NUMERO: 1871A - ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Faraci Alessio

MATERIA: Idraulica Teoria - prof. Ridolfi

1. Cos'è un fluido?

FLUIDO: entità che oppone pochissima resistenza alla deformazione (gas - liquidi)
↓ (cambiare forma / non volume)

* resistenza tende a zero se t di deformazione ↑
↑ tempo

Conta nei fluidi la velocità di deformazione (→ legame tra sforzi e celerità delle deformazioni)

↳ 2 variabili indipendenti (x, t)
↑ spazio ↑ tempo

LIQUIDI: oppongono una grande resistenza alla variazione di volume (mentre per i gas non così alta)
↓
mezzi discreti

monostante ciò → lo considero come se fosse un CORPO CONTINUO

- DENSITÀ $\left[\frac{Kg_m}{m^3}\right]$ $\rho = \rho(\theta, \text{sforzi})$ ← equazione di stato
  (tempo)

  acqua $1000\ Kg/m^3$
  aria $\frac{1}{1000}$

dipende dalla
- temperatura
- dagli sforzi applicati ai fluidi

- PESO SPECIFICO $\left[\frac{N}{m^3}\right]$

$$\boxed{\gamma = \rho \cdot g}$$

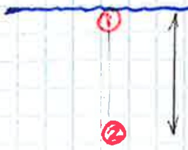
g: $9.806\ m/s^2$

→ H_2O $\gamma_{H_2O} = 9806\ N/m^3$

→ mercurio $\gamma_{Hg} \cong 133\,000\ N/m^3$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 212

esempio: spostiamo 1 pezzo di fluido da 1 → 2 ⇒ subisce una Δp



$O(10^1)\, m = \Delta h$
(↑ o grande)

$$\Delta p = \gamma \Delta h \cong 10^4 \cdot 10^1 = 10^5 \; N/m^2$$

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta p}{\varepsilon} \cong -\frac{10^5}{10^9} = 10^{-4}$$

⇒ in 1 litro di H_2O → $V = 10^3$
⇒ $\frac{\Delta V}{10^3} = 10^{-4}$ ⇒ $\Delta V = 10^{-1}$

Le variazioni di volume sono trascurabili

⇒ $\rho = \rho(\cancel{t}, \cancel{\text{sforzi}})$ ⇒ semplificando $\boxed{\rho \cong cost}$

↓ quando le "informazioni" si propagano all'interno del fluido in maniera istantanea

⇒ FLUIDO INCOMPRIMIBILE

- CELERITÀ DELLE ONDE DI PRESSIONE di un LIQUIDO

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}}$$

(↑ velocità del suono)

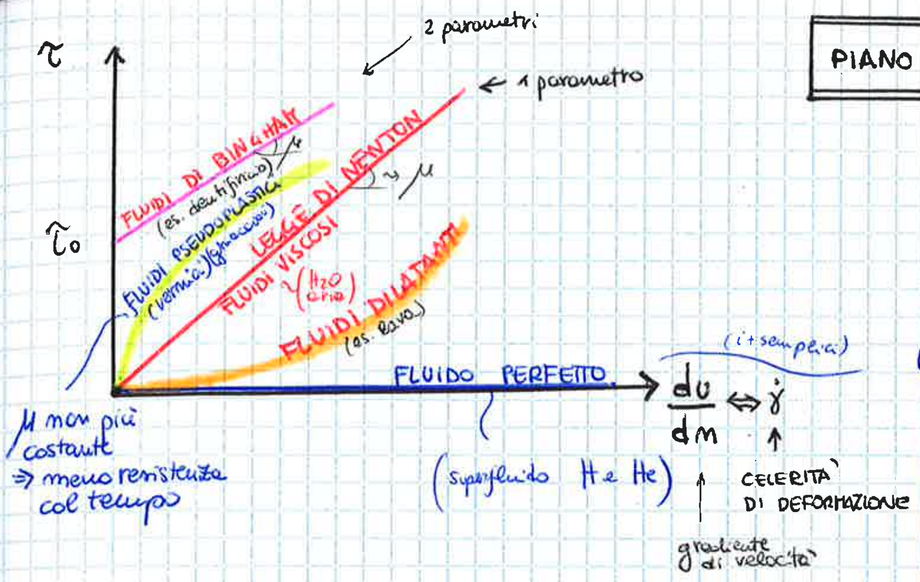
tanto + ε ↑ ⇒ tanto + c ↑
⇒ si propaga + velocemente

H_2O propaga le onde di pressione > dell'aria perchè ε >> nonostante abbia $\rho_{H_2O} > \rho_{aria}$

Se dico che ρ = cost vuol dire che $\varepsilon \to \infty$ allora qualunque Δp applico le variazioni di volume sono infinitesime

se ρ = cost $\begin{cases} \text{tempi di percorrenza della propagazione delle onde di pressione piccolissimi} \\ c \to \infty \quad (\text{ovvero } \varepsilon \to \infty \Rightarrow \rho \to cost) \end{cases}$

PIANO REOLOGICO



Qualunque $\frac{du}{dn}$ (qualsiasi deformazione con qualunque C)

non ha nessuna $\tau = 0$ (tensioni tg)

FLUIDI TIXOTROPICI
- anche se li deformo con lo stesso o diverso sforzo
- $\mu = \mu(t)$ ← non dagli sforzi
  - ↑ tempo → conta anche quello che è successo nel passato
- μ per $t \uparrow$ $\mu \downarrow$

FLUIDI REOPECTICI
- col $t \uparrow$ $\mu \uparrow$

FLUIDI (altri)

$$\dot{\gamma} \propto \frac{\tau}{\mu} + \frac{\dot{\tau}}{G} \quad \Rightarrow \quad \tau = f(\gamma)$$

in generale:

LIQUIDI	$\theta \uparrow$ (tempo)	$\mu \downarrow$
GAS	$\theta \uparrow$	$\mu \uparrow$

$$[\mu] = \left[\frac{Ns}{m^2}\right]$$

• VISCOSITÀ CINEMATICA

$$\boxed{\nu = \frac{\mu}{\rho}} \qquad [\nu] = \left[\frac{m^2}{s}\right]$$

$\mu_{H_2O} > \mu_{aria}$

$\nu_{H_2O} < \nu_{aria}$

$\nu_{H_2O} \simeq 10^{-6}$, $\nu_{aria} \simeq 10^{-5}$

$d\vec{\Pi}_m = d\Omega \, \vec{\phi}_m$ (infinitesimo del secondo ordine)

→ le forze di massa non contano, ma solo quelle di superficie

perchè n entrante, cos angolo ottuso negativo ma area deve essere ⊕

$$\begin{cases} d\vec{\Pi}_x = \vec{\phi}_x \big(\underbrace{-d\Omega \cos \hat{mx}}_{d\Omega_x} \big) \\ d\vec{\Pi}_y = \vec{\phi}_y \left(-d\Omega \cos \hat{my} \right) \\ d\vec{\Pi}_z = \vec{\phi}_z \left(-d\Omega \cos \hat{mz} \right) \end{cases}$$

Se prendiamo normali sugli assi (x, y, z)

$$\vec{\phi}_m \cancel{d\Omega} - \vec{\phi}_x \cancel{d\Omega} \cos \hat{mx} - \vec{\phi}_y \cancel{d\Omega} \cos \hat{my} - \vec{\phi}_z \cancel{d\Omega} \cos \hat{mz} = 0$$

$$\boxed{\vec{\phi}_m = \vec{\phi}_x \cos \hat{mx} + \vec{\phi}_y \cos \hat{my} + \vec{\phi}_z \cos \hat{mz}}$$

TEOREMA DEL TETRAEDRO DI CAUCHY

↳ servono 3 informazioni vettoriali $(\vec{\phi}_x, \vec{\phi}_y, \vec{\phi}_z)$

⇓

ovvero 9 informazioni scalari

Componenti di $\vec{\phi}_m$

$$\phi_{mx} = \phi_{xx} \cos \hat{mx} + \phi_{yx} \cos \hat{my} + \phi_{zx} \cos \hat{mz}$$

$$\phi_{my} = \phi_{yy} \cos \hat{my} + \phi_{zy} \cos \hat{mz} + \phi_{xy} \cos \hat{mx}$$

$$\phi_{mz} = \phi_{zz} \cos \hat{mz} + \phi_{xz} \cos \hat{mx} + \phi_{yz} \cos \hat{my}$$

↓

può essere riscritta in maniera compatta in forma matriciale

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 212

2. $\boxed{\text{LA STATICA}}$

TEOREMA del TETRAEDRO di CAUCHY

$$\vec{\phi}_n = \vec{\phi}_x \cos\widehat{nx} + \vec{\phi}_y \cos\widehat{ny} + \vec{\phi}_z \cos\widehat{nz}$$

Nella statica il vettore di velocità $\vec{u} = 0 \Rightarrow \frac{du}{dn} = 0 \Rightarrow \gamma = 0$

(riguardo grafico) $\Downarrow$ le tensioni tangenziali sono zero

STATICA $\Rightarrow \phi_{ij}\ (i \neq j) \quad \phi_{xy} = \phi_{yx} = \phi_{zy} = 0$

$\downarrow$

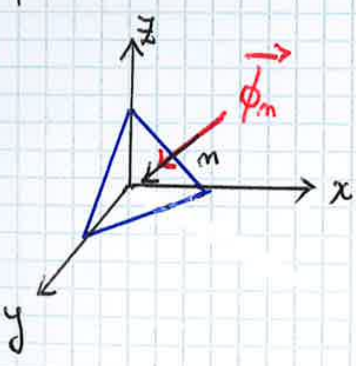
Tensore diagonale $\Rightarrow \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \rightarrow$ tutti gli autovalori uguali $\rightarrow p =$ pressione

$\Downarrow$

il tensore degli sforzi nella statica si riconduce ad uno scalare p $\Rightarrow$ STATO di tensione ISOTROPO (esistono solo gli sforzi normali e non tangenziali)

dim.

