



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1873A -

ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Calvo Alberto

MATERIA: Aerodinamica - prof. Arina

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

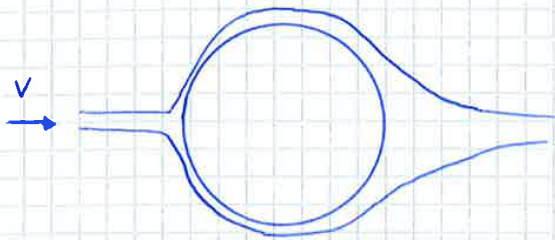
AERODINAMICA

NUMERO DI REYNOLDS

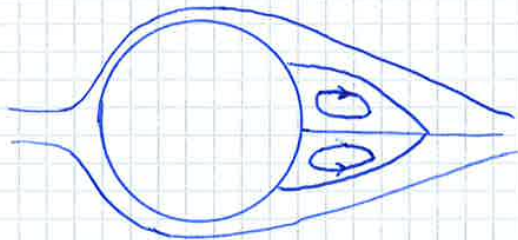
$$Re = \frac{F_{inerzia}}{F_{viscose}} = \rho \cdot \frac{VL}{\mu} = \frac{V \cdot L}{\nu}$$

V: Velocità della corrente
 L: Diametro del cilindro
 μ : Coefficiente di viscosità dinamica
 ν : Coefficiente di viscosità sperimentale

Vediamo come variano le situazioni al variare del numero di Reynolds

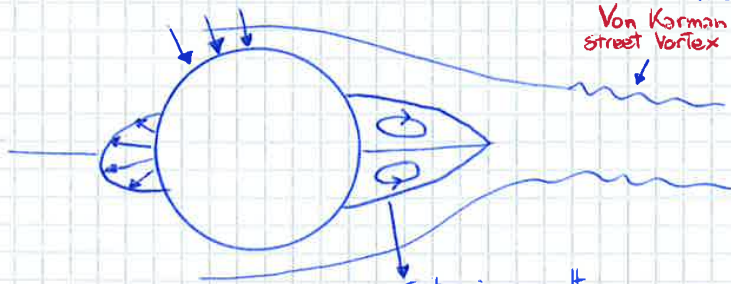


$Re \leq 4 \Rightarrow$ Simmetria dappertutto



$Re \leq 40 \Rightarrow$ Simmetria sopra e sotto ma non davanti e dietro

I vortici sono separati da linee di separazione che si originano sul corpo nei punti di separazione

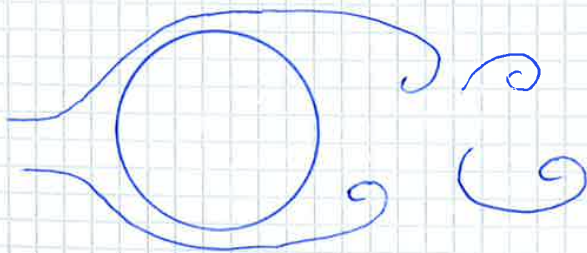


Von Karman street Vortex

$Re > 40$

Situazione molto instabile

\Rightarrow Basta un disturbo infinitesimo e si muove portando alla situazione di sotto

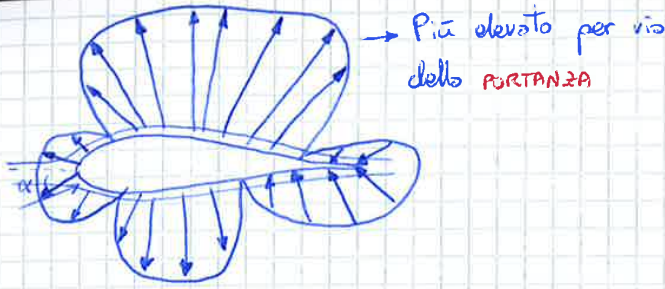


$Re > 40$

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{cost}$$

\rightarrow Succede quando uno dei due vortici si toglie

Quindi abbiamo visto il passaggio da un flusso laminare a uno turbolento



In questo caso la compensazione c'è ma non è simmetrica

STRATO LIMITE

- Per alti Re gli effetti della viscosità sono confinati in una sottile regione lungo le pareti e nella scia. Questa sottile regione è lo **STRATO LIMITE**

Teoria dello Strato Limite di Prandtl: Si può trascurare la viscosità solo oltre lo strato limite.

EFFETTI DEL NUMERO DI MACH

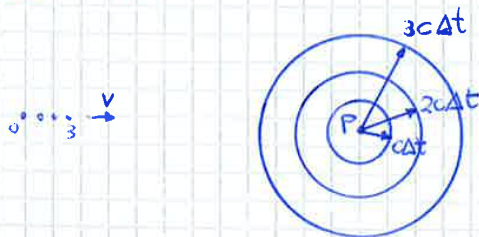
$$M = \frac{V}{c} \Rightarrow \text{Numero di Mach}$$

V: Velocità
c: Velocità del suono

$$c^2 = \gamma RT = \gamma \frac{p}{\rho} \Rightarrow \text{Come si può vedere, la velocità del suono è una variabile termodinamica}$$

- Considerando una sorgente di piccole perturbazioni immersa in un fluido in quiete ed animata da moto rettilineo uniforme, al variare della velocità V si possono avere situazioni differenti.

[1° CASO] $V=0 \rightarrow M=0$



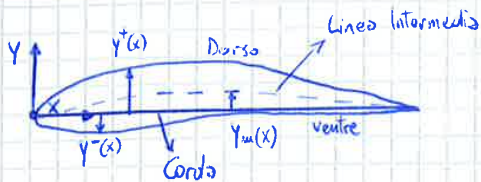
Il disturbo emesso dalla sorgente si propaga come un'onda sferica di centro P

[2° CASO] $V < c \rightarrow M < 1$



La sorgente si muove da sinistra verso destra. In questo caso le sfere non si intersecheranno e la perturbazione raggiungerà dopo un opportuno tempo di percorrenza, ogni punto dello spazio.

PROFILO ALARE



$$y_m(x) = \frac{1}{2} (y^+(x) + y^-(x))$$

$$y_s(x) = \frac{1}{2} (y^+(x) - y^-(x))$$

$$y^+ = y_m + y_s$$

$$y^- = y_m - y_s$$

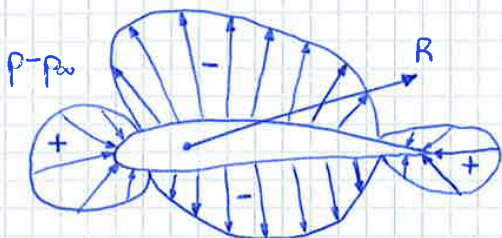


⇒ Profilo SIMMETRICO → L'inarcamento della linea media è nullo.

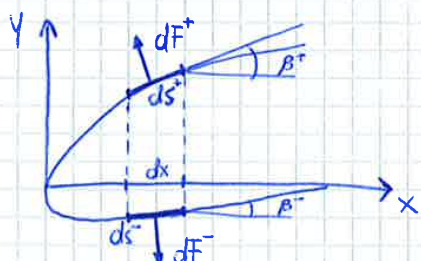
$$\frac{1}{l} = 0,03 = 3\%$$

$$\frac{S}{l} = 0,12 = 12\%$$

PORTANZA, RESISTENZA, MOMENTO DI BECCHEGGIO DI UN PROFILO ALARE

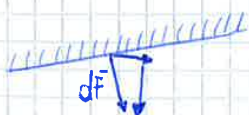
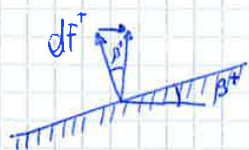


$$\vec{R} = - \oint_S p \vec{n} ds = - \oint_S (p - p_\infty) \vec{n} ds$$



$$d\vec{F}^\pm = (p^\pm - p_\infty) \cdot \vec{n} ds^\pm$$

$$\left. \begin{aligned} dF_x^+ &= -dF^+ \sin \beta^+ = -(p^+ - p_\infty) \sin \beta^+ \cdot ds^+ \\ dF_y^+ &= dF^+ \cos \beta^+ = (p^+ - p_\infty) \cos \beta^+ \cdot ds^+ \\ dF_x^- &= dF^- \sin \beta^- = -(p^- - p_\infty) \sin \beta^- \cdot ds^- \\ dF_y^- &= -dF^- \cos \beta^- = (p^- - p_\infty) \cos \beta^- \cdot ds^- \end{aligned} \right\} |dF_x^\pm| \ll |dF_y^\pm|$$



$$R_x = \int_0^l dF_x^- + \int_0^l dF_x^+ \quad (|R_x| \ll |R_y|)$$

$$R_y = \int_0^l dF_y^- + \int_0^l dF_y^+$$

$$\beta^\pm \ll 1 \quad \begin{aligned} \cos \beta^\pm &\approx 1 \\ \sin \beta^\pm &\approx \beta^\pm \ll 1 \end{aligned}$$

$$ds^\pm = dx \cos \beta^\pm \approx dx$$

Scomponendo la forza risultante in resistenza D, lungo la direzione del moto, e la portanza L lungo la direzione perpendicolare, assumendo che la corrente uniforme investe il profilo alare con incidenza α , risulta



FORMA ADIMENSIONALE DELLE FORZE E DEI MOMENTI

TEOREMA DI BUCKINGHAM: Una relazione funzionale di n variabili fisiche, anche indefinita, che descrive un fenomeno può essere riformulata in funzione di $n-p$ parametri adimensionali $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p$, dove p è il numero di dimensioni fondamentali

- Per ottenere la dipendenza funzionale si ipotizza che la forza su di un corpo di forma assegnata dipenda dai seguenti fattori:

$$F = (\text{geometria}, l, V, \rho, T, p, E, \mu, \kappa, T_w, g)$$

geometria: Forma del profilo alare, angolo di incidenza

l: lunghezza caratteristica della geometria (lunghezza corda per il profilo alare)

T_w: Temperatura corpo

g: Gravità

v: Velocità

- La dipendenza funzionale può assumere una forma polinomiale del tipo:

$$F \sim l^a V^b \rho^c T^d p^e \mu^f \kappa^g T_w^h g^i \Rightarrow \text{Le lettere sono coeff. numerici}$$

$$[\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}] = [\text{m}]^a [\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]^b [\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}]^c [\text{K}]^d [\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}]^e [\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}]^f [\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}]^g [\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{s}^{-3}]^h [\text{K}]^i [\text{m} \cdot \text{s}^{-2}]^i$$

- Per omogeneità dimensionale, ovvero affinché a destra abbia le stesse unità di misura che a sinistra, ottengo 4 equazioni per le 10 incognite.

$$[\text{m}] \Rightarrow 1 = a + b - 3c - e + 2f - g + h + l$$

$$[\text{kg}] \Rightarrow 1 = c + e + g + h$$

$$[\text{s}] \Rightarrow -2 = -b - 2e - f - g - 3h - 2l$$

$$[\text{T}] \Rightarrow 0 = d - h + i$$

- Quindi ottengo:

$$F \sim l^{2-g-h+l} v^{2-2e-f-g-3h-2l} \rho^{1-e-g-h} T^{h-i} p^e \mu^f \kappa^g T_w^h g^i$$

$$F \sim \rho v^2 l^2 \left[\left(\frac{p}{\rho v^2} \right)^e \left(\frac{E}{v^2} \right)^f \left(\frac{\mu}{\rho v l} \right)^g \left(\frac{\kappa T}{\rho l v^3} \right)^h \left(\frac{T_w}{T} \right)^i \left(\frac{lg}{v^2} \right)^e \right]$$

$$C_p = \frac{P - P_0}{\frac{1}{2} \rho V_0^2} \Rightarrow \text{COEFFICIENTE DI PRESSIONE}$$

$$C_e = \int_0^l \frac{P^- - P^+}{\frac{1}{2} \rho V_0^2} \cdot \frac{dx}{l} = \int_0^l \left[\frac{(P^- - P_0)}{\frac{1}{2} \rho V_0^2} - \frac{(P^+ - P_0)}{\frac{1}{2} \rho V_0^2} \right] d\left(\frac{x}{l}\right) = \int_0^l \Delta C_p d\left(\frac{x}{l}\right)$$

$$C_e = \int_0^l \Delta C_p d\left(\frac{x}{l}\right) \quad \Delta C_p = C_p^- - C_p^+$$

$$C_{M_A} = \int_0^l (C_p^+ - C_p^-) \frac{x}{l} d\left(\frac{x}{l}\right) = - \int_0^l \Delta C_p \frac{x}{l} d\left(\frac{x}{l}\right)$$

$$C_{M_A} = - \int_0^l \Delta C_p \frac{x}{l} d\left(\frac{x}{l}\right)$$

$$C_{M_p} = C_{M_A} + C_p \frac{x_p}{l} \Rightarrow \text{Formulo di trasposizione dei momenti (Adimensionale)}$$

EQUAZIONI FONDAMENTALI - CAPITOLO 2

DESCRIZIONE DEL MOTO FLUIDO

$$\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

$$d\vec{v} = du\vec{i} + dv\vec{j} + dw\vec{k} \Rightarrow \text{Variazione infinitesima}$$

$$d\vec{v} = (d\vec{s} \cdot \nabla u)\vec{i} + (d\vec{s} \cdot \nabla v)\vec{j} + (d\vec{s} \cdot \nabla w)\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{v}}{ds} = (\vec{e} \cdot \nabla u)\vec{i} + (\vec{e} \cdot \nabla v)\vec{j} + (\vec{e} \cdot \nabla w)\vec{k} = \vec{e} \cdot \nabla \vec{v}$$

$$\begin{cases} du = d\vec{s} \cdot \nabla u \\ dv = d\vec{s} \cdot \nabla v \\ dw = d\vec{s} \cdot \nabla w \end{cases}$$

$$\nabla \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

\Rightarrow Gradiente di \vec{v} che è un tensore di ordine 2.

• Il tensore può essere scomposto nella somma di un tensore simmetrico e uno antisimmetrico

$$\nabla \vec{v} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T) + \frac{1}{2} (\nabla \vec{v} - \nabla \vec{v}^T) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2u_x & u_x + v_x & u_z + w_x \\ \cdot & 2v_y & v_z + w_y \\ \cdot & \cdot & 2w_z \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & u_y - v_x & u_z - w_x \\ v_x - u_y & 0 & v_z - w_y \\ \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

D B

3 Dilatazione Volumetrica $\nabla \cdot \vec{v}$

4 Deformazione (\Rightarrow volume costante)

LINEE DI CORRENTE, TRAIETTORIE

TRAIETTORIA: Curva descritto da un elemento fluido durante il suo movimento e si ottiene specificando la posizione o la velocità dell'elemento fluido in funzione del tempo

LINEA DI CORRENTE: Curva che a un certo istante risulta tangente in ogni suo punto al vettore velocità in quel punto ed in quell'istante

La loro forma dipende dal sistema di riferimento utilizzato

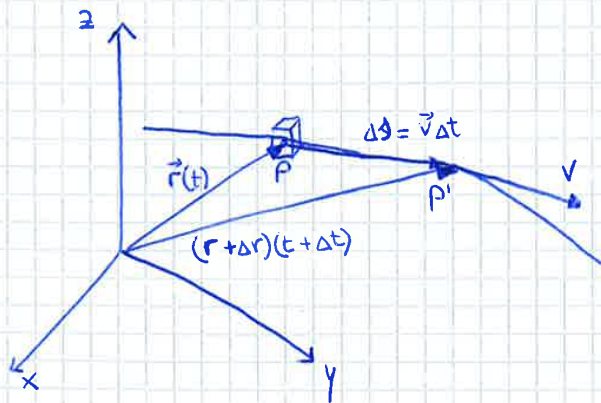


Sistema di Riferimento solido con il corpo



Sistema di Riferimento solido con il fluido in quiete

DESCRIZIONE LAGRANGIANA ED EULERIANA



$$\Delta Q = Q(\vec{r} + \Delta \vec{r}, t + \Delta t) - Q(\vec{r}, t)$$

$$\Delta t \rightarrow 0 \quad \frac{DQ}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q(\vec{r} + \Delta \vec{r}, t + \Delta t) - Q(\vec{r}, t)}{\Delta t}$$

FLUIDO IN MOVIMENTO

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \Rightarrow \text{Pressione Idrodinamica}$$

- La **pressione idrodinamica** rappresenta il valor medio delle componenti normali degli sforzi σ_{ij}
- Possiamo interpretare gli sforzi σ_{ij} come la somma di una parte isotropa ed una parte rimanente non isotropa

$$\Pi = -p \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{\tau}_{11} & \hat{\tau}_{12} & \hat{\tau}_{13} \\ \hat{\tau}_{22} & \hat{\tau}_{23} & \\ \hat{\tau}_{33} & & \end{vmatrix} \quad i \neq j \Rightarrow \hat{\tau}_{ij} = \sigma_{ij}$$

$$\hat{\tau}_{ii} = \sigma_{ii} - \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$$

$$\sum_i \hat{\tau}_{ii} = \sum_i \sigma_{ii} - \sum_i \sigma_{ii} = 0 \Rightarrow \text{Traccia nulla}$$

RELAZIONE TRA SFORZI VISCOSI E DEFORMAZIONI

- Come [prima ipotesi] assumiamo che il tensore degli sforzi viscosi $\underline{\tau}$ dipenda solamente dalla distribuzione istantanea della velocità del fluido nell'intorno dell'elemento. Il gradiente delle velocità $\nabla \vec{v}$ ne misura lo scostamento dalla condizione di uniformità.
- Poiché solo la dilatazione volumetrica e la distorsione della forma descritti dai termini non diagonali del tensore delle velocità di deformazione \underline{D} , è possibile dedurre che gli sforzi viscosi sono creati solo dalle componenti di \underline{D} .

$$\underline{\tau} = \underline{\tau}(\underline{D})$$

- La [seconda ipotesi] è che $\underline{\tau}$ sia una funzione lineare del gradiente delle velocità $\nabla \vec{v}$

$$\tau_{ij} = A_{ijkl} \frac{\partial v_k}{\partial x_l}$$

A_{ijkl} : Tensore (di ordine 4) delle viscosità

↳ In un fluido isotropo dev'essere simmetrico in $ijkl$.

