



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 1866A -

ANNO: 2016

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Bettale Valentina

MATERIA: Biomeccanica del sistema cardiovascolare, Appunti +  
Domande d'esame svolte + Esercitazioni laboratorio - prof.  
Morbiducci

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

# IVASI SANGUIGNI

↑ effetto contrattile

## classificazione:

- arterie maggiori (elastiche)
- arterie medio calibro (muscolari)
- piccole arterie (< 2mm)
- capillari



→ filtro anelli STAZIONARIO

## anatomia arterie:

3 STRATI

- Lume
- Tunica Intima = cellule endoteliali
- Lamina elastica interna
- Tunica media > fenestrata
- Lamina elastica esterna
- Tunica avventizia

↳ UNICO LAYER ANTITROMBOGENICO

↳ Sono meccano TRASDUTTORI (DIL e CONTRA)

↳ ≠ spessore

↳ ≠ proprietà meccaniche

### ① Tunica Intima

- Strato cell endoteliali antitrombogenico
- se ROTTO → Trombo
- → aumento permeabilità → aterosclerosi
- Lamina Basale di tessuto connettivo trombogenico
- funzione → strutturale
- → filtro

### ② LEI

- fibre elastiche fenestrare in cui possono penetrare cellule muscolari usce dalla tunica media

### ③ Tunica media

- Strato muscolare: CMS + fibre elastiche
- poco vascolari 20%
- impo x vascostris / vasodil
- col tempo diventa fibroso + rigido
- causa aterosclerosi → migrano in intima
- → producono enzimi una
- → recettori x LDL colesterolo

### ④ LEE

- si indebolisce in aterosclerosi x ipertensione i nuovi vasi

### ⑤ Tunica avventizia

- tessuto connettivo con fibroblasti e vasa vasorum + connettivati nervose ma Δ aterosclerosi x aterosclerosi







## STRUTTURE E PROPRIETÀ MECCANICHE

come sono organizzate e disposte le 3 sostanze nei vali (1973 - Azuma e Hasegawa)

★ **Fibre muscolari** - ampie a circa a passo piccolo lungo l'asse del valo, cioè in direzione longitudinale



★ **elastina** - lamina con fenestrate in direzione longitudinale

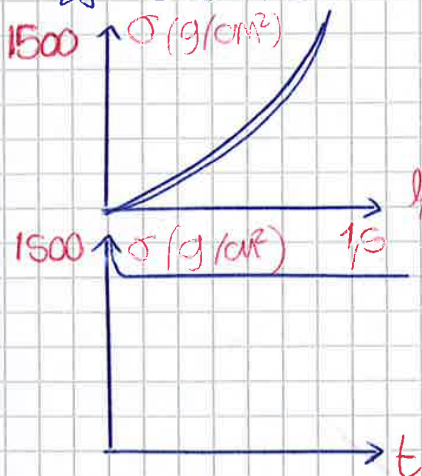


★ **collagene** - Rete disordinata e indispata in condizioni di basso stress che si può organizzare e riorganizzare se ↑ le sollecitazioni, estendendosi



e le loro caratteristiche meccaniche tratte da curve di sforzo / deformazione in risposta ad una prova ciclica di carico e scarico ed in risposta ad una prova di rilassamento

★ **elastina** - • Basso modulo elastico ( $\approx 1 \text{ MPa}$ )



• comportamento in prima approssimazione elastico lineare

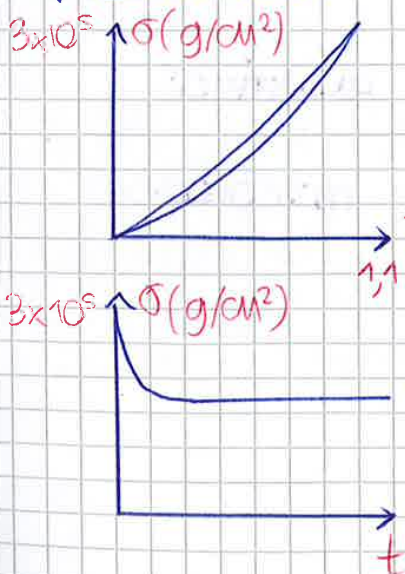
• Botta isteresi

• Basso rilassamento

• Umette poco a ritornare nella condizione di equilibrio

•  $\sigma_{\text{max}} = 1500 \text{ g/cm}^2$ ;  $1/\epsilon_0 = 1/5$

★ **collagene**



• modulo elastico  $3 \times$  rispetto elastina

• risposta elevata x valori modesti di deformazione (sforzo + grande x stessa deform)

• comportamento non lineare x non linearità del materiale

• le fibre entrano in azione progressivamente se sollecitate

• moderata isteresi

• moderato rilassamento

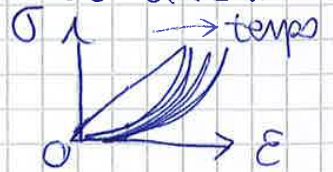
$\sigma_{\text{max}} = 3 \cdot 10^5 \text{ g/cm}^2$ ;  $1/\epsilon_0 = 1/1$



★ Nuova arteria iliaca, in condizione di muscolatura uscia contratta,  $\exists$  una sovraccaricatura **residua** nella curva non va a zero in condizioni di deformazione nulla.  
 → questo comportamento è dovuto alla distribuzione non uniforme di **CML** nella parete del vaso, che indica uno stato di sforzo definito **residuo**

## Prove meccaniche

x qualsiasi tempo biologico, non esiste uno stato naturale a cui il materiale ritorna e le sollecitazioni esterne sono nulle.



In condizione di esercizio si definisce invece una **condizione omeostatica** = equilibrio meccanico e biochimico del tessuto, dove cause ed effetti sono

univocamente correlati, che dipende da  $\neq$  fattori  $\left\{ \begin{array}{l} \text{età} \\ \text{genetica} \\ \text{stile vita} \end{array} \right.$   
 Ogni xsp ha la propria omeostasi che cambia durante la vita.

Prima di procedere in una prova meccanica bisogna prima fare dei cicli di **carico/scarico** x raggiungere la condizione di equilibrio / omeostatica, poi si può effettuare il test.