- proiettiamo il Teo del Tetraedro lungo x



poiché $\tau = 0 \Rightarrow \phi_n$ è allineato con la direzione n

x) $\phi_{nx} = \phi_n \cancel{\cos\widehat{nx}} = \phi_{xx} \cancel{\cos\widehat{nx}} + 0 + 0$ (ϕ_y non da contributo; ϕ_z non da contributo)

$\Rightarrow \phi_{nx} = \phi_n \cos\widehat{nx} = \phi_{xx} \cos\widehat{nx}$

y) $\phi_{ny} = \phi_n \cancel{\cos\widehat{ny}} = 0 + \phi_{yy} \cancel{\cos\widehat{ny}} + 0$

z) $\phi_{nz} = \phi_n \cancel{\cos\widehat{nz}} = 0 + 0 + \phi_{zz} \cancel{\cos\widehat{nz}}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 212

→ stessa cosa vale lungo l'asse y e z

y) $p\,dx\,dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} dy\right) dx\,dz = -\frac{\partial p}{\partial y} dy\,dx\,dz$

z) $p\,dx\,dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz\right) dy\,dx = -\frac{\partial p}{\partial z} dx\,dy\,dz$

è tutto fermo? Sì, queste forze devono farsi equilibrio

statica

$$\rho\, dx\, \cancel{dy\, dz} \cdot \vec{F} - \left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right) dx\, \cancel{dy\, dz} = 0$$

altrimenti F inerziali

$$\boxed{\rho \vec{F} = \nabla p}$$

equazione indefinita della statica dei fluidi ← come varia p nello spazio

(forza peso → se $\vec{F}$ ammette potenziale ⇒ $\rho \operatorname{grad} U = \operatorname{grad} p$)

Se il campo di F di massa ammette potenziale le superfici equipotenziali ≡ quelle isobare

Hp) se il fluido è incomprimibile ⟹ $\rho = cost$

⇓ lo posso portare dentro e fuori dalle derivate

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = \operatorname{grad} \frac{p}{\rho}}$$

⇒ Se il fluido è incomprimibile in statica la forza $\vec{F}$ (di massa) ammettono potenziale $= \frac{p}{\rho}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{P} = -\vec{F}_c}$ equazione globale

forze al contorno si equilibrano con le forze di massa

Ipotesi 1 $\vec{F}$ è fatta soltanto dalla forza di gravità

$$\vec{F} = \underbrace{\text{grad}(-g z)}_{\text{dimensione di una accelerazione}}$$

$\uparrow z$

Ipotesi 2 Supponiamo che il fluido è incomprimibile

$$\rho = \text{cost}$$

$$\Rightarrow \rho \, \text{grad}(-g z) = \text{grad}\, p \quad \leftarrow \text{Hp } 1$$

$$-g\rho \, \text{grad}\, z = \text{grad}\, p$$

$$-\gamma \, \text{grad}\, z = \text{grad}\, p$$

$$\downarrow \text{Hp } 2$$

$$-\text{grad}\, z = \text{grad}\left(\frac{p}{\gamma}\right)$$

per la proprietà lineare del gradiente

$$\text{grad}\underbrace{\left(z + \frac{p}{\gamma}\right)}_{\text{è cost in tutta la massa fluida}} = 0 \rightarrow h = \text{carico piezometrico}$$

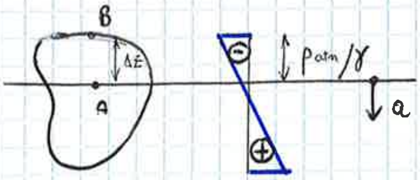
$$\Rightarrow \boxed{\text{grad}\, h = 0}$$

LEGGE DI STEVINO

$$\boxed{H = z + \frac{p}{\gamma}}$$

z → quota geodetica

$\frac{p}{\gamma}$ → quota piezometrica (ha le dimensioni di 1 lunghezza) è 1 pressione



p.c.i.r. → dove $p_r = 0$

a ← affondamento rispetto al piano dei carichi idrostatici relativi

$$\Rightarrow \boxed{p = a\gamma}$$

$$p_{a,B} = p_{a,A} + \gamma \Delta z$$

↑ assoluta

$$p_{r,B} = p_{r,A} + \gamma \Delta z$$

$$0 = p_{a,A} + \gamma \Delta z$$

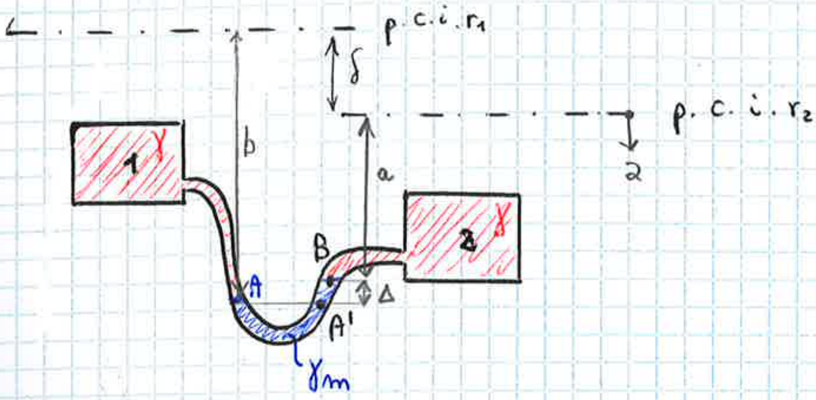
$p_{a,A} = p_{atm}$

$\gamma \Delta z = -\frac{p_{atm}}{\gamma}$ → max perchè $\equiv p_{ass} = 0$

oltre p_{ass} ⊖ e non ha senso

$$\begin{cases} \frac{p_{atm}}{\gamma} = 10,33 \text{ m} \rightarrow \text{per } H_2O \\ \frac{p_{atm}}{\gamma} = 76 \text{ cm} \rightarrow \text{per } Hg \end{cases}$$

- MANOMETRI DIFFERENZIALI



a = affondamento

$$b = a + \delta + \Delta$$

$$p_A = \gamma b = \gamma(a + \delta + \Delta)$$

poiché equip. $\Rightarrow$ isobariche $\quad p_A = p_{A'}$

$$p_{A'} = p_B + \Delta\gamma_m$$

$$p_B = a \cdot \gamma \quad \Rightarrow \quad p_{A'} = a\gamma + \Delta\gamma_m$$

$$p_A = p_{A'} \quad \Rightarrow \quad \cancel{\gamma}(a + \delta + \Delta) = a\cancel{\gamma} + \Delta\gamma_m$$

$$\boxed{\delta = \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}\,\Delta}$$

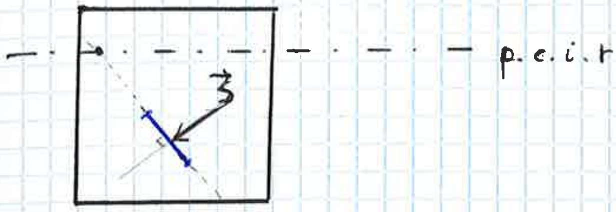
$\{\delta > \Delta$ sempre$\}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 212

$\Rightarrow \cancel{p_N} + \gamma_2 \Delta = \cancel{p_H} + \gamma_1 \Delta$

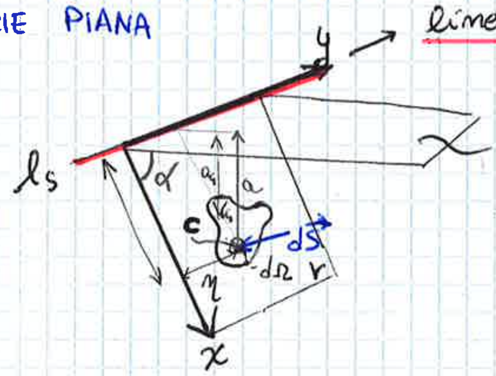
$\gamma_2 \Delta = \gamma_1 \Delta \quad \Rightarrow \quad \Delta = 0$ necessariamente $\Rightarrow$ ORIZZONTALE

Qual'è la spinta esercitata su una superficie piana?