- L'unica dipendenza funzionale compatibile con le ipotesi finora formulate è

$$\underline{\tau} = 2\mu \underline{D} + \lambda (\nabla \vec{v}) \cdot \underline{I} \Rightarrow \tau_{ij} = 2\mu D_{ij} + \lambda \underbrace{D_{kk}}_{\text{Traccia di } D} \delta_{ij}$$

- Queste due relazioni valgono per i fluidi newtoniani

• Applicando il teorema di Gauss per un volume Ω nello spazio, assumendo che i flussi e le sorgenti superficiali siano continue e differenziabili, la legge precedente può essere riscritta nella forma:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial q}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} [\nabla \cdot f(q, \vec{v})] d\Omega = \int_{\Omega} q_v d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla \cdot q_s) d\Omega$$

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot f(q, \vec{v}) \right] d\Omega = \int_{\Omega} (q_v + \nabla \cdot q_s) d\Omega$$

$$\boxed{\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot f(q, \vec{v}) = q_v + \nabla \cdot q_s} \Rightarrow \text{Forma Differenziale della legge di conservazione per una quantità scalare}$$

EQUAZIONI DELLA MECCANICA DEI FLUIDI

• Le equazioni del moto per un fluido viscoso si ottengono applicando i seguenti principi:

- 1] CONSERVAZIONE DELLA MASSA
- 2] CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO
- 3] CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

CONSERVAZIONE DELLA MASSA

ρ : Massa per unità di volume

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega = - \oint_{\partial\Omega} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS}$$

• Per valori positivi di $\vec{V} \cdot \vec{n}$ si ha una portata uscente di fluido che determina

una diminuzione di massa

• Applicando il teorema di Gauss al secondo membro ottengo:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \vec{V}) d\Omega$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0}$$

Forma Differenziale dell'eq. di conservazione della massa (o Eq. di Continuità)

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{V}}$$

Eq. di continuità in Forma Lagrangiana

$$\rho \frac{DE}{Dt} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \nabla \cdot (\underline{\underline{\tau}} \cdot \vec{v}) + \rho \vec{f} - \nabla \vec{q} + Q_v$$

Formulazione Lagrangiana dell'eq. dell'Energia

EQUAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA E INTERNA

• A partire dalla seguente espressione:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} + \rho \vec{f}$$

è possibile, moltiplicando ambo i membri per il vettore velocità, ricavare il bilancio dell'energia meccanica (cinetica) per unità di massa $\frac{v^2}{2}$:

$$\rho \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}) = -\nabla p \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}) + \rho \vec{f} \cdot \vec{v}$$

$$\left[\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \rho \vec{v} \cdot \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) - \nabla p \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}) + \rho \vec{f} \cdot \vec{v} \right]$$

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = -\nabla p \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}) + \rho \vec{f} \cdot \vec{v}$$

$$\left[\rho \frac{DE}{Dt} = \rho \frac{\partial E}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla E = -p(\nabla \cdot \vec{v}) + (\underline{\underline{\tau}} \cdot \nabla) \cdot \vec{v} - \nabla \vec{q} + Q_v \right] \rightarrow \text{Eq. dell'energia interna}$$

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \rho \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \rho \Rightarrow \text{Lavoro delle forze di pressione}$$

$$\nabla (\underline{\underline{\tau}} \cdot \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\nabla \underline{\underline{\tau}}) + (\underline{\underline{\tau}} \cdot \nabla) \cdot \vec{v}$$

$$= \Phi \cdot \rho$$

Contributo degli sforzi viscosi

$$\Rightarrow \Phi = \frac{1}{\rho} (\underline{\underline{\tau}} \cdot \nabla) \cdot \vec{v} \rightarrow \text{FUNZIONE DI DISSIPAZIONE}$$

EQUAZIONE DELLA VORTICITÀ

• Applicando il rotore all'equazione vettoriale della quantità di moto è possibile ottenere un'equazione che governa l'evoluzione del campo della vorticità:

$$\nabla \times \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \times \vec{v} \cdot \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{\omega}) = -\nabla \times \left(\frac{\nabla p}{\rho} \right) + \nabla \times \left(\frac{\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}}{\rho} \right) + \nabla \times \underline{\underline{f}}$$

• Il termine $-\nabla \times (\vec{v} \times \vec{\omega})$ può essere sviluppato applicando l'identità vettoriale:

$$-\nabla \times (\vec{v} \times \vec{\omega}) = -(\nabla \cdot \vec{\omega}) \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{\omega} - \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{v} + \vec{\omega} (\nabla \cdot \vec{v})$$

$\rightarrow = 0$ poiché $\vec{\omega}$ è un campo solenoidale

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) = \rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) + \vec{v} \cdot \nabla \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) \right] = \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{v} - \frac{\nabla p \times \nabla p}{\rho^2} + \nabla \times \left(\frac{\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}}{\rho} \right) + \nabla \times \underline{\underline{f}}$$

Eq. del Trasporto della Vorticità

II Condizione lungo una parete solida: In questo caso la corrente è delimitata dalla presenza di una parete impermeabile, senza portata di fluido attraverso di essa.

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

Condizione di Tangenza

EQUAZIONE DI BERNOULLI

$$\nabla \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) - \vec{v} \times \vec{\omega} = 0 \quad \Rightarrow \text{In caso di corrente stazionaria}$$

$$\nabla \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \cdot \vec{e} - (\vec{v} \times \vec{\omega}) \cdot \vec{e} = 0$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = 0$$

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{cost} = H_B \quad \Rightarrow \text{Eq. di BERNOULLI lungo una linea di corrente}$$

La costante H_B non è in genere costante in tutto il dominio ma solo lungo i punti che formano una linea di corrente, e varia da una linea di corrente all'altra.

Per esprimere la variazione di H_B scrivo:

$$\nabla \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = \nabla H_B = \vec{v} \times \vec{\omega}$$

$$\vec{\omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla H_B = 0$$

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{cost} = p_0 \quad \Rightarrow \text{Eq. di BERNOULLI per una corrente stazionaria}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}$ $\underbrace{\hspace{1.5cm}}$ $\underbrace{\hspace{1.5cm}}$
 Pressione Statica Pressione Dinamica Pressione Totale

- In questo caso però p_0 non dipende da ω .
- L'equazione di Bernoulli può essere interpretata come il bilancio di conservazione dell'energia meccanica. Quindi per un fluido ideale la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale è costante e uguale a p_0 .

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \vec{\omega} \cdot \vec{n} \, dS = 0 \Rightarrow \text{TEOREMA DI HELMHOLTZ}$$

CORRENTE IRROTAZIONALE

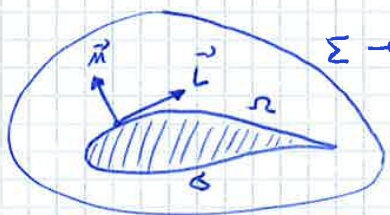
$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v} = 0 \Rightarrow$ Condizione di irrotazionalità

• Ciò implica la presenza di una funzione scalare Φ , detta potenziale delle velocità:

$\vec{v} = \nabla \Phi \Rightarrow \nabla \times (\nabla \Phi) = 0 \Rightarrow \nabla^2 \Phi$

PROBLEMA ESTERNO DI NEUMANN

$\nabla^2 \Phi = 0$
 $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$



$\Sigma \rightarrow$ sfera di raggio r

Su Ω $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$
 $\nabla \Phi \cdot \vec{n} = 0$
 $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$

$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0$

Φ in quanto soluzione dell'equazione di Laplace è una funzione armonica

Su Σ $\nabla \Phi = \vec{v}_{\infty}$
 $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0$

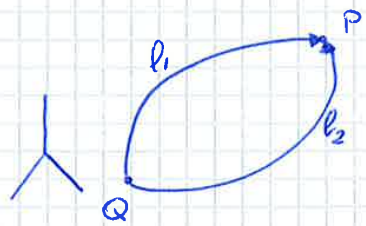
• L'unicità e le proprietà della soluzione dipendono dal dominio dove è definito il problema

DOMINIO SEMPLICEMENTE CONNESSO

• Uso il Teorema di Green

$$\int_{\Omega} \Phi \nabla^2 \Phi \, d\Omega + \int_{\Omega} |\nabla \Phi|^2 \, d\Omega = \oint_{\partial \Omega} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \, dS$$

$$= \frac{1}{2} \oint_{\partial \Omega} \frac{\partial \Phi^2}{\partial n} \, dS = \frac{1}{2} \oint_{\partial \Omega} \nabla \Phi^2 \cdot \vec{n} \, dS$$



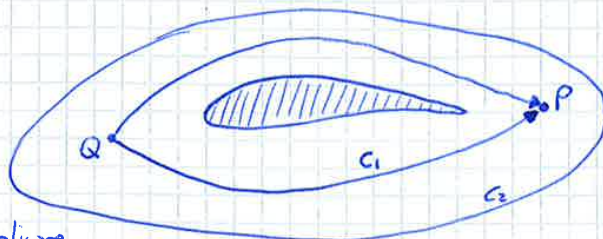
$\frac{1}{2} \oint_{\partial \Omega} \frac{\partial \Phi^2}{\partial n} \, dS = \int_{\Omega} |\nabla \Phi|^2 \, d\Omega$

$\frac{1}{2} \oint_{\partial \Omega} \frac{\partial v^2}{\partial n} \, dS = \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + |\nabla w|^2) \, d\Omega > 0$

• Da quest'ultima relazione vedo che il modulo della velocità v non può avere un massimo nel punto P : Il massimo della velocità è localizzato sul contorno $\partial \Omega$ del dominio. Infatti, essendo Φ e le sue derivate funzioni armoniche non poterano presentare massimi o minimi nell'interno del dominio.

■ DOMINIO DOPPIAMENTE CONNESSO

Nel caso aerospaziale il discorso è diverso poiché il profilo alare NON è semplicemente connesso.



• Se il circuito C_1 è irriducibile non è possibile individuare una superficie delimitata solo dal circuito C_1 e non è possibile applicare

il Teorema di Stokes. È tuttavia possibile affermare che, considerando un secondo circuito C_2 , anch'esso irriducibile, allora

$$\oint_{C_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \oint_{C_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\Omega} \vec{\omega} \cdot \vec{n} \, d\Omega = 0$$

$$\Gamma_{C_1} = \oint_{C_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \oint_{C_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \Gamma_{C_2} \Rightarrow \left[\text{La circuitazione attorno ai circuiti irriducibili ha lo stesso valore} \right]$$

$$\Gamma = [\Phi(P) - \Phi(Q)]_{C_2} - [\Phi(P) - \Phi(Q)]_{C_1}$$

$$\Gamma = [\Phi(P)]_{C_2} - [\Phi(P)]_{C_1}$$

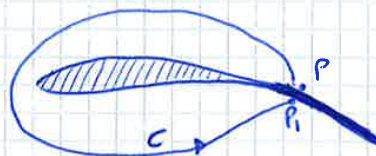
• La funzione potenziale Φ , in un dominio doppiamente connesso, può assumere più valori che differiscono di un multiplo di Γ , cioè la funzione Φ è a **valori multipli**. È possibile rendere la regione Ω semplicemente connessa introducendo una barriera

$$\Gamma = \oint_C d\Phi = \lim_{P_1 \rightarrow P} \int_P^{P_1} d\Phi = \lim_{P_1 \rightarrow P} [\Phi(P_1) - \Phi(P)]$$

$$\nabla^2(\Phi_1 - \Phi_2) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial n}(\Phi_1 - \Phi_2) = 0 \quad [\text{Su } \sigma]$$

$$\Phi_1 - \Phi_2 = 0 \quad [\text{Su } \Sigma]$$



• Per poter applicare il teorema di Green la funzione $\Phi_1 - \Phi_2$ deve essere a valore singolo. Nel dominio doppiamente connesso le funzioni Φ_1 , Φ_2 e la differenza $\Phi_1 - \Phi_2$ sono funzioni a valori multipli. Per renderle a valore singolo occorre introdurre una barriera nel dominio e si ottiene:

$$\int_{\Omega} |\nabla(\Phi_1 - \Phi_2)|^2 \, d\Omega = \int_{\sigma} (\Phi_1 - \Phi_2) \frac{\partial}{\partial n}(\Phi_1 - \Phi_2) \, ds - \int_{\text{bc}} (\Phi_1 - \Phi_2) \frac{\partial(\Phi_1 - \Phi_2)}{\partial n_1} \, ds - \int_{\text{fs}} (\Phi_1 - \Phi_2) \frac{\partial(\Phi_1 - \Phi_2)}{\partial n} \, ds + \int_{\text{TA}} (\Phi_1 - \Phi_2) \frac{\partial(\Phi_1 - \Phi_2)}{\partial n_1} \, ds$$

CORRENTE POTENZIALE, STAZIONARIA E BIDIMENSIONALE

CORRENTE PIANA (o BIDIMENSIONALE): Corrente che si sviluppa su una serie di piani paralleli, ed è la stessa su tutti i piani. La componente w della velocità lungo la direzione z perpendicolare ai piani è nulla, come pure le variazioni di tutte le altre variabili ($\frac{\partial(\cdot)}{\partial z} = 0$).

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j}$$

$$\boxed{\Phi} \quad u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$\omega = |\nabla \times \vec{V}| = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$$

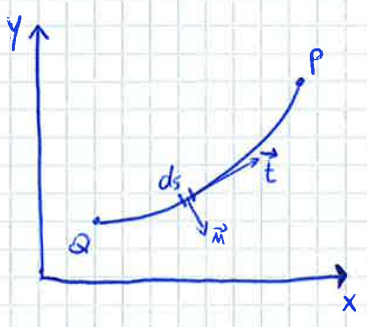
$$\nabla^2 \Phi = 0 \Rightarrow \text{Laplaciano}$$

$$\boxed{\Psi} \quad u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} = 0$$

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = -\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \Psi = 0}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \text{Cauchy-Riemann}$$



$$\begin{aligned} d\vec{s} &= (dx, dy) \\ \vec{t} &= (dx, dy) \\ \vec{n} &= (dy, -dx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |t| &= 1 \\ ds^2 &= dx^2 + dy^2 \\ \vec{t} \cdot \vec{n} &= 0 \end{aligned}$$

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = -v dx + u dy$$

La variazione della **funzione di corrente** Ψ lungo la linea vale:

$$\int_Q^P d\Psi = \int_Q^P (-v dx + u dy)$$

$$\Psi(P) - \Psi(Q) = \int_Q^P \vec{V} \cdot \vec{n} ds$$

CAMPI ELEMENTARI

CORRENTE UNIFORME

$$V_{00} = u \cdot \vec{i} + v \cdot \vec{j}$$

$$\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y = ux + vy \Rightarrow \text{Funzione Potenziale (Posto } \Phi(0,0)=0)$$

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} x + \frac{\partial \Psi}{\partial y} y = -vx + uy \Rightarrow \text{Funzione di Corrente (Posto } \Psi(0,0)=0)$$

- Le linee a Ψ costante, coincidendo con le linee di corrente, sono parallele al vettore V_0 , mentre le linee equipotenziali sono perpendicolari ad esso.