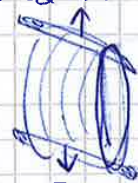
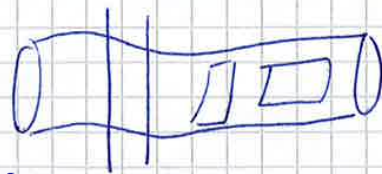
ci sono 2 tipi di test (di carico uniaxiale a trazione)

• TEST DI **STRASCIA**

• TEST DI **ANELLO**



a seconda del provino realizzato



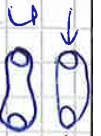
- Provino trattenuto con afferraggi all'estremità

- è difficile progettare questi afferraggi x trasferire bene lo sforzo al provino (altrimenti non si studia il comportamento del materiale)

- si valuta lo stato di sollecitazione circonferenziale

- è influenzata dalla presenza di sollecitazioni flessionali che non sono controllabili sopra il mentre si scarica

- si possono fare prove solo in direzione circonferenziale





Da morto, le vene sono l

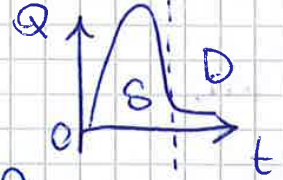
in caso di traccimi →  
Ritrazione

In situ, le vene sono deformate in direzione longitudinale  
del **100 - 150%**.

In situ, le arterie " " " del **30/50%**.

L'infornata dell'aorta, come geometria di riferimento, si può trovare un po' fase di DIASTOLE quando la portata è bassa x il ventricolo si sta riempiendo

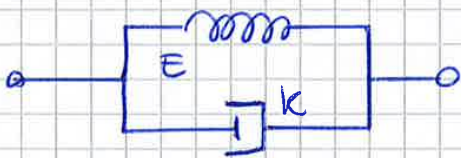
Il pre-tensionamento è dovuto alla specifica esigenza di non formare pieghe occlusive durante movimenti o posture, cioè durante i movimenti dei tessuti non circostanti che potrebbe comportare una diminuzione della loro lunghezza → x le arterie basta poco x ma ce una ↑ pressione interna



In conclusione, x le vene in vivo il tessuto vascolare è sottoposto ad uno stato di sollecitazione debole in direzione circonferenziale, (x ↓ piastrina) ma grande in direzione assiale (x pre-tensionamento)! →  $E_{long} > E_{arco}$

### PROVE DINAMICO-MECCANICHE

Prove x la determinazione di parametri del modello viscoelastico



Equazione

$$\sigma(t) = E \cdot \epsilon(t) + \eta \cdot \frac{d\epsilon(t)}{dt}$$

Modello di Kelvin-Voigt

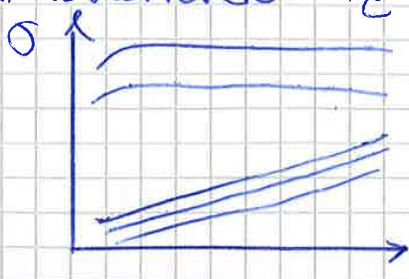
Il comportamento è ≠ tra statico e dinamico, x si risponde in maniera diversa a seconda della  $f$  di sollecitazione

Il materiale è rappresentato dal modello di un solo viscoelastico con 2 parametri

- modulo elastico  $E'$  (o conservativo) = parte reale

- modulo viscoso  $E''$  o  $\eta$  (o dissipativo) = parte immaginaria

x il rapporto  $\sigma/\epsilon$  ha la forma di un numero complesso.



TEST aorta acuminata

← parte elastica indipendente da  $f$

← parte del comportamento viscoso che dipende molto da  $f$

(↑ se ↑  $f$ )

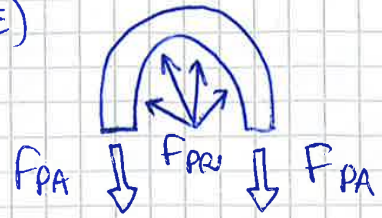


• si usa un sistema di riferimento cilindrico : 3 sforzi longitudinali, circonferenziale e radiale

★ si scrive l'equilibrio di forze (equazione)

La forza verticale dovuta alla pressione del fluido che agisce sulla parete interna del vaso

La forza che le pareti tagliate si trasmettono e servono a non sbriciolare il vaso



$$F_{PV} = \int_0^\pi p \sin\theta L R d\theta = 2pLR$$

integrale lungo la parete interna

$$F_{PA} = 2\sigma_{\theta\theta} SL$$

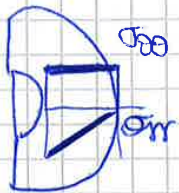
sforzo circonferenziale \* area su cui agisce

$$2pLR = 2\sigma_{\theta\theta} SL$$

lo sforzo circonferenziale è  $\sigma_{\theta\theta} = \frac{pR}{s}$

IPOTESI = lo sforzo ha valore uniforme nella parete indipendentemente dalla porzione di parete considerata

RISULTATO = è uno sforzo di trazione che ↑ con la pressione e con il raggio e ↓ con l'aumentare della spessore, cioè è grande se lo spessore è sottile



varia linearmente tra l'interno e l'esterno della parete

★ per calcolare lo sforzo radiale  $\sigma_{rr}$ , per l'equilibrio esso assume i valori

$$\sigma_{rr}(R_i) = -p$$

$$\sigma_{rr}(R_o) = \sigma_{rr}(R_i + s) = 0$$



Δ ai fetti che sono immersi nel liquido ambiente

★ per calcolare lo sforzo assiale/longitudinale  $\sigma_{zz}$

sforzo superficie = pressione interna

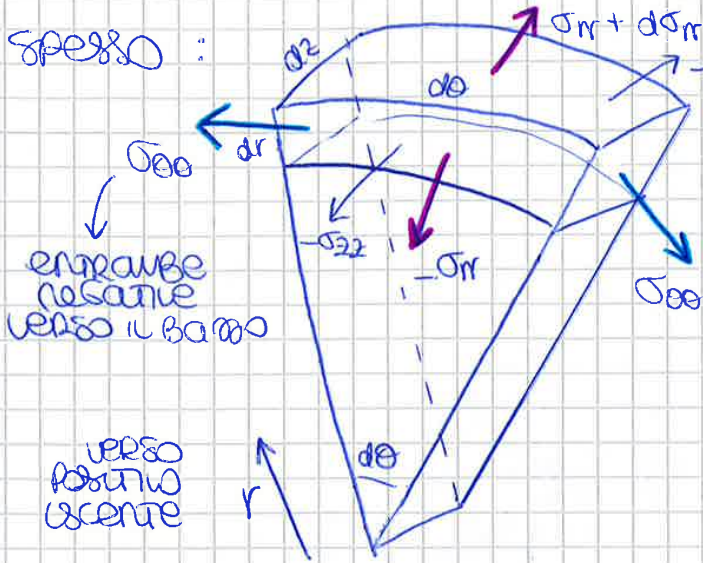


lo sforzo è 1 al poggio

$$\sigma_{zz} \pi [(R+s)^2 - R^2] = p \cdot \pi R^2 \text{ BILANCIO}$$



PER IL PROBLEMA DEL CUINDRO A PARETE SPESSEA IN PRESSIONE SI ESAMINA L'EQUILIBRIO DI UNA PORZIONE ELEMENTARE DI TUBO SPESSEO :



engambe negative verso il barbo

verso positivo uscente

si assumono positivi gli sforzi di trazione

si scrive l'equilibrio statico proiettato in direzione radiale:

in questa direzione agiscono le  $\sigma_{rr}$  sulle facce interne ed esterne e  $\sigma_{\theta\theta}$  sulle facce  $dx$  e  $dx$