1) SUPERFICIE PIANA

linea di sponda $\times$ p.c.i.r. e piano r



$\vec{S}$ = vettore di spinta

forza — sforzo per area — affondamento rispetto p.c.i.r.

$$|d\vec{S}| = p \cdot d\Omega = \gamma\, a\, d\Omega = \gamma \cdot x \operatorname{sen}\alpha \cdot d\Omega$$

$$\Rightarrow |d\vec{S}| = \int_\Omega \gamma\, x \operatorname{sen}\alpha\, d\Omega = \gamma \operatorname{sen}\alpha \int_\Omega x\, d\Omega$$

↑ momento statico $M_s = \Omega\, x_G$ (forza)

$$= \gamma\, \operatorname{sen}\alpha\, \Omega\, x_G$$

affondamento del baricentro

$$= \gamma\, \Omega\, a_G$$

p_G

esempio

$$\boxed{|d\vec{S}| = p_G \cdot \Omega}$$

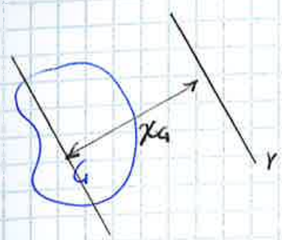
ovvero $S = p_G \Omega = \gamma\, h_G\, \Omega$ (affondamento del baricentro)

→ applicata nel baricentro del volume delle pressioni (come $\frac{1}{3}h$) $\Rightarrow$ nel CENTRO DI SPINTA C

tutte le sup. che hanno lo stesso G $\Rightarrow$ hanno lo stesso modulo a parità di Ω

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 212

TEOREMA DI HUYGHENS - della TRASPOSIZIONE



$$\boxed{I_r = I_{r0} + x_G^2 \Omega}$$

parallela alla retta data r che passa nel G

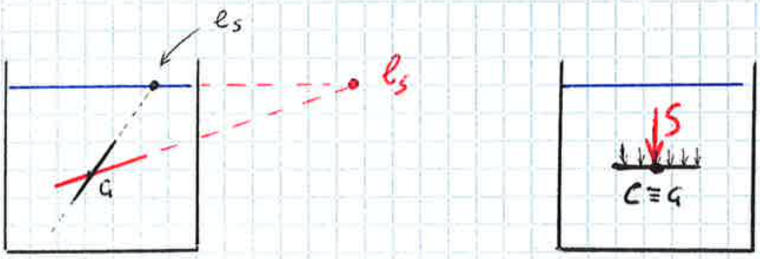
applicandola a psi $\xi = \frac{I_y}{M_s} = \frac{I_{y0} + x_G^2\Omega}{x_G\Omega} = \frac{I_{y0}}{x_G \Omega} + x_G = \underbrace{\frac{I_{0y}}{M_s} + x_G}$

$x_G\Omega$ ← M_s

da questo deduco che C (centro di spinte) sta sempre sotto rispetto G

OSSERVAZIONI

- Se la superficie è // al p.c.i cosa succede?



se ruoto la superficie ⇒ M_s aumenta ⇒ al tendere di $M_s \to \infty$ ⇒ $\underbrace{C \equiv G}$

quando superficie // al p.c.i

- non conta la massa ma solo p.c.i. (perchè spostando il piano variano le pressioni)

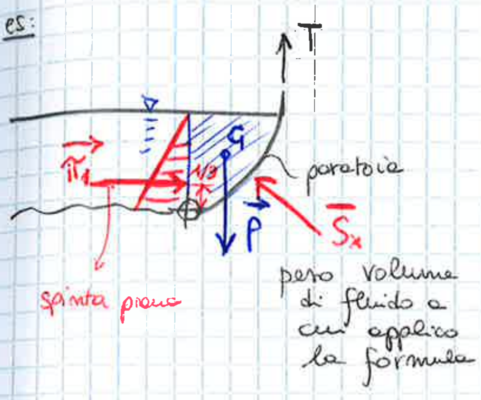
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 212

- METODO 2

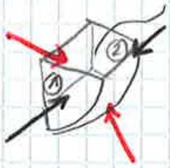
$$\rho \vec{F} = \text{grad } p$$

$$\boxed{\vec{P} + \vec{F}_c = 0}$$

es:



1) prendo l'equazione
2) scelgo il volume ////
3) determino le F che ci sono
   - forze di massa
   - forze di contorno
     - non considero il contorno 1 e 2



$= 0$
su ① e ② = e opposti

$$\Rightarrow \vec{P} + \vec{\Pi}_1 + \vec{S}_x = 0$$

$$\underbrace{\vec{S}_x}_{\text{spinta della paratoia sul fluido}} = -(\vec{P} + \vec{\Pi}_1)$$

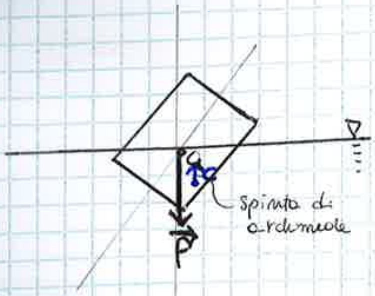
→ ricavo la spinta del fluido sulla paratoia ⇒ cambio segno $\vec{S}_{par} = -\vec{S}_x$

cie

fra

c.i.r.

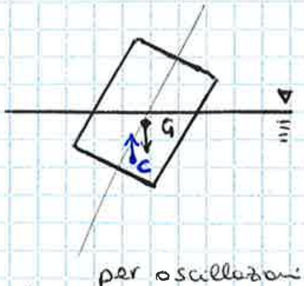
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 212



per oscillazioni
⇒ nasce una coppia stabilizzatrice

Resiste alle perturbazioni

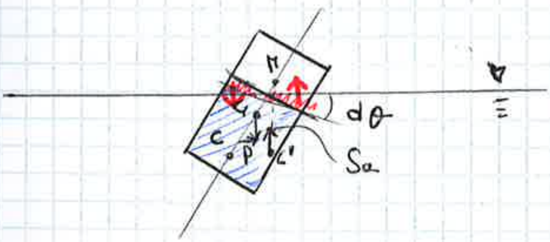
SOLUZIONE STABILE



per oscillazioni
⇒ nasce una coppia destabilizzante

Non resiste alle perturbazioni

SOLUZIONE NON STABILE



M = metacentro

CONDIZIONE DI STABILITÀ

$$\boxed{\overline{CM} > \overline{GC}}$$

C = centro di carena

$\overline{CG}$ è noto

Come calcolo $\overline{CM}$?

1) Spinta di archimede applicata in C
2) " " " " in C'

} Coppia causa dello spostamento della S_A parallelamente dovuta ai 2 cunei

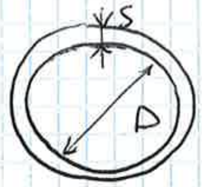
⇒ il momento tra C e C' = momento tra la coppia ↓↑

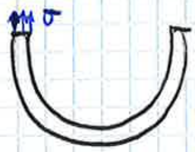
questa coppia trasla S_A da C a C'

distanza metacentrica $\boxed{d_M = \overline{CM} - \overline{CG}}$

$\uparrow d_M \Rightarrow \uparrow$ stabilità

FORMULA DI MARIOTTE



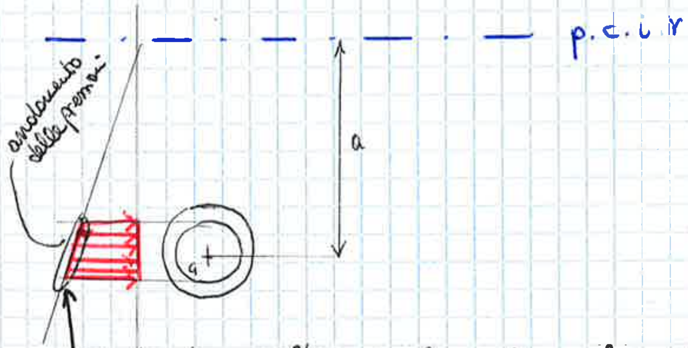


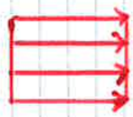
$\boxed{D \gg S}$ ← sotto queste ipotesi

$\Downarrow$

$\exists$ 1 unico valore di σ

Supponiamo che l'affondamento $\boxed{a \gg D}$ → le scale spaziali di mio interesse D << scale usate (realmente) per conoscere il gradiente



gradiente molto piccolo ⇒ lo posso approssimare → 

⇒ pressione stessa ovunque

fine lezione

3. CINEMATICA

- **Approccio LAGRANGIANO**

Considero il fluido composto da particelle che si muovono nello spazio e considero le traiettorie che percorrono (le descrivo)

$P(x_0, y_0, z_0)$ in t_0

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x(t, x_0, y_0, z_0, t_0) \\ y = y(t, x_0, y_0, z_0, t_0) \\ z = z(t, x_0, y_0, z_0, t_0) \end{cases}$$

- **Approccio EULERIANO**

Ad ogni istante descrivo in ogni punto il vettore velocità indipendentemente dalla particella che sta passando

⇓

Do il campo di moto (ovvero il vettore velocità) → campo di velocità

$$\vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

$$\begin{cases} u = u(x, y, z, t) \\ v = v(x, y, z, t) \\ w = w(x, y, z, t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \left[\underbrace{\frac{\vec{u}_B(t+\Delta t) - \vec{u}_B(t)}{\Delta t}}_{\text{variazione locale in 1 punto di } u} + \frac{\vec{u}_B(t) - \vec{u}_A(t)}{\Delta t} \, \frac{\Delta s}{\Delta s} \right]$$

$$= \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \lim_{\Delta t \to 0} \underbrace{\frac{\vec{u}_B(t) - u_A(t)}{\Delta s}}_{\frac{\partial \vec{u}}{\partial s}} \cdot \underbrace{\frac{\Delta s}{\Delta t}}_{|\vec{u}|}$$