SORGENTE/POZZO PUNTIFORME

- Per la condizione di incompressibilità in coordinate polari si ha

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r v_r) = 0 \Rightarrow r v_r = K \Rightarrow v_r = \frac{K}{r}$$

- La portata in volume per unità di profondità Q emessa dalla sorgente è la stessa portata che attraversa ogni circuito che la include, integrando lungo una circonferenza C_r di raggio r si ha

$$Q = \oint_{C_r} \vec{V} \cdot \vec{e}_r ds = \oint_{C_r} v_r \cdot r d\theta = K \oint_{C_r} d\theta = 2\pi K \Rightarrow K = \frac{Q}{2\pi}$$

$$\vec{V} = \frac{Q}{2\pi r} \cdot \vec{e}_r \Rightarrow \text{Velocità dell'intensità della sorgente}$$

- La funzione di corrente si ottiene dalle relazioni

$$v_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0 \Rightarrow \Psi = \frac{Q}{2\pi} \theta$$

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{Q}{2\pi r} \quad 0 \leq \Psi \leq 2\pi$$

$$Q = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{C_\epsilon} v_r ds = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \epsilon} (\nabla \cdot \vec{V}) d\epsilon \Rightarrow \text{Per avere un valore finito, con } d\epsilon \rightarrow 0, \text{ si deve avere } \nabla \cdot \vec{V} \rightarrow \infty$$

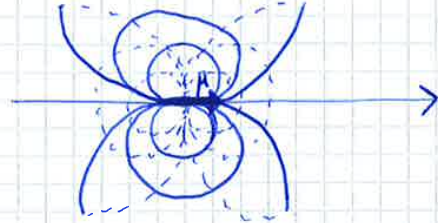
• Il potenziale della doppietta si ottiene in base alle relazioni di Cauchy-Riemann

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{M}{2\pi r^2} \cos \theta \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{M}{2\pi r^2} \sin \theta \end{aligned} \right\} \text{Cauchy-Riemann}$$

• Integrando ottengo

$$\Phi = -\frac{M}{2\pi r} \cdot \cos(\theta - \alpha) = -\frac{M}{2\pi} \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

$$\Psi = \frac{M}{2\pi r} \sin(\theta - \alpha)$$



α nel caso la doppietta non fosse allineata con X.

CILINDRO CIRCOLARE, PARADOSSO DI D'ALEMBERT

• Considerando la sovrapposizione di una di una doppietta, concorde con l'asse x, di momento $\mu = \mu \cdot \vec{i}$, dove \vec{i} è il versore lungo l'asse x, con una corrente uniforme $V_{\infty} = -V_{\infty} \cdot \vec{i}$, la funzione di corrente in un punto $P(r, \theta)$ del campo composto è

$$\Psi(r, \theta) = \frac{M}{2\pi r} \sin \theta - V_{\infty} y = \frac{M}{2\pi r} \sin \theta - V_{\infty} r \sin \theta$$

$$\Psi(r, \theta) = V_{\infty} r \left(\frac{M}{2\pi V_{\infty} r^2} - 1 \right) \sin \theta$$



• La linea di corrente $\Psi = 0$ si ottiene ponendo

$$\left(\frac{M}{2\pi V_{\infty} r^2} - 1 \right) \sin \theta = 0$$

$$\rightarrow \Psi = 0, \sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0, \pi$$

e ponendo:

$$\frac{M}{2\pi V_{\infty} r^2} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{M}{2\pi V_{\infty}} = r^2 \quad a = r = \sqrt{\frac{M}{2\pi V_{\infty}}}$$

- Il problema dell'assenza di forze scambiate tra il corpo e la corrente necessita un'analisi approfondita delle ipotesi utilizzate per ottenere il campo di moto.

Esse sono:

- 1] Fluido ideale, invisido e incompressibile
- 2] Corpo completamente immerso in un fluido illimitato
- 3] Corpo in moto stazionario
- 4] Moto irrotazionale
- 5] La circolazione lungo ogni percorso chiuso è nulla, e quindi la funzione potenziale è una funzione a valore singolo.

⇒ L'ultima è il motivo per cui non ci sono forze sul corpo.

TEORIA PORTANTE DELLE ALI AD ALLUNGAMENTO INFINITO

- Ci troviamo in una corrente uniforme stazionaria ($\Gamma=0$)
- In un dominio **doppiamente connesso**, una circolazione Γ diverso da zero implica che la funzione potenziale ha valori multipli, e la soluzione del **problema esterno di Neumann** per l'equazione di Laplace non è unica, ogni soluzione particolare è caratterizzata da un valore di circolazione Γ .

■ VORTICE IRROTAZIONALE

VORTICE CIRCOLARE: Regione circolare di raggio a , con vorticità ω costante e circondata da fluido illimitato esteriormente ed irrotazionale ($\omega=0$).

- Esternamente la velocità è costante e tangente lungo una circonferenza di raggio $r > a$. La circolazione è data da

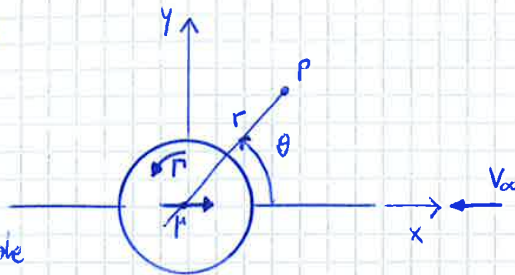
$$\Gamma = \oint_C \vec{v}_\theta \cdot d\vec{s} = 2\pi(\vec{v}_\theta \cdot r) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}} \Rightarrow \text{VELOCITÀ INDOTTA del vortice circolare (*)}$$

- Nel centro del vortice la **velocità indotta** è nulla, quindi un vortice circolare induce una velocità nulla nel suo centro, che evidentemente resta in **quiete**.
Le velocità alle estremità $\pm r$ hanno lo stesso modulo e direzione opposta, la velocità media nel vortice è nulla, quindi se un vortice circolare è posto in una corrente irrotazionale ma con velocità uniforme \vec{v} , esso trasla con velocità \vec{v} , trasportato dalla corrente, e la vorticità viene trasportata con esso.

CILINDRO CIRCOLARE CON ROTAZIONE

$$a = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi\kappa_0}}$$

- Se oltre alla doppietta e alla corrente uniforme si introduce un vortice irrotazionale positivo con centro nell'origine, si ottiene la funzione di corrente:



$$\Psi(r, \theta) = V_\infty r \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left(\frac{r}{a} \right)$$

$$v_r(r, \theta) = V_\infty \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) \cos \theta$$

$$v_\theta(r, \theta) = V_\infty \left(\frac{a^2}{r^2} + 1 \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

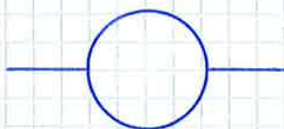
Componenti della velocità in un punto P di coordinate (r, theta)

$$v_r(a, \theta) = 0$$

$$v_\theta(a, \theta) = 2V_\infty \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a}$$

Sul cilindro, r = a

• Se $\Gamma = 0 \Rightarrow$



- Se invece $\Gamma > 0$ la posizione dei punti di arresto sul cilindro si ottiene imponendo che, per $r = a$, anche la componente v_θ si annulli

$$v_\theta(a, \theta_A) = 2V_\infty \sin \theta_A = 0 \Rightarrow \sin \theta_A = -\frac{\Gamma}{4\pi a V_\infty}$$

- Nel caso in cui $\Gamma > 4\pi a V_\infty$, si ha $|\sin \theta| > 1$, quindi non si ha nessun punto di arresto sulla superficie del cilindro. In questo caso il punto di arresto si sposta al di fuori del cilindro circolare e per trovare la sua posizione occorre imporre che entrambe le velocità si annullino contemporaneamente

$$v_r = 0 \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$$

$$v_\theta = 0$$

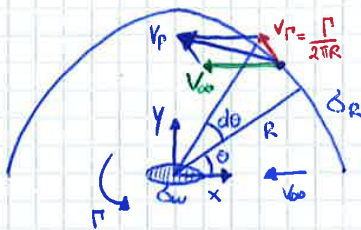
Se v_r si annulla per $\theta = -\frac{\pi}{2}$ allora per far annullare v_θ pongo $v_\theta(r, -\frac{\pi}{2}) = 0$

$$v_\theta(r, -\frac{\pi}{2}) = V_\infty \left(\frac{a^2}{r^2} + 1 \right) (-1) + \frac{\Gamma}{2\pi r} = 0$$

$$r^2 - \frac{\Gamma}{2\pi V_\infty} r + a^2 = 0 \Rightarrow r = \frac{\Gamma}{4\pi a V_\infty} + \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{4\pi a V_\infty} \right)^2 - a^2} > a$$

TEOREMA DI KUTTA-JOUKOWSKI

• Il risultato precedentemente trovato vale anche per qualunque cilindro di sezione arbitraria, quando alla corrente uniforme si sovrappone un moto con circolazione non nulla.



Ipotesi di avere un cilindro di sezione arbitraria immerso in una corrente uniforme. Possiamo dimostrare quanto appena affermato.

V_p : Velocità del campo di moto \Rightarrow Si ottiene componendo V_0 e $V_r = \frac{\Gamma}{2\pi R}$

Applico il principio di conservazione della quantità di moto, che nel caso di una corrente stazionaria di un fluido inviscido ed in assenza di forze esterne, in forma integrale si scrive:

$$\oint_{\delta R + \delta w} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = - \oint_{\delta R + \delta w} p \vec{n} dS \quad \delta = \delta R + \delta w$$

$$\left. \begin{aligned} u &= -V_0 - V_r \sin \theta \\ v &= V_r \cos \theta \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Componenti della velocità} \\ \text{complessiva in un punto P lungo} \\ \text{le direzioni coordinate} \end{array}$$

$$\oint_{\delta R} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_{Rx} \vec{i} + F_{Ry} \vec{j}$$

$$dF_R = dF_x \cos \theta = -pR \cos \theta d\theta$$

$$dF_{Py} = dF_y \sin \theta = -pR \sin \theta d\theta$$

• Bilanciando lungo le due direzioni trovo:

$$\rightarrow \int_0^{2\pi} \rho (V_0 + V_r \sin \theta) V_0 R \cos \theta d\theta = F_x - \int_0^{2\pi} p R \cos \theta d\theta$$

$$\uparrow \int_0^{2\pi} \rho V_0 V_r \cos^2 \theta R d\theta = F_y - \int_0^{2\pi} p R \sin \theta d\theta$$

• Per l'equazione di Bernoulli, poiché $\vec{v}^2 = |\vec{V}_0 + \vec{V}_r|^2 = V_0^2 + V_r^2 + 2V_0 V_r \sin \theta$ ed in campo lontano ($R \gg$) il contributo dovuto al vortice è $V_r \ll V_0$ e ho

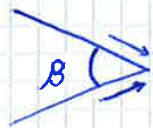
$$p = p_\infty + \frac{1}{2} \rho (V_0^2 - v^2) \approx p_\infty - \rho V_0 V_r \sin \theta$$

- Questa rappresenta la condizione addizionale, di natura fisica, necessaria per completare la **teoria portante dell'ala ad allungamento infinito**.
- In conclusione, quando un profilo alare viene investito da una corrente uniforme, si instaura una corrente con una componente circolare attorno ad esso tale da fornire la circuitazione necessaria per lo sviluppo della portanza.

■ IL PROBLEMA DEL PROFILO ALARE PORTANTE

In base a quanto detto, il problema della determinazione della corrente attorno ad un corpo portante, immerso in una corrente uniforme V_∞ , in termini della funzione potenziale Φ può essere ricondotto a:

$$\begin{cases} \nabla^2 \Phi = 0 \\ \nabla \Phi \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \text{Sulla superficie del corpo} \\ \nabla \Phi = V_\infty \Rightarrow \text{All'infinito} \end{cases}$$

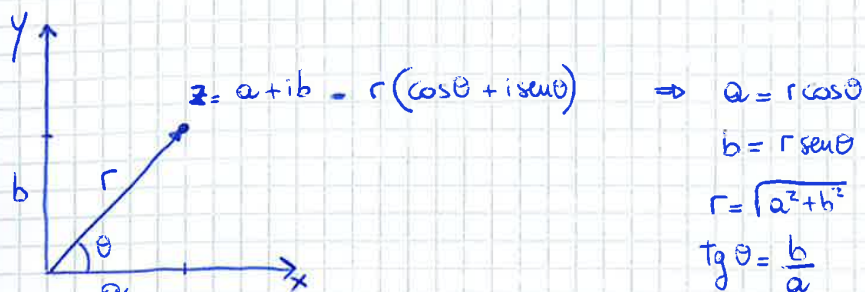


- L'interpretazione della condizione di regolarità della corrente (Kutta) dipende dalla forma del profilo al bordo di fuga. Nel caso in cui si ha $\alpha > 0 \Rightarrow$ **PUNTO D'ARRESTO**. In caso contrario, per la condizione di tangenza, la velocità sul dorso avrebbe una componente perpendicolare alla corda, di verso opposto a quella posseduta dalla velocità sul ventre, e si avrebbe una **discontinuità nelle componenti normali della velocità**. Sappiamo che una situazione del genere non è ammissibile poiché sono ammissibili solo le **discontinuità di contatto** dove è solo la componente tangenziale ad essere discontinua.
- Se il bordo di fuga presenta una cuspidale, $\beta = 0$, le velocità sul dorso e sul ventre sono parallele, e in base alla condizione di Kutta devono essere **finite**.