(no  $\sigma_{zz}$ )

$$-\sigma_{rr}(rd\theta dz) + (\sigma_{rr} + d\sigma_{rr})(r+dr)(d\theta dz) +$$

$$-\sigma_{\theta\theta}(dz dr \sin(\frac{d\theta}{2})) - (\sigma_{\theta\theta} + d\sigma_{\theta\theta})(dz dr \sin(\frac{d\theta}{2})) = 0$$

Sviluppo e trascurare gli infinitesimi di ordine superiore

$$-\sigma_{rr}rd\theta dz + \sigma_{rr} \cdot r \cdot d\theta dz + \sigma_{rr} dr d\theta dz + d\sigma_{rr} r d\theta dz + d\sigma_{rr} dr d\theta dz$$

$$-\sigma_{\theta\theta} dz dr \sin(\frac{d\theta}{2}) - \sigma_{\theta\theta} dz dr \sin(\frac{d\theta}{2}) - d\sigma_{\theta\theta} dz dr \sin(\frac{d\theta}{2}) = 0$$

$$\sigma_{rr} dr d\theta dz + d\sigma_{rr} r d\theta dz - 2\sigma_{\theta\theta} dz dr \sin(\frac{d\theta}{2}) = 0$$

$$\sigma_{rr} dr + d\sigma_{rr} \cdot r - 2\sigma_{\theta\theta} dr = 0$$

xe  
kanno  
no=?

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr}}{r} - 2\sigma_{\theta\theta} = 0$$

$$\sigma_{rr} dr d\theta dz + d\sigma_{rr} \cdot r d\theta dz - 2\sigma_{\theta\theta} dz dr \sin(\frac{d\theta}{2}) = 0$$

$$\sigma_{rr} dr + d\sigma_{rr} \cdot r - 2\sigma_{\theta\theta} dr = 0$$

$$r d\sigma_{rr} + dr \sigma_{rr} - dr \sigma_{\theta\theta} = 0$$

$$\boxed{\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr}}{r} - \sigma_{\theta\theta} = 0}$$



si ottiene:

$$u = \frac{pR_i^2}{E(R_e^2 - R_i^2)} r + \frac{1}{r} \frac{pR_i^2 R_e^2}{E(R_e^2 - R_i^2)} = \frac{pR_i^2}{E(R_e^2 - R_i^2)} \left( r + \frac{R_e^2}{r} \right)$$

è una legge  $\times$  lo spostamento radiale in funzione del raggio e dipende dalle proprietà meccaniche  $E$  e da parete del vaso.

In corrispondenza di  $r = R_e$

$$u(R_e) = \frac{2R_e p R_i^2}{E(R_e^2 - R_i^2)}$$

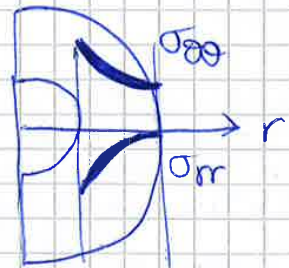
In vuo, con tecniche di imaging si valuta  $u(R_e)$  deformazione radiale e con un catetere si conosce  $p$  pressione interna del vaso in modo da poter valutare  $E$ , il comportamento meccanico del vaso e prevenire rischi di  $\left\{ \begin{array}{l} \text{ipertensione} \\ \text{riflessione} \\ \text{della onda pressoria} \end{array} \right.$

si trova così la distribuzione degli sforzi radiali e circonferenziali lungo la parete (spessa) del vaso

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr}(r) = E \frac{du}{dr} = E \frac{d}{dr} \left[ u(r) \right] = \frac{pR_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \left( 1 - \frac{R_e^2}{r^2} \right) \\ \sigma_{\theta\theta}(r) = E \frac{u}{r} = \frac{pR_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \left( 1 + \frac{R_e^2}{r^2} \right) \end{array} \right.$$

Queste formule danno solo un'idea dell'ordine di grandezza se si sono date ipotesi sulla:

- parete spessa
- $p$  meccaniche = in direzione (ma è un materiale) anisotropo



Il valore medio della distribuzione di sforzi circonferenziali coincide con lo sforzo circonferenziale della parete sottile

$$\overline{\sigma_{\theta\theta} \text{ spessa}} = \frac{pR_i}{s} = \overline{\sigma_{\theta\theta} \text{ sottile}}$$

$$\text{con } \overline{\sigma_{\theta\theta} \text{ spessa}} = \frac{1}{R_e - R_i} \int_{R_i}^{R_e} \sigma_{\theta\theta}(r) dr$$



DENTRO, una soluzione di emoglobina, che tiene x un rapporto del 90% del  $O_2$  nel sangue

Ogni emoglobina ha 4 gruppi-eme x legare  $O_2$

Calcolo: contenuto  $O_2 = [O_2] + [HbO_2]$

legge HENRY

$$[O_2] = \alpha_{O_2} P_{O_2}$$

$\alpha_{O_2}$  = coeff di solubilità

$$[O_2] = 0,13 \text{ mmole/l}$$

$$(P_{O_2} = 100 \text{ mmHg})$$

$$[HbO_2] = 8,78 \text{ mmole/l}$$

un ordine di grandezza di differenze

GR: Eritrocisti con nucleo

però no nucleo, riempono Hb

reticolati

eritrociti

Vita 90/120 gg (tanti), distrutti in fegato e milza

in circolo: distribuiti in modo uniforme sopra nel centro del vaso e si separano x carica  $\ominus$

in quiete: si aggregano in **rouleaux** x le piccole forze endonamiche

⚠️ microcircolazione ⚠️ zone di ristagno

Globuli Bianchi: forma sferoidale con nucleo

(leucociti)

⚠️ leucemia

meno deformabili  
più in grado, uniformi, nucleo meno numerose

3 gruppi

Granulociti 75%  
Linfociti 25%  
Monociti 5%

funzione antimicrobica

- monociti:

+ grandi

precursori dei macrofagi

vita 2/3 giorni

struttura fagocitaria sede di infiammazione e struttura secretoria (lisozima)

⚠️

possono interagire con cell endoteliali e attaccarli ad esse in zone di ristagno ed a bassa velocità → aterosclerosi