$\frac{\partial \vec{u}}{\partial s}$: come cambia la velocità nello spazio

$|\vec{u}|$: modulo

$$\boxed{\vec{A} = \underbrace{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}}_{\text{ACCELERAZIONE LOCALE}} + \underbrace{\frac{\partial \vec{u}}{\partial s} |\vec{u}|}_{\text{ACCELERAZIONE CONVETTIVA}} = \underbrace{\frac{D\vec{u}}{Dt}}_{\text{derivata sostanziale o EULERIANA}}}$$

(non seguo le particelle)

$$\vec{A} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \longrightarrow \text{riferita alle coordinate cartesiane}$$

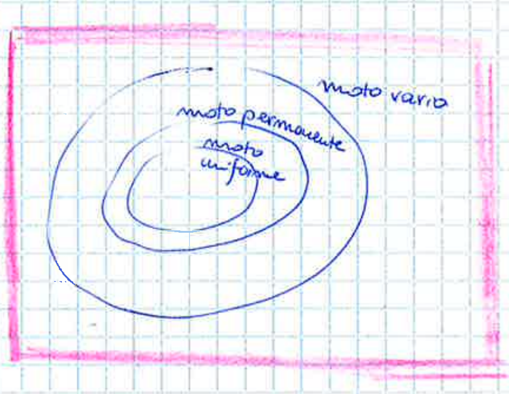
In generale $\rightarrow$ DERIVATA EULERIANA (come varia qualcosa seguendo la particella)

$$\boxed{\frac{D\,\bullet}{Dt} = \frac{\partial\,\bullet}{\partial t} + u \frac{\partial\,\bullet}{\partial x} + v \frac{\partial\,\bullet}{\partial y} + z \frac{\partial\,\bullet}{\partial z}}$$

(3) LINEE DI FUMO

luogo dei punti nel tempo che in 1 certo istante sono passate per lo stesso punto

CLASSIFICAZIONE DEL MOTO



- **MOTO VARIO**

  Varia nello spazio e nel tempo

- **MOTO PERMANENTE**

  $$\frac{\partial \cdot}{\partial t} = 0 \qquad \frac{D \cdot}{Dt} \neq 0$$

  no variazioni temporali
  ma spaziali

- **MOTO UNIFORME**

(sì variazioni spaziali)

il vettore velocità non varia lungo la traiettoria stessa, ma può variare se varia la traiettoria

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 212

$$\cancel{dx\,dy\,dz}\,dt\underbrace{\left[\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}+\frac{\partial \rho w}{\partial z}\right]}_{\mathrm{div}(\rho\vec{u})} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}\,dt\,\cancel{dx\,dy\,dz}$$

$$\boxed{\mathrm{div}(\rho\vec{u}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ (1 vincolo solo xké eq. scalare)
↳ pone un vincolo al campo di moto

↑ vera ∀ punto → il campo di moto non fa tutto quello che vuole xké non si devono creare buchi

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u}\,\mathrm{div}\,\rho}_{\shortparallel} + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{u}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \vec{v}\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{D\rho}{Dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{u} = 0}$$

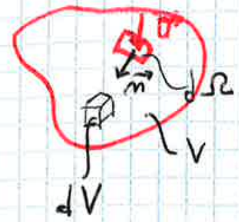
se fluido incomprimibile $\rho = \mathrm{cost}$

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{u} = 0}$$

EQ. CONTINUITÀ PER UN FLUIDO INCOMPRIMIBILE

↑ campo vettoriale è solenoidale ⇒ assicura che non ci sono buchi

EQ. GLOBALE DI CONTINUITÀ



$$\rho\, v_n\, dt\, d\Omega = \rho\, \vec{u}\cdot\vec{n}\, dt\, d\Omega$$

$$\int_\Omega \rho\, \vec{u}\cdot\vec{n}\, d\Omega\, dt = dt \int_\Omega \rho\, \vec{u}\cdot\vec{n}\, d\Omega$$

$dV \rightarrow$ ogni elementino infinitesimo contiene una massa ρdV

in tutto V ?

$$\int_V \rho\, dV$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_V \rho\, dV\right] dt = \left[\int \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV\right] dt$$

$$\rightarrow \cancel{dt}\int_\Omega \vec{u}\cdot\vec{n}\, d\Omega = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV\, \cancel{dt}$$

↑ superficie

$$\Rightarrow \boxed{\int_\Omega \vec{u}\cdot\vec{n}\, d\Omega = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV}$$ EQ. GLOBALE

se fluido incomprimibile

$\rho = \text{cost}$

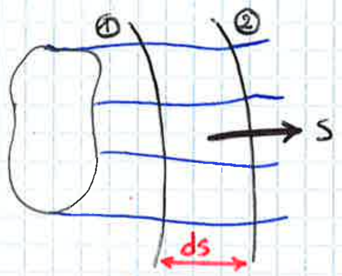
$$\boxed{\int_\Omega \vec{u}\cdot\vec{n}\, d\Omega = 0 = \int_\Omega v_n\, d\Omega}$$

CORRENTE

moto dei fluidi le cui traiettorie sono rettilinee e parallele

(in realtà mai così → ma ingegneristicamente posso approssimare)

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ DELLE CORRENTI



Scelgo un tratto di lunghezza ds di corrente

Considero nella superficie ① una portata Q che moltiplicata per la densità e dt ottengo la massa che entra attraverso 1

$$\rho Q \, dt \quad ①$$

Nella superficie ② ho la stessa portata Q più un salto ds

$$\left(\rho Q + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} ds\right) dt$$

Differenza tra ciò che entra e ciò che esce:

② - ①

$$\boxed{\frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} ds \, dt} \quad (1)$$

Poichè non è un fluido incomprimibile, la ρ può variare, dunque:

$\rho \, \Omega \, ds$ con ρ media e Ω media
↓
sono quelle che nel tempo possono cambiare

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 212

Ricapitolando sulla CINEMATICA

- Approccio Euleriano / Lagrangiano
- Introduzione di $\frac{D\cdot}{Dt}$
- Famiglie di linee e tipi di moto
- Tubo di flusso → portata Q
- Equazione di continuità
- Correnti

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 212

si ottiene:

$$\boxed{\rho(\vec{F}-\vec{A}) = \frac{\partial \vec{\phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\phi}_z}{\partial z}} \quad (\text{eq. vettoriale})$$

EQUAZIONE INDEFINITA DELLA DINAMICA DEI FLUIDI

Con questa equazione dico che il fluido segue l'equazione di Newton, ma devo dire anche che non si creano buchi ⇒ inserisco la legge di continuità:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0} \quad (\text{eq. scalare})$$

La dinamica dipende dagli sforzi:

$$\boxed{p = p(\vec{\phi}_x, \vec{\phi}_y, \vec{\phi}_z)} \quad (\text{eq. scalare})$$

Ho così 5 equazioni scalari, visto che quella indefinita è vettoriale:

3 eq + eq. continuità + sforzi

→ INCOGNITE: $\rho, (u, v, w), (\phi_{xx}, \phi_{yy}, \phi_{zz}, \phi_{xy}, \phi_{xz}, \phi_{yz}, \dots)$

Mancano 5 vincoli, → xkè ho 10 incognite

↓

(5 vincoli già ce li ho → 5 eq. scalari)

Integrando l'equazione di Eulero

$$\underbrace{\int_V \rho \vec{F}\, dV}_{\vec{P}\ (\alpha)} - \underbrace{\int_V \rho \vec{A}\, dV}_{(\beta)} = \underbrace{\int_V \left(\frac{\partial \vec{\phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\phi}_z}{\partial z} \right) dV}_{(\gamma)}$$

(α) $\int_V \rho \vec{F}\, dV$ risultante delle forze di massa $\rightarrow$ peso totale della massa fluida $\vec{P}$

(γ) Teorema di GREEN

$$\int_V \left(\frac{\partial \vec{\phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\phi}_z}{\partial z} \right) dV = -\int_\Omega \underbrace{\left(\vec{\phi}_x \cos\hat{mx} + \vec{\phi}_y \cos\hat{my} + \vec{\phi}_z \cos\hat{mz} \right)}_{\vec{\phi}_m} d\Omega$$

$$= -\int_\Omega \vec{\phi}_m\, d\Omega = -\vec{F}_c$$

risultante delle forze di superficie

$\uparrow$ forze al contorno

(β)
$$-\int_V \rho \vec{A}\, dV = -\int \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{u \partial \vec{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \right) dV =$$

$$= -\int \left(\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \underbrace{\rho u \frac{\partial \vec{u}}{\partial x}}_{\frac{\partial (\rho u \vec{u})}{\partial x} - \vec{u} \frac{\partial \rho u}{\partial x}} + \rho v \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + \rho w \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \right) dV =$$

$$= -\int_V \left(\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u \vec{u})}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v \vec{u})}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w \vec{u})}{\partial z} - \vec{u} \underbrace{\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right)}_{-\vec{u}\, \mathrm{div}(\rho \vec{u}) \Rightarrow +\vec{u} \frac{\partial \rho}{\partial t}} \right) dV$$

$$\vec{M} = \int_{\Omega} \rho \vec{u} V_m \, d\Omega$$

superficie di contorno

$$\Omega = \Omega_e + \Omega_u + \Omega_0$$

$$= \underbrace{\int_{\Omega_e} \rho \vec{u} V_m \, d\Omega_e}_{\vec{M}_e} + \underbrace{\int_{\Omega_u} \rho \vec{u} V_m \, d\Omega_u}_{-\vec{M}_u} + \cancel{\int_{\Omega_0} \rho \vec{u} V_m \, d\Omega_0} = 0$$

dunque in generale:

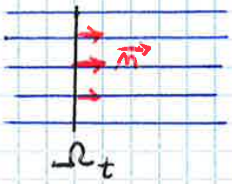
$$\boxed{\vec{P} + \vec{F_c} + \vec{I} + \vec{M_e} - \vec{M_u} = 0}$$

EQ. GLOBALE DELLA DINAMICA DEI FLUIDI

(equazione vettoriale)

↑ è contenuta la statica $(\vec{P} + \vec{F_c} = 0)$

• Le correnti: voglio valutare $\vec{M}$ su una superficie trasversale (piana)



$\rho = cost$ (fluido incomprimibile)

$M = ?$

xké c'è solo 1 $\vec{m}$

su Ω

$$\int_{\Omega_t} \rho \vec{u} V_m \, d\Omega = \rho \int_{\Omega_t} \vec{u} V_m \, d\Omega = \rho \vec{m} \int_{\Omega} u^2 d\Omega$$

purtroppo non so com'è la u nella corrente ⇒ non lo so fare

$$\Rightarrow \frac{\int_{\Omega_t} u^2 d\Omega}{U^2 \Omega} = \beta \to \neq 1$$

non so calcolarlo

ammettendo che c'è la stessa velocità ⇒ so calcolarlo

$$\Rightarrow \int_{\Omega_t} u^2 d\Omega = \beta \cdot U^2 \Omega$$

↑ velocità media

coefficiente che non riesco a calcolarlo teoricamente ma lo procuro sperimentalmente

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 212

FLUIDI PERFETTI E LA LORO DINAMICA

5. TEOREMA DI BERNOULLI

(1) IPOTESI: fluido perfetto

$\Downarrow$

$$\boxed{\rho(\vec{F}-\vec{A}) = \text{grad}\, p}$$

relazione di Eulero

(2) IPOTESI: siamo soggetti alla gravità

$\Downarrow$

$$\boxed{\vec{F} = \text{grad}(-gz)}$$

con $\uparrow z$

(3) IPOTESI: fluido perfetto incomprimibile

$$\boxed{\rho = \text{cost}}$$

$$-\rho\, \text{grad}(gz) - \rho\vec{A} - \text{grad}\, p = 0$$

da (1) e (2)

$\downarrow$ con (3)

$$\text{grad}(\gamma z) + \text{grad}\, p + \rho\vec{A} = 0$$

$\downarrow$ divido per γ

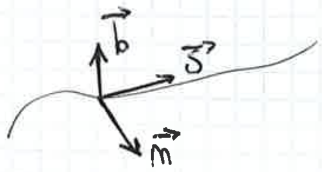
$$\text{grad}\, z + \text{grad}\left(\frac{p}{\gamma}\right) + \frac{\rho}{\gamma}\vec{A} = 0$$

$$\frac{\rho}{\gamma} \to \frac{1}{g}$$

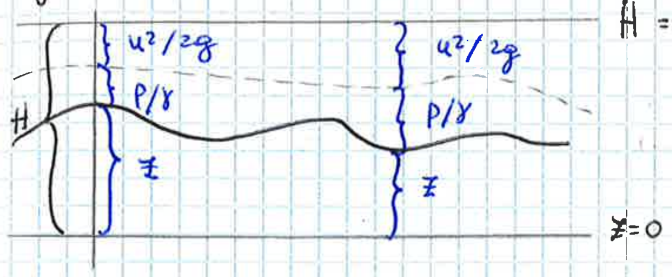
$$\boxed{\text{grad}\Big(\underbrace{\frac{p}{\gamma} + z}_{\text{carico piezometrico}}\Big) = -\frac{1}{g}\vec{A}}$$

$\rightarrow$ eq. vettoriale

Considero 1 generica traiettoria di 1 particella e considero una terna intrinseca



→ geometricamente



H = cost = dire che l'energia è cost

dimensioni di lunghezza: z, $\frac{u^2}{2g}$, $\frac{P}{\gamma}$ possono variare ma la loro somma rimane cost

z = energia potenziale della particella per unità di peso

$$mgz = E_p$$

$$\frac{\cancel{mg}z}{\cancel{mg}} = z$$

Dicendo che il fluido è perfetto sto dicendo che la viscosità è nulla, dunque posso dire che l'energia meccanica si conserva.

Così l'eq. di Eulero contiene già la conservazione di massa

energia cinetica

$$\frac{\frac{1}{2}\cancel{m}u^2}{\cancel{m}g} = \frac{u^2}{2g} \Big\} \text{ altezza cinetica}$$

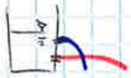
pressione = effetto macroscopico

(non esiste a scala microscopica)

per interpretare cosa succede a livello microscopico (E_p ed E_K)

Applicazioni

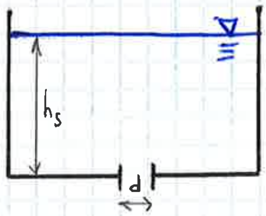
FORONOMIA = masse fluide nei serbatoi con dei buchi



FORI = LUCI

LUCI SOTTOBATTENTI → se foro tutto sotto il fluido (altrimenti NON SOTTOBATTENTI)

✦ ESEMPIO 1



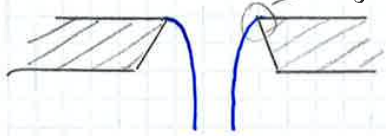
$Q = ?$

→ devo formulare delle ipotesi per rispondere:

(1) $V_s \Rightarrow h_s \gg d$ (altrimenti si innescano meccanismi + complicati)

(2) LUCE A SPIGOLO VIVO

fluido mai uno spigolo ⌈ perchè $r = 0$ e $a_c = \infty$ non ha senso fisico



Si stacca un getto a geometrica cost
(soluzione con foro cilindrico, getto instabile → onde → non posso applicare Bernoulli)

(3) SEZIONE CIRCOLARE

Se il FORO FOSSE A SPIGOLO VIVO e QUADRATO (al posto di CIRCOLARE)

→ fa cose strane il getto

⟶ Sezione circolare + semplice

$$\Rightarrow \quad U_B = \sqrt{2g\left[h_s + (1 \div 2)\,d\right]}$$

Tutti i punti del getto hanno stessa velocità e pressione nulla

per $h_s \gg d$ $\quad \boxed{U_B = \sqrt{2gh_s}} \rightarrow$ VELOCITÀ TORRICELLIANA

dunque $\quad U_B = C_v \sqrt{2gh_s}$

$\uparrow$ coefficiente correttivo misurato sperimentalmente ($C_v \mp 0.99$)

$\uparrow$ 1 % tolta dalla viscosità

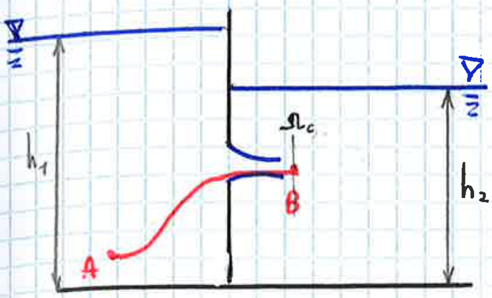
$$Q = \Omega_e \, U_B = C_c \, \frac{\pi d^2}{4} \, \overset{\approx 1}{C_v} \sqrt{2gh_s}$$

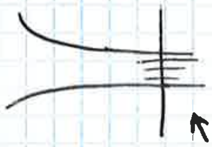
$\uparrow$ coefficiente di contrazione (getto tende a chiudersi)
($\approx 0{,}61 \rightarrow$ da esperimenti)

$$Q = 0.6 \, \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2gh_s}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 212

ESEMPIO 3





tutti i punti dentro il getto hanno carico piezometrico h_2

Posso applicare Bernoulli

$$H_A = H_B$$

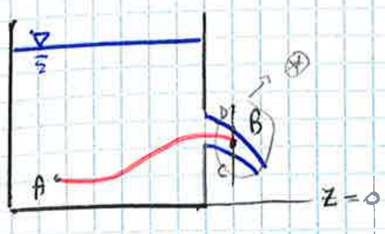
$$\underbrace{z_A + \frac{p_A}{\gamma}}_{h_1} + \underbrace{\cancel{\frac{u_A^2}{2g}}}_{\simeq 0} = \underbrace{z_B + \frac{p_B}{\gamma}}_{h_2} + \frac{u_B^2}{2g}$$

$$u_B = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

$$Q = \Omega_c \cdot U_B = C_c \cdot C_v \, \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2g(h_2 - h_1)}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 212

ESEMPIO 5

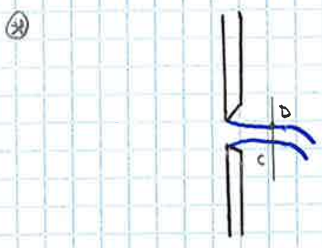


Siamo sotto le ipotesi di Bernoulli:

- viscosità trascurabile
- moto permanente
- fluido incomprimibile

$$p_C = p_D = p_{atm} = 0$$

$$\underbrace{z_A + \frac{p_A}{\gamma}}_{h_s} + \underbrace{\cancel{\frac{u_A^2}{2g}}}_{=0} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{u_B^2}{2g}$$

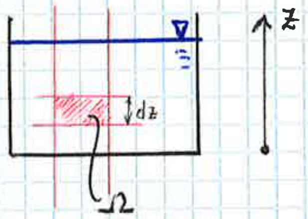


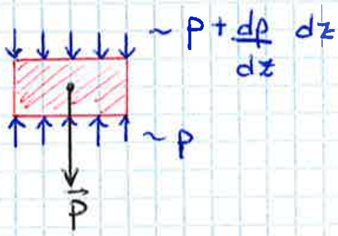
Non è vero che ∃ una zona in cui le traiettorie sono rettilinee e parallele ⇒ non si conserva il carico piezometrico quindi non posso più ragionare come nei casi di prima (con Bernoulli)

La pressione diventa un'incognita

Come procedere?

Consideriamo un fluido in statica

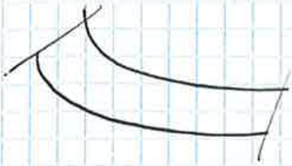




$$-\gamma \cancel{\Omega}\, dz + p \cancel{\Omega} - \left(p + \frac{dp}{dz} dz\right) \cancel{\Omega} = 0$$

$$\frac{dp}{dz} = -\gamma \quad \text{(LEGGE DI STEVINO)}$$

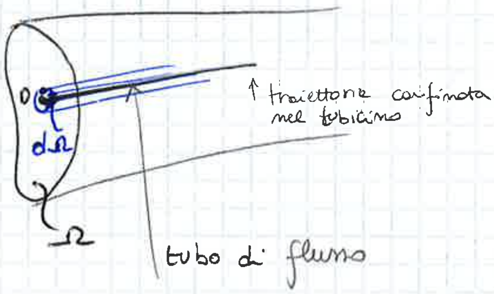
Voglio utilizzare Bernoulli utilizzando la velocità media cinetica U non considerando più le traiettorie (ma considero variabili globali)



$$\frac{U^2}{2g} \quad ; \quad \text{con } U = \frac{Q}{\Omega}$$

variabili locali	variabili globali
p	Q
$\vec{u}$	U
	Ω

ESTENSIONE DEL TEO DI BERNOULLI AD 1 CORRENTE



Sempre valide le ipotesi di Bernoulli

- O = centro di $d\Omega$

da $d\Omega$ passa una portata dQ

poichè Hp: moto permanente $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$

- eq. di continuità

$$\frac{\partial \cancel{\rho} Q}{\partial s} + \cancel{\frac{\partial \rho \Omega}{\partial t}} = 0 \qquad \rho = \text{cost}$$

$\Downarrow$

la portata lungo S è sempre la stessa

$$g \rho \, dQ = \underbrace{\gamma \, dQ}_{} \quad \text{portata in peso}$$

massa nell'unità di tempo che passa nel tubicino cost e uniforme nel tempo e nello spazio

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 212

$$P = \underset{\text{cost}}{\gamma Q} \underbrace{\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha U^2}{2g} \right)}_{\Rightarrow \text{ deve essere cost}} = \text{cost}$$

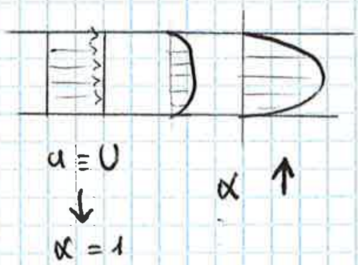
$H \rightarrow$ carico totale di una corrente (sezione per sezione) $=$ cost

Quanto vale α?

$\alpha = \alpha$ (distribuzioni delle velocità lungo la sezione)

$\alpha = 1 \rightarrow$ se il profilo di velocità è uniforme ($u \ \forall$ punto $=$ cost)

Tanto + il profilo è disuniforme tanto + α si allontana da 1



Nel moto turbolento $\rightarrow \alpha \cong 1$

Nel moto laminare (profilo velocità pronunciato) $\rightarrow \alpha = 2$

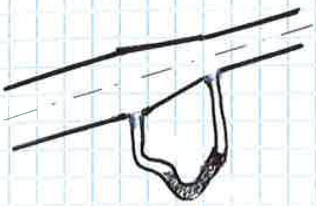
Tra α e β vi è un legame

$$\boxed{(\alpha - 1) = 3(\beta - 1)}$$

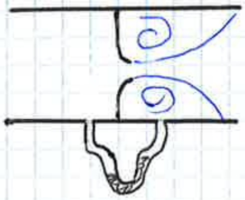
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 212

dunque devo misurare $h_1 - h_2$ → MANOMETRO DIFFERENZIALE → misura il carico piez.

misuro Δh e trovo la Q

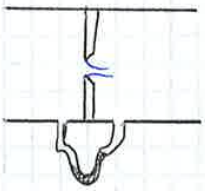


- BOCCAGLI



cambia α

- DIAFRAMMI

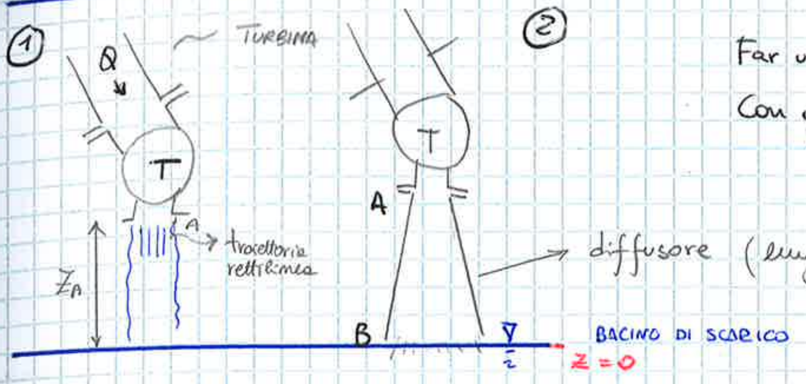


α ancora + alto

$$\underbrace{\hspace{10em}}$$

MISURO LA PORTATA

CENTRALI IDROELETTRICHE



Far uscire meno energia possibile.
Con quale energia rilasciano l'acqua

1) $H = z_A + \cancel{\frac{p_A}{\gamma}}_{=0} + \frac{\alpha u_A^2}{2g}$

2) $H_A = H_B$

$H_B = \cancel{z_B}_{=0} + \cancel{\frac{p_B}{\gamma}}_{=0} + \frac{\alpha u_B^2}{2g}$

in (A) $z_A + \cancel{\frac{p_A}{\gamma}}_{=0} + \frac{\alpha u_A^2}{2g}$

$\Rightarrow \quad H_A = \frac{\alpha u_B^2}{2g}$

$H_{A(2)} < H_{A(1)}$

$\Downarrow$

porto via + energia nel 2° caso perché manca z_A e anche perché u_B è <

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 212

L'equazione (1) integrata da come risultato:

$$\boxed{\vec{P} + \vec{F_c} + \vec{I} + \vec{M_e} - \vec{M_u} = 0}$$

Con l'ipotesi di fluido perfetto → ρ = cost:

$$\vec{F_c} = \int_\Omega \vec{\phi_m} \, d\Omega = \int_\Omega p\vec{n} \, d\Omega = \vec{N}$$

forze al contorno normali

(Nel caso di Eulero $\vec{\phi_m} = p\vec{n}$)

L'equazione (2) integrata:

$$\boxed{\vec{P} + \vec{N} + \vec{I} + \vec{M_e} - \vec{M_u} = 0}$$

L'equazione (3) integrata:

$$\boxed{\underbrace{\vec{P} + \underbrace{\vec{N} - \vec{T}}_{\text{effetto della viscosità}}}_{\text{Forze al contorno}} + \vec{I} + \vec{M_e} - \vec{M_u} = 0}$$

EQUAZIONE DEFINITA DI NAVIER-STOKES

perchè cost perchè non considero la temperatura

$$\int_V \mu \nabla^2 u \, dV = \mu \int_V \left(\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial z^2} \right) dV$$

Per il TEOREMA DI GREEN

$$= -\mu \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x^2} \cos\hat{mx} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial y^2} \cos\hat{my} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial z^2} \cos\hat{mz} \right) d\Omega$$

$$= -\mu \int \frac{\partial \vec{u}}{\partial m} \, d\Omega = -\vec{T}$$

forze tangenziali

$$\vec{F_c} = \vec{N} - \vec{T} \qquad \tau = \mu \frac{du}{dy}$$

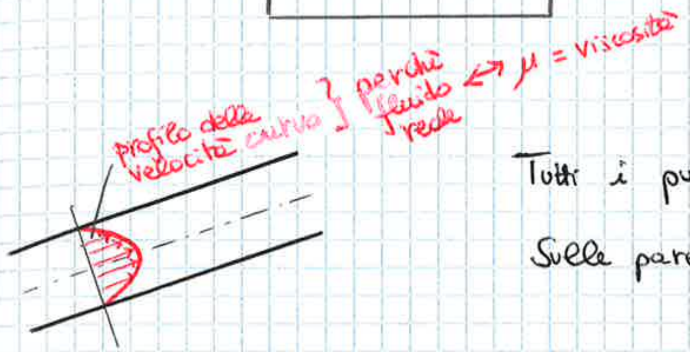
Quello che succede all'interno del volume non importa nulla

Integrando:

$$\boxed{H(s) = H(s=0) - \int i(s)\, ds}$$

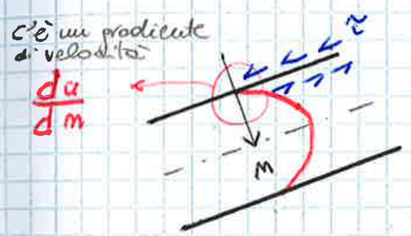
In caso di $\underbrace{\text{CORRENTI CILINDRICHE}}$ ⇒ i non è funzione di s ⇒ posso portarla fuori

$$\boxed{H(s) = H_0 - is}$$



Tutti i punti ∈ alle pareti ⇒ hanno tutti la stessa velocità

Sulle pareti → = 0



Ci sono delle tensioni τ che si scambiano tra la parete e il fluido

Sono le tensioni τ le principali cause della dissipazione (non sono solo sulle pareti, ma anche all'interno ma di entità minori)

AZIONE DI TRASCINAMENTO / FRENO TRA FLUIDO E PARETE

→ USO l'equazione integrata di NAVIER-STOKES

$$T = \gamma \Omega (h_1 - h_2) = \gamma \Omega i L$$

tanto + $T \uparrow$ $\Rightarrow$ tanto + $i \uparrow$ // $\gamma \Omega L \rightarrow$ Peso del Volume di fluido $\cdot\, i$

$\Rightarrow$ variazione di energia di tutto il volume

OSSERVAZIONE

ricorda che L non è orizzontale ma è il percorso del fluido

$$\tau = \frac{T}{L \cdot P} = \frac{\gamma \Omega i \cancel{L}}{\cancel{L} \cdot P} = \gamma i \frac{\Omega}{P} = R \Rightarrow \boxed{\tau = \gamma i R}$$

TENSIONI TANGENZIALI

$L \cdot P$ → superficie laterale

importante per caratterizzare il comportamento di una corrente

P = CONTORNO BAGNATO (CONTORNO SEZIONE → lunghezza circonferenza)

RAGGIO IDRAULICO $\boxed{R = \frac{\Omega}{P}}$

Ω e P → caratteristiche della sezione

P → zona dove si esplicano le tensioni tg

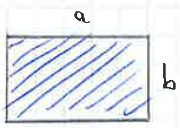
$\Rightarrow$ le τ dipendono dalle caratteristiche della sezione

esempio cerchio:

SEZIONE CIRCOLARE

$$R = \frac{\Omega}{P} = \frac{\cancel{\pi} r^{\cancel{2}}}{2 \cancel{\pi} \cancel{r}} = \frac{r}{2} = \frac{d}{4}$$

rettangolo:



$$R = \frac{\Omega}{P} = \frac{a \cdot b}{2(a+b)} \xrightarrow{se} a \gg b \Rightarrow \frac{a \cdot b}{2a} \simeq \frac{b}{2}$$

poco efficiente

$$R = \frac{\text{capacità della sezione di trasportare 1 portata}}{\text{quanto è il perimetro che cerca di frenare } (\tau)} \approx \text{efficienza della sezione}$$

sezione + efficiente → a parità di perimetro (P) hanno sezioni (area) (Ω) maggiore

7.

MOTO FLUIDO VISCOSO (ma vale anche per i perfetti)

↙ **MOTO LAMINARE** (semplice)

↘ **MOTO TURBOLENTO** (complesso)

✧ ADIMENSIONALIZZAZIONE

↳ (strumento per analizzare le equazioni differenziali)

$$\boxed{\rho\left(\vec{F} - \vec{A}\right) = \operatorname{grad} p - \mu \nabla^2 \vec{u}}$$

equazione di NAVIER-STOKES

scala dei tempi $t = \dfrac{l}{u_0}$

ci sarà una scala tipica delle lunghezze l, u_0 (es. aeroplano, zanzara)

↑ velocità riferita a quella scala

introduco una $\underbrace{\text{scala delle pressioni}}_{\text{densità} \cdot \text{scala delle velocità}}$ $p_0 = \rho u_0^2$

→ nel mio problema avrò sicuramente una (x, y, z)

⇒ adimensionalizzo

$$\begin{cases} \tilde{x} = \dfrac{x}{l} \\[2ex] \tilde{y} = \dfrac{y}{l} \\[2ex] \tilde{z} = \dfrac{z}{l} \end{cases}$$

si muove su valori completamente diversi

⇒ così che $\boxed{0 < \tilde{x} < 1}$

$0 < \tilde{y} < 1$

$0 < \tilde{z} < 1$

$$\begin{cases} \tilde{u} = \dfrac{u}{u_0} \\[2ex] \tilde{v} = \dfrac{v}{u_0} \\[2ex] \tilde{w} = \dfrac{w}{u_0} \end{cases}$$

proietto il campo di moto nello stesso range → $(0; 1)$

$$\tilde{t} = \frac{t}{\dfrac{l}{u_0}} \qquad \tilde{p} = \frac{p}{\rho u_0^2}$$

⇓ il problema così si somiglia sia a piccole che a grandi scale

(1) ho diviso per ρ
(2) riscritto nelle variabili adimensionali
↓
tutte queste derivate $\in (0;1)$
⇒ ora posso confrontarle perché variano nello stesso intervallo

⇓

si distingue tutta la meccanica dei fluidi da 2 coefficienti:

$\boxed{\frac{g\,l}{u_0^2}}$ ⇝ numero di Froude = $\boxed{F_r = \frac{u_0}{\sqrt{g\,l}}}$ (importante per i moti ondosi)

$\boxed{Re = \frac{u_0\, l}{\nu} = \frac{\rho\, u_0\, l}{\mu}}$ = numero di Reynolds [–]

$Re = \frac{\text{FORZE INERZIA}}{\text{FORZE VISCOSE}}$ agenti sul fluido

FORZE VISCOSE ↘ nascono per le $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ scala

$$\Rightarrow Re = \frac{\rho\, l^3 \frac{u_0}{l/u_0}}{\left(\mu \frac{u_0}{l}\right) l^2} = \frac{\rho\, u_0\, l}{\mu}$$

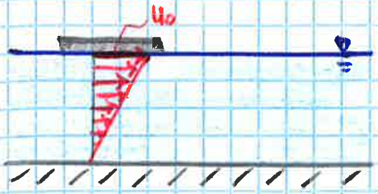
Per Re ↑ ⇒ F_{INERZIA} più importanti
Per Re ↓ ⇒ F_{VISCOSE} più importanti

F inerzia trascurabili	F inerzia importanti	F inerzia importanti
F viscose importanti	F viscose importanti	F viscose trascurabili

→ Re

La cosa che importa dunque è il n° di Re

7. MOTO LAMINARE — CORRENTI IN PRESSIONE



(come tante lamine sovrapposte)

moto regolare → traiettorie // senza mischiarsi ognuno con la sua direzione e velocità

moto semplice

TUBO CIRCOLARE →

Lo vedo quando Re basso

velocità media

$$\boxed{Re = \frac{\rho\, U \cdot D}{\mu} \approx 2000}$$

→ moto laminare e stabile

soglia per un tubo circolare

moto laminare (stabile) | moto turbolento → Re

Re soglia

F viscose tengono l'ordine

F inerzia → caos

Fluidi viscosi (come gli oli)

Qual'è l'andamento della velocità all'interno?

$u = u(r)$ $\qquad v = w = 0$

$u(r = R) = 0$

Le τ ricavate sono di natura viscosa
C'è un gradiente normale ⇝ dalla legge di Newton

$$|\tau| = \mu \left| \frac{du}{dr} \right|$$

⇓

mi aspetto che la u → abbia un profilo parabolico (conica con tg lineari)

⇝ dalle tensioni:

tutti i gradienti di velocità

$$\vec{T} = \mu \int_\Omega \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} \, d\Omega$$

↑ sezione laterale cilindrica

T = risultante di tutte le $\underbrace{\to \overset{\tau}{\to} \to}$

xké equidist dall'asse (simmetria) } tutti questi punti vedono la stessa

cerchio

non dipende dal $d\Omega$ e lo posso portare fuori $\left\{ \frac{du}{dn} \right.$

↓ da qui ricavo quindi la velocità

$$= \mu \frac{du}{dn} \underbrace{2\pi r L}_{\int_\Omega d\Omega}$$

$\vec{n}$ è entrante

$r = -n + cost$

⇓

$dr = -dn$

$$T = -\mu \frac{du}{dr} 2\pi r L$$

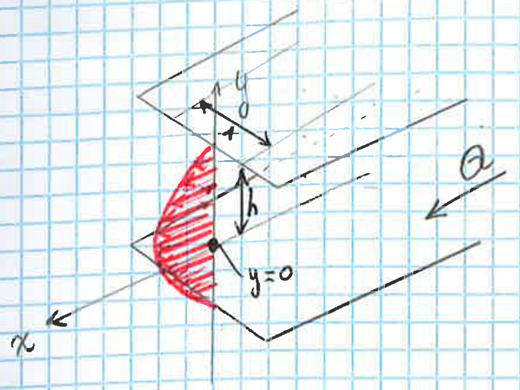
poiché $T = \gamma \pi r^2 i L$

$$-\mu \frac{du}{dr} 2\cancel{\pi} \cancel{r} \cancel{L} = \gamma \cancel{\pi} r^{\cancel{2}} i \cancel{L}$$

$$\frac{du}{dr} = -\frac{\gamma i}{2\mu} r$$ } eq diff a variabili separabili

$$u(r) = -\frac{\gamma i}{4\mu} r^2 + cost$$ ⇝ legge quadratica

MOTO FLUIDO LAMINARE TRA 2 PIANI PARALLELI DI LUNGHEZZA ∞



$u = u(y) = ?$

$$\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad}\, p - \mu \nabla^2 \vec{u}$$

$$\gamma \frac{\partial}{\partial x}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) - \mu \nabla^2 u = -\rho \cancel{\frac{Du}{Dt}} = 0 \quad \text{xke}$$

$$\nabla^2 u = \underbrace{\cancel{\frac{\partial u^2}{\partial x^2}}}_{=0} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial u^2}{\partial z^2}}}_{=0}$$

$$\frac{Du}{Dt} = \underbrace{\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}}_{=0} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}}_{=0}u + \frac{\partial u}{\partial y}\underbrace{\cancel{v}}_{=0} + \frac{\partial u}{\partial z}\cancel{w}$$

$\frac{Du}{Dt} = 0$

moto vario ∄

0 → non cambia con x xke moto pieno

Si muove lungo x

$$\Rightarrow \boxed{\gamma \frac{\partial}{\partial x}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = \mu \frac{d^2 u}{d y^2}}$$

poichè $i = -\frac{\partial h}{\partial x}$

$$-\gamma i = \mu \frac{d^2 u}{d y^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2 u}{d y^2} = -\frac{\gamma i}{\mu}} \quad \text{eq. diff. di 2° grado}$$

CONDIZIONI AL CONTORNO

(1) fluido attacca alle 2 pareti

$$u(y = \pm h) = 0$$

(2) per la simmetria

$$\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0} = 0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 212

T come lo scelgo? Tempo su cui voglio fare la media

Questo ragionamento va bene purchè T sia un tempo abbastanza lungo per conoscerne tutte le manifestazioni.
Ogni volta che aumento T vedo nuove cose che prima non vedevo, dunque non c'è un T preciso da usare, ma occorre un tempo ∞ per sapere cosa accade e come cambia il fluido.

Appena inizia un moto vario il ragionamento sulla media non va più bene

$$\underbrace{\boxed{u(t) = \bar{u} + u'}}_{}$$

$\to$ valore di oscillazione intorno alla media $\mapsto$ componenti di agitazione turbolenta

SCOMPOSIZIONE DI REYNOLDS

$$\tilde{u}(t) = U + u$$
$$\tilde{p}(t) = P + p$$

cioè somma di un valore medio ed agitazione

$\to$ NAVIER-STOKES

$$\rho(\vec{F} - \vec{\tilde{A}}) = \text{grad}\,\tilde{p} - \mu \nabla^2 \vec{\tilde{u}}$$

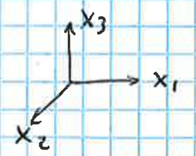
$\to$ EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

$\rho = \text{cost}$

$$\text{div}\,\tilde{\bar{u}} = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0$$

cambio notazione $\quad \bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$



Vale anche

$$\boxed{\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0}$$

anche la divergenza delle oscillazioni turbolente è nulla

EQ. DI NAVIER-STOKES

$$\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad}\, p - \mu \nabla^2 \tilde{u}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \hat{u}_j \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_i \partial x_j} + G$$

$$\frac{D u_i}{D t} = A_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \left(u_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial v}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} \right)$$

Introduco la decomposizione

$$\frac{\partial (U_i + u_i)}{\partial t} \dots$$

al posto di $\tilde{u} = U + u$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 212

EQ. NAVIER - STOKES DEL MOTO MEDIO (presenze della turbolenza)

$$\boxed{\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_i \partial x_j} + G}$$

generato da (2) → termine non lineare
(scala grande legata a quella piccola e viceversa)

Se il fluido è comprimibile il termine 3 ≠ 0 perché nascerebbero delle correlazioni tra ρ e p (vale lo stesso per ν)

$$\rho \underbrace{\left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_j}{\partial x_j}\right)}_{DU_i/Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} - \rho \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} + G$$

EQUAZIONE CHE REGOLA IL MOTO MEDIO

$$\Rightarrow \boxed{\rho \frac{DU_i}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\tau_{ij}\right] + G}$$

→ gravità

↳ come cambia la velocità

↑ TENSORE sforzi

con $\tau_{ij} = P + \rho\, \overline{u_i u_j} - \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)$

[quello che conta è il gradiente spaziale della pressione]

↑ pressioni (sforzi normali)

tensioni viscose τ (legge di Newton)

→ tensioni turbolente τ generate dalle crosscorrelazioni (quanto sono correlate le oscillazioni delle particelle)

↳ $\boxed{\underbrace{\tau_{turb}}_{\text{TENSIONI DI Reynolds}} \gg \tau_{viscose}}$ (conta quasi nulla)

↑ generate dal termine non lineare

12

SCALE INTERMEDIE: • uguali, perchè non risentono delle condizioni al contorno (hanno perso delle informazioni)
compito di passare l'energia

SCALE VISCOSE

SCALE PICCOLE → **MICROSCALA**

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 212

$$(1)\begin{cases} \log q_1 = \alpha_1 \log \lambda + \beta_1 \log \tau + \gamma_1 \log \mu \\ \log q_2 = \alpha_2 \log \lambda + \beta_2 \log \tau + \gamma_2 \log \mu \\ \log q_3 = \alpha_3 \log \lambda + \beta_3 \log \tau + \gamma_3 \log \mu \end{cases}$$

(trasformo il sist non lineare in lineare)

$$(2)\begin{cases} \log \lambda = \delta_1 \log q_1 + \varepsilon_1 \log q_2 + \omega_1 \log q_3 \\ \log \tau = \delta_2 \log q_1 + \varepsilon_2 \log q_2 + \omega_2 \log q_3 \\ \log \mu = \delta_3 \log q_1 + \varepsilon_3 \log q_2 + \omega_3 \log q_3 \end{cases}$$

Per poter passare da 1 terna ad un'altra (da $(1) \to (2)$) quando:

det delle dimensioni delle grandezze nuove è $\neq 0$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Nel mondo (1) Backingam ci dice che:

data una grandezza $y = \overbrace{f(Q_1, Q_2, \dots Q_m)}^{(m+1)\text{ dimensioni}}$ LEGAME FUNZIONALE

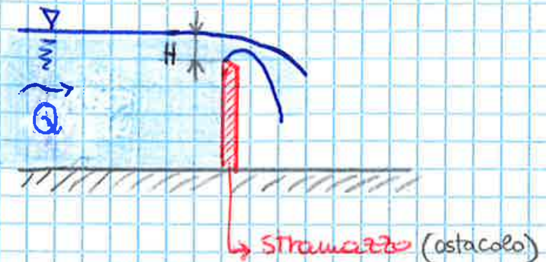
↑ complicata e non nota

allora scelgo (Q_1, Q_2, Q_3) come grandezze fondamentali e poi proietto tutte le grandezze sulla nuova terna fondamentale

$$\underbrace{\frac{y}{Q_1^{\alpha} Q_2^{\beta} Q_3^{\gamma}}}_{N\,[-]} = g\left(Q_1, Q_2, Q_3, \frac{Q_4}{Q_1^{\alpha_4} Q_2^{\beta_4} Q_3^{\gamma_4}}, N_5, \dots, N_m\right)$$

Risolvo il problema : - spazio < dimensioni
- cambio argomenti adimensionali ($\Rightarrow Re$)
($\Rightarrow$ basta cambiare D U e non necessita ρ, μ)

✧ esempio : canale



$H \xrightarrow{\text{legato}} Q$

(fluido in moto turbolento)

dominio non noto xkè parte della soluzione stessa
↓
PROBLEMA A FRONTIERA LIBERA

EQ. NAVIER - STOKES regola il problema ⟼ non risolvibile

⇒ faccio degli esperimenti :

$$Q = f(H, L, g, \cancel{\nu})$$

L ← lunghezza stramazzo

$\cancel{\nu}$ ↳ xkè Reynolds alto

$f \rightarrow [L, T]$
↓
4 dimensioni

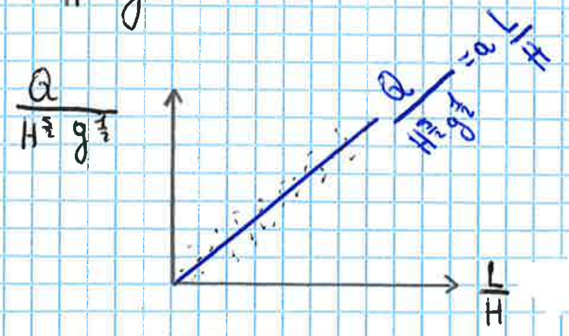
↓ Teo. π

$[H, g]$ ← proietto Q

⇓

$$\frac{Q}{H^{\frac{5}{2}} g^{\frac{1}{2}}} = h\left(\frac{L}{H}\right)$$

$h \rightarrow$ 2 dimensioni



⇝ basta cambiare H aprendo e chiudendo il rubinetto a monte

cost (coeff angolare retta)

$$\boxed{Q = a\, H \sqrt{g\, H}\, L}$$

LEGGE DELLO STRAMAZZO

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 212