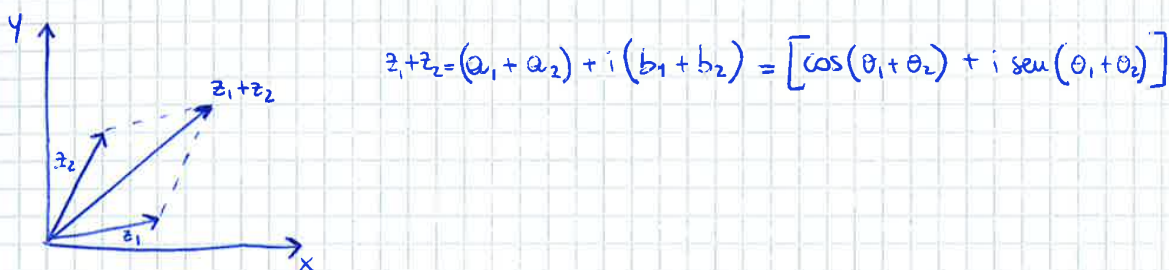
CARATTERISTICHE AERODINAMICHE DEI PROFILI ALARI - CAP. 4

POTENZIALE COMPLESSO DELLE VELOCITÀ

• Introduciamo qualche nozione di matematica



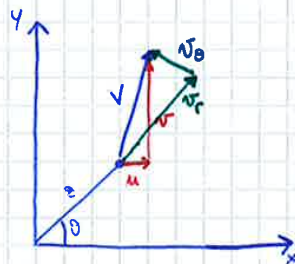
$[z_1 + z_2]$



• FUNZIONI ANALITICHE \Rightarrow PAGINA 307

$w(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y) \Rightarrow$ POTENZIALE COMPLESSO DELLE VELOCITÀ

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ = \frac{\partial w}{\partial (iy)} = -i \frac{\partial w}{\partial y} = -i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + i \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) = u - iv \end{aligned} \right\} = u - iv$$



$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$

• La derivata della funzione $w(z)$ rappresenta la funzione analitica detta **velocità complessa**, ed il suo modulo corrisponde al modulo della velocità $V = |u - iv|$

$$u - iv = u \cos\theta + v \sin\theta - i(v \cos\theta - u \sin\theta) = (u - iv)e^{i\theta} = \frac{dw}{dz} e^{i\theta}$$

↳ Il passaggio da componenti cartesiane a componenti polar della velocità si ottiene moltiplicando la velocità complessa per $e^{i\theta}$

$$z^n = r^n e^{in\theta}$$

$$\ln z = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta$$

■ SORGENTE/POZZO

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} (\ln r + i\theta) = \frac{Q}{2\pi} \ln z \Rightarrow \Gamma_0 = 1$$

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_0) \Rightarrow z_0 = x_0 + iy_0$$

■ VORTICE IRROTAZIONALE

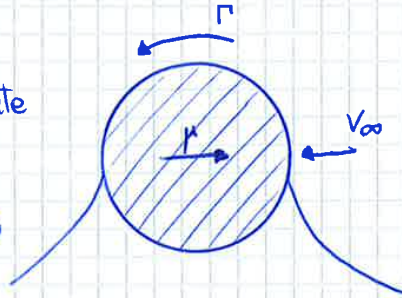
$$W(z) = \frac{\Gamma}{2\pi} (\theta - i \ln r) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z$$

■ DOPPIETA

$$W(z) = \frac{M}{2\pi r} [-\cos(\theta - \alpha) + i \sin(\theta - \alpha)] = -\frac{M}{2\pi r} e^{-i(\theta - \alpha)} = -\frac{M}{2\pi r} \cdot \frac{1}{re^{i\theta}} e^{i\alpha} = -\frac{M}{2\pi z} e^{i\alpha}$$

POTENZIALE COMPLESSO PER UN CILINDRO DI SEZIONE ARBITRARIA

• Il campo di moto attorno ad un cilindro circolare rotante investito da una corrente uniforme, $V = -V_\infty i$, si ottiene come composizione di una corrente uniforme, una doppietta con $\alpha = 0$, ed un vortice entrambi posizionati nell'origine.



La funzione analitica si ottiene sommando i singoli casi semplici:

$$W(z) = -V_\infty z - \frac{M}{2\pi z} - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z \Rightarrow \text{POTENZIALE COMPLESSO}$$

$$\frac{dW}{dz} = -V_\infty + \frac{M}{2\pi z^2} - i \frac{\Gamma}{2\pi r} \Rightarrow \text{VELOCITÀ COMPLESSA}$$

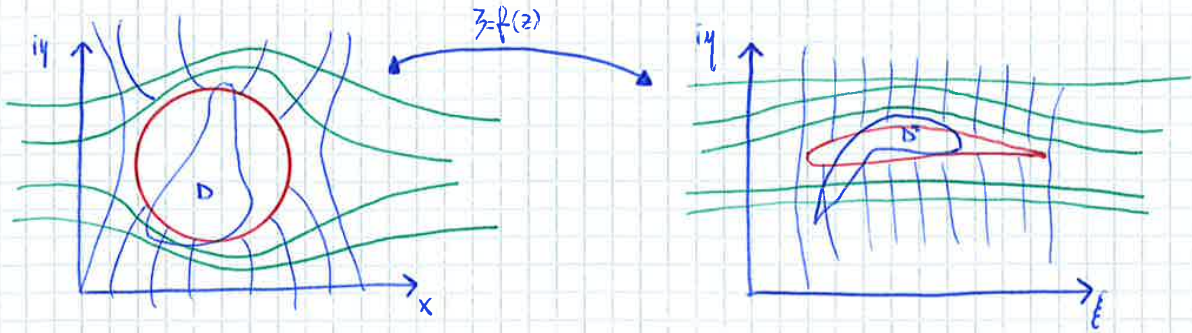
• Nel caso di un cilindro con sezione di forma non circolare, ponendo l'origine del sistema di coordinate all'interno del corpo, è possibile espandere la funzione che rappresenta la velocità complessa con una serie di Laurent, nell'intorno dell'origine $z_0 = 0$

$$\frac{dW}{dz} = a_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$$

$$W(z) = a_0 z + b_1 \ln z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \frac{b_n}{z^{n-1}} + \text{costante}$$

$$\begin{cases} a_0 = -V_\infty \Rightarrow \text{Corrente Uniforme} \\ b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dW}{dz} dz = \frac{1}{2\pi i} (\Gamma + iQ) \end{cases}$$

- Prima di introdurre una trasformazione conforme facciamo qualche premessa importante



- Le funzioni armoniche e analitiche definite sul piano z si trasformano nelle funzioni

$$\Phi^*(z) = \Phi[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$$

$$\Psi^*(z) = \Psi[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$$

$$w^*(z) = \Phi^*(\xi, \eta) + i\Psi^*(\xi, \eta)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial \eta^2} = 0$$

- Derivando il potenziale complesso si ottiene la velocità complessa

$$v^* = \frac{dw^*}{dz} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dz} = \frac{dw/dz}{f'(z)} = \frac{dw/dz}{f'(z)}$$

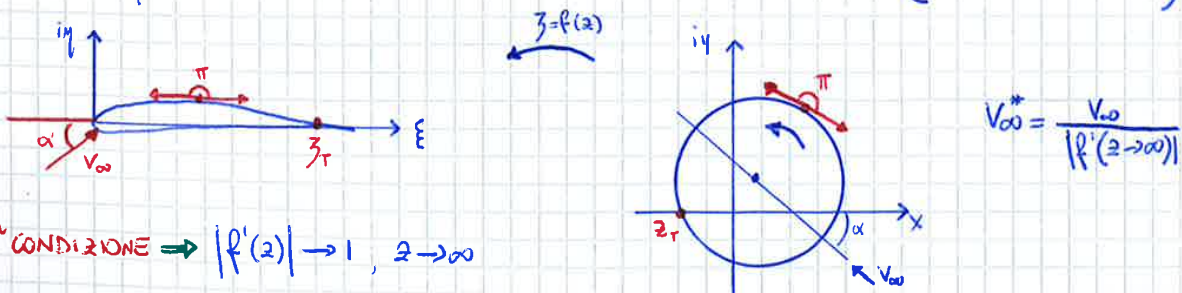
$$v^* = |u^* - iv^*| = \left| \frac{dw^*}{dz} \right| = \left| \frac{v}{f'(z)} \right| \Rightarrow \text{FORMULA MOLTO IMPORTANTE}$$

- ↳ Nei punti critici della trasformazione la velocità v^* diventa infinita.

$$\Gamma^* + iQ^* = \oint_C \frac{dw^*}{dz} dz = \oint_C \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dz} dz = \Gamma + iQ$$

- La trasformazione conforme conserva i valori della circolazione e dell'intensità totale delle sorgenti.

- Adesso posso introdurre la FUNZIONE DI TRASFORMAZIONE (KUTA-JOUKOWSKI)



$$v_{\infty}^* = \frac{v_{\infty}}{|f'(z \rightarrow \infty)|}$$

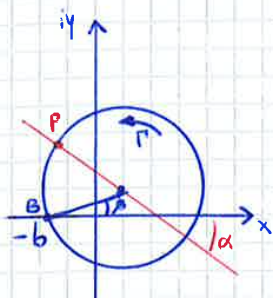
1^a CONDIZIONE $\Rightarrow |f'(z)| \rightarrow 1, z \rightarrow \infty$

2^a CONDIZIONE \Rightarrow Punto critico in z_T

PORTANZA e VELOCITÀ SU UN PROFILO DI KUTTA-JOUKOWSKI

$$V = 2V_{\infty} \sin(\theta + \alpha) + \frac{\Gamma}{2\pi a}$$

Per introdurre la PORTANZA
devo aggiungere un vortice



$$V_B = 2V_{\infty} \sin(\pi + \alpha) + \frac{\Gamma}{2\pi a} = 0$$

$$\Rightarrow \Gamma = 4\pi a V_{\infty} \sin \alpha$$



Se adesso sostituisco il valore della circolazione che ho appena trovato, nell'equazione della velocità ottengo:

$$V = 2V_{\infty} [\sin(\theta + \alpha) + \sin \alpha] \Rightarrow \text{VELOCITÀ CERCHIO}$$

A questo punto per il teorema di Kutta-Joukowski, nota la circolazione è possibile calcolare la portanza sul profilo, ricordando che la trasformazione conforme conserva il valore di Γ

$$L = \rho V_{\infty} \Gamma = 4\pi a \rho V_{\infty}^2 \sin \alpha \Rightarrow \text{PORTANZA PROFILO}$$

$$C_l = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 (4a)} = \frac{4\pi a \rho V_{\infty}^2 \sin \alpha}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 (4a)} \cdot \sin \alpha = 2\pi \sin \alpha \approx 2\pi \alpha$$

• Posso ora trovare la distribuzione della velocità sul profilo

$$V^* = \frac{1}{|f'(z)|} = \frac{2V_{\infty} [\sin(\theta + \alpha) + \sin \alpha]}{2 \sin \theta} = \frac{V_{\infty} \sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha + \sin \alpha}{\sin \theta} = V_{\infty} (\cos \alpha + \sin \alpha \cdot \frac{(1 + \cos \theta)}{\sin \theta})$$

$\cos \alpha \approx 1$
 $\sin \alpha \approx \alpha$

$$|f'(z)| = \left| 1 - \frac{b^2}{z^2} \right| = \left| 1 - \frac{a^2}{z^2} \right| e^{-2i\theta} = \left| [1 - \cos(2\theta)] + i \sin(2\theta) \right| = 2 |\sin \theta|$$

$$V^* = V_{\infty} \left(1 + \alpha \frac{(1 + \cos \theta)}{\sin \theta} \right)$$

Per $\theta \rightarrow \pi$ si ha $V^* \rightarrow V_{\infty} \Rightarrow \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = 0$

• Questo risultato è in accordo con la constatazione che il bordo di attacco della lamina piana corrisponde ad un punto critico della trasformazione dove $|f'(z)| = 0$.

TEORIA DELLE PICCOLE PERTURBAZIONI

$$\begin{cases} \nabla^2 \bar{\Phi} = 0 \\ \nabla \bar{\Phi} \cdot \vec{n} = 0 & \text{sul profilo} \\ \nabla \bar{\Phi} \rightarrow V_\infty & \text{All' } \infty \end{cases}$$

Kutta \Rightarrow Velocità finita e continua sul bordo di fuga

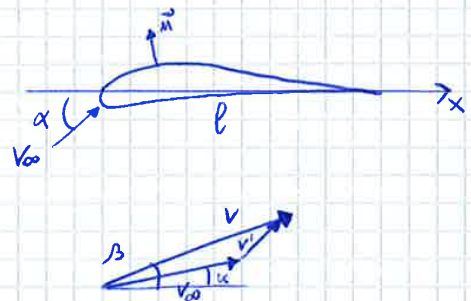
• Sapendo che $\vec{V} = \vec{V}_\infty + \vec{V}'$

e ricordando che $\nabla \varphi = \vec{V}'$ \Rightarrow **POTENZIALE DELLA PERTURBAZIONE**

$$\vec{V} = \vec{V}_\infty + \nabla \varphi \Rightarrow \bar{\Phi} = V_\infty (x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \varphi$$

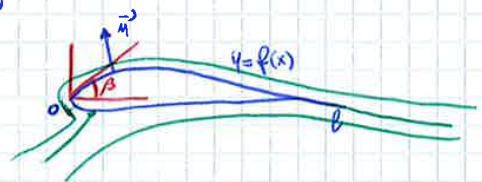
Quindi posso riscrivere le condizioni di prima

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = 0 \\ (\vec{V}_\infty + \nabla \varphi) \cdot \vec{n} = 0 & \text{sul profilo} \\ \nabla \varphi \rightarrow 0 & \text{all' } \infty \\ \text{Kutta} \end{cases}$$



• La **condizione di tangenza** può essere espressa in una forma più esplicita.

Sia $f(x)$ la linea che rappresenta la parete, definendo la funzione $F(x, y) = y - f(x) = 0$, il versore normale \vec{n} del profilo, assunto positivo uscente dal corpo, ha componenti, sul dorso e sul ventre,



$$\vec{n} = \pm \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{1}{|\nabla F|} \left(\mp \frac{df}{dx}, \pm 1 \right)$$

Quindi la condizione di tangenza diventa

$$(\vec{V}_\infty + \nabla \varphi) \cdot \vec{n} = 0$$

$$(\vec{V}_\infty + \nabla \varphi) \cdot \frac{1}{|\nabla F|} \left(\mp \frac{df}{dx}, \pm 1 \right) = 0$$

$$\frac{1}{|\nabla F|} \left[\mp (V_\infty \cos \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial x}) \frac{df}{dx} \pm (V_\infty \sin \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y}) \right] = 0$$

Da cui con $y = f(x)$

$$(V_\infty \cos \alpha + u') \frac{dy}{dx} - (V_\infty \sin \alpha + v') = 0$$

Indicando con y^+ la coordinata del dorso e con y^- quella del ventre, e con $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{x,0_{\pm}}$ le rispettive velocità, si ottiene la condizione di tangenza linearizzata nella forma:

$$\textcircled{1} \quad \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)_{x,0_{\pm}} = V_{\infty} \frac{dy^{\pm}}{dx} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{x,0_{\pm}} = V_{\infty} \left(\frac{dy^{\pm}}{dx} - \alpha\right)$$

$$\textcircled{2} \quad \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_{x,0_{\pm}} = -V_{\infty} \alpha$$

Abbiamo scomposto il problema lineare in due sottoproblemi di più facile soluzione rispetto a quello completo. Il primo sottoproblema soddisfa la condizione $\textcircled{1}$, e corrisponde al caso del profilo alare investito in una corrente senza incidenza.

Il secondo sottoproblema ha come condizione di tangenza la $\textcircled{2}$ ed è relativo al problema della corda, intesa come una lamina piana, investita dalla corrente con incidenza α . Entrambe le funzioni φ_1 e φ_2 rispettano $\nabla \varphi_i = 0$ e la condizione di Kutta.

Il primo sottoproblema può ancora essere scomposto in due problemi

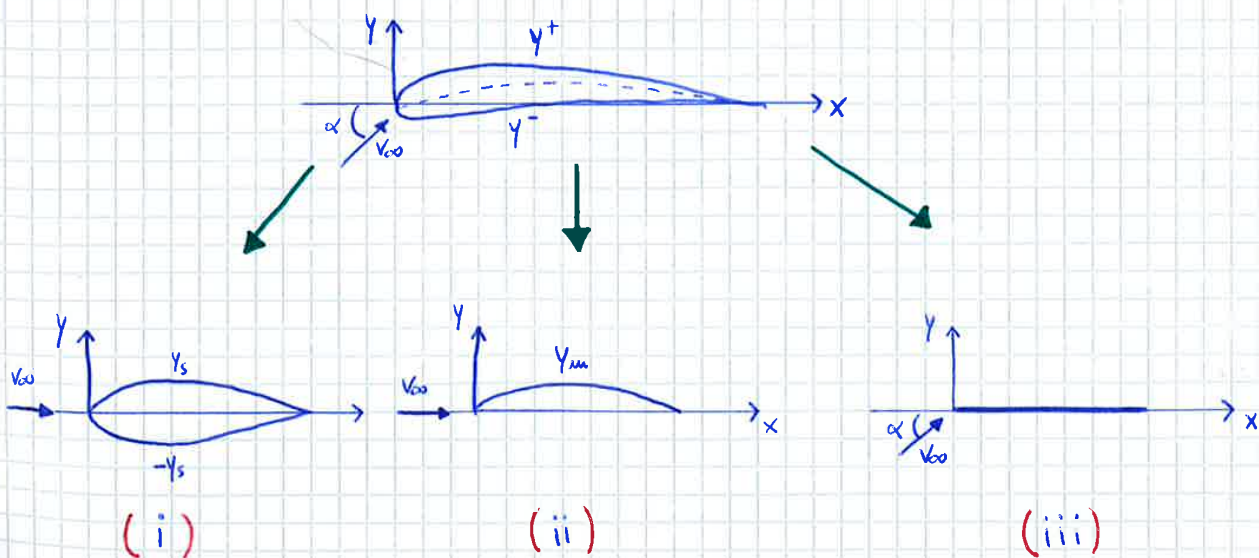
$$y^{\pm} = y_{um} \pm y_s$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_{11}}{\partial y}\right)_{x,0_{\pm}} = V_{\infty} \frac{dy_{um}}{dx} \quad \Rightarrow \quad \text{Condizione al contorno del problema relativo alla corrente attorno alla linea media}$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_{12}}{\partial y}\right)_{x,0_{\pm}} = V_{\infty} \frac{dy_s}{dx} \quad \Rightarrow \quad \text{Condizione per la corrente attorno al profilo simmetrico}$$

TEORIA DEI PROFILI SOTTILI: La perturbazione di una corrente uniforme attorno ad un profilo sottile e poco inarcato, per piccole incidenze, può essere calcolata come sovrapposizione di tre sottoproblemi:

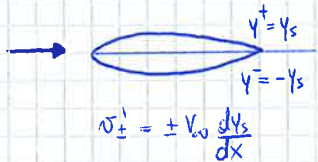
- (i) Problema simmetrico con $\alpha=0$ (Perturbazione dovuta allo spessore)
- (ii) Problema della linea media con incidenza nulla (Effetto dovuto all'inarcamento)
- (iii) Problema della lamina piana con incidenza α (Effetto dell'incidenza)



- Per una distribuzione di vortici, di intensità per unità di lunghezza $\gamma(x)$, e considerati positivi in senso orario

$$\gamma(x) \Rightarrow \begin{cases} w'(x, 0_{\pm}) = \pm \frac{\gamma(x)}{2} \\ v'(x, 0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\gamma(\xi)}{x-\xi} d\xi \end{cases}$$

[PROBLEMA 1]

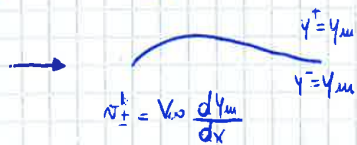


$$\frac{dy^+}{dx} = \frac{dy_s}{dx} \Rightarrow v'(x, 0_+) = -v'(x, 0_-) \Rightarrow q(x)$$

$$\frac{dy^-}{dx} = -\frac{dy_s}{dx} \quad \int_0^l q(x) dx = 0$$

Una discontinuità nelle velocità $v'(x, 0_{\pm})$ si ottiene con una distribuzione di sorgenti.

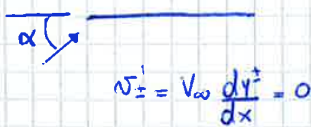
[PROBLEMA 2]



$$\frac{dy^+}{dx} = \frac{dy^-}{dx} = \frac{dy_m}{dx} \Rightarrow v'(x, 0_+) = v'(x, 0_-) \Rightarrow \gamma_1(x)$$

$$\Gamma = \int_0^l \gamma(x) dx$$

[PROBLEMA 3]



$$v'(x, 0_+) = v'(x, 0_-) = 0 \Rightarrow \gamma_2(x)$$

PROFILO SIMMETRICO SENZA INCIDENZA

• La perturbazione della corrente uniforme in questo caso è soluzione del problema

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = 0 \\ v'(x, 0_{\pm}) = \pm V_{\infty} \frac{dy_s(x)}{dx} \quad \text{sulla corda} \\ \nabla \varphi = 0 \quad \text{All' } \infty \\ \text{NO KUTTA} \end{cases}$$

$$q(x) = 2V_{\infty} \frac{dy_s(x)}{dx} \Rightarrow \text{Ricerata dalla condizione di tangenza}$$

$$\int_0^l q(x) dx = 2V_{\infty} \int_0^l \frac{dy_s}{dx} dx = 2V_{\infty} [dy_s]_0^l = 2V_{\infty} (y_s(l) - y_s(0)) = 0 \Rightarrow q(x) \text{ è in parte costituita da sorgenti e in parte da pozzi e genera un profilo di forma chiuso}$$

- Nota la funzione $\gamma(x)$, le componenti della velocità di perturbazione ed il coefficiente di pressione sono calcolabili mediante le relazioni

$$u'(x, 0_{\pm}) = \pm \frac{\gamma(x)}{2}$$

$$C_p^{\pm} = -2 \frac{u'(x, 0_{\pm})}{V_{\infty}} = \mp \frac{\gamma(x)}{V_{\infty}}$$

$$v'(x, 0) = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\gamma(\xi)}{\xi - x} d\xi$$

- L'equazione per determinare l'intensità della distribuzione dei vortici si ottiene sostituendo nella condizione di tangenza l'espressione di $v'(x, 0)$ in funzione di $\gamma(x)$.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\gamma(\xi)}{\xi - x} d\xi = V_{\infty} \left[\frac{d\psi_m}{dx}(x) - \alpha \right]$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\gamma(\theta') \sin \theta'}{\cos \theta' - \cos \theta} d\theta' = V_{\infty} \left[\frac{d\psi_m}{dx}(\theta) - \alpha \right]$$

Per avere una soluzione valida per ogni forma di linea media, è più pratico esprimere la funzione $\gamma(\theta')$ in forma di espansione in serie di funzioni trigonometriche e calcolare i coefficienti dell'espansione in base ai dati del problema.

È possibile correlare la funzione $\gamma(\theta)$ con la distribuzione di velocità $V(\theta)$.

$$V = \left| (V_{\infty} + u')\mathbf{i} + v'\mathbf{j} \right| \approx V_{\infty} + u' \Rightarrow \text{Per piccole perturbazioni}$$

$$\gamma(\theta) = u'(\theta) - u'(-\theta) \approx V(\theta) - V(-\theta)$$

Sapendo che $V(\theta) = V_{\infty} \left(1 + \alpha \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} + 2\beta \sin \theta \right)$ riscrivo

$$\gamma(\theta) \approx V_{\infty} \left[1 + \alpha \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} + 2\beta \sin \theta - 1 - \alpha \frac{1 + \cos(-\theta)}{\sin(-\theta)} - 2\beta \sin(-\theta) \right]$$

$$\gamma(\theta) \approx 2V_{\infty} \left[\alpha \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} + 2\beta \sin \theta \right] \Rightarrow \text{Per } \beta=0 \text{ trovo il caso della lamina piana}$$

$$\theta \rightarrow \pi \left\{ \begin{array}{l} \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = 0 \\ \sin \pi = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \gamma(\pi) = 0$$

- Questo risultato può essere esteso al caso di una lamina curva di forma generale, sostituendo α con una costante A_0 per tenere conto delle differenze rispetto alla lamina piana, e rappresentare gli effetti dell'inarcamento mediante una sommatoria di funzioni trigonometriche che soddisfano le stesse condizioni alle estremità della funzione $\sin \theta$.

Dall'ultima espressione si vede che α_{id} è l'incidenza per la quale non si ha un infinito di velocità al bordo di attacco, in quanto il contributo del termine $\frac{(1+\cos\theta)}{\sin\theta}$ si annulla. Per $\alpha \neq \alpha_{id}$ il disallineamento genera un punto di arresto sul ventre, o in alcuni casi sul dorso, costringendo la corrente a contornare il bordo di attacco appuntito e si ha un infinito di velocità per $\theta=0$. Per $\alpha = \alpha_{id}$ la corrente, in prossimità del bordo di attacco, si allinea con la pendenza della lamina a $\theta=0$.

- Per esprimere i coefficienti A_n si moltiplicano ambo i membri sempre della stessa equazione per $\cos(m\theta)$ e si integra rispetto a θ .

$$A_0 \int_0^\pi \cos(n\theta) d\theta - \sum_{m=1}^{\infty} A_m \underbrace{\int_0^\pi \cos(m\theta) \cos(n\theta) d\theta}_{\substack{\frac{\pi}{2} \text{ se } m=n \\ 0 \text{ se } m \neq n}} = \alpha \int_0^\pi \cos(n\theta) d\theta - \int_0^\pi \frac{d\gamma_m}{dx}(\theta) \cos(m\theta) d\theta$$

Quindi riepilogando quello che abbiamo trovato è

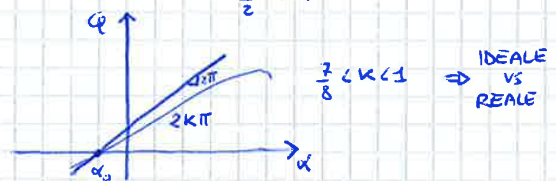
$$\begin{cases} A_m = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\gamma_m}{dx}(\theta) \cos(m\theta) d\theta \\ A_0 = \alpha - \alpha_{id} = \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\gamma_m}{dx}(\theta) d\theta \\ \gamma(\theta) = 2V_0 \left[(\alpha - \alpha_{id}) \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(m\theta) \right] \end{cases}$$

- Noti tutti i vari coefficienti si possono calcolare le pressioni e le forze sulla lamina piana

$$\begin{aligned} \Delta C_p = C_p^- - C_p^+ &= 2 \frac{\gamma(\theta)}{V_0} \Rightarrow C_l = \int_0^l \Delta C_p \frac{dx}{l} = \frac{2}{V_0} \int_0^l \frac{\gamma(\theta)}{l} dx \\ C_l &= \int_0^l \Delta C_p \frac{dx}{l} = \frac{1}{V_0} \int_0^\pi \gamma(\theta) \sin\theta d\theta = 2 \left[A_0 \int_0^\pi (1+\cos\theta) d\theta + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \int_0^\pi \sin(m\theta) \sin\theta d\theta \right] \end{aligned}$$

$\begin{cases} x = \frac{l}{2} (1 - \cos\theta) \\ dx = \frac{l}{2} \sin\theta d\theta \end{cases}$

$$\begin{aligned} &= 2\pi \left(A_0 - \frac{A_1}{2} \right) \\ &= 2\pi \left[\alpha - \left(\alpha_{id} - \frac{A_1}{2} \right) \right] \end{aligned}$$



$C_l = 2\pi(\alpha - \alpha_0) \Rightarrow$ COEFFICIENTE DI PORTANZA

α_0 : Incidenza di portanza nulla

- Il coefficiente del momento rispetto al bordo d'attacco A è

$$C_{m_A} = - \int_0^l \Delta C_p \frac{x}{l} \frac{dx}{l} = - \frac{1}{2V_0} \int_0^\pi \gamma(\theta) (1 - \cos\theta) \sin\theta d\theta =$$

Poi considerando $\theta = \theta'$ riscrivo

$$C_p^+(0) = -2(x - \alpha)d \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} - \frac{2 \sin\theta}{\pi} \int_0^\pi \frac{\frac{dy(\theta')}{d\theta'} - \frac{dy(\theta)}{d\theta}}{\cos\theta' - \cos\theta} d\theta'$$

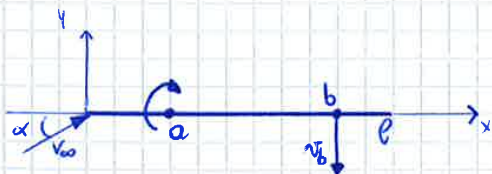
METODO A VORTICITÀ CONCENTRATA

- Il problema della **teoria delle piccole perturbazioni** è che vengono fuori infiniti di velocità sul bordo di attacco e accadono cose strane nel bordo di fuga nel calcolo del C_p . Il C_p diventa importante nel calcolo dello strato limite. Alternativa è sviluppare un semplice elemento portante che approssimi il caso portante alla linea media.
- Si porziona un unico vortice nel punto $x = a$ (invece che intere distribuzioni di sorgenti sulla corda) e la condizione di tangenza è soddisfatta solo nel punto $x = b$. La velocità indotta in $x = b$ dal vortice di intensità Γ in $x = a$ vale:

$$v_b = \frac{\Gamma}{2\pi(b-a)}$$

Quindi la **condizione di tangenza** sarà:

$$-\frac{\Gamma}{2\pi(b-a)} = v_{\infty} \left[\left(\frac{dy_{up}}{dx} \right)_{x=b} - \alpha \right]$$



- Per trovare Γ è necessario ricavare a e $b \Rightarrow 2$ incognite, 1 equazione. La 2^a equazione la si può trovare partendo dall'esercizio di prima

$$y = 4h \left(x - \frac{x^2}{l} \right) \Rightarrow h = \frac{y_{max}}{l}$$

$$\frac{dy}{dx} = 4h \left(1 - \frac{2x}{l} \right) = 4h \cos\theta$$

• Da cui si ottiene:

$$\alpha_{id} = 0^\circ$$

$$A_0 = \alpha$$

$$A_1 = 4h$$

$$C_e = 2\pi(\alpha + 2h)$$

In questo modo si ha un sistema di N vortici nelle incognite Γ_i :

$$-\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \frac{\Gamma_i}{x_p^{(i)} - x_i^{(n)}} = V_\infty \left[\left(\frac{d\psi}{dx} \right)_{x=x_p^{(n)}} - \alpha \right]$$

[NB]: x_p e x_i sono noti per ogni pannello. In questo caso inoltre risulta eccessivamente complicato posizionare i pannelli sulla linea media, anziché sulla corda, ed ottenere una migliore approssimazione.

METODO DEI PANNELLI DI HESS E SMITH

- Sia la teoria delle piccole perturbazioni che il metodo basato sui pannelli a vortici concentrata calcolano con buona precisione i COEFFICIENTI DI PORTANZA E DI MOMENTO, ma non forniscono indicazioni sull'effetto della distribuzione dello spessore del profilo su questi coefficienti. Solo con un'accurata previsione dei gradienti di pressione lungo la superficie del profilo è possibile valutare con precisione l'andamento dello strato limite ed in ultima analisi predire la resistenza e le caratteristiche del profilo ad alte incidenze.

Il metodo di THEODORSEN, basato sulla teoria delle trasformazioni conformi, permette di ottenere una distribuzione delle pressioni valida su tutto il profilo. Ma la sua applicazione risulta elaborata ed inoltre il metodo non può essere esteso a geometrie tridimensionali.

I problemi rilevati sono dovuti alle ipotesi utilizzate nella definizione della teoria delle piccole perturbazioni, in particolare l'ipotesi di soddisfare la condizione di tangenza sulla corda. Il metodo dei pannelli a vortici concentrata dipende indirettamente da queste ipotesi in quanto le relazioni utilizzate si basano sui risultati della teoria dei profili sottili.

Per ovviare a queste difficoltà, e con l'obiettivo di avere un metodo estendibile a geometrie tridimensionali, è necessario collocare le distribuzioni di singolarità direttamente lungo la superficie del profilo. I metodi che rientrano in questa categoria sono detti metodi dei pannelli.

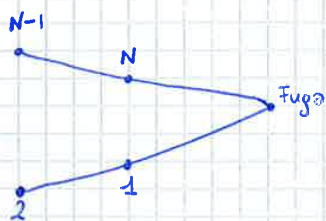
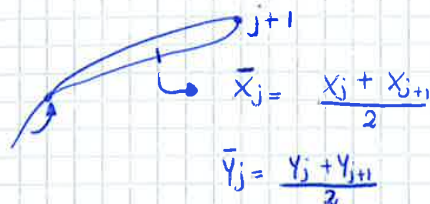
Il metodo proposto da Hess e Smith nel caso di un profilo alare è il primo metodo dei pannelli proposto in ordine di tempo e può essere ritenuta la prima applicazione numerica in Aerodinamica.

Per semplicità di calcolo è possibile assumere che $q(s)$ sia costante lungo ogni singolo pannello, ma variabile da un pannello all'altro. Utilizzando variazioni di ordine più elevato (paraboliche, cubiche) il grado di approssimazione migliora ma la procedura numerica di soluzione diventa più complicata.

Si hanno quindi N incognite, i valori delle intensità delle sorgenti q_j , ed il valore dell'intensità dei vortici, assunta costante per tutti i pannelli, γ . Il sistema lineare di $N+1$ equazioni si ottiene imponendo la condizione di tangenza in N punti di controllo e la condizione di Kutta. Non è possibile utilizzare i nodi come punti di controllo poiché essi sono punti singolari.

La scelta cade sul punto medio del pannello compreso tra due nodi.

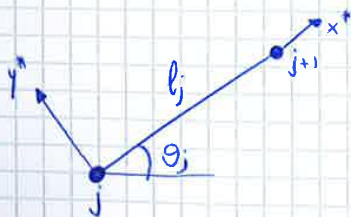
La condizione di Kutta impone che la corrente lasci il bordo di fuga in maniera regolare



• Questa condizione può essere soddisfatta imponendo che le velocità tangenziali nei punti di controllo dei due pannelli $j=1$ e $j=N$ siano uguali.

$$\rightarrow (\vec{v}_t)_1 = (\vec{v}_t)_N$$

Avremo allora $N+1$ incognite in q_j e γ e $N-1$ equazioni. Vediamo però di scrivere queste equazioni



$$\left. \begin{aligned} \vec{m}_j &= -\sin\theta_j \vec{i} + \cos\theta_j \vec{j} \\ \vec{t}_j &= \cos\theta_j \vec{i} + \sin\theta_j \vec{j} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{La normale } \vec{m}_j \text{ risulta} \\ \text{uscite e } \vec{t} \text{ è diretto lungo} \\ \text{i valori di } s \text{ crescenti} \end{array}$$

Denotando: $u_j = u(\vec{x}_j, \vec{y}_j)$

$$v_j = v(\vec{x}_j, \vec{y}_j)$$

componenti della velocità nei punti di controllo. la condizione di tangenza nel pannello j è, per $\vec{v}_j = u_j \vec{i} + v_j \vec{j}$:

$$\vec{v}_j \cdot \vec{m}_j = -u_j \sin\theta_j + v_j \cos\theta_j = 0 \Rightarrow \text{È uguale a zero perché } u_j \text{ è perpendicolare alla superficie mentre } v_j \text{ è tangente.}$$

• Analogamente per la distribuzione di vortici di intensità unitaria si ha

$$u_{ij}^{*(v)} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\ell_i} \frac{y_i^*}{(\bar{x}_j^* - \xi)^2 + y_j^{*2}} d\xi = \frac{\beta_{ij}}{2\pi}$$

$$v_{ij}^{*(v)} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\ell_i} \frac{\bar{x}_j^* - \xi}{(\bar{x}_j^* - \xi)^2 + y_j^{*2}} d\xi = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_{i+1j}}{r_{ij}}$$

anche in questo caso per $i=j$

$$\begin{cases} u_{ij}^* = \frac{1}{2} \\ v_{ij}^* = 0 \end{cases}$$

• La condizione di tangenza risulta esprimibile come

$$\sum_{i=1}^N A_{ij} q_i + A_{N+1j} \gamma = V_\infty \sin(\theta_j - \alpha) \quad j = 1, \dots, N$$

dove

$$A_{ij} = \frac{1}{2\pi} \left[\ln \frac{r_{i+1j}}{r_{ij}} \sin(\theta_j - \theta_i) + \beta_{ij} \cos(\theta_j - \theta_i) \right]$$

$$A_{N+1j} = \frac{1}{2\pi} \left[\ln \frac{r_{N+1j}}{r_{Nj}} \cos(\theta_j - \theta_N) - \beta_{Nj} \sin(\theta_j - \theta_N) \right]$$

• La condizione di Kutta diventa

$$\sum_{i=1}^N A_{iN+1} q_i + A_{N+1N+1} \gamma = -V_\infty [\cos(\theta_1 - \alpha) + \cos(\theta_N - \alpha)]$$

• Le due condizioni formano un sistema lineare di $N+1$ equazioni nelle $N+1$ incognite q_i e γ .

Note le intensità delle distribuzioni di sorgenti e vortici è possibile ottenere la componente tangenziale della velocità nel punto di controllo (\bar{x}_j, \bar{y}_j) mediante le relazioni

$$(V_t)_j = \vec{V}_j \cdot \vec{t}_j = u_j \cos \theta_j + v_j \sin \theta_j$$

$$= V_\infty \cos(\theta_j - \alpha) + \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{2\pi} \left[\beta_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) - \ln \frac{r_{i+1j}}{r_{ij}} \cos(\theta_i - \theta_j) \right] +$$

$$+ \frac{\gamma}{2\pi} \left[\ln \frac{r_{N+1j}}{r_{Nj}} \sin(\theta_N - \theta_j) + \beta_{Nj} \cos(\theta_N - \theta_j) \right]$$

E da qui trovo:

$$C_p(x_j, y_j) = 1 - \frac{(V_t)_j^2}{V_\infty^2} \Rightarrow \text{COEFFICIENTE DI PRESSIONE}$$

ALI AD ALLUNGAMENTO FINITO - CAPITOLO 5

ALA AD ALLUNGAMENTO FINITO: Corpo tridimensionale tale che, quando è investito da una corrente uniforme con opportuna incidenza, la componente predominante della forza scambiata con il fluido è perpendicolare alla direzione della corrente uniforme, la portanza è predominante rispetto alla resistenza.

CENNI SULLA DINAMICA DELLA VORTICITÀ

La circolazione lungo un circuito C è, per il teorema di Stokes, legata alla vorticità

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{\omega} \cdot \vec{n} dS$$

dove S è ogni superficie di contorno C ed \vec{n} la sua normale.



TEOREMI DI HELMOLTZ PER IL MOTO VORTICOSO

1° TEOREMA

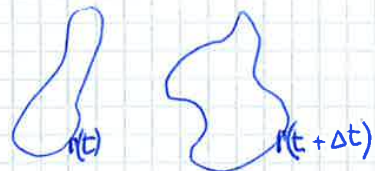
Un tubo vorticoso, o filamento vorticoso, non possono iniziare o interrompersi improvvisamente nel fluido. Essi DEVONO chiudersi su loro stessi o provenire e terminare all'infinito. Lo stesso vale per una linea vorticoso

2° TEOREMA

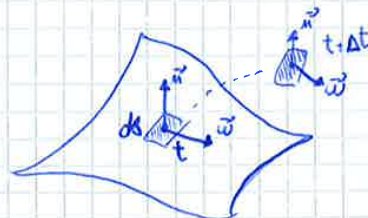
Una superficie che è superficie vorticoso ad un istante t rimane superficie vorticoso per tutti gli istanti successivi $t + \Delta t$.

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0$$

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt} (\vec{\omega} \cdot \vec{n} dS) = 0 \Rightarrow \text{Superficie Infinitesimo}$$



Nel caso di una corrente con vorticità concentrata, si abbia una superficie vorticoso all'istante t , con $\vec{\omega} \cdot \vec{n} = 0$ in ogni suo punto. Per il teorema di Helmholtz su un elemento ndS si avrà $\vec{\omega} \cdot \vec{n} = 0$ per ogni istante successivo.



Il potenziale vettore e la velocità nel punto \vec{r} indotti da un elemento vorticoso infinitesimo sono dati dalle relazioni

$$\delta \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{\omega}(s)}{|\vec{r}-\vec{s}|} d\Omega$$

$$\delta \vec{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \nabla_r \times \frac{\vec{\omega}(s)}{|\vec{r}-\vec{s}|} d\Omega$$

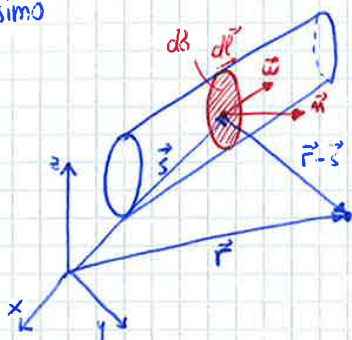
Questo termine indica differenziazione

• Nel caso di un filamento vorticoso, di sezione infinitesima ds ed intensità $\Gamma = \vec{\omega} \cdot \vec{n} ds$.

Considerato un volume infinitesimo

del filamento $d\Omega = \vec{n} ds \cdot d\vec{\ell}$

dove $d\vec{\ell} = \left(\frac{\vec{\omega}}{\omega}\right) dl$:



$$d\vec{\ell} = \left(\frac{\vec{\omega}}{\omega}\right) dl$$

$$\vec{\omega}(\vec{n} ds \cdot d\vec{\ell}) = \vec{\omega}(\vec{n} ds \cdot \frac{\vec{\omega}}{\omega}) \frac{dl}{\omega} = \Gamma \frac{\vec{\omega}}{\omega} dl = \Gamma dl$$

$$\delta \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{\omega}(s)}{|\vec{r}-\vec{s}|} (\vec{n} ds \cdot d\vec{\ell}) = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{dl}{|\vec{r}-\vec{s}|}$$

$$\delta \vec{V}(\vec{r}) = \nabla_r \times \left(\frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\vec{\ell}}{|\vec{r}-\vec{s}|} \right)$$

Considerando $d\vec{\ell}$ e ds fissi rispetto a ∇_r , si ottiene

$$\delta \vec{V}(\vec{r}) = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times (\vec{r}-\vec{s})}{|\vec{r}-\vec{s}|^3} \Rightarrow \text{LEGGE DI BIOT-SAVART}$$

$$\vec{V}(\vec{r}) = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell} \times (\vec{r}-\vec{s})}{|\vec{r}-\vec{s}|^3} \Rightarrow \text{VELOCITÀ INDOTTA per un tratto di filamento di lunghezza finita}$$

■ VELOCITÀ INDOTTA DA UN FILAMENTO RETTILINEO

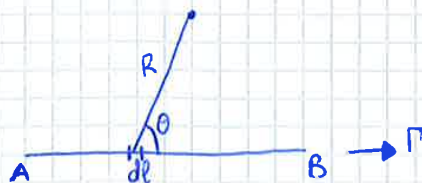
• Come caso particolare consideriamo un tratto di filamento vorticoso rettilineo.

Introducendo $\vec{R} = \vec{r}-\vec{s}$ e θ la legge di Biot-Savart diventa

$$\delta \vec{V}(\vec{R}) = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \vec{R}}{R^3}$$

Mentre la velocità indotta diventa

$$\delta V(\vec{R}) = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\sin\theta}{R^2} dl$$



$$|d\vec{\ell} \times \vec{R}| = R \sin\theta dl$$

La direzione ed il verso della velocità si ottengono considerando che i vettori $(\vec{\ell}, \vec{R}, \vec{V})$ formano una terna di vettori con orientazione destrorsa, la velocità indotta è su un piano perpendicolare al filamento, cioè il campo di velocità indotta è bidimensionale.

FOGLIO VORTICOSO: superficie vorticoso con vorticità concentrata di intensità γ .
 • Attraverso la superficie si ha una discontinuità della velocità. La discontinuità riguarda solo le componenti tangenziali alla superficie, la componente normale rimane continua, ed il valore della discontinuità è uguale all'intensità locale γ .
 Un foglio vorticoso è quindi una **discontinuità tangenziale**.

Il caso in cui la superficie vorticoso è ANCHE **superficie di corrente** (cioè quando in ogni punto $\vec{\omega}$ e \vec{V} sono tangenti) è molto importante per lo studio di un'ala ad allungamento finito.

Per quanto riguarda la Figura [b] l'intensità γ è uguale al salto delle componenti della velocità perpendicolari alla direzione della vorticità locale.

Dal teorema di Bernoulli si ottiene

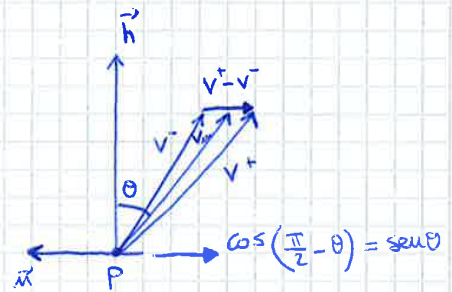
$$(p + \frac{1}{2} \rho v^2)^+ = (p + \frac{1}{2} \rho v^2)^-$$

$$p^- - p^+ = \frac{1}{2} \rho (v^{+2} - v^{-2}) = \frac{1}{2} \rho (\vec{v}^+ + \vec{v}^-) \cdot (\vec{v}^+ - \vec{v}^-)$$

Poi sapendo che $\vec{v}_m = \frac{1}{2} (\vec{v}^+ + \vec{v}^-)$
 $|\vec{v}^+ - \vec{v}^-| = |v_m^+ - v_m^-| = \gamma(s)$

si ha

$$p^- - p^+ = \rho \gamma(s) [\vec{v}_m \cdot (-\vec{n})] = \rho v_m \gamma(s) \sin \theta$$



$$(p^- - p^+) \vec{N} = \rho \vec{v}_m \times \gamma(s) \vec{h} \Rightarrow \text{TEOREMA DI KUTTA-SOUKOWSKI LOCALE}$$

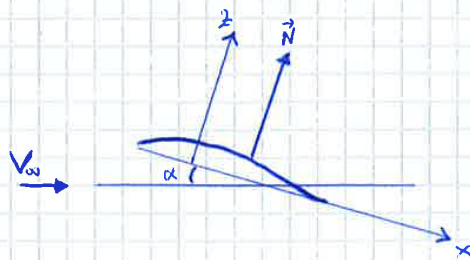
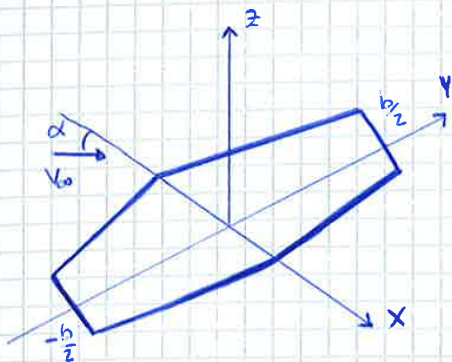
• Nel caso di corrente bidimensionale attorno ad un profilo alare, sul piano (\vec{n}, \vec{N}) $\vec{v}_m \equiv \vec{v}_\infty = -v_\infty \vec{n}$ e risulta perpendicolare al filamento $\gamma(s) \vec{h}$. Il teorema ^{locale} diventa

$$\vec{L} = (p^- - p^+) \vec{N} = \rho v_\infty \gamma(s) \vec{N}$$

Integrando lungo la corda l

$$L = \int_0^l (p^- - p^+) ds = \rho v_\infty \int_0^l \underbrace{\gamma(s)}_{\Gamma} ds = \rho v_\infty \Gamma \Rightarrow \text{Ottengo il teorema di Kutta-Soukowski}$$

TEORIA DELLE PICCOLE PERTURBAZIONI PER UN'ALA AD ALLUNGAMENTO FINITO



Anche nel caso di ali ad allungamento finito, con piccoli spessori ed inarcamento, per basse incidenti è possibile introdurre l'approssimazione di piccole perturbazioni. Per semplicità consideriamo il caso di una corrente uniforme senza componente y.

CONDIZIONE DI TANGENZA $\Rightarrow \nabla\Phi \cdot \vec{N} = 0$

$F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0 \Rightarrow$ SUPERFICIE ALA

$\vec{N} = \pm \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{1}{|\nabla F|} \left(\mp \frac{\partial f}{\partial x}, \mp \frac{\partial f}{\partial y}, \pm 1 \right) \Rightarrow$ Normale alla superficie su dorso e ventre

In analogia al caso bidimensionale, ponendo $\Phi = V_\infty(x \cos\alpha + y \sin\alpha) + \varphi$ la condizione di tangenza diventa

$\nabla\Phi \cdot \vec{N} = \frac{1}{|\nabla F|} \left[\mp \left(V_\infty \cos\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial f}{\partial x} \mp \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} \pm \left(V_\infty \sin\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) \right] = 0$

con $u' = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $v' = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $w' = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$

Nel caso di piccole perturbazioni, per $\alpha \ll 1$

$\Rightarrow u', v', w' \ll V_\infty$

$\left| \frac{\partial F}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial F}{\partial y} \right| \ll \left| \frac{\partial F}{\partial z} \right| \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \ll 1$

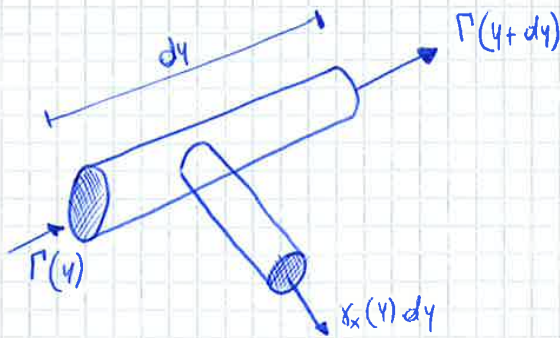
La condizione di tangenza linearizzata è, con $z = f(x, y)$

$w'(x, y, z) = V_\infty \left[\frac{\partial z}{\partial x} - \alpha \right]$

che trasferita dalla superficie dell'ala sul piano $z=0$, in quanto $w'(x, y, z) = w'(x, y, 0) + o(z)$, diventa

$$\begin{cases} w'(x, y, 0) = V_\infty \left[\frac{\partial z}{\partial x} - \alpha \right] \\ C_p = 1 - \frac{(V_\infty \cos\alpha + u')^2 + v'^2 + (V_\infty \sin\alpha + w')^2}{V_\infty^2} \approx \frac{-2u'}{V_\infty} \Rightarrow \text{coefficiente di pressione linearizzato} \end{cases}$$

La scia è rappresentata da una superficie libera, considerata rigida, sul piano $z=0$, ed è superficie vortice e di corrente. In quanto superficie fluida la pressione è continua attraverso di essa, quindi per il teorema di Kutta-Joukowski locale, i filamenti vorticosi sono allineati con la velocità media che, in base alle approssimazioni fatte, coincide con la velocità della corrente uniforme V_∞ . Quindi sulla superficie libera i vortici di scia sono allineati con l'asse x , $\vec{\gamma} = \gamma_x(x,y)\vec{i}$.



$$\nabla \cdot \vec{\gamma} = \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow \gamma_x = \gamma_x(y) \Rightarrow \vec{\gamma} \text{ è solenoideale}$$

γ_x è funzione della sola y

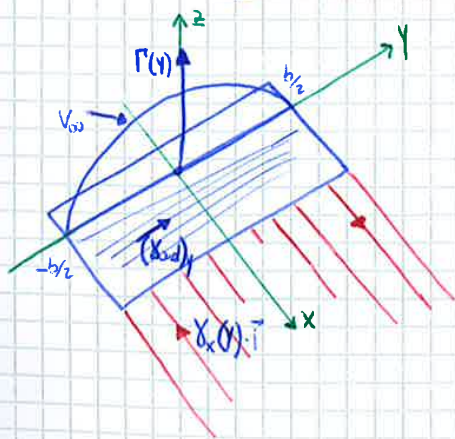
Si può trovare una relazione tra $\Gamma(y)$ e l'intensità della vorticità di scia $\gamma_x(y)$.

$$\Gamma(y) = \Gamma(y+dy) + \gamma_x(y)dy \rightarrow \text{Per la conservazione della vorticità}$$

$$\gamma_x(y) = -\frac{d\Gamma(y)}{dy}$$

L'intensità dei vortici di scia dipende dalla variazione della distribuzione di portanza lungo l'ala

TEORIA DELLA LINEA PORTANTE



Questo modello, il più semplice per risolvere il problema portante di un'ala ad allungamento finito, fu proposto da Prandtl e consiste nel sostituire la superficie aderente con un unico vortice aderente rettilineo. In questo modello il vortice aderente ha intensità $\Gamma(y)$, ed è posizionato lungo la linea dei fuochi. L'ipotesi che la linea dei fuochi sia rettilinea comporta che la teoria della linea portante è valida

per ali con piccolo angolo di freccia $\alpha \lesssim 5^\circ$.

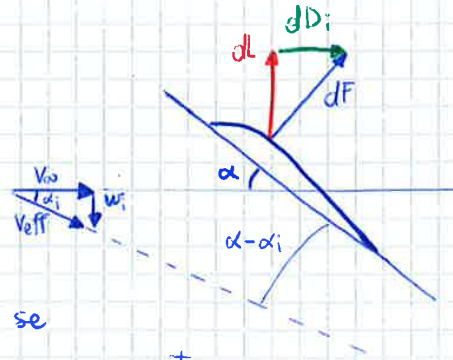
In precedenza abbiamo già visto che concentrare la distribuzione di vorticità lungo la corda in un unico vortice, posizionato al quarto anteriore della corda, implica soddisfare la condizione di tangenza in un solo punto di collocazione x^* della corda. Nel caso di linea media piana $x^* = \frac{3}{4}c \Rightarrow$ Condizione di Kutta OK.

• Quest'ultima equazione può essere considerata una ricombinazione di angoli:

$$-\frac{\Gamma(y)}{\pi \ell(y) V_0} + \frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma(y')}{y-y'} dy' = -\alpha$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{-\alpha_{eff}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{-\alpha_i}$

$$\alpha_{eff} = \alpha - \alpha_i$$



• La sezione alare si comporta come se fosse un profilo alare investito da una corrente con un'incidenza effettiva $\alpha_{eff}(y) = \alpha(y) - \alpha_i(y)$

Incidenza indotta

• È possibile generalizzare l'equazione di Prandtl introducendo l'effetto dell'inarcamento e dello svergolamento. Dalla teoria dei profili sottili si può scrivere

$$C_e(y) = \frac{\rho V_0 \Gamma(y)}{\frac{1}{2} \rho V_0^2 \ell(y)} = 2\pi k (\alpha_{eff}(y) - \alpha_0(y)) = 2\pi k (\alpha(y) - \alpha_i(y) - \alpha_0(y)) = 2\pi k [\underbrace{(\alpha - \alpha_0)}_{\alpha_a(y)} - \alpha_i(y)]$$

$\alpha_a(y) \Rightarrow$ INCIDENZA AERODINAMICA

$\frac{7}{8} \leq k \leq 1$

Quindi la formula generale dell'equazione di Prandtl è

$$\Gamma(y) = \pi k \ell(y) \left[\alpha_a(y) - \frac{1}{4\pi V_0} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma(y')}{y-y'} dy' \right] \Rightarrow \text{La distribuzione di portanza } \Gamma(y) \text{ è soluzione di questa equazione con } \Gamma(-b/2) = \Gamma(b/2) = 0.$$

■ PORTANZA e RESISTENZA INDOTTA

$$dF = \rho V_{eff} \Gamma(y) dy \Rightarrow \text{Forza sulla sezione di profondità}$$

Prendendo $V_{eff} \approx V_0$ e per piccoli α_i :

$$dL = dF \cos \alpha_i \approx \rho V_0 \Gamma(y) dy$$

$$dD_i = dF \sin \alpha_i \approx \alpha_i(y) dL$$

$$L = \rho V_0 \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy$$

$$D_i = \rho V_0 \int_{-b/2}^{b/2} \alpha_i(y) \Gamma(y) dy \Rightarrow \text{Resistenza indotta dalla scia}$$

- L'equazione integro differenziale di Prandtl ha la forma

$$\Gamma(y) = \pi K V_{\infty} \ell(y) [\alpha_a(y) - \alpha_i] \quad \alpha_a(y) = \alpha(y) - \alpha_0(y)$$

da essa si vede che per realizzare una distribuzione ellittica di $\Gamma(y)$, nel caso di ala non svergolata, occorre realizzare un'ala ellittica in pianta.

[La distribuzione ellittica è la distribuzione ottimale di portanza, in quanto, a parità di C_L ed allungamento λ , essa presenta la minima resistenza indotta.]

- Nel caso di un'ala in pianta ellittica non svergolata, l'equazione generale di Prandtl può essere riscritta semplificata

$$\Gamma(y) = \pi K V_{\infty} \ell(y) (\alpha_a - \alpha_i) \quad \ell(y) = \ell_0 \sqrt{1 - \frac{y^2}{(b/2)^2}} \Rightarrow \text{Legge di distribuzione delle corde}$$

$$\Gamma_0 = \pi K V_{\infty} \ell_0 \left(\alpha_a - \frac{\Gamma_0}{2bK} \right)$$

- In questo caso ho $\Rightarrow S = \pi \left(\frac{b_0}{2} \right) \left(\frac{b}{2} \right)$

$$\lambda = \frac{b^2}{S} = \frac{4}{\pi} \frac{b}{b}$$

- Quindi ottengo

$$\Gamma_0 = \frac{2bV_{\infty}}{1 + \frac{\lambda}{2K}} \alpha_a$$

- Ma per un profilo sottile ho $C_p = 2\pi K \alpha_a = 2\pi K (\alpha - \alpha_0) = C_p' (\alpha - \alpha_0)$

quindi lo riscrivo

$$\Gamma_0 = \frac{2bV_{\infty}}{1 + \frac{\pi \lambda}{C_p'}} (\alpha - \alpha_0)$$

- L'espressione della PORTANZA per l'equazione generale, con $S = \int_{-b/2}^{b/2} \ell(y) dy$, può essere riscritta

$$L = \rho V_{\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy = \pi K \rho V_{\infty}^2 (\alpha_a - \alpha_i) \int_{-b/2}^{b/2} \ell(y) dy = \pi K \rho V_{\infty}^2 S (\alpha_a - \alpha_i)$$

- Quindi per la relazione tra C_L e α_i scrivo

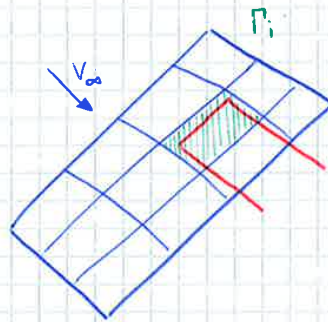
$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 S} = 2\pi K \left(\alpha_a - \frac{C_L}{\pi \lambda} \right) = \frac{2\pi K}{1 + \frac{2K}{\lambda}} (\alpha - \alpha_0) = \frac{C_p'}{1 + \frac{C_p'}{\pi \lambda}} (\alpha - \alpha_0) = C_L' (\alpha - \alpha_0)$$

per un profilo sottile $C_p' = 2\pi K$

- Un'ala ad allungamento finito, per via della perdita di portanza sulle estremità alari, a parità di incidenza, presenta una pendenza del coefficiente di portanza minore di quello del profilo alare.

METODO A RETICOLO DI VORTICI

- Questo metodo consiste nel partizionare le lunghezze in direzione della corda e dell'apertura alare in un numero finito di intervalli per formare un reticolo di elementi quadrilateri, detti **PANNELLI**, che ricoprono la superficie alare, e di rappresentare la distribuzione superficiale di singolarità



come una serie di vortici a staffa posizionati sui pannelli. Nel caso più semplice i pannelli sono piani, posizionati sulla superficie in pianta, a $z=0$, con due lati paralleli alla corrente uniforme. I pannelli possono essere posizionati su dorso e ventre della superficie alare, con le singolarità posizionate sui pannelli e la condizione di tangenza verificata sulla superficie alare, evitando le limitazioni legate alle ipotesi della teoria delle piccole perturbazioni.

CORRENTE INCOMPRESSIBILE DI UN FLUIDO A PROPRIETÀ COSTANTI

CAP. 7

- In molti casi non è necessario considerare le equazioni di Navier-Stokes nella loro forma completa, in quanto alcuni aspetti dei fenomeni fisici in esame possono essere considerati trascurabili. Il modello **INCOMPRESSIBILE** rappresenta una possibile semplificazione. In questo capitolo introduciamo le equazioni di Navier-Stokes per correnti incompressibili e sono presentate alcune soluzioni esatte nel caso di un fluido a proprietà costanti. In termini adimensionali il parametro che governa la corrente incompressibile è il numero di Reynolds.

CONDIZIONE DI INCOMPRESSIBILITÀ

- CORRENTE INCOMPRESSIBILE:** Se il volume Ω_r di ogni elemento fluido è costante nel tempo.
- La divergenza del campo di velocità rappresenta la velocità di variazione del volume.

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \Rightarrow \text{CONDIZIONE DI INCOMPRESSIBILITÀ}$$

EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES PER FLUIDI INCOMPRESSIBILI

$$\begin{cases} \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{v} \\ \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} + \rho \vec{f} \Rightarrow \underline{\underline{\tau}} = \mu(\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T) - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{v} \underline{\underline{I}} \\ \rho \frac{DE}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{v} + \rho \Phi + \nabla \cdot (k \nabla T) + Q_v \Rightarrow \rho \Phi = (\underline{\underline{\tau}} \cdot \nabla) \cdot \vec{v} \end{cases}$$

→ = 0 Nel caso di un fluido incompressibile newtoniano

↳ Funzione di dissipazione

$c = \frac{\partial E}{\partial T} \Rightarrow$ CALORE SPECIFICO $\Rightarrow c_p = c_v = c$

Quindi si ottengono le Equazioni di Navier-Stokes per una corrente incompressibile

$$\begin{cases} \frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (\nabla \cdot \vec{v} = 0) \\ \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu(\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T)] + \rho \vec{f} \\ \rho c \frac{DT}{Dt} = \rho \Phi + \nabla \cdot (k \nabla T) + Q_v \end{cases} \Rightarrow \text{Le 3 eq. contengono termini non lineari}$$

In caso di fluido incompressibile a proprietà costanti (fluido omogeneo, condizioni STANDARD, no variazioni di temperatura) si ha:

$\mu = \mu(p, T) \approx \text{cost}$
 $k = k(p, T) \approx \text{cost}$

Quindi semplifico ulteriormente le equazioni

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{f} \\ \rho c \frac{DT}{Dt} = \rho \Phi + k \nabla^2 T + Q_v \end{cases} \quad \left| \quad \begin{aligned} \nabla [\mu(\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T)] &= \mu(\nabla \cdot \nabla \vec{v} + \nabla(\nabla \cdot \vec{v})) = \mu \nabla^2 \vec{v} \\ \nabla \cdot (k \nabla T) &= k(\nabla \cdot \nabla T) = k \nabla^2 T \rightarrow \text{LINEARI} \end{aligned}$$

I termini $\rho \vec{f}$ e Q_v rappresentano le sorgenti volumetriche di quantità di moto e di calore.

$\rho \vec{f} = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)] \vec{g} \Rightarrow$ Approssimazione di BOUSSINESQ

α : Coefficiente di espansione volumetrico

T_0 : Temperatura di riferimento

g : Accelerazione di gravità

$\rho_0 = \rho(T_0)$

EQUAZIONI IN COORDINATE CARTESIANE E CILINDRICHE

Le equazioni di Navier-Stokes per un fluido incompressibile a proprietà costanti: in forma estesa, in coordinate cartesiane, sono:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

Il bilancio di energia termica in coordinate cartesiane ha la forma

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \rho \Phi + k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

e la funzione di dissipazione Φ :

$$\rho \Phi = (\vec{r} \cdot \nabla) \cdot \vec{\tau} = \mu \left(2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right)$$

Le equazioni di Navier-Stokes per un fluido incompressibile a proprietà costanti: sono, in notazione indiciale:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \end{cases}$$

CONDIZIONI INIZIALI E AL CONTO RNO PROBLEMA BEN POSTO

Si consideri il caso di una corrente incompressibile, di un fluido omogeneo a proprietà costanti, in una regione delimitata da pareti rigide e che può estendersi all'infinito in una o più direzioni. Il problema è descritto dalle prime due eq. di Navier-Stokes soggette a condizioni iniziali per definire l'evoluzione temporale e condizioni al contorno. È sufficiente imporre condizioni iniziali solo per il campo di velocità, non occorre specificare condizioni per la pressione in quanto essa può essere ottenuta indirettamente dalla condizione di solenoidaltà mediante l'equazione $\nabla^2 p = -\rho \vec{r} \cdot \nabla \vec{v}$. Nel caso in cui la velocità è specificata lungo l'intera frontiera $\partial \Omega$, che delimita il dominio di calcolo Ω , occorre soddisfare la condizione di compatibilità

$$\oint_{\partial \Omega} \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\Omega = 0 \quad \Rightarrow \text{Deriva, per il teorema di Gauss, dalla condizione di incompressibilità}$$

Dalle equazioni dell'energia interna, ponendo $Q_v = 0$ si ha

$$\frac{\rho c \Delta T}{L} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \tilde{v} \cdot \nabla \tilde{T} \right) = \mu \frac{v^2}{L^2} \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_i} \right)^2 + \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j} \cdot \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_i} \right] + k \frac{\Delta T}{L^2} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}_j^2}$$

e ottengo la forma adimensionale dell'energia interna

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \tilde{v} \cdot \nabla \tilde{T} = \frac{v}{VL} \cdot \frac{v^2}{c \Delta T} \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_i} \right)^2 + \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j} \cdot \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_i} \right] + \frac{v}{VL} \cdot \frac{k}{\mu c_p} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}_j^2}$$

$$Ec \text{KerT} = \frac{v^2}{c \Delta T}$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \tilde{v} \cdot \nabla \tilde{T} = \frac{Ec}{Re} \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_i} \right)^2 + \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j} \cdot \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_i} \right] + \frac{1}{Re Pr} \nabla^2 \tilde{T}$$

$$Pr = \frac{\mu c_p}{k}$$

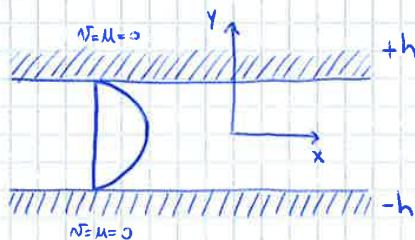
$$\begin{cases} \nabla \cdot \tilde{v} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \tilde{v} \cdot \nabla \tilde{v} = -\nabla \tilde{p} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \tilde{v} \\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \tilde{v} \cdot \nabla \tilde{T} = \frac{Ec}{Re} \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_i} \right)^2 + \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j} \cdot \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_i} \right] + \frac{1}{Re Pr} \nabla^2 \tilde{T} \end{cases}$$

⇒ Eq. in forma ADIMENSIONALE

SOLUZIONI ESATTE DELLE EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES

CORRENTE TRA DUE PIANI PARALLELI

• Il flusso tra due pareti piane parallele rappresenta un caso di corrente parallela ed è descritto mediante un sistema di coordinate cartesiane con l'asse x



allineato con la direzione della corrente e l'asse y perpendicolare ai due piani. I due piani si trovano a $y = \pm h$.

$$\tilde{v} = \{ u(x, y), v(x, y) \}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow v = \text{cost} = 0$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\mu \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \Rightarrow p = p(x)$$

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{dp}{dx} \Rightarrow \text{Componente lungo la direzione } x$$

↳ Vale solo se ambo i membri sono costanti

$$D = 6\pi\mu R V_0 \Rightarrow \text{FORMULA DI STOKES PER LA RESISTENZA}$$

$$C_D = \frac{24}{Re} \quad Re = \frac{V_0 d}{\nu}, \quad d = 2R$$

• Se invece $Re \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{v}$$

$\vec{v} \rightarrow 0$

$$E \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx} - \alpha = 0 \quad E = \frac{1}{Re}$$

CORRENTI CON ALTO NUMERO DI REYNOLDS: TEORIA DELLO STRATO LIMITE - CAP. 8

Teoria dello strato limite \Rightarrow Correnti fluide caratterizzate da un alto Re

• Per alti Re , il flusso lungo un corpo è caratterizzato da:

- Linee di corrente e velocità che si discostano di poco da quelle ottenute con un calcolo del flusso potenziale di un fluido ideale, inviscido;
- A differenza del flusso potenziale, il fluido non scivola lungo le pareti ma aderisce su di esse.

• La transizione da velocità nulla sulla parete ad un valore vicino a quello predetto dalla teoria potenziale avviene in un sottile strato. Quindi una corrente lungo una parete nel caso di alto numero di Reynolds può essere scomposta in due regioni, considerando un sistema di coordinate (\vec{t}, \vec{n}) allineato con la parete:

- [I] Uno strato sottile lungo la parete, denominato **STRATO LIMITE**, nel quale il gradiente $\frac{\partial u_t}{\partial n}$ è molto grande. In questa regione la viscosità è essenziale e gli sforzi viscosi sono importanti. Lo spessore dello strato limite $\delta \ll L$, dove L indica una grandezza caratteristica del corpo, e diminuisce al crescere del Re .
- [II] Una regione esterna dove non si hanno gradienti di velocità elevati e l'influenza della viscosità diventa trascurabile. In questa regione si applica l'approssimazione di corrente (potenziale) di un fluido inviscido.

• L'equazione della continuità e la componente lungo x formano, trascurando i termini piccoli

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \text{Eq. della continuità} \\ \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dP_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow \text{Eq. della q.t.s di moto} \end{cases} \Rightarrow \text{EQUAZIONI DELLO STRATO LIMITE (Forma Adimensionale)}$$

PROPRIETÀ DELLE EQUAZIONI DELLO STRATO LIMITE

$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$ $v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ Ψ : Funzione di corrente

L'equazione della continuità è automaticamente soddisfatta quella della quantità di moto può essere riscritta:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP_e}{dx} + \nu \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3}$$

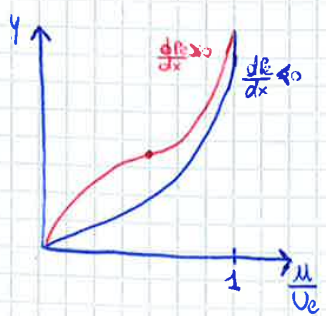
$[y=0] \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0$ $[y=\delta] \frac{\partial \Psi}{\partial y} = u_e$

$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \frac{dP_e}{dx}$ $\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right)_{y=0} = 0$

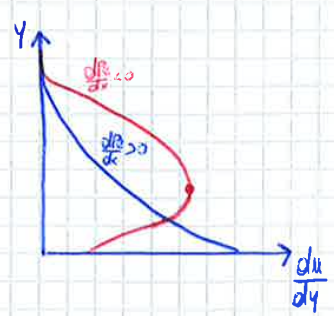
• Nei grafici seguenti sono riportati gli andamenti qualitativi attraverso lo strato limite del profilo di velocità, e delle sue derivate, in funzione del gradiente di pressione.

CORRENTE ACCELERATA $\Rightarrow \frac{dP_e}{dx} < 0 \rightarrow \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_w < 0$

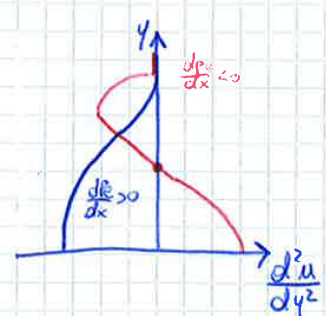
CORRENTE DECELERATA $\Rightarrow \frac{dP_e}{dx} > 0 \rightarrow \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_w > 0$



(a)



(b)



(c)

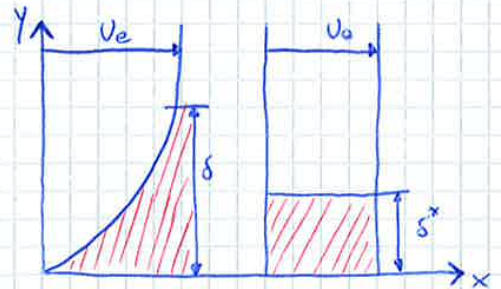
Espandendo in serie di Taylor il valore di $u_e(x, y)$

$$u_e(x, y) = U_e(x) + \left(\frac{\partial u_e}{\partial y}\right)_{y=0} y + O(y^2)$$

$$\left(\frac{\partial u_e}{\partial y}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial v_e}{\partial y}\right)_{y=0} = 0 \rightarrow \text{In caso di flusso potenziale, per la condizione di irrotazionalità}$$

$$v_e = \frac{d}{dx} [U_e(x) \cdot S^*(x)] \Rightarrow \text{VELOCITÀ DI SPOSTAMENTO}$$

$$S^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy \Rightarrow \text{SPESORE DI SPOSTAMENTO}$$



↳ Rappresenta la distanza dalla parete di cui è spostata la corrente esterna in seguito alla diminuzione della velocità nello strato limite

STRATO LIMITE SU UNA LAMINA PIANA

• In assenza del gradiente di pressione, le equazioni dello STRATO LIMITE diventano

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{dp_e}{dx} = 0 \quad \text{[BLAUSIUS]}$$

Introducendo la funzione di corrente ψ , l'eq. della quantità di moto diventa

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp_e}{dx} + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{y \rightarrow \infty} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{y \rightarrow \infty} = 0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{y=0} = U_\infty$$

• I profili di velocità al variare di x sono in similitudine tra loro.

I fattori di scala più opportuni per la velocità e la coordinata y sono rispettivamente U_∞ e S , quindi la proprietà di similitudine implica che

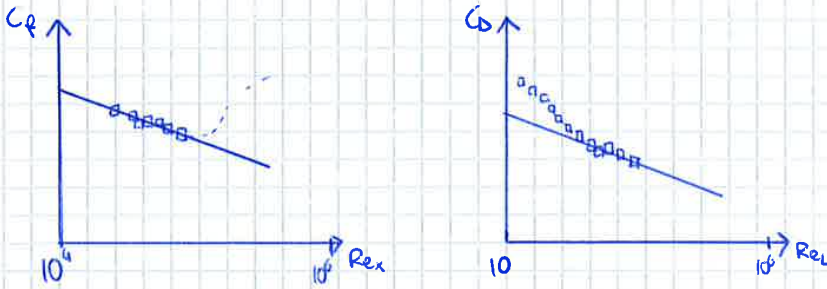
$$\frac{u}{U_\infty} = f\left(\frac{y}{S}\right)$$

↳ Questa funzione è la stessa per tutte le stazioni x .

• Nel caso di una lamina piana immersa nella corrente fluido, quindi con lo strato limite che si sviluppa sia sul dorso che sul ventre, la forza di attrito totale esercitata sulla lamina è $[2D_f]$.

• Il coefficiente di resistenza, relativo ad un lato della lamina, c_D è definito dalla legge di resistenza di Blasius

$$c_D = \frac{D_f}{\frac{1}{2} \rho U_0^2 (L \times b)} = 1,328 \frac{\mu \rho L U_0^3}{\rho U_0^2 L} = \frac{1,328}{\sqrt{Re_L}} \quad \text{con } Re_L = \frac{U_0 L}{\nu}$$



• Nei grafici in alto sono riportati i confronti del coefficiente di attrito c_f e della legge di resistenza di Blasius con i dati sperimentali in funzione del numero di Reynolds Re_L . Si ha un buon accordo con i dati sperimentali per numeri di Reynolds > 1000 , e nel caso del coefficiente di attrito c_f fino a valori $Re_L = 5 \cdot 10^5$, quando il flusso diventa turbolento.

• La definizione di spessore dello strato limite è ambigua in quanto la componente u della velocità tende asintoticamente al valore U_0 .

Si definisce **SPESORE DELLO STRATO LIMITE** la distanza alla quale $\frac{u}{U_0} = 0,99$, e poiché $f' \approx 0,99$ per $\eta \approx 3,54$

$$\delta = 3,94 \sqrt{\frac{2\nu x}{U_0}} \approx 5,0 \frac{x}{\sqrt{Re_x}}$$

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_0}\right) dy = \sqrt{\frac{2\nu x}{U_0}} \int_0^\infty (1 - f') d\eta = 1,7208 \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}} = \delta^* \Rightarrow \text{SPESORE DI SPOSTAMENTO}$$

$$\rho U_0^2 \theta = \rho \int_0^\infty u (U_0 - u) dy$$

↓
Distanza di cui è spostata la corrente potenziale come conseguenza del difetto di velocità nello strato limite

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U_0} \left(1 - \frac{u}{U_0}\right) dy = \sqrt{\frac{2\nu x}{U_0}} \int_0^\infty f'(1 - f') d\eta = 0,664 \frac{x}{\sqrt{Re_x}} = \theta \Rightarrow \text{SPESORE DELLA QDM (Momentum Thickness)}$$

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} = 2,59 \Rightarrow \text{FAITORE DI FORMA (Shape Factor)}$$

L'equazione della funzione di corrente diventa

FALKNER e SKAN

$$\left\{ \begin{aligned} f''' + \alpha f f'' + \beta(1-f'^2) &= \frac{U_e}{U_\infty} g^2(x) \left(f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial \xi}{\partial \xi} \right) \\ \eta=0: f=f' &= 0 \\ \eta \rightarrow \infty: f' &= 1 \end{aligned} \right. \text{Condizioni al contorno}$$

$$f'' = \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}$$

$$f' = \frac{u}{U_e}$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{L g(x)}{U_\infty} \frac{d}{dx} (U_e g) = C_1 \\ \beta &= \frac{L}{U_\infty} g^2(x) \frac{dU_e}{dx} = C_2 \end{aligned} \right\} \text{Condizioni di similarità}$$

$$f(\xi, \eta) \begin{cases} \text{RHS} = 0 \\ \alpha = \text{cost} \\ \beta = \text{cost} \end{cases}$$

$$f'(\xi, \eta)$$

↳ Rappresentano due equazioni per determinare le funzioni $U_e(x)$ e $g(x)$ che definiscono il flusso potenziale ed il fattore di scala compatibili con l'esistenza di soluzioni simili.

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = \frac{L}{U_\infty} \frac{d}{dx} (g^2(x) U_e(x)) \\ \alpha - \beta = \frac{L}{U_\infty} g(x) U_e(x) \frac{dg}{dx} \end{cases} \xrightarrow{\text{Integro}} \begin{aligned} g(x) &= \sqrt{(2\alpha - \beta) \frac{x}{L}} \left(\frac{U_e}{U_\infty} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(2\alpha - \beta) \frac{x}{L}} \frac{U_\infty}{U_e} \\ \left(\frac{U_e}{U_\infty} \right)^{\alpha - \beta} &= K g^\beta \end{aligned}$$

dove K è una costante di integrazione. Si ottiene quindi che l'andamento della velocità del flusso potenziale deve soddisfare la legge

$$\frac{U_e(x)}{U_\infty} = K^{\frac{2}{2\alpha - \beta}} \left[(2\alpha - \beta) \frac{x}{L} \right]^{\frac{\beta}{2\alpha - \beta}} \quad 2\alpha - \beta \neq 0$$

FLUSSO SU UN CONE

Una classe importante di flussi simili si ottiene ponendo $\alpha=1$ ed introducendo il parametro

$$m = \frac{\beta}{2 - \beta} \Rightarrow \beta = \frac{2m}{m+1}$$

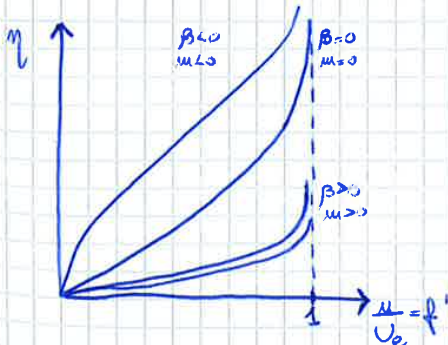
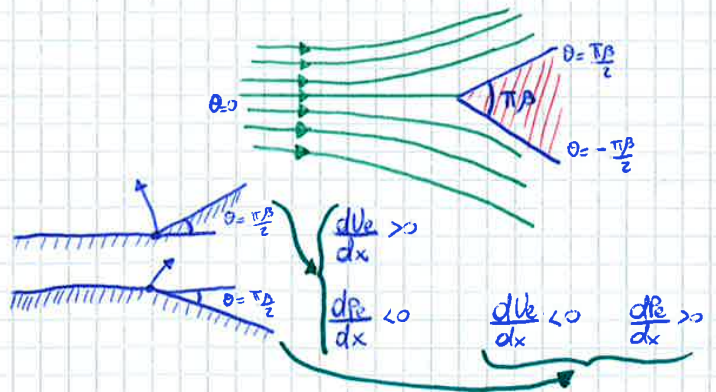
$$\frac{U_e(x)}{U_\infty} = K^{m+1} \left(\frac{2}{m+1} \frac{x}{L} \right)^m = \left(\frac{x}{L} \right)^m$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{m+1} \frac{U_\infty}{U_e} \frac{x}{L}} = \sqrt{\frac{2}{C(m+1)}} \left(\frac{x}{L} \right)^{\frac{1-m}{2}}$$

$$C = 1$$

$$L = \pm m$$

$$\Psi(x, y) = \frac{U_e(x)}{Re} g(x) f(\eta) \Rightarrow \text{Funz. di corrente}$$



• Di fianco sono riportati i profili di velocità nello strato limite per differenti valori di m . Il caso di $m=0, \beta=0$, corrisponde al caso della lamina piana senza incidenza, e la soluzione è quella di Blasius. Per $m > 0, \beta > 0$, si ha un flusso potenziale accelerato con gradiente di pressione favorevole. Nel caso di $m < 0, \beta < 0$, il gradiente di pressione è positivo ed il profilo di velocità presenta un punto di inflessione.