FLUIDO **omogeneo** (costituito da 1 sola fase) CARATTERIZATO DA 2 PROPRIETÀ FISICHE  $\leftarrow$  **densità**  $\rho$   $\propto T$   
**viscosità**  $\mu$   $\propto T, \dot{\gamma}$

\*  $\dot{\gamma}$  = SHEAR RATE, DESCRIVE IL CAMPO DI MOTO SCALARE CHE SINTETIZZA LA DEFORMAZIONE FUNZIONE DEI GRADIENTI DI VELOCITÀ:

X MOTO POISEUILLE

$$\dot{\gamma} = -\frac{dv}{dr}$$

X MOTO 3D

$\dot{\gamma}$  = TENSORE DEI GRADIENTI DI VELOCITÀ

↑ sforzo di TAGLIO

$\mu = \mu(T) \rightarrow$  FLUIDO NEWTONIANO

$\mu = \mu(T, \dot{\gamma}) \rightarrow$  ALTRI FLUIDI

$$\tau = \mu \dot{\gamma}$$

$$\tau = \mu(\dot{\gamma}) \dot{\gamma}$$

LA VISCOSITÀ PUÒ ESSERE PERCORSO FUNZIONE DELLO STATO DI MOTO = INSIEME DEI VETTORI VELOCITÀ - DEI SINGOLI ELEMENTI DI FLUIDO

GLI SFORZI VISCOSI ( $\tau$ ) AGENTI ALL'INTERNO DELLA MASSA FLUIDA DIPENDONO DALLE VARIAZIONI DELLE COMPONENTI DI VELOCITÀ TRA ELEMENTI CONTIGUI.

$\dot{\gamma} = -\frac{dv}{dr}$  variazione in direzione radiale della velocità  
 angolo del FLUIDO, cambiamento di segno x  
 RILUTTARE POSITIVA  $[s^{-1}] = [m/s / m]$

X UN FLUIDO NEWTONIANO:

$\mu = \mu(T)$  non dipende da SHEAR RATE

$\tau = \mu \dot{\gamma}$  LO SFORZO TANGENZIALE È DIRETTO AL GRADIENTE DI VELOCITÀ  $\dot{\gamma}$  CATTRAVERSO LA VISCOSITÀ DINAMICA

\* **DENSITÀ** = massa volumica del sangue intero  $\propto$  EMATOCRITO

È COMBINAZIONE DELLE DENSITÀ DELLE 2 COMPONENTI PRINCIPALI DEL SANGUE, PLASMA E GR, COME SOMMA DI ENTRAMBE PESATE CON IL VOLUME OCCUPATO (% Ht)

$$\rho_s = \rho_p (1 - Ht) + \rho_{gr} \cdot Ht$$

$\rho_p$  = densità Plasma

$\rho_{gr}$  = densità GR

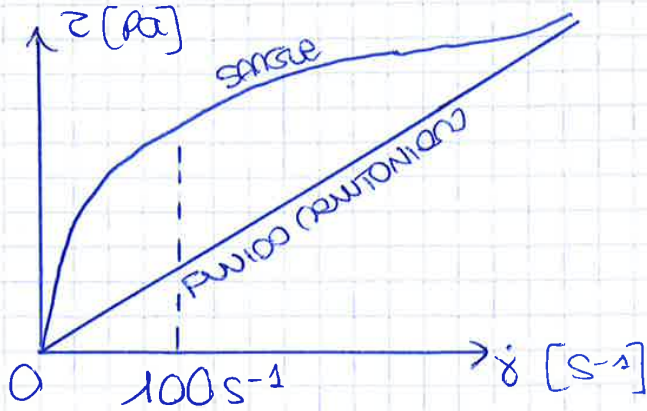
se  $\rho_p = 1035 \text{ kg/m}^3$   
 $\rho_{gr} = 1090 \text{ kg/m}^3$   
 Ht = 45%  
 SANGUE

$$\rho_s = 1060 \text{ kg/m}^3$$

densità del sangue intero



IL CASO DI GRANDI VASI ( $\Phi > 0,3 \text{ mm}$ ) a  $\downarrow \dot{\gamma}$  si può vedere nel Diagramma sforzo di taglio  $\tau$  / SHEAR RATE  $\dot{\gamma}$



COMPORIMENTO DEL SANGUE:

- $\downarrow \dot{\gamma} < -100 \text{ s}^{-1}$ :  
non newtoniano  
massima viscosità  
formazione rouleaux  
relazione non lineare
- $\uparrow \dot{\gamma}$ : le 2 curve tendono  
asintoticamente una  
all'altra  
si newtoniano

LA VISCOSITÀ DIPENDE DA 2 FATTORI:

- VISCOSITÀ DEL PLASMA =  $\mu_p$

$\mu_p \cong 1,1-1,6 \text{ cP}$ ,  $\propto T$ , composizione  $< \text{H}_2\text{O}$  / proteine

Plasma = 90%  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\propto T$

$$\mu_w \cong \frac{\mu_0}{1 + 0,0387T + 0,00022T^2}$$

DIPENDE  
FORTEMENTE  
DALLA TEMPERATURA

$\mu_0 = 1,858 \text{ cP}$   
 $\uparrow T, \downarrow \mu_w$

• si ottiene:  $\mu_p \propto \mu_w$  !!

$$\begin{cases} \mu_p = 1,8 \cdot \mu_w & T > 20^\circ\text{C} \\ \mu_p = \mu_w (-1,32 + 0,024 \cdot T) & T < 20^\circ\text{C} \end{cases}$$

QVASI IL  
DOPPIO

LINEARITÀ CON  
LA T

•  $\mu_p \propto [\text{PROTEINE}] \quad \uparrow \mu_p, \uparrow [P]$

ALBUMINA:  $\uparrow [ ]$ ,  $\downarrow$  dimensioni = TRASCURABILE

GLOBULINE: grandi, [40% P]

FIBRINOGENO:  $\uparrow$  dimensioni,  $\downarrow [ ] \rightarrow$  RESPONSABILE  
DEL ROULEAUX  
e  $\uparrow$  VISCOSITÀ a  $\downarrow \dot{\gamma}$

OGNI PROTEINA HA UN DIFFERENTE EFFETTO  
SUL COMPORIMENTO REOLOGICO DEL SANGUE

$\rightarrow$  Relazione di **BAYLISS** (1962)

$$\mu_p = \mu_w \frac{1}{1 - kc} \quad \uparrow [c], \cong \uparrow \mu_p$$

$k$  = COSTANTE CARATTERISTICA DELLA SPECIFICA PROTEINA.



Taylor: modifica x tener conto del liquido contenuto all'interno delle particelle

$$\mu_s = \mu_p \left( 1 + \epsilon_s \frac{\mu_r/\mu_p + 0,4}{\mu_r/\mu_p + 1} \cdot c \right)$$

$\mu_r$  = viscosità del fluido contenuto nelle sfere = liquido globuli rossi nel GR =

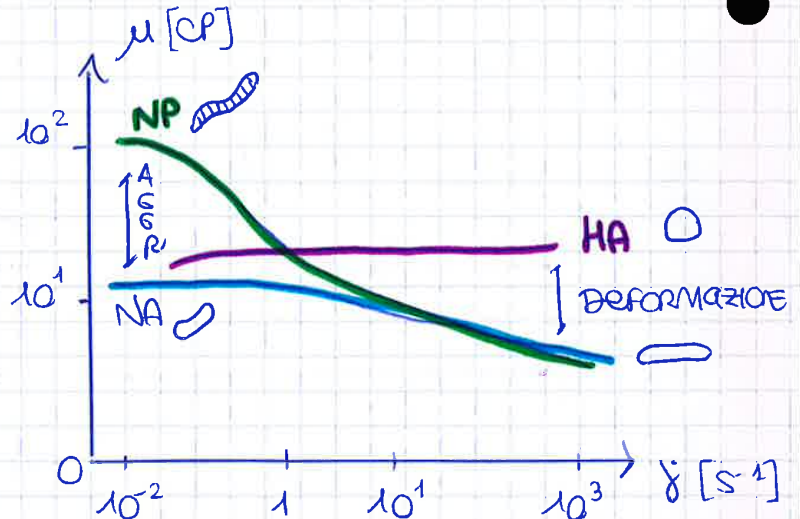
→ effetto della deformabilità dei GR

I GR si deformano ed assumono una forma ellissoidale con l'asse maggiore allineato nella direzione del moto  $\dot{\gamma}$ , riducono così la viscosità

è un moto a carraffato = tank treading della membrana non rotolano e non si svolgono

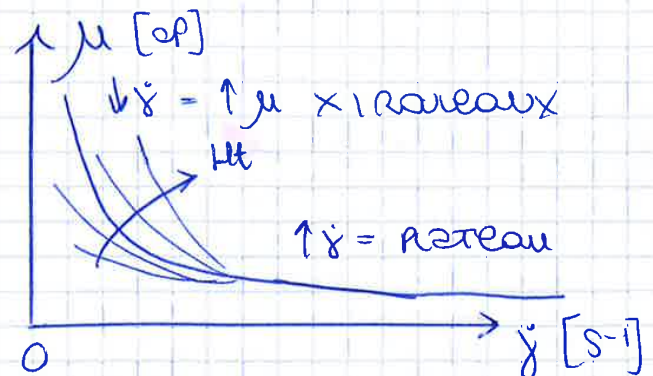
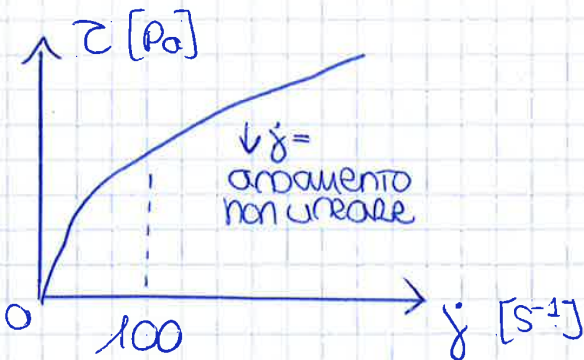
Il comportamento reologico si analizza nel diagramma  $\mu/\dot{\gamma}$  di 3 tipi di soluzione:

- NP = sangue intero
- NA = GR in soluzione di Ringer e albumina senza fibrinogeno e globuline
- HA = come NA, con GR indeformabili



$\downarrow \dot{\gamma} \Rightarrow NP \neq NA$  perché la  $\mu$  aumenta grazie alla caduta di aggregazione dei GR nel sangue intero (data dal fibrinogeno)

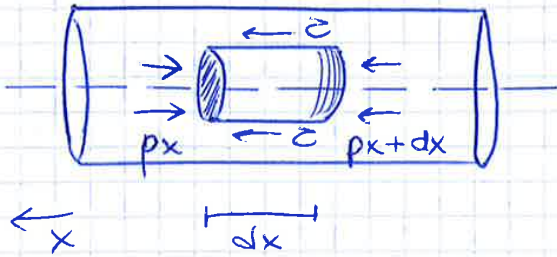
$\uparrow \dot{\gamma} \Rightarrow HA \neq NA, NP$  non conta più l'aggregazione xk le elevate forze evaporamiche non la permettono ma la viscosità diminuisce in NP e NA xk i GR sono capaci di deformarsi



per  $\downarrow \dot{\gamma}$ ,  $\Rightarrow \uparrow Ht = \uparrow \mu$ ; per  $\uparrow \dot{\gamma}$ ,  $\Rightarrow \uparrow Ht = \mu \times$  aggregaz. rouleaux

modello

- moto del sangue in condotto cilindrico circolare raggio R
- flusso laminare e stazionario
- volume cilindrico elementare di sangue costante con il vaso di raggio r:



SUL VOLUME AGISCONO 2 TIPI DI FORZE:

- Pressione a  $dx$  e  $dx$
- Forze tangenziali sulle superfici sopra e sotto

convenzione: + in senso entrante  
- se uscente

EQUILIBRIO DELLE FORZE

$$\tau = p$$

$$\tau \cdot (2\pi r \cdot dx) = (p_x - p_{x+dx}) (\pi r^2)$$

forza  $\cdot$   $sp$   
= pressione  $\cdot$   $sp$

$$\tau (2\pi r \cdot dx) = -\pi r^2 \left( \frac{dp}{dx} \right) dx$$

$$2\tau = -r \frac{dp}{dx}$$

$$\tau = -\frac{dp}{dx} \cdot \frac{r}{2}$$

Per ricavare la legge di moto:

- $\tau = \tau_0 + \mu \dot{\gamma}$   $\rightarrow$  Eq. modello
- $\dot{\gamma} = -\frac{dv}{dr}$   $\rightarrow$  moto laminare in condotto cilindrico
- $\tau = -\frac{dp}{dx} \frac{r}{2}$   $\rightarrow$  equilibrio, forze non dipende dal modello di viscosità! ma è proporzionale a r e massimo alla parete  $\tau_w$

$$\tau_w = -\frac{dp}{dx} \frac{R}{2} = \tau_{max} = \tau_w = \tau(r=R) \quad \text{sollecitazione massima}$$

$$\tau_0 = \tau(r=r_0) \quad \text{esiste un valore di } r, x \text{ cui la sollecitazione di taglio è = alla yield stress}$$

condizioni:

- ★  $\tau_w < \tau_0 \rightarrow$  il fluido non si muove,  $Q=0$  con un sforzo che supera  $\tau_0$  x generale movimento

$$-\frac{dp}{dx} \frac{R}{2} < \tau_0 \quad -\frac{dp}{dx} < \frac{2\tau_0}{R}$$

- ★  $\tau_w > \tau_0 \rightarrow$  il fluido si muove

$$-\frac{dp}{dx} > \frac{2\tau_0}{R}$$



$$\begin{aligned}
 Q &= \int_0^R u(2\pi r) dr \quad \text{coordinate cilindriche} = \\
 &= \int_0^{r_0} 2\pi r \cdot u_0 dr + \int_{r_0}^R 2\pi r u dr = \\
 &= 2\pi u_0 \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^{r_0} + 2\pi \frac{1}{4\mu_B} \frac{dp}{dx} \int_{r_0}^R (r^3 - 2r_0 r^2 - R^2 r + 2r_0 R r) dr \\
 &= 2\pi \frac{1}{4\mu_B} \frac{dp}{dx} \left[ (-r_0^2 - R^2 + 2r_0 R) \left( \frac{r_0^2}{2} \right) + \left[ \frac{r^4}{4} - \frac{2}{3} r_0 r^3 - \frac{R^2}{2} r^2 + \frac{2r_0 R}{2} r^2 \right]_{r_0}^R \right] \\
 &= \frac{2\pi}{4\mu_B} \frac{dp}{dx} \left[ -\frac{r_0^4}{2} - \frac{R^2 r_0^2}{2} + \frac{r_0^3 R}{1} + \frac{R^4}{4} - \frac{2}{3} r_0 R^3 - \frac{1}{2} R^4 + r_0 R^3 - \frac{r_0^4}{4} + \frac{2}{3} r_0^4 + \frac{R^2 r_0^2}{2} - \frac{r_0^3 R}{1} \right] \\
 &= \frac{\pi dp}{2\mu_B dx} \left[ -\frac{1}{12} r_0^4 - \frac{1}{4} R^4 + \frac{1}{3} r_0 R^3 \right] \\
 &= \frac{\pi}{8\mu_B} \frac{dp}{dx} \left[ -\frac{1}{3} r_0^4 - \frac{4}{3} R^4 + r_0 R^3 \right]
 \end{aligned}$$

$$Q = \frac{\pi}{8\mu_B} \frac{dp}{dx} \left[ -R^4 + \frac{4}{3} r_0 R^3 - \frac{1}{3} r_0^4 \right]$$

$v_m$  = velocità media  
 $A$  = Area  
 $Q = v_m \cdot A$

$$\text{Se } \mu_A = \mu_B \left[ -R^4 + \frac{4}{3} r_0 R^3 - \frac{1}{3} r_0^4 \right]^{-1} \quad \text{viscosità newtoniana}$$

$$\leadsto Q = \frac{\pi}{8\mu_A} \frac{dp}{dx} \quad \text{Poiseuille}$$

Quindi la portata di un fluido ama Bingham in un condotto cilindrico in condizioni stazionarie è la stessa di un fluido newtoniano, sotto un certo gradiente di pressione, con una viscosità newtoniana data da  $\mu_A$  che si muove nello stesso condotto cilindrico.

$$\text{Ricordiamo, } Q=0 \quad \text{se } \tau_w < \tau_0 = \frac{dp}{dx} < -\frac{2\tau_0}{R}$$



$$du = -\frac{1}{\mu_c} \left( \sqrt{-\frac{r dp}{2 dx}} - \sqrt{-\frac{r_0 dp}{2 dx}} \right)^2 dr$$

$$u = \int_r^R -\frac{1}{\mu_c} \left\{ -\frac{r dp}{2 dx} - \frac{r_0 dp}{2 dx} - 2 \sqrt{-\frac{r dp}{2 dx}} \sqrt{-\frac{r_0 dp}{2 dx}} \right\} dr$$

$$- 2 \sqrt{\frac{r r_0 (dp)^2}{4 dx^2}} dr$$

$$- \frac{2 dp}{2 dx} \sqrt{r} \sqrt{r_0} dr$$

$$u = \frac{1}{2\mu_c} \frac{dp}{dx} \int_r^R (r + r_0 + 2\sqrt{r_0 r}) dr$$

$$u(r) = \frac{1}{2\mu_c} \frac{dp}{dx} \left[ \frac{r^2}{2} + r_0 r + 2 \cdot \frac{2}{3} \sqrt{r_0} r^{3/2} \right]_r^R$$

$$u(r) = \frac{1}{2\mu_c} \frac{dp}{dx} \left[ \frac{r^2}{2} + r_0 r + \frac{4}{3} \sqrt{r_0} r^{3/2} - \frac{R^2}{2} - r_0 R - \frac{4}{3} \sqrt{r_0} R^{3/2} \right]$$

$$- \frac{1}{4\mu_c} \frac{dp}{dx} \left[ R^2 + 2r_0 R + \frac{8}{3} \sqrt{r_0} R^{3/2} - r^2 - 2r r_0 - \frac{8}{3} \sqrt{r_0} r^{3/2} \right]$$

$$\left[ R^2 - r^2 + 2r_0 (R - r) - \frac{8}{3} \sqrt{r_0} (R^{1.5} - r^{1.5}) \right]$$

$$Q = \int_0^R 2\pi r u dr = \int_0^R 2\pi r u_0 dr + \int_{r_0}^R 2\pi r u dr$$

$$\int_0^{r_0} 2\pi \left(-\frac{1}{4\mu_0}\right) \frac{d\phi}{dx} \left(R^2 - \frac{1}{3}r_0^2 + 2r_0R - \frac{8}{3}\sqrt{r_0}R^{1.5}\right) r dr$$

$$= -\frac{\pi}{2\mu_0} \frac{d\phi}{dx} \left[ R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{1}{3}r_0^2 \frac{r^2}{2} + 2r_0R \frac{r^2}{2} - \frac{8}{3}\sqrt{r_0}R^{1.5} r^2 \right]_0^{r_0}$$

$$= -\frac{\pi}{2\mu_0} \frac{d\phi}{dx} \left[ \frac{R^2 r_0^2}{2} - \frac{1}{6}r_0^4 + \frac{2}{2}r_0^3 R - \frac{8}{23}R^{1.5} r_0^{2.5} \right] \quad \begin{matrix} 16(-7+3) & 12-8 \\ -167 & 3 \\ +16.4 & \\ 21 & \end{matrix}$$

$$= -\frac{\pi}{8\mu_0} \frac{d\phi}{dx} \left[ \cancel{2R^2 r_0^2} - \frac{4}{6}r_0^4 + \cancel{4r_0^3 R} - \frac{16}{3}R^{1.5} r_0^{2.5} \right]$$

$$\int_{r_0}^R 2\pi \left(-\frac{1}{4\mu_0}\right) \frac{d\phi}{dx} \left[ R^2 r - r^3 + 2r_0 R r - 2r_0 r^2 - \frac{8}{3}\sqrt{r_0}R^{1.5} r + \frac{8}{3}\sqrt{r_0}r^{2.5} \right] dr$$

$$= -\frac{\pi}{2\mu_0} \frac{d\phi}{dx} \left[ \frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} + \frac{2r_0 R r^2}{2} - \frac{2r_0 r^3}{3} - \frac{8}{3}\sqrt{r_0}R^{1.5} \frac{r^2}{2} + \frac{8}{3} \cdot \frac{2}{7} r^{3.5} \right]_{r_0}^R$$

$$= -\frac{\pi}{8\mu_0} \frac{d\phi}{dx} \left[ 2R^2 r^2 - r^4 + 4r_0 R r^2 - \frac{8}{3}r_0 r^3 - \frac{16}{3}\sqrt{r_0}R^{1.5} \frac{r^2}{2} + \frac{16.4}{21} r^{3.5} \right]_{r_0}^R$$

$$= -\frac{\pi}{8\mu_0} \frac{d\phi}{dx} \left[ \underbrace{2R^4 - R^4 + 4r_0 R^3 - \frac{8}{3}r_0 R^3 - \frac{16}{3}\sqrt{r_0}R^{3.5} + \frac{16.4}{21}\sqrt{r_0}R^{3.5}}_{\frac{6.4}{6.6}} \right. \\ \left. - \underbrace{2r_0^2 R^2 + r_0^4 - 4r_0 R^3 + \frac{8}{3}r_0^4 + \frac{16}{3}R^{1.5} r_0^{2.5} - \frac{16.4}{21}r_0^4} \right]$$

$$R^4 + \frac{4}{3}r_0 R^3 - \frac{16.4}{21}\sqrt{r_0}R^{3.5} + \frac{16}{3}R^{1.5}r_0^{2.5} - \frac{1}{21}r_0^4 + \frac{16}{3}R^{1.5}r_0^{2.5}$$

$$R^4 - \frac{1}{21}r_0^4 + \frac{4}{3}r_0 R^3 - \frac{16}{7}r_0^{0.5} R^{3.5}$$



Relazioni ottenute a 37°C, sangue con Ht = 40% e [FIBRINOGENO] = 0,27%. con  $\tau$  MISURATO IN dyne/cm<sup>2</sup>.

$$\sqrt{\mu_c} = 0,1738$$

$$\mu_c = 0,03 \frac{\text{dyne} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} = 3 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2}$$

$$\sqrt{\tau_0} = 0,2$$

$$\tau_0 = 0,04 \frac{\text{dyne}}{\text{cm}^2} = 0,004 \text{ Pa}$$

ARTERIA femorale uomo

$$d = 6 \text{ mm} \quad R = 3 \text{ mm}$$

$$Q = 600 \text{ cm}^3/\text{min}$$

modello newtoniano: (legge di Poiseuille con  $\mu_A = \mu_c$ )

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{8 \mu_c Q}{\pi R^4} = \frac{8 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} \cdot 600 \frac{\text{cm}^3}{\text{min}}}{\pi \cdot 3^{43} \text{ mm}^4}$$

$$1 \text{ cm} = 0,01 \text{ m} = 10^{-2}$$

$$1 \text{ mm} = 0,001 \text{ m} = 10^{-3}$$

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{8 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} \cdot 6 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{min}}}{\pi \cdot 3^3 \cdot 10^{-12} \cdot 8^3 \frac{\text{m}^4}{\text{m}^4}} = \frac{8 \cdot 6 \cdot 10^3 \text{ Ns}}{\pi \cdot 3^{32} \text{ m}^2 \text{ min}} = \frac{8 \cdot 6 \cdot 10^4 \text{ Ns}}{\pi \cdot 9 \cdot 80 \frac{\text{m}^2 \cdot \text{s}}{\text{s}}}$$

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{8 \cdot 10^4 \text{ N}}{\pi \cdot 27 \text{ m}^2} = 993,62 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ Pa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$-\frac{dp}{dx} = 993 \frac{\text{Pa}}{\text{m}} \cong 7 \frac{\text{mmHg}}{\text{m}}$$

modello di Casson:

$$Q_{\text{cass}} = -\frac{\pi R^4}{8 \mu_c} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot F(\xi), \quad F(\xi) = 1 - \frac{16}{7} \xi^{1/2} + \frac{4}{3} \xi - \frac{1}{21} \xi^3$$

$$\xi = \frac{r_0}{R} = -\frac{2\tau_0}{R} \left(\frac{dp}{dx}\right)^{-1} = -\frac{2 \cdot 0,004 \text{ Pa}}{0,003 \text{ m}} \left(\frac{1}{993}\right) \frac{\text{m}}{\text{Pa}} = -0,002828$$

$$F(\xi) = 0,882$$

$$Q_{\text{cass}} = -\pi \frac{(3 \cdot 10^{-3} \text{ m})^4 \text{ m}^2}{8 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \text{ Ns}} \left(993 \frac{\text{Pa}}{\text{m}}\right) (0,882) = 0,00000832 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$Q_{\text{cass}} = 8,82 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 529 \frac{\text{m}^3}{\text{min}}$$

$$1 \text{ s} = 0,01667 \text{ min}$$

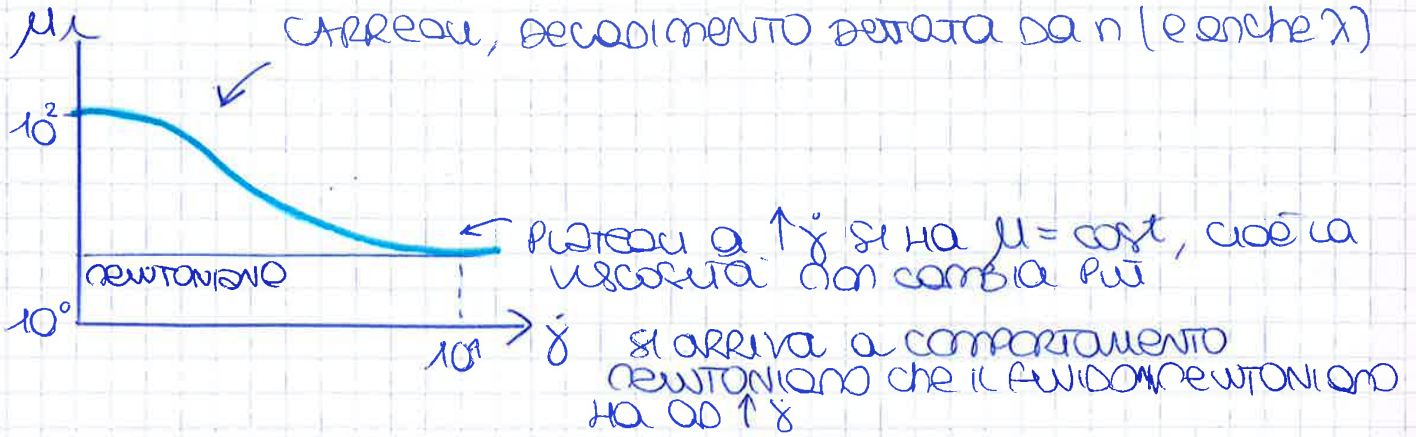
$Q_{\text{cass}} < Q$  si è trovata una diminuzione della portata, sotto lo stesso  $dp/dx$

ci si aspetta una diminuzione della portata, XK con una diminuzione  $\dot{\gamma}$  dello shear rate, abbiamo un  $\uparrow \mu_{\text{eff}}$  della viscosità (non newtoniana), quindi  $\uparrow$  la resistenza al moto e portata di forzante quindi si muove meno fluido e la portata diminuisce.

se si usa la formula per  $\uparrow \dot{\gamma}$  si ottiene lo stesso risultato,  $Q = XK$  la relazione è newtoniana  $\tau \propto \dot{\gamma}$

SONO  $\pi$  PARAMETRI VALUTATI Sperimentalmente (FITTING DI DATI) con un certo  $Ht$ ! (campioni si ottengono come  $\neq$ )

TIPICO COMPORTAMENTO REOLOGICO DEL SANGUE DI SHEAR - THINNING DESCRITTO DAL GRAFICO:



### ★ modello Power-law Generalizzato

Relazione:

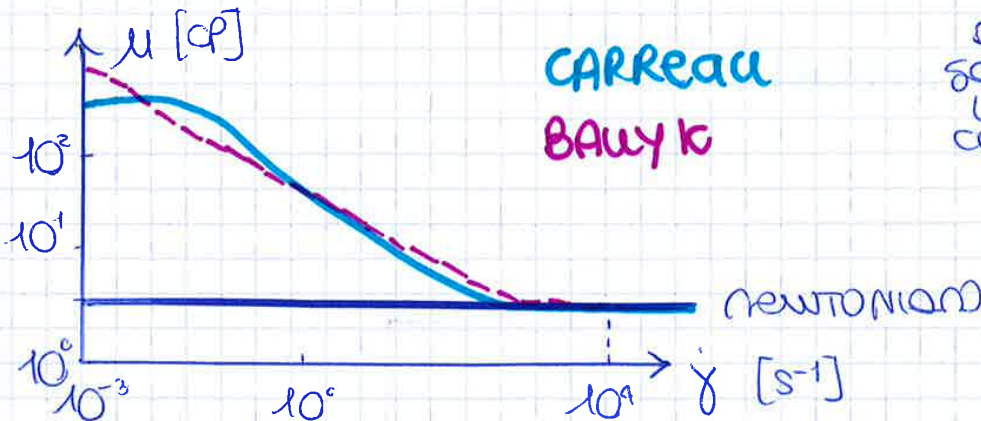
$$\mu(\dot{\gamma}) = \lambda(\dot{\gamma}) \dot{\gamma}^{n(\dot{\gamma})-1}$$

sia  $n$  che  $\lambda$  dipendono anche loro da  $\dot{\gamma}$  shear-rate  $\dot{\gamma}$  con formulazioni complesse

$$\lambda(\dot{\gamma}) = \mu_{\infty} + \Delta\mu \exp\left(-\left(1 + \frac{\dot{\gamma}}{a}\right) \exp\left(-\frac{b}{\dot{\gamma}}\right)\right)$$

$$n(\dot{\gamma}) = n_{\infty} - \Delta n \exp\left(-\left(1 + \frac{\dot{\gamma}}{c}\right) \exp\left(-\frac{d}{\dot{\gamma}}\right)\right)$$

Riarrangiamento, modelli del sangue con  $= Ht$

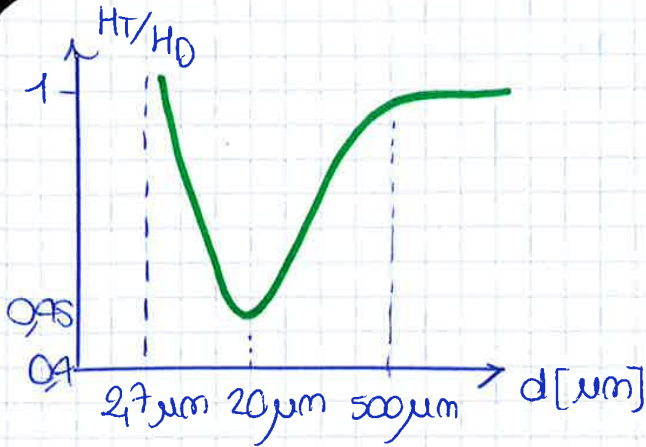


del modello sopra / sotto stima la viscosità  $\mu$  con la propria relazione

un modello è una legge tra variabili che dipende da un vettore di parametri  $\rightarrow$   $\pi$  questi modelli sono usati x rappresentare le caratteristiche di non newtonianità del sangue.

⚠ all'ematocrito del sangue su cui si fanno prove sperimentali x estrarre i parametri





IL RAPPORTO  $\bar{e} = 1$ ,  $H_T = H_D$   
PER  $d > 500 \mu m$

PER  $d < 500 \mu m$  IL RAPPORTO  
DIMINUISCE FORTEMENTE  
FINO A 0,45 FINO AD UN  
CUNICO FISSATO A  $\approx 20 \mu m$

PER  $d < 20 \mu m$  IL RAPPORTO  
AUMENTA FORTEMENTE FINO  
A  $d = 2,7 \mu m$  DAVE IL GR NON  
PASSA PIÙ

IL CUNICO È PROPRIO XE CI SE AVVICINA AD UN RAPPORTO 1:1  
TRA DIMENSIONE DEL CAPILARE E GR CHE CI STRISCIANO SOPRA  
NEL GRAFICO  $H_T = \text{cost} = 40\%$

IL FATTO CHE IL RAPPORTO DIMINUISCA  $H_T/H_D < 1$  SI SPIEGA  
CON 2 CONSIDERAZIONI:

● I GR NON SONO UNIFORMEMENTE DISTRIBUITI IN MOTO  
NELLA SEZIONE DEL CAPILARE MA SI SPOSTANO VERSO  
L'ARRE DEL CAPILARE IