ELASTICO} : \left[\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \right] \quad (2)$$

$\Rightarrow v_{1f} = v_{1i} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$ NO \rightarrow se no il corrello 1 continuerebbe il moto nella stessa direzione e con la stessa velocità

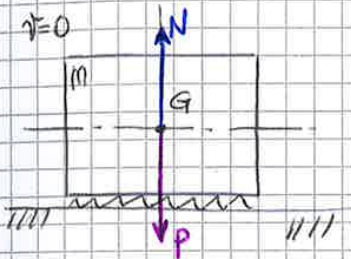
$\Rightarrow v_{2f} = v_{2i} \frac{2m_1}{m_1 + m_2}$

ATTRITO

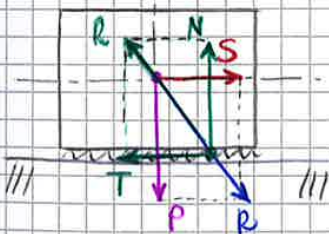
I fenomeni d'attrito non sono lineari e si segue una tipologia di modellazione. Il fatto di considerare i coefficienti d'attrito come una costante è un'approssimazione perché quando due corpi sfregano generano calore che usi a modificare le proprietà dei materiali.

- Esistono vari tipi di attrito:
1. attrito di aderenza (o statico)
 2. attrito di strisciamento (o radente)
 3. attrito volvente

1. ATTRITO DI ADERENZA



Aggiungo una forza esterna S



N : componente di R \perp al piano di appoggio
 T : componenti di R \parallel al piano di appoggio (opposta a S)

FORZA D'ATTRITO

Se aumento S aumento T

A un certo punto la cassa inizia a muoversi e usi in strisciamento

Tutto il fenomeno che precede il moto è detto **FENOMENO DI ADERENZA** e

ha come modello matematico $T < f_a N$

f_a : COEFFICIENTE DI ADERENZA
 valore empirico
 dipende dalla natura e dallo stato delle superfici a contatto

Esiste anche un modello geometrico



φ_a = angolo di aderenza

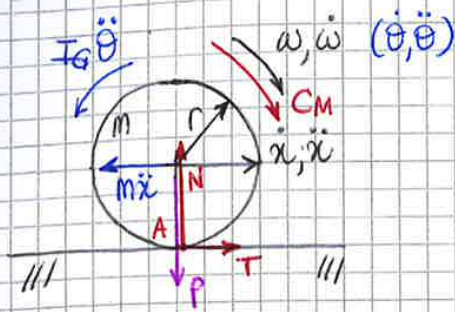
$$\text{tg } \varphi_a = f_a$$

$$T = \text{tg } \varphi_a N = f_a N \text{ (limite)}$$

La componente R si può trovare anche all'interno del cono

Importante per gli esercizi: ci fornivano f_a ma ci noi serve conoscere φ_a

RUOTA MOTRICE



T è opposta alla coppia motrice

$$\begin{cases} \text{G)} & C_M - Tr - I_G \ddot{\theta} = 0 & \text{①} \\ \uparrow & N = P & \text{②} \\ \rightarrow & T - m\ddot{x} = 0 & \text{③} \end{cases} \quad \text{3 equazioni, 4 incognite}$$

DI
AM.

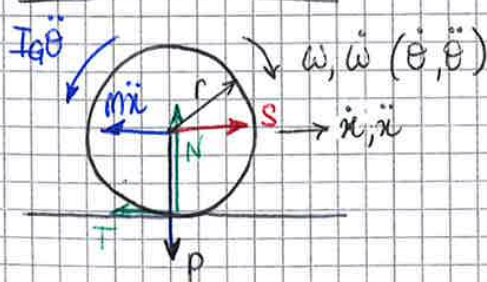
UG
27

di parte dell'ipotesi di aderenza: $T \leq f_a N \Rightarrow$ puro rotolamento $\Rightarrow \ddot{x} = r\ddot{\theta}$ ④
 $\Rightarrow A = C_v$
 \Rightarrow sistema a 1 GDL

Calcolati numericamente le incognite abbiamo due possibilità

- se $T \leq f_a N \Rightarrow \ddot{x} = r\ddot{\theta} \Rightarrow$ 1 Gdl (e' quello come abbiamo fatto)
- se $T > f_a N \Rightarrow \ddot{x} = r\ddot{\theta} \Rightarrow$ la ruota scivola \Rightarrow 2 Gdl $\Rightarrow T = f_a N$ ④
 simbolo di attrito

RUOTA TRASCINATA



S: forza di trascinamento della ruota

Forze esterne

Forze per il contatto di terreno

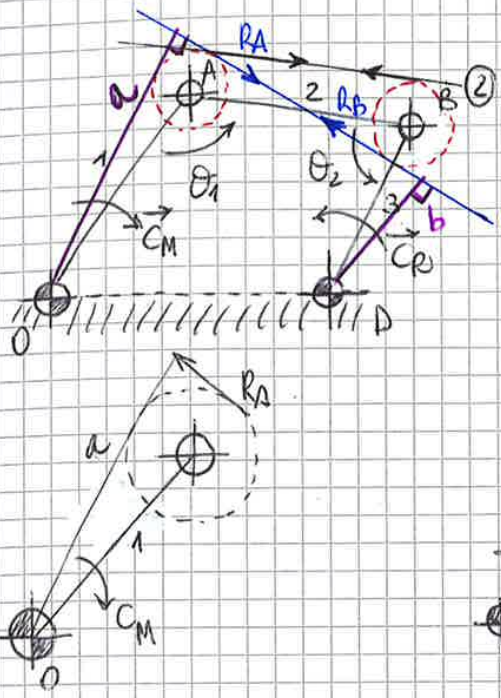
$$\begin{cases} \text{G)} & -I_G \ddot{\theta} + Tr = 0 & \text{①} \\ \uparrow & N - P = 0 & \text{②} \\ \rightarrow & S - m\ddot{x} - T = 0 & \text{③} \end{cases} \quad \text{3 equazioni, 4 incognite}$$

Hp puro rotolamento (di aderenza) $\Rightarrow \begin{cases} T \leq f_a N & 1 \text{ Gdl} \\ \ddot{x} = r\ddot{\theta} & \text{④} \end{cases}$

- se ridotta $T > f_a N \Rightarrow$ strisciamento (2 Gdl) $\Rightarrow T = f_a N$ ④

APPLICAZIONE: QUADRILATERO ARTICOLATO CON ATRITO AL PERNO

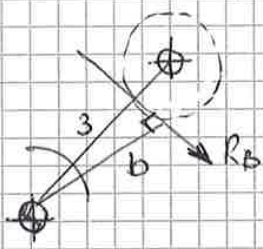
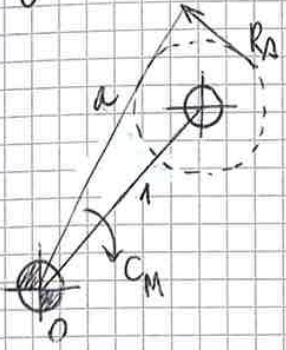
A e B con attrito al perno



- NO Analisi / ponibili 4 casi: rispettare le regole dell'attrito al perno?
- ① \vec{R}_A e \vec{R}_B opposti a $\vec{\theta}_1$ e $\vec{\theta}_2$ OK!
 - ② \vec{R}_A opposto a θ_1 MA \vec{R}_B e θ_2 sono concordi NO!

→ queste R_A e R_B sono controllate sul corpo 2 cui è un'anta aderisce

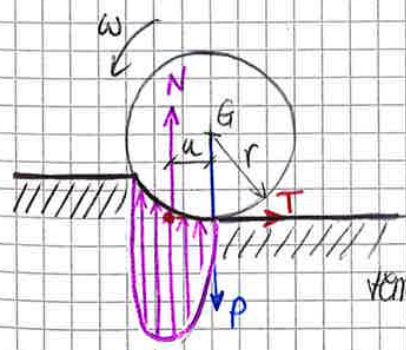
Quando faccio il diagramma di corpo libero su ① e ③ devo controllare il principio di azione e reazione



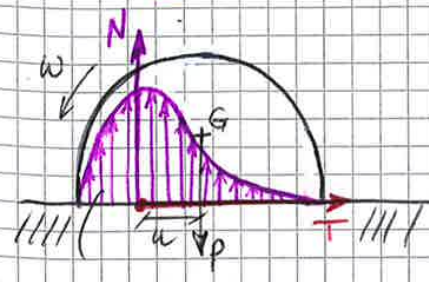
- 1) Aumenta il braccio di R_A rispetto al perno (il braccio a è più grande rispetto al caso ideale)
- 2) da reazione vincolare è spostato sul'interno il braccio è più piccolo del caso ideale (dove R_B sarebbe centrato in B)

3. ATRITO VOLLENTE

legato alla 'imperfetta elasticità' dei corpi a contatto



u = parametro di attrito volante [m]



distribuzione delle azioni di contatto

u - parametro di attrito volante

$$G) Nu = Tr \Rightarrow T = N \left(\frac{u}{r} \right) = f_u(N)$$

$$f_u = \frac{u}{r} = \text{COEFFICIENTE DI ATRITO VOLLENTE}$$

Rendimento al rotolamento

$$\textcircled{1} \begin{matrix} +\uparrow \\ -Q + R \cos(\alpha + \varphi) = 0 \end{matrix} \quad \leftarrow$$

$$+\rightarrow -R \sin(\alpha + \varphi) + R_1 = 0$$

$$\textcircled{2} \begin{matrix} +\rightarrow \\ R \sin(\alpha + \varphi) - F = 0 \end{matrix} \quad \leftarrow$$

$$+\uparrow -R \cos(\alpha + \varphi) + R_2 = 0$$

$$Q = R \cos(\alpha + \varphi)$$

$$F = R \sin(\alpha + \varphi)$$

$$\frac{Q}{F} = \frac{R \cos(\alpha + \varphi)}{R \sin(\alpha + \varphi)}$$

$$\Rightarrow F = Q \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = \frac{C}{r}$$

$$\Rightarrow C = r Q \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$$

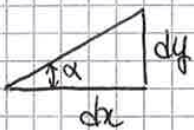
coppia da applicare alla vite per muovere un carico Q

RENDIMENTO DEL SISTEMA

$$\eta = \frac{P_u \rightarrow \text{potenza utile}}{P_m \rightarrow \text{potenza motrice}}$$

$$\eta = \frac{Qv'}{Fv} = \frac{Qv'}{Cw}$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $\frac{C}{r} \quad wr$



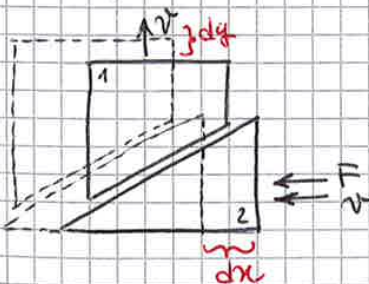
$$dy = dx \operatorname{tg} \alpha$$

$$v' = v \operatorname{tg} \alpha$$

$$\frac{v'}{v} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\frac{Q}{F} = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}$$



1 vite
2 madrevite

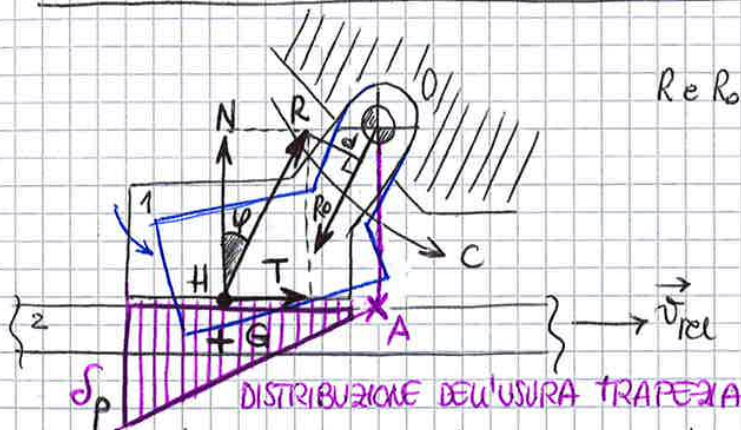
TIPICI DI FRENO :

1. A pattino ad accostamento rigido
2. " " " libero
3. A tamburo " rigido
4. " " " libero
5. A disco " rigido
6. A nastro

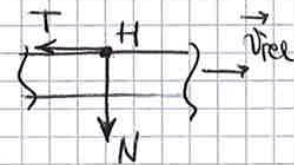
TIPICI DI FRIZIONI :

1. Piana
2. Piana a dischi multipli
3. Conica

1. FRENO A PATTINO PIANO AD ACCOSTAMENTO RIGIDO



R e R_0 formano una coppia opposta a c (per equilibrio)



Premeudo il pattino si può far frenare il nastro

Applichiamo l'ipotesi dell'usura :

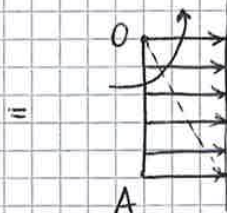
$$\delta = k f p v_{rel}$$

k, f : costanti v_{rel} : costante istante per istante

$$p = k' \delta$$

possiamo scomporre la rotazione intorno ad O

Traslazione + OA + Rotazione intorno ad A

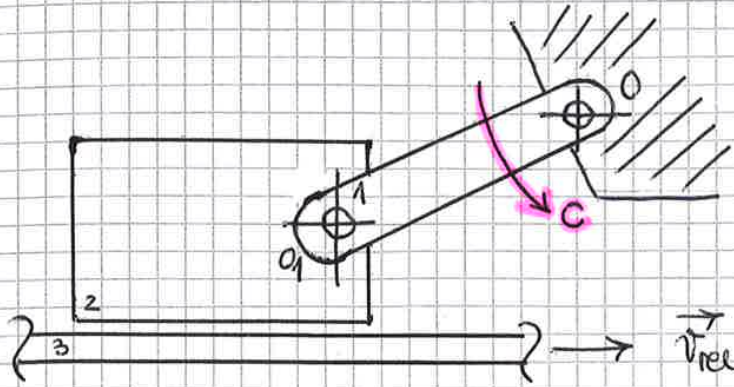


(effettivo moto di accostamento del pattino di nastro)

(non produce usura)

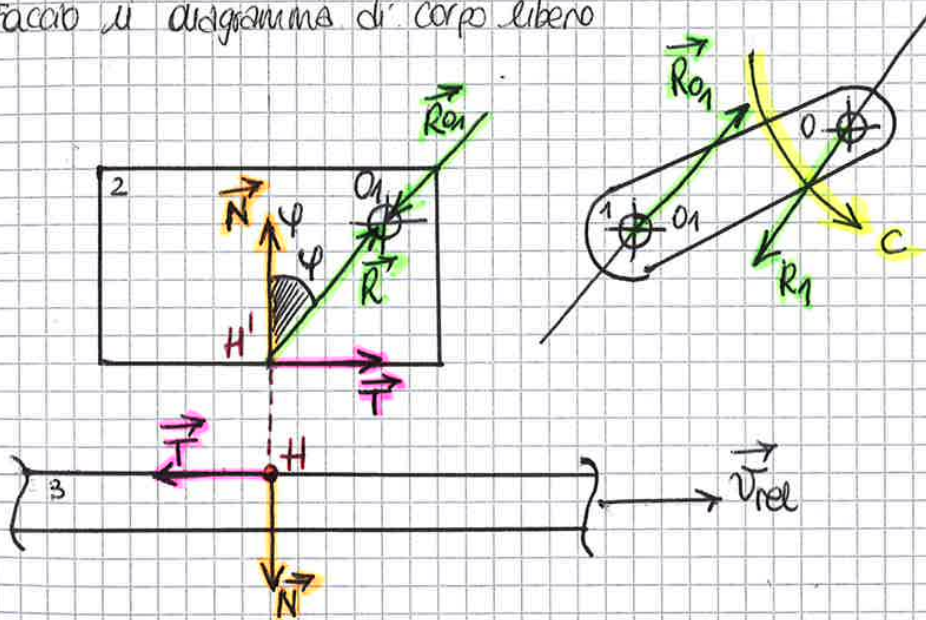
mentre

2. FRENO A PATTINO PIANO AD ACCOSTAMENTO LIBERO



Il pattino ha 2 GdL

Avendo il pattino 2 GdL non possiamo tracciare il moto del pattino di accostamento. Il moto di accostamento del pattino non è univocamente definito. Facciamo il diagramma di corpo libero.



segno T e N sul rastro

Trascuro il peso del pattino: è sottoposto a due forze \Rightarrow 1° regola

$\hookrightarrow R_{01}$ e R
 \hookrightarrow inclinata di $\varphi = \arctg f$
 due parallele per O_1

H' si trova sulla retta che passa per O_1 e inclinata di φ

Metto R_0 sul corpo 1 e trovo R_1 che è \parallel a R e opposta in verso tali da formare una coppia opposta a C

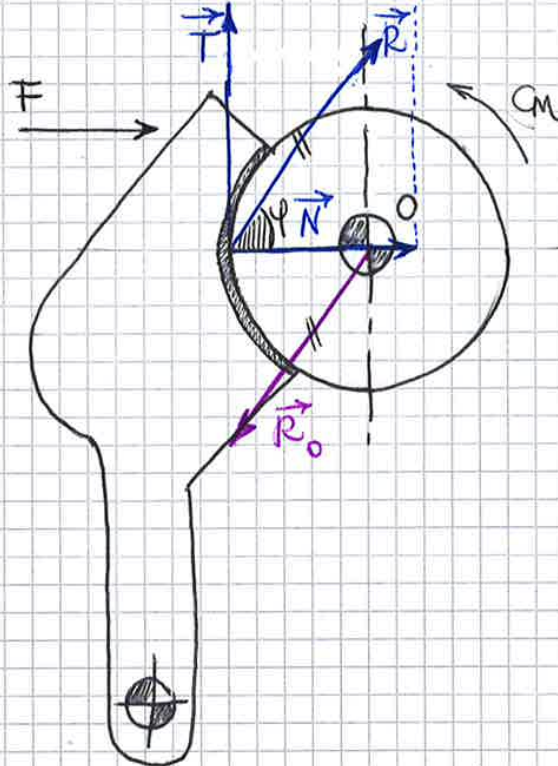
$$0) \quad C - R_{01} a = 0$$

$$R_{01} \parallel R_0$$

$$|R_{01}| = |R_0| = |R| = \left| \frac{T}{\sin \varphi} \right|$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{T}{\sin \varphi} a}$$

3. FRENI A TAMBURO AD ACCOSTAMENTO RIGIDO



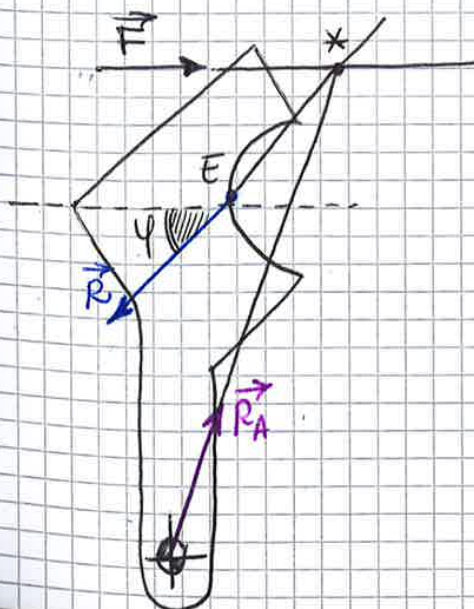
Abbiamo una forza F esterna che spinge il ceppo sulla ruota e la freno non applico l'ipotesi dell'usura.

Ipotesi di concentrazione N e T in E = metterla zona contatto e T tangente al tamburo.

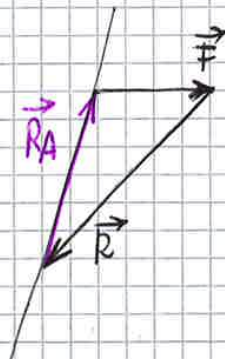
$$0) \quad C_M = R h$$

$$|\vec{R}| = |\vec{R}_0|$$

$$\vec{R} \parallel \vec{R}_0$$



R_A deve passare per il punto X 3° regola



$$A) \quad \sum \downarrow + \quad F_b - R_a = 0$$

$$T = f N$$

$$R = \frac{T}{\sin \varphi}$$

$$P_t = r_t \sin \varphi$$

Uado a risolvere la R: regole alito al perno

tg al cerchio d'arco
opporta ad $\vec{\omega}$

rispettare l'equilibrio dei
corpi = puntare per B

Trovo il punto Z dove risultano appese

T: tg al cerchio

N: puntare per O

Ho così l'angolo φ

Porto \vec{R} sul ceppo e per la prima regola ho \vec{R}_B

0) $\left\{ \begin{array}{l} C_M - R P_t = 0 \\ \vec{R} \parallel \vec{R}_0 \\ |\vec{R}| = |\vec{R}_0| \end{array} \right.$

ceppo $|\vec{R}| = |\vec{R}_B|$

1° regola

leva A) $F a - R_B b = 0$

$T = f N = \tan \varphi N$

2° regola

nam

de R

Si nota dunque che le premie e i versamenti sono proporzionali al raggio

$$N = \int_A p dA = \int_A \frac{k'}{r} r d\omega dr = k' (r_e - r_i) (\theta_2 - \theta_1)$$

le
co.
una

$$M_{benaria} = \int_A dT \cdot r = \int_A (f dN) r = \int_A (f p dA) r = \int_A (f \frac{k'}{r} r d\omega dr) r =$$

$$= f k' \int r dr \int d\omega = f k' \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r_i}^{r_e} (\theta_2 - \theta_1) =$$

$$= f k' \left(\frac{r_e^2}{2} - \frac{r_i^2}{2} \right) (\theta_2 - \theta_1)$$

$$F = N = k' (r_e - r_i) (\theta_2 - \theta_1)$$

$$M = f \cdot F \left(\frac{r_e + r_i}{2} \right)$$

e

re

il
er

Ultimo le ipotesi dell'universo:

$$f dA = k_f p dA \omega r$$

↓
costante

$$p = \frac{f}{k_f r \omega r} = \frac{k}{r}$$

$$dA = 2\pi r dr$$

$$N = \int_A p dA = \int_{r_i}^{r_e} p 2\pi r dr = \int_{r_i}^{r_e} \frac{k}{r} 2\pi r dr = 2\pi k (r_e - r_i)$$

$$F = N = 2\pi k (r_e - r_i)$$

$$C = \int_A f p r dA = \int_{r_i}^{r_e} f \frac{k}{r} 2\pi r^2 dr = k f \pi (r_e^2 - r_i^2)$$

$$C = f F \left(\frac{r_e + r_i}{2} \right)$$

Il momento trasmesso dalla frizione dipende dalle dimensioni dei dischi, dalla forza frenante F e dal momento dei dischi.

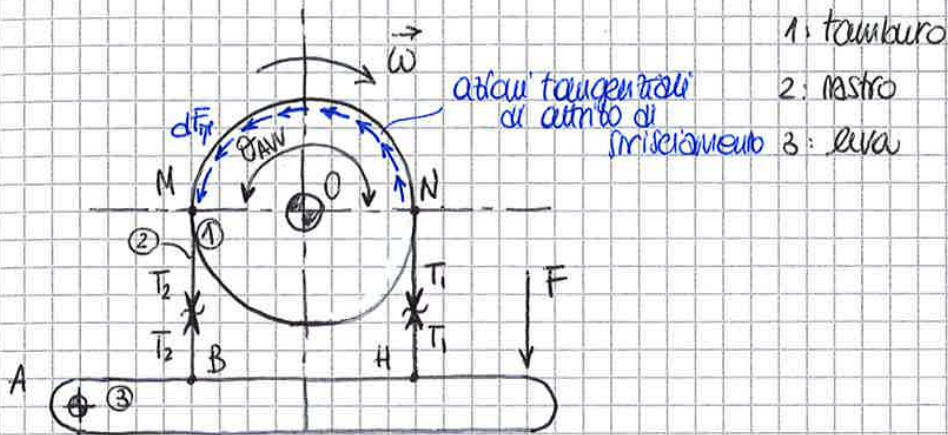
Esistono anche frizioni a piastre multiple in cui ogni albero ha più superfici attive.

In quel caso bisogna calcolare il momento moltiplicandolo per le n superfici di contatto.

$$C = n f F \left(\frac{r_e + r_i}{2} \right)$$

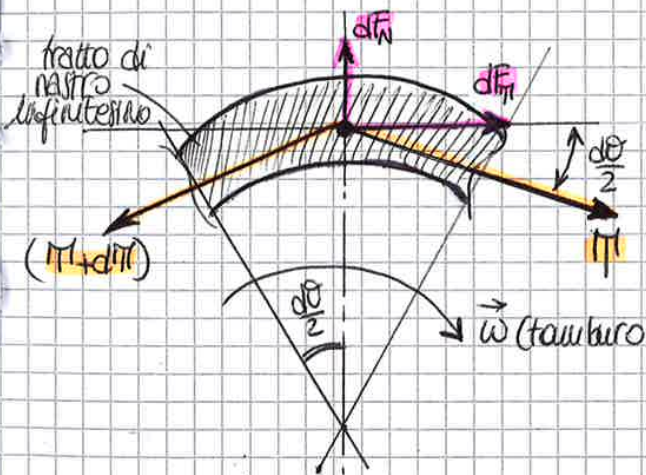
24/2/15

6. FRENO A NASTRO



$$T_2 > T_1$$

EQUAZIONE DEL FLESSIBILI



dF_{f1} sul nastro è opposta a quello sul tamburo (che è opposta ad ω)

Equilibrio

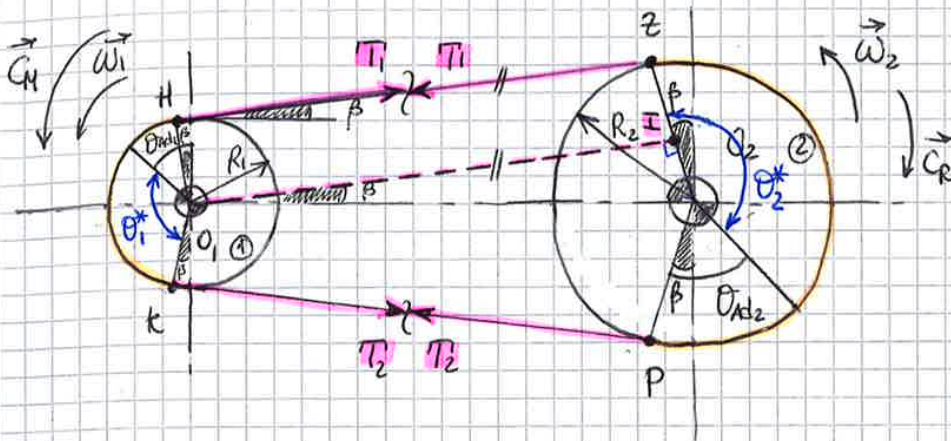
$$\begin{cases} \rightarrow (dF_{f1} + T \cos \frac{d\theta}{2}) - (T + dT) \cos \frac{d\theta}{2} = 0 \\ \uparrow dF_N - T \sin \frac{d\theta}{2} - (T + dT) \sin \frac{d\theta}{2} = 0 \end{cases}$$

$$dF_{f1} = f dF_N$$

legge attrito di misciamento

$d\theta$ è un angolo infinitesimo $\Rightarrow \sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}$
 $\cos \frac{d\theta}{2} \approx 1$

TRASMISSIONE A CINGHIA



- 1: puleggia motrice
- 2: puleggia condotta
- $\theta_{ad1,2}$ = angolo devianza puleggia 1,2
- $\theta_{1,2}^*$ = angolo scorrimento puleggia 1,2

$$\theta_{AVV_1}(HK) = \theta_{ad1} + \theta_1^*$$

$$\theta_{AVV_2}(PE) = \theta_{ad2} + \theta_2^*$$

$$\theta_{AVV_1} = \pi - 2\beta$$

$$\theta_{AVV_2} = \pi + 2\beta$$

$$Hk \parallel O_1I$$

$$\triangle OO_1I : IO_2 = O_1O_2 \sin \beta$$

$$\begin{cases} IO_2 = R_2 - R_1 = O_2t - It \\ O_1O_2 = a \text{ (interasse)} \end{cases}$$

$$R_2 - R_1 = a \sin \beta$$

$$\Rightarrow \beta = \arcsin \left(\frac{R_2 - R_1}{a} \right)$$

INCUNAZIONE CINGHIA

$$T_1 > T_2$$

EQUAZIONE DEI FLESSIBILI SUE CINGHIE

$$\frac{T_1 - qv^2}{T_2 - qv^2} = e^{f\theta^*}$$

→ Sulla puleggia motrice

v = velocità della cinghia

q = massa per unità di lunghezza della cinghia

(f' se cinghia trapezoidale)

se non ci danno q la massa viene trascurata \Rightarrow ricorriamo nel caso generale del freno a nastro

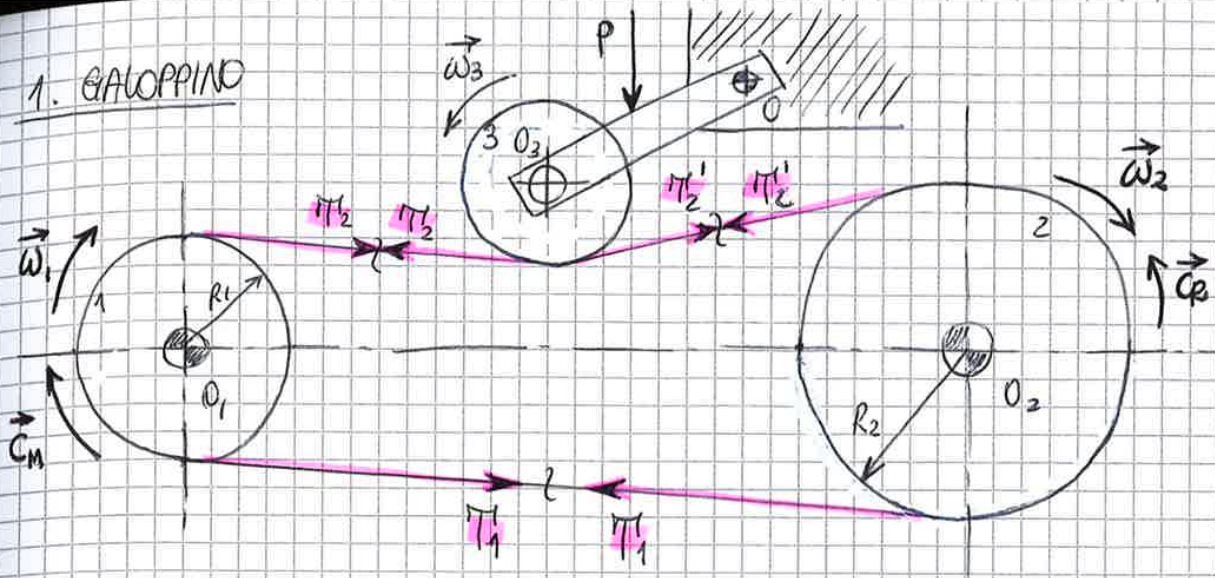
$$v = v_0 \left(1 + \frac{\pi}{ES} \right)$$

v_0 = velocità cinghia a tensione nulla (ideale)

E = modulo elastico

S = sezione trasversale della cinghia

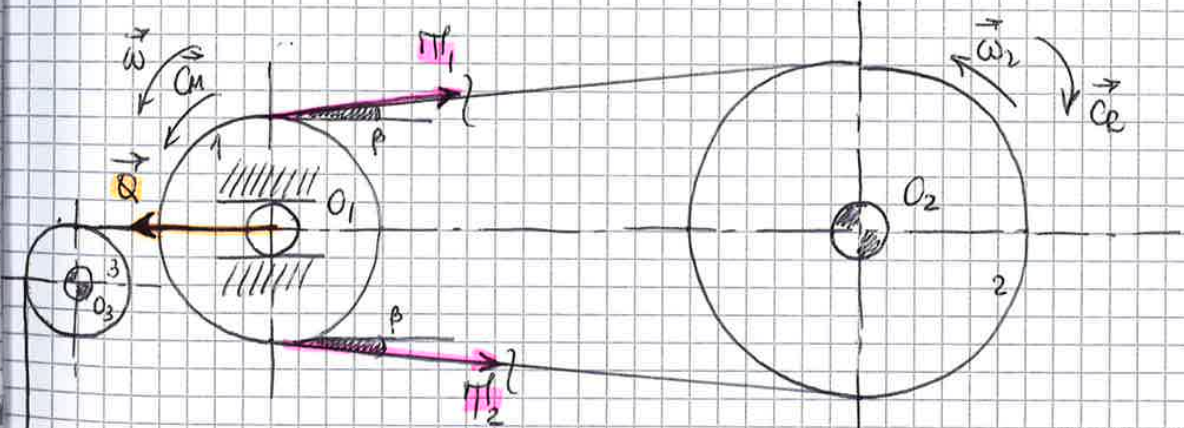
1. GALLOPPINO



dia

1. puleggia motrice
2. puleggia condotta
3. galoppino (se non ci sono coppie applicate, non ci sono inerzie, non c'è attrito nel perno $\rightarrow T_2 = T_2'$)

2. TENDITORE


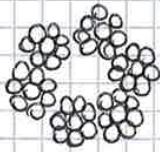


3. cmg

$\rightarrow \boxed{(T_1 + T_2) \cos \beta = Q}$

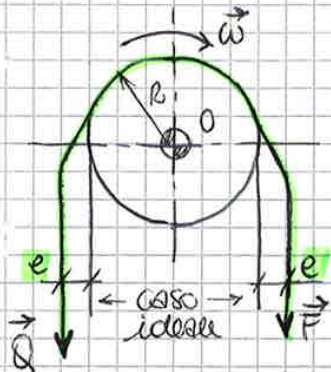
Molto utilizzati in strumenti di sollevamento come ascensori, seggione...

FUNI

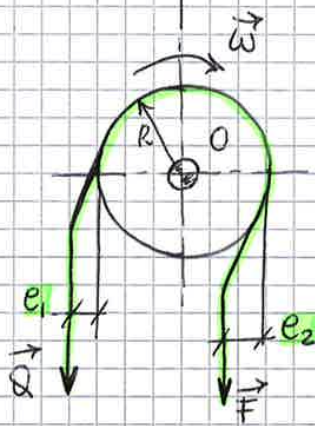
1. Trefoli: + fili avvolti a elica 
2. Funi a trefoli: + trefoli avvolti a elica 

RIGIDEZZA DELLA FUNE

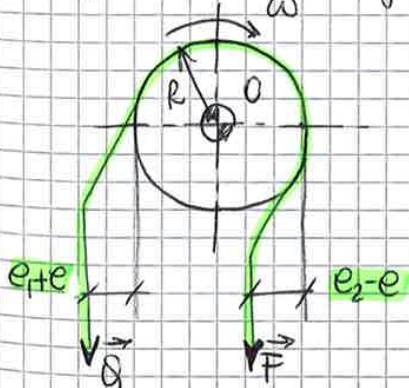
a. Rigidezza elastica (e): legata all'incompleta flessibilità della fune



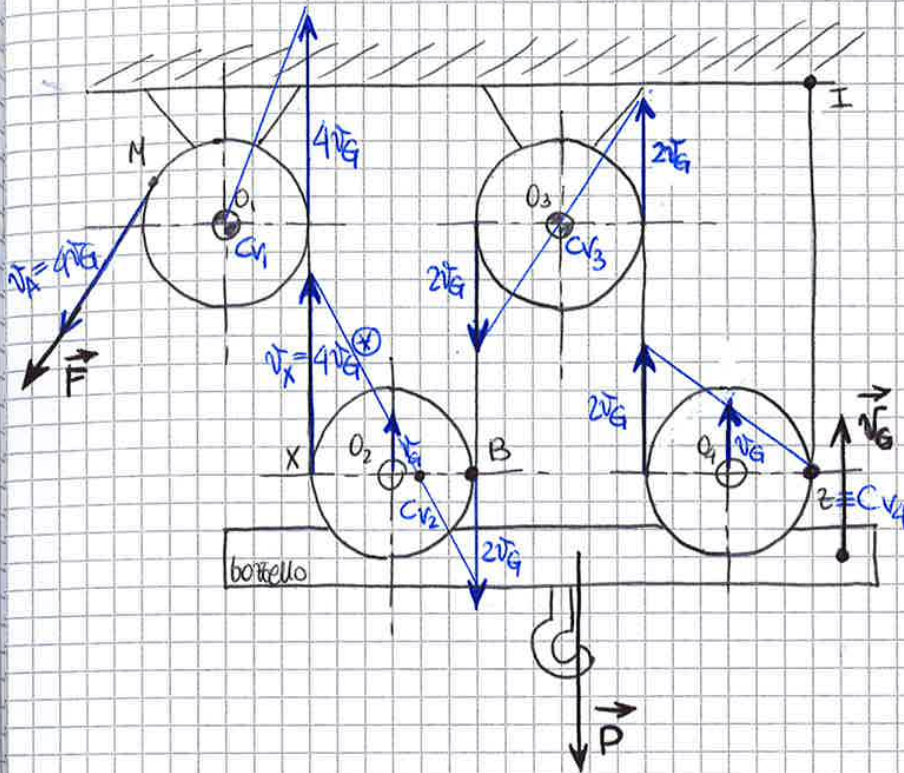
b. Rigidezza anelastica (e_1, e_2): legata all'attrito tra i fili ed agli scorrimenti interni



a+b. Sovrapposizione degli effetti



PARANCHI DI SOLLEVAMENTO



H_p | ammasso con anelli
 al perno e rigidetto
 di cui $e = e_1 = e_2$
 ammasso con stesso
 rendimento

FORMULE GENERALI

① $v_A = n v_G$ n : funi agganciate al bottello

② $\eta_n = \eta_c^n F$

③ $(\eta_c + \eta_c^2 + \eta_c^3 + \dots) F = P$

④ $\eta_{tot} = \frac{P}{nF} = \frac{\eta_c + \eta_c^2 + \dots + \eta_c^n}{n}$

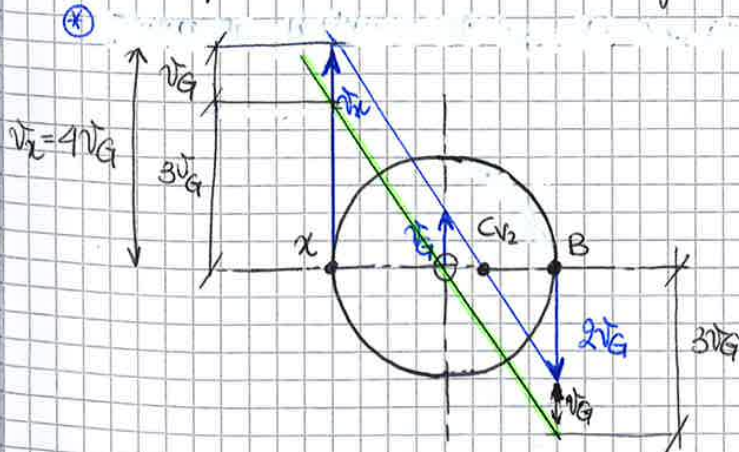
1,3: pulegge a centro fisso
 2,4: pulegge a centro mobile

a) Analisi cinematica

Z: C_0 (puro rotolamento sulla fune)

O_1 ha la stessa velocità v_G del bottello → distribuzione triangolare delle velocità

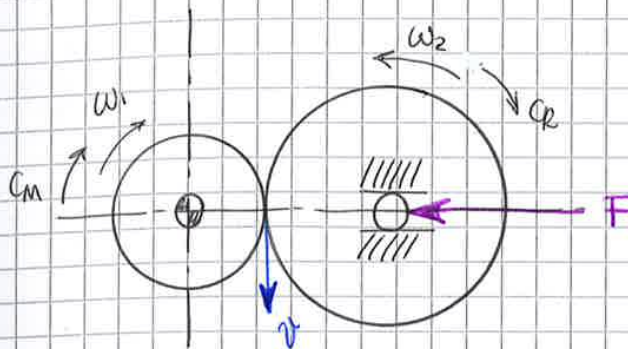
• Trovare quanto vale v_x : ① Formula generale



tra il v_G e la distribuzione permanente per il centro

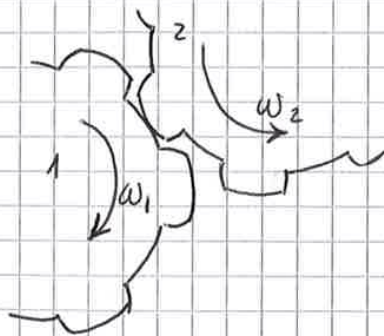
6/5/15

RUOTE DI FRIZIONE



da forza F da si che ci sta aderente : $v = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$$



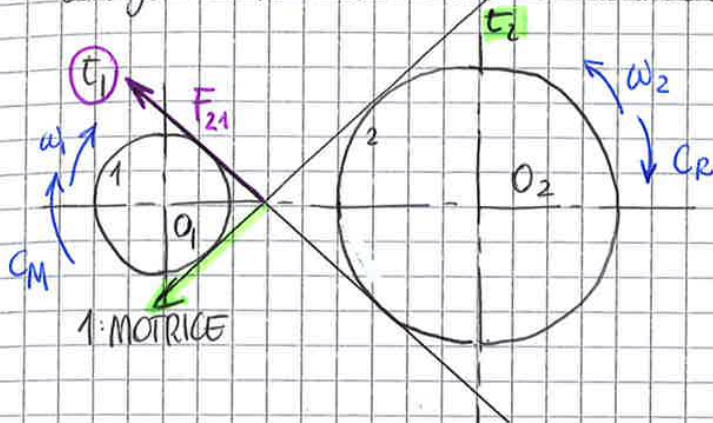
TIRI DI RUOTE DENTATE :

1. ASSI PARALLELI - ruote dentate a denti dritti (esterne o interne)
 $i = 5 \div 6$
 - ruote dentate cilindriche a denti elicoidali
2. ASSI CONCORRENTI : ruote coniche
 $i = 5 \div 10$
3. ASSI SGHEMBI : ruote assi sghembi
 $i = 100$
 - vite senza fine - ruota a denti elicoidali

TANGENTI AI CERCHI DI BASE = rette di azione

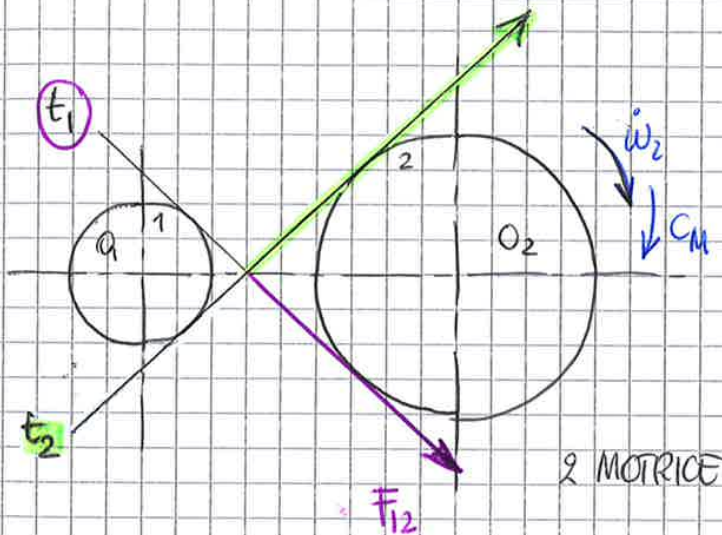
dunque le rette d'azione e' scambiata la forza tra le ruote

le tangenti esterne vanno escluse a priori



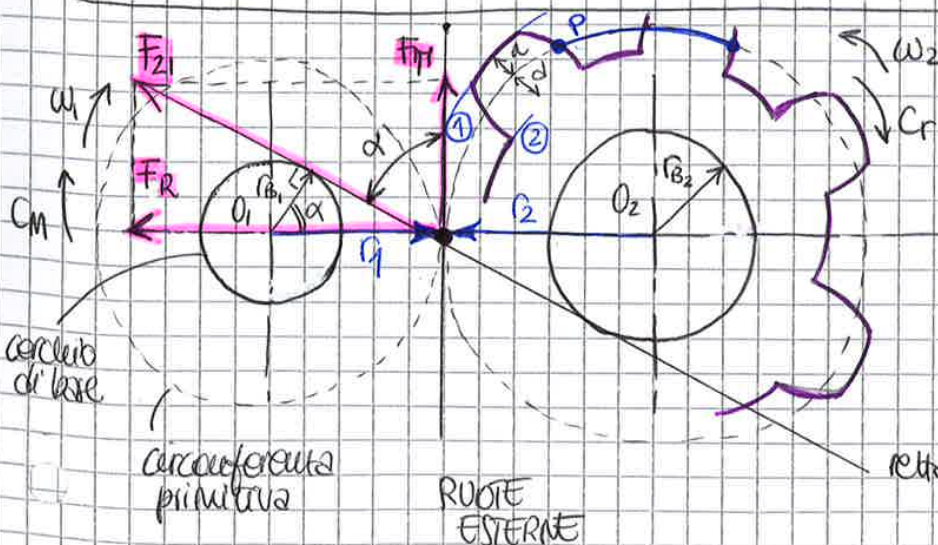
F_{21} : si oppone alla coppia motrice Ok!

uso t_2 se ω_1



uso t_2 se ω_2

1. RUOTE DENTATE CILINDRICHE A DENTI DIRITTI



F_{21} Opposta alla coppia motrice

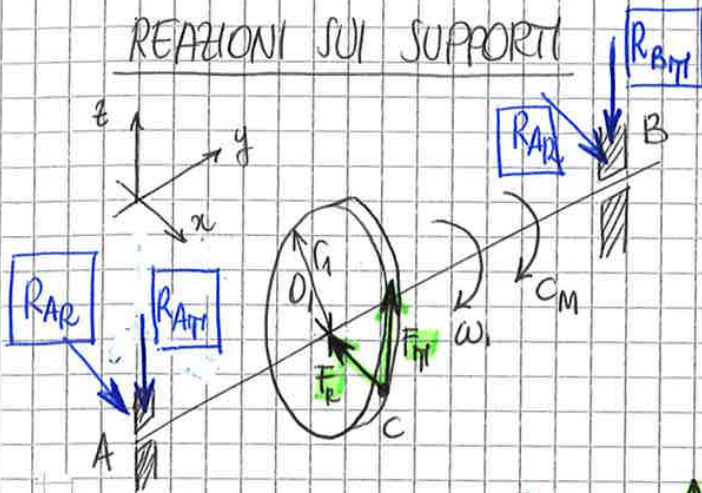
FORZA SCAMBIATA TRA LE RUOTE

H_p : - trascurso / punto
- suppongo una sola coppia di denti in presa \Rightarrow una forza sola F scambiata

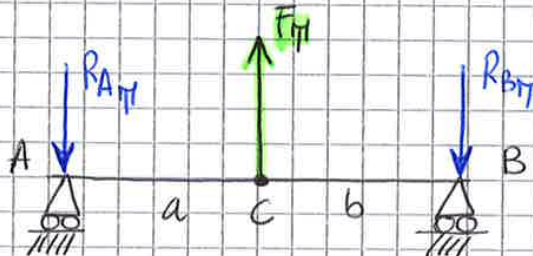
$$\eta = \frac{C_R \omega_2}{C_M \omega_1} = \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_1}{r_2} = 1$$

RENDIMENTO UNITARIO

REAZIONI SUI SUPPORTI

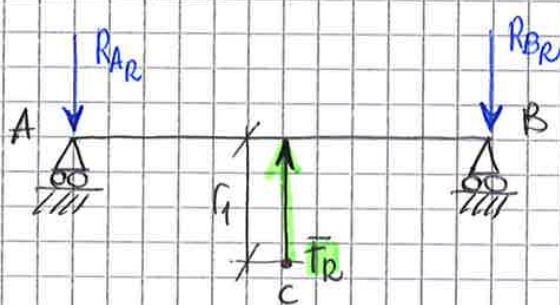


Piano yz:



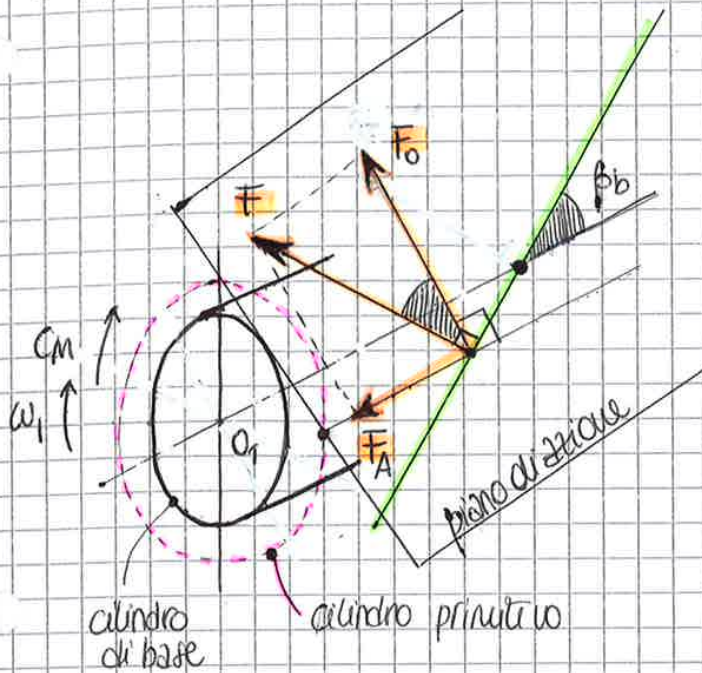
$$\begin{cases} \uparrow F_y = R_{Ay} + R_{Bz} \\ \sum \tau_A^+ R_{Bz}(a+b) + F_y a = 0 \end{cases}$$

Piano xy:



$$\begin{cases} \uparrow F_x = R_{Ax} + R_{Bx} \\ \sum \tau_A^+ F_x a - R_{Bx}(a+b) = 0 \end{cases}$$

FORZE SCAMBIATE



Forze interne scambiate
tra le ruote

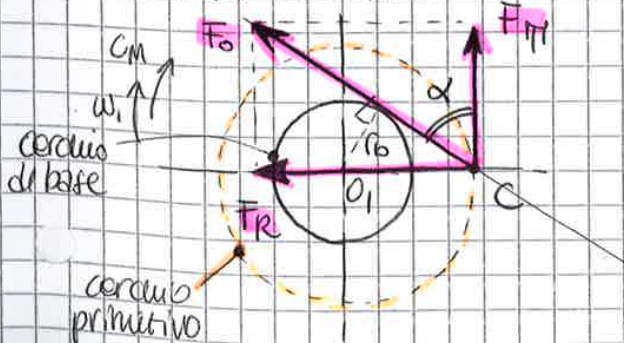
- Hip :
- Trascurare l'attrito nell'ingranamento
 - F e' nel piano d'azione, \perp al dente
 - Una sola coppia di denti in presa
 - F applicata lungo la retta tg cilindro primitivo e a metà ruota

RUOTE DENTATE CILINDRICHE A DENTI EUCOIDALI :

$$F_o = F \cos \beta_b \quad \perp \text{ ad asse ruota}$$

$$F_A = F \sin \beta_b \quad \text{lungo l'asse della ruota}$$

SEZIONE FRONTALE:

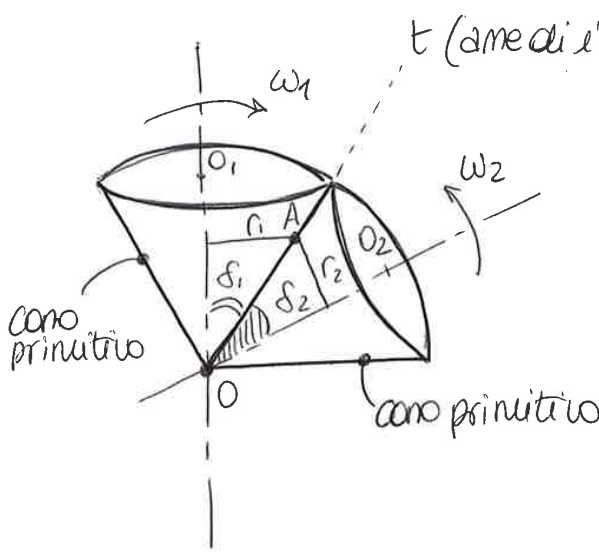


$$0) \quad C_M = F_{t1} r_1 = F_o r_b$$

$$F_{t1} = F_o \cos \alpha = (F \cos \beta_b) \cos \alpha$$

$$F_r = F_o \sin \alpha = (F \cos \beta_b) \sin \alpha$$

3. RUOTE CONICHE A DENTI DIRETTI



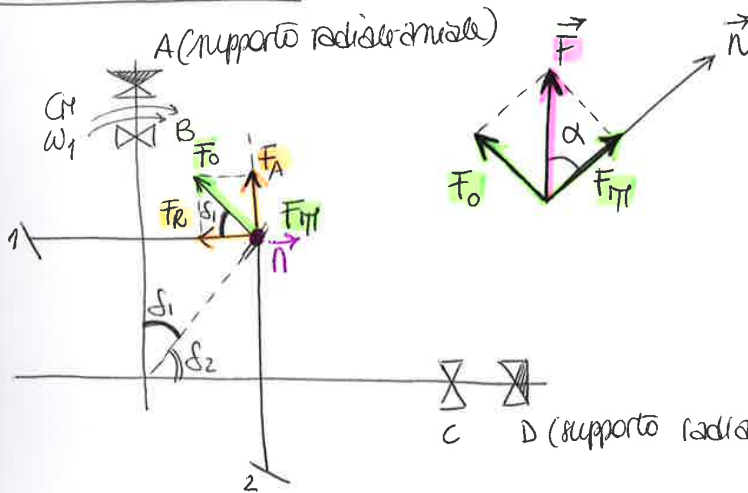
t (linea di istantanea rotazione nel moto relativo)
 $\delta_{1,2}$: semiangolo di apertura dei coni primitivi

$r_1 = AO \operatorname{sen} \delta_1$
 $r_2 = AO \operatorname{sen} \delta_2$

$\rightarrow i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{\operatorname{sen} \delta_2}{\operatorname{sen} \delta_1}$

$t: v = r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2$

FORTE SCAMBIATE



$F_T = F \cos \alpha$
 $F_0 = F \operatorname{sen} \alpha$

α : angolo di pressione
 F : forza scambiata tra le ruote nel piano d'azione

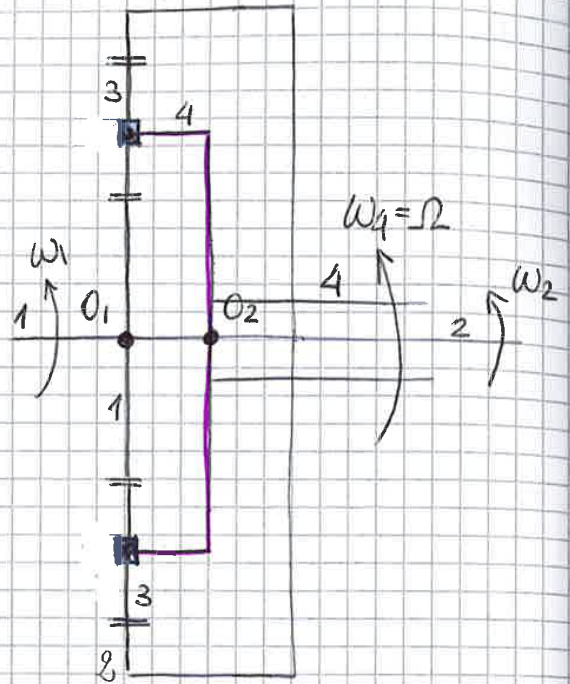
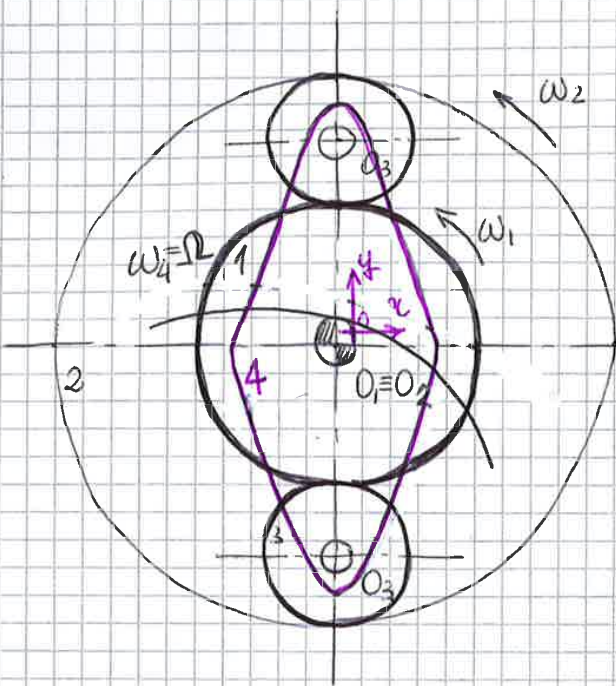
F_T : componente tangenziale + piano degli smi

F_0 : componente nel piano degli smi

$F_A = F_0 \operatorname{sen} \delta_1 = F \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \delta_1$

$F_R = F_0 \cos \delta_1 = F \operatorname{sen} \alpha \cos \delta_1$

8. ROTISMI EPICICLOIDALI



- 1: Sole
- 2: Corona
- 3: satelliti o planetari
- 4: portasatelliti o portafreno

RAPPORTO DI TRASMISSIONE

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_2 - \Omega} = \left(\frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_3 - \Omega} \right) \left(\frac{\omega_3 - \Omega}{\omega_2 - \Omega} \right)$$

velocità relative al portafreno

⇒ **FORMULA DI WILMS**

⇒ pseudo "ordinario" al rotismo epicicloidale con un sistema di riferimento mobile al portafreno

$$i_{1,2} = (i_{1,3})(i_{3,2}) = \left(-\frac{z_3}{z_1} \right) \left(+\frac{z_2}{z_3} \right)$$

- 1,3 ruote "esterne"
2,3 ruote "interne"

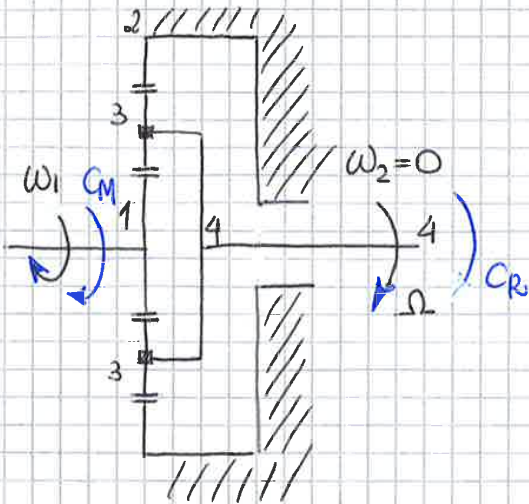
$$\frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_2 - \Omega} = -\frac{z_2}{z_1}$$

$$\omega_1 z_1 - \Omega z_1 = -z_2 (\omega_2 + \Omega z_2)$$

$$\Omega (z_1 + z_2) = \omega_1 z_1 + \omega_2 z_2$$

$$\Omega = \frac{\omega_1 z_1 + \omega_2 z_2}{z_1 + z_2}$$

RIDUTTORE DI VELOCITÀ EPICICLOIDALE



$$r_2 = r_1 + 2r_3$$

Rapporto di trasmissione nel rotismo zero ordinario (FORMULA DI WILHIS)

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_2 - \Omega} = \left(-\frac{z_3}{z_1}\right) \left(\frac{z_2}{z_3}\right) = -\frac{z_2}{z_1}$$

Rapporto di trasmissione del riduttore

$$i_{1,4} = \frac{\omega_1}{\Omega}$$

Impongo $\omega_2 = 0$

$$\frac{\omega_1 - \Omega}{-\Omega} = -\frac{z_2}{z_1} \Rightarrow \omega_1 z_1 - \Omega z_1 = z_2 \Omega \quad \Omega(z_1 + z_2) = \omega_1 z_1$$

$$\boxed{\frac{\omega_1}{\Omega} = \frac{z_1 + z_2}{z_1} = i_{1,4}}$$

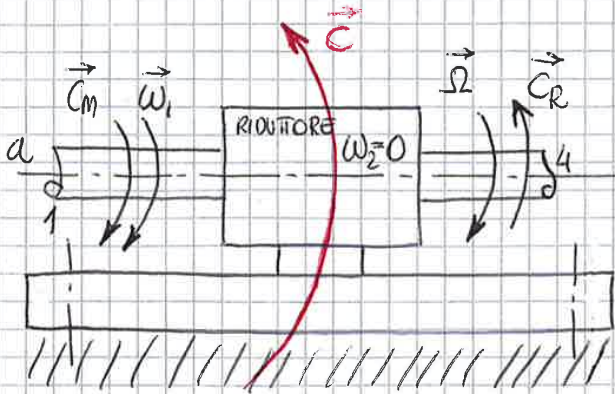
**RAPPORTO DI TRASMISSIONE
DEL RIDUTTORE**

$$\eta_{\text{RIDUTTORE}} = \frac{P_u}{P_e} = \frac{C_R \Omega}{C_M \omega_1} = \frac{C_R}{C_M i_{1,4}}$$

$$C_R = \eta i_{1,4} C_M \xrightarrow{\eta=1} C_R = i_{1,4} C_M$$

nasce a causa delle forze
scaldate internamente al riduttore
dei denti

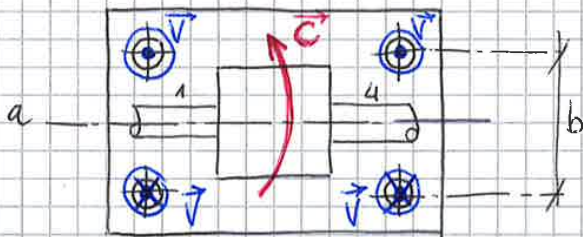
COPPIA TRASMESSA AL TELAIO



C: coppia trasmessa al telaio

$$i_{1,4} = \frac{\omega_1}{\Omega}$$

$$a) C_m - C_r - C = 0$$



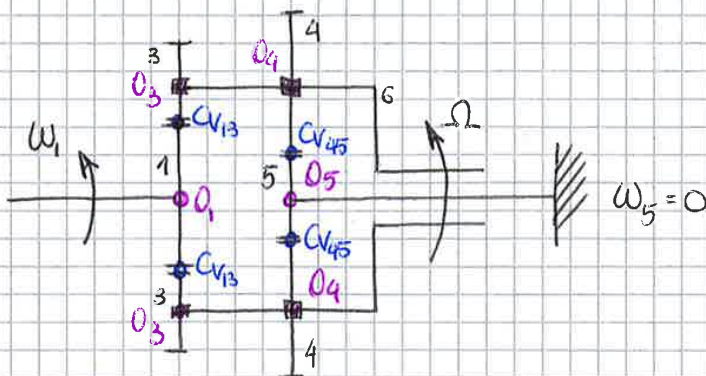
\vec{V} : reazioni sui bulloni opposti a \vec{C}

C comprime i bulloni superiori e mette in trazione quelli inferiori

Inoltre le \vec{V} a due a due formano due coppie opposte a C

$$V_b + V_b = C \quad \begin{matrix} \odot \\ \otimes \end{matrix} \quad \begin{matrix} \odot \\ \otimes \end{matrix} \quad \boxed{\frac{C}{2b} = \vec{V}}$$

ROTISMI EPICICLOIDALI MULTIPLI



1,5 solari

3,4 satelliti

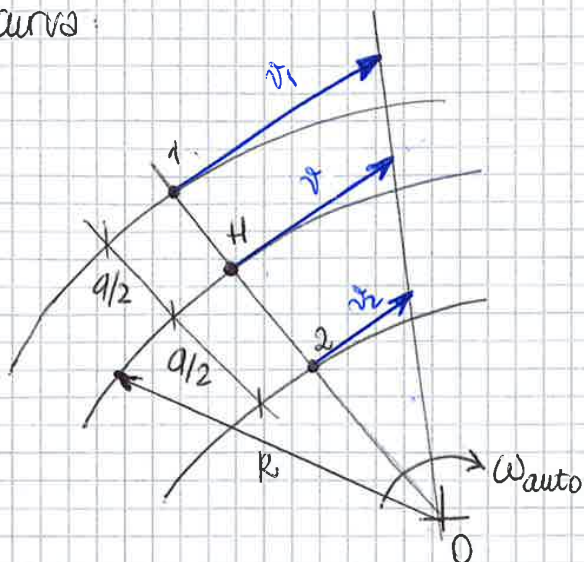
6 portakreno

$$r_1 + r_3 = r_4 + r_5$$

RAPPORTO DI TRASMISSIONE DEL ROTISMO RESO ORDINARIO

$$i_{1,5} = \frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_5 - \Omega} = \underbrace{\left(-\frac{r_3}{r_1}\right)}_{i_{1,3}} \underbrace{\left(-\frac{r_5}{r_4}\right)}_{i_{4,5}} = \frac{r_3 r_5}{r_1 r_4}$$

b) In curva:



a: carreggiata auto
R: raggio di curvatura

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{v}_{1/0} = \omega_{\text{auto}} \vec{k} \wedge (\vec{1}-\vec{0}) \rightarrow v_1 = \omega_{\text{auto}} (R + a/2)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_{H/0} = \omega_{\text{auto}} \vec{k} \wedge (\vec{H}-\vec{0}) \rightarrow v = \omega_{\text{auto}} (R)$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_0 + \vec{v}_{2/0} = \omega_{\text{auto}} \vec{k} \wedge (\vec{2}-\vec{0}) \rightarrow v_2 = \omega_{\text{auto}} (R - a/2)$$

$$v_1 = \frac{v}{R} (R + \frac{a}{2}) = \omega_1 r_{\text{ruota}} \rightarrow \omega_1 = v_1 / r$$

$$v_2 = \frac{v}{R} (R - \frac{a}{2}) = \omega_2 r_{\text{ruota}} \rightarrow \omega_2 = v_2 / r$$

$$\Omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{v_1/r + v_2/r}{2} = \boxed{\frac{v}{r} = \Omega}$$

In curva il portatore ha sempre la stessa velocità angolare, mentre $\omega_1 \neq \omega_2$

Le differenziale è un partitore di coppia:

$$\textcircled{1} \quad \Omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

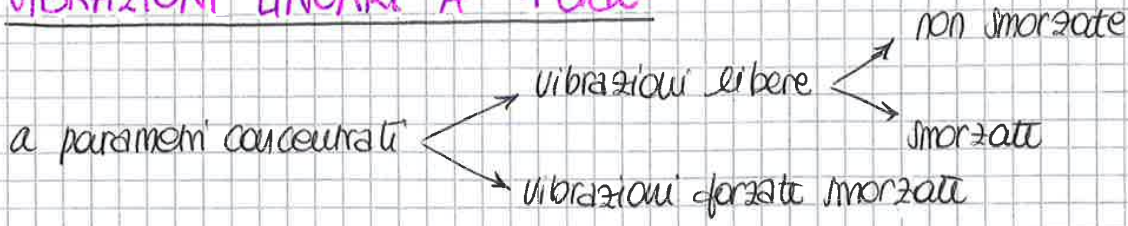
$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 + C = 0 & (\text{equilibrio di coppie}) \quad C = -C_1 - C_2 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \quad \begin{cases} C_1 \omega_1 + C_2 \omega_2 + C \omega = 0 & (\text{equilibrio di potenze}) \quad \text{trascuriamo l'ultimo} \end{cases}$$

$\textcircled{2} \Rightarrow C$ e la sostituisco in $\textcircled{3}$ insieme a $\textcircled{1}$

$$a(\omega_1 - \omega_2) = C_2(\omega_1 - \omega_2) \Rightarrow \boxed{C_1 = C_2 = \frac{C}{2}}$$

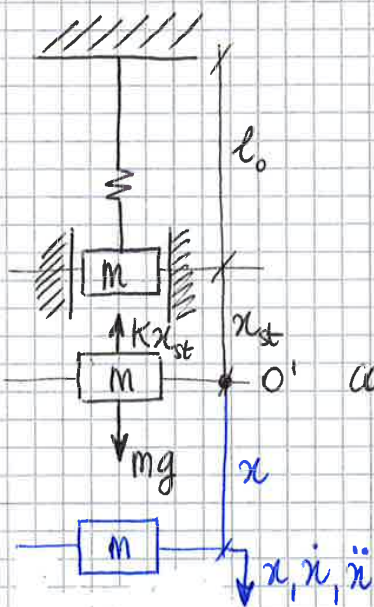
VIBRAZIONI LINEARI A 1 GdL



1. VIBRAZIONI LIBERE NON SMORZATE

m : massa

k : rigidità elastica



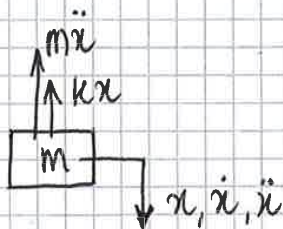
l_0 = lunghezza a riposo

condizioni di smontamento

$$kx_{st} = mg$$

$$\rightarrow x_{st} = \frac{mg}{k}$$

$$\vec{F}_m = -k\Delta\vec{x}$$



① $m\ddot{x} + kx = 0$

EQUAZIONE STANDARD

② $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

EQUAZIONE CANONICA

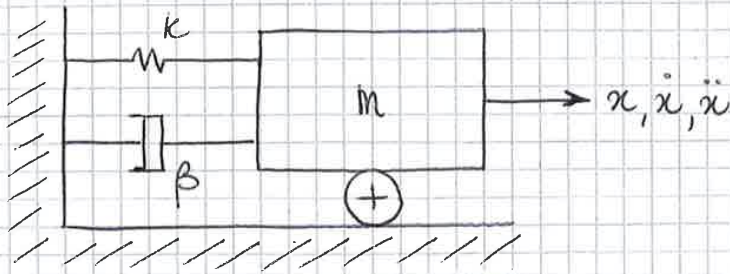
③ $\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$

EQUAZIONE GENERALIZZATA

ω_n = pulsazione naturale del sistema non smorzato

②③ $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$

2. VIBRAZIONI LIBERE SMORZATE

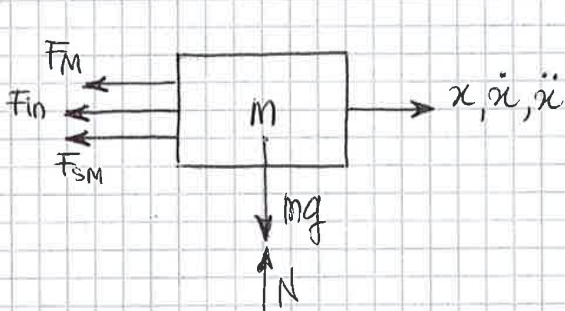


$\text{---} \overset{k}{\text{---}}$ molla $\vec{F}_M = -k\vec{x}$ $k \left[\frac{N}{m} \right]$

$\text{---} \text{---} \text{---}$ smorzatore viscoso (si oppone alla vibrazione) β : COSTANTE DI SMORZAMENTO $\vec{F}_{SM} = -\beta\dot{\vec{x}}$ $\beta \left[\frac{N}{m/s} \right]$

\boxed{m} massa $\vec{F}_m = -m\ddot{\vec{x}}$

DIAGRAMMI DI CORPO LIBERO



$$\leftarrow \vec{F}_M + \vec{F}_m + \vec{F}_{SM} = 0$$

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0 \quad \text{EQUAZIONE STANDARD}$$

$$\ddot{x} + \left(\frac{\beta}{m}\right)\dot{x} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0 \quad \text{EQUAZIONE CANONICA}$$

$$\ddot{x} + (2\zeta\omega_n)\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad \text{EQUAZIONE GENERALIZZATA}$$

ω_n : pulsazione naturale del sistema non smorzato

$\zeta = \frac{\beta}{\beta_{critico}}$ FATTORE DI SMORZAMENTO

$\beta_{critico}$: quel valore di β che fa tendere a zero la risposta del sistema nel minor tempo possibile senza oscillare

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

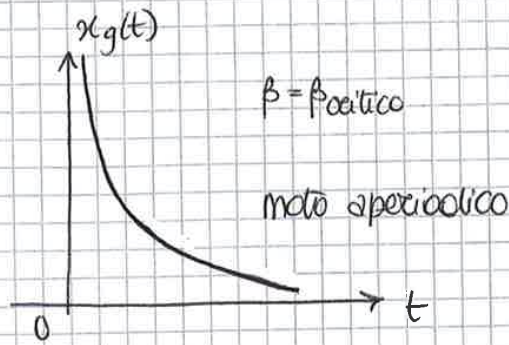
$$\zeta = \frac{\beta}{2m\omega_n}$$

③ $\zeta = 1$

$\lambda_{1,2} = -\omega_n$

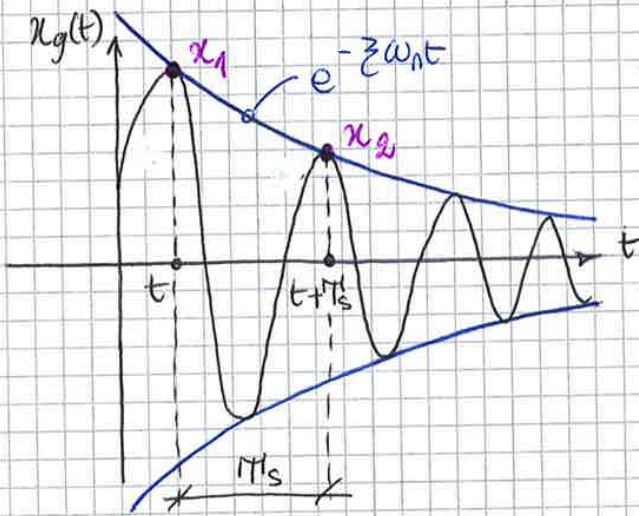
$x_g(t) = (a + bt) e^{-\omega_n t}$

$\lim_{t \rightarrow \infty} x_g(t) = 0$



DECREMENTO LOGARITMICO

($\zeta < 1$ quando ci sono oscillazioni)



$x_1(t) = x_{og} e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_s t + \varphi_0)$
 $x_2(t + T_s) = x_{og} e^{-\zeta \omega_n (t + T_s)} \cos(\omega_s t + \underbrace{\omega_s T_s}_{2\pi} + \varphi_0)$

$\frac{x_1(t)}{x_2(t + T_s)} = e^{\zeta \omega_n T_s}$

δ : DECREMENTO LOGARITMICO

$\delta = \log$ del rapporto tra le ampiezze di due massimi successivi

$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \zeta \omega_n T_s = \zeta \omega_n \left(\frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \right)$

$\delta = \zeta \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$

Studio la soluzione a regime:

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$$

$$x(t) = x_p(t) = x_0 \cos(\Omega t - \varphi)$$

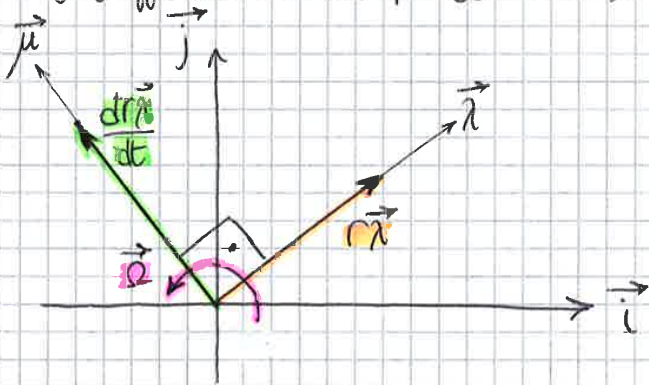
$$\dot{x}(t) = -x_0 \Omega \sin(\Omega t - \varphi)$$

$$\ddot{x}(t) = -x_0 \Omega^2 \cos(\Omega t - \varphi)$$

→ sostituisco nell'equazione generalizzata

$$-\overset{\textcircled{3}}{\ddot{x}} \left[\Omega^2 x_0 \cos(\Omega t - \varphi) \right] - \overset{\textcircled{2}}{\dot{x}} \left[2\zeta \omega_n (x_0 \Omega) \sin(\Omega t - \varphi) \right] + \overset{\textcircled{1}}{x} \left[\omega_n^2 x_0 \cos(\Omega t - \varphi) \right] = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t)$$

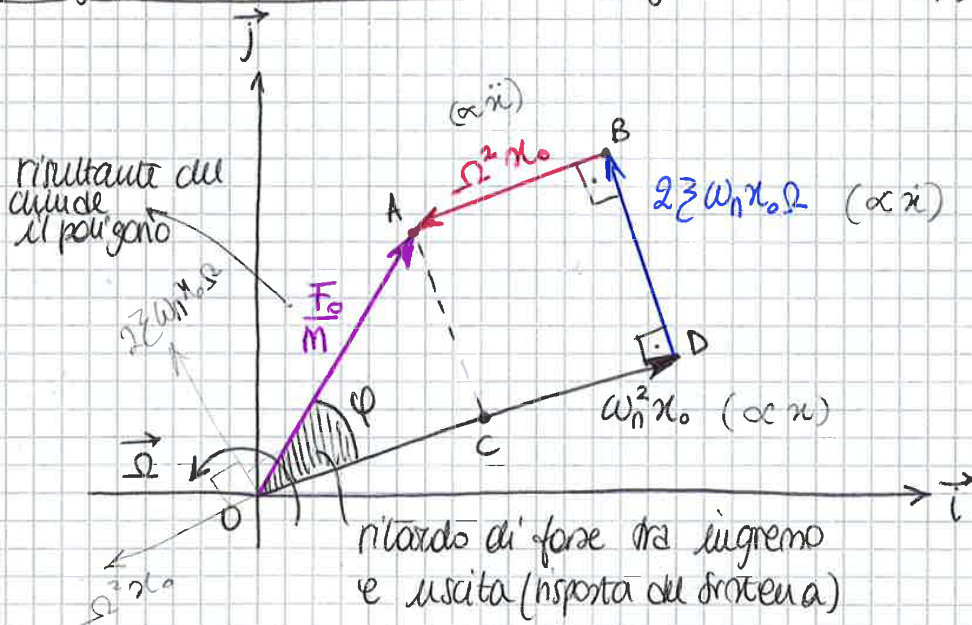
I coefficienti servono per costruire il poligono dei vettori rotanti



$$\frac{dr\vec{i}}{dt} = \Omega r\vec{j}$$

Poligono dei vettori rotanti

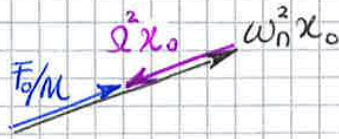
(voglio trovare x_0 e φ)



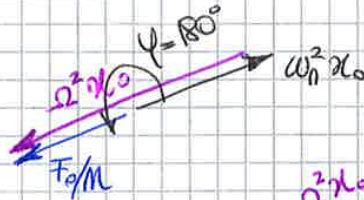
$$\Omega = \omega_n$$

$\frac{\Omega}{\omega_n} = 1 \Rightarrow$ IN RISONANZA (grafico M)

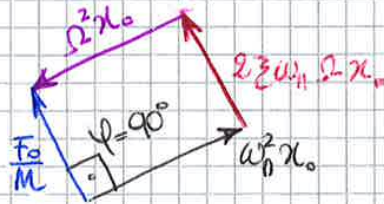
① $\xi = 0 \quad \varphi = 0$



③ $\xi = 0 \quad \varphi = 180^\circ$



② $\xi \neq 0 \quad \varphi = 90^\circ$



per forza! se mettessi $\xi = 0$

il vettore $\omega_n^2 x_0$ non sarebbe bilanciato \rightarrow il sistema può distruggersi
($2\xi\omega_n\Omega x_0$)

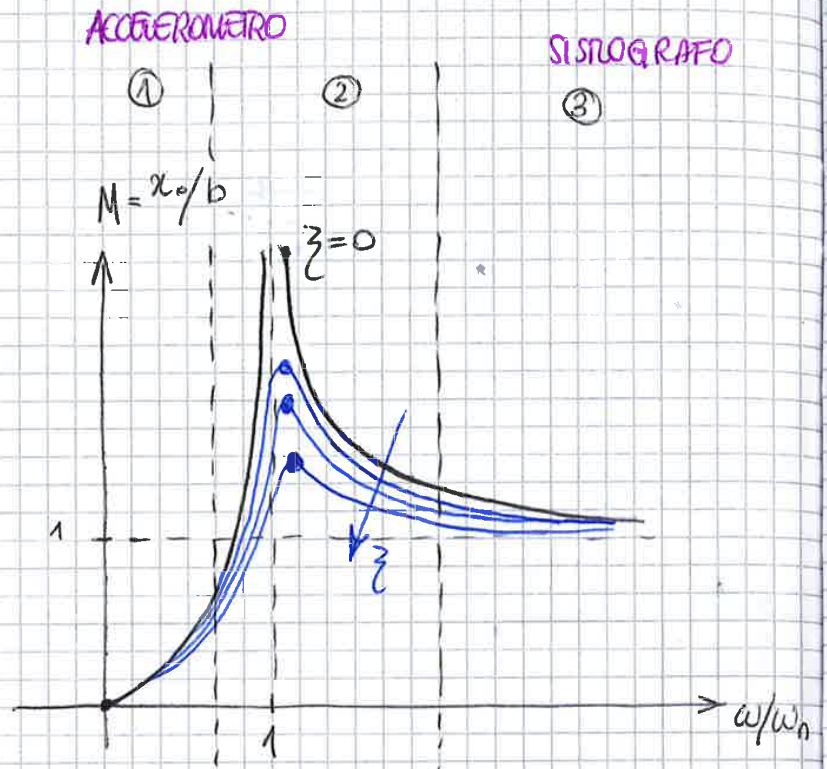
$$M = \frac{x_0}{b} = \frac{(\omega/\omega_n)^2}{\sqrt{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\zeta \omega/\omega_n)^2}}$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{2\zeta \omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$

Ⓘ $\frac{\omega}{\omega_n} \rightarrow 0 \quad M \rightarrow 0$

Ⓜ $\frac{\omega}{\omega_n} \rightarrow 1 \quad M \rightarrow \frac{1}{2\zeta}$

Ⓝ $\frac{\omega}{\omega_n} \rightarrow \infty \quad M \rightarrow 1$



$\zeta=0 \quad \omega/\omega_n \gg 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{x_0}{b} \approx 1}$ (zona ad alte pulsazioni) SISMOGRAFO

lo spostamento misurato rispetto al telaio è uguale allo spostamento del telaio stesso

$\zeta=0 \quad \omega/\omega_n \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_0}{b} \approx (\omega/\omega_n)^2$

$\boxed{x_0 \propto b \omega^2}$

$\ddot{x}_b = -b \omega^2 \text{ sen } \omega t$

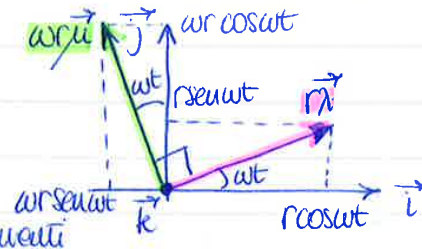
$\ddot{x}_{b \text{ max}} = -b \omega^2$

ACCELEROMETRO \rightarrow strumento per misurare le accelerazioni del sistema

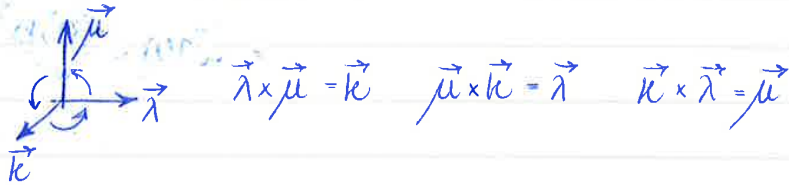
RIASSUNTO

DIMOSTRAZIONI MECCANICA DELLE MACCHINE

1) RELAZIONE VELOCITA'- POSIZIONE



$\omega r \vec{\mu} \perp r \vec{\lambda}$ e ha le componenti che sono le derivate delle componenti di $r \vec{\lambda}$



$$\frac{d(r \vec{\lambda})}{dt} = \omega r \vec{\mu} = \omega r [\vec{k} \times \vec{\lambda}] = \omega \vec{k} \times r \vec{\lambda}$$

2) LEGGI DELLA DINAMICA DI NEWTON

→ moto rettilineo uniforme

1) Una particella resta a riposo o continua a muoversi se la risultante delle forze applicate ad essa è uguale a zero

2) $\sum \vec{F}_{est} = m \vec{a}$

3) Azione-reazione

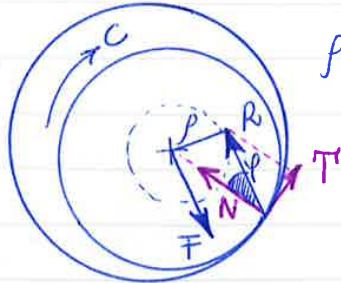
Per il corpo rigido

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_{est} = m \vec{a}_G \\ \sum \vec{M}_{est} = I_G \vec{\omega}_G \end{cases} \quad \begin{matrix} \vec{F}_{in} = -m \vec{a}_G \\ \vec{M}_{in} = -I_G \dot{\omega} \end{matrix}$$

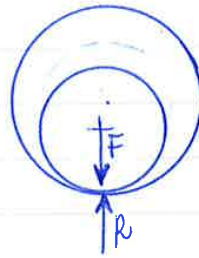
Equilibrio

$$\begin{cases} \sum_i \vec{F}_{est,i} + \vec{F}_{in,G} = 0 \\ \sum_i \vec{M}_{est,G,i} + \vec{M}_{in,G} = 0 \end{cases}$$

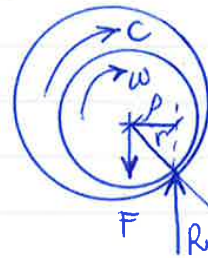
5) ATRITO AL PERNO



$p = r \sin \varphi$



F ed R hanno la stessa retta d'azione



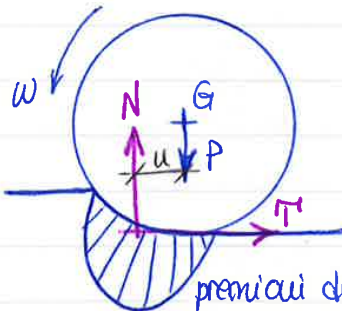
F ed R non hanno più la stessa retta d'azione ma formano una coppia
 $C = Fp = Rp$

Queste considerazioni valgono per qualunque orientazione di F

- R è sempre tangente al cerchio d'attrito di raggio p
- R deve essere opposta a $\vec{\omega}$
- R deve rispettare l'equilibrio del corpo

6) ATRITO VOLVENTE

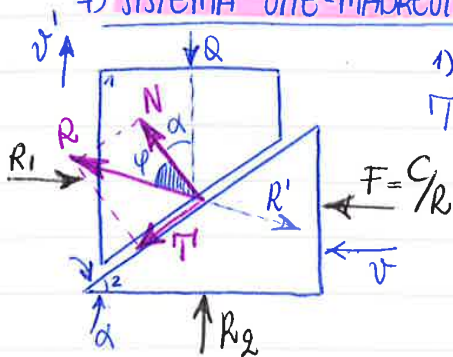
f_u = coefficiente di attrito volvente
 u = parametro di attrito volvente



$Nu = T'r \quad T = \frac{u}{r} N = f_u N$

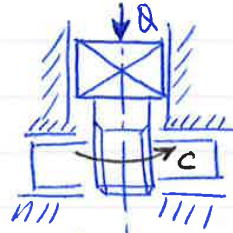
prencipi di contatto sbilanciati \Rightarrow la reazione R del piano di rotolamento non è applicata nel punto di contatto ma spostata della quantità u in modo da opporsi a ω

7) SISTEMA VITE-MADREVITE



1) vite 2) madrevite

T' : la componente verticale T'_v deve essere opposta al moto

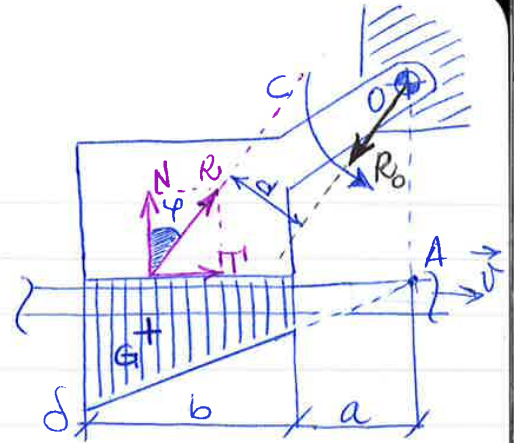
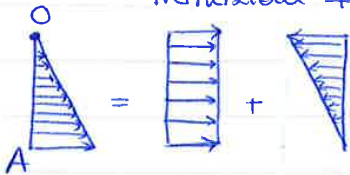


$$\begin{aligned} 1) \quad & \uparrow -Q + R \cos(\alpha + \varphi) = 0 \\ & \rightarrow R_1 - R \sin(\alpha + \varphi) = 0 \\ 2) \quad & \uparrow R_2 - R \cos(\alpha + \varphi) = 0 \\ & R \sin(\varphi + \alpha) - F = 0 \end{aligned}$$

9) FRENO A PATUINO AD ACCOSTAMENTO RIGIDO

scuopongo il moto del pattino

- rotazione intorno ad A (moto di usura)
- traslazione $\perp OA$



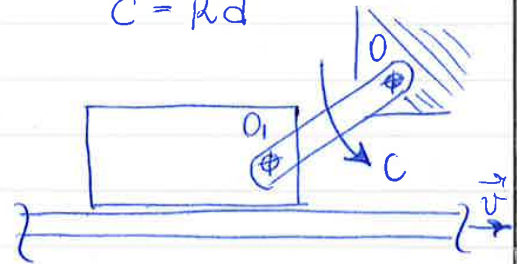
N : α_N corrisponde a $\alpha_G = \alpha_0$

$$\alpha_0 = \frac{2(a+b)^3 - a^3}{3(a+b)^2 - a^2}$$

hp usura $\delta = k' \int p v_{rel} dt$ (costante)
 $p = k' \delta$

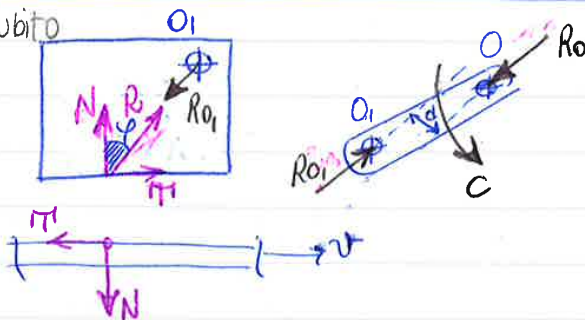
(uso l'usura per trovare il punto di applicazione di R)

R e R_0 formano una coppia opposta a C
 $C = R d$



10) FRENO A PATUINO AD ACCOSTAMENTO LIBERO

pono di disegnare subito i D.C.L. \otimes



\otimes pattino: sottoposto a due forze
 • reazione di contatto
 • reazione cerniera
 R è inclinata di φ rispetto a N

$$T = R \sin \varphi$$

$$C = R_0 d = R d = \frac{T}{\sin \varphi} d \quad \text{relazione C e forza frenante T}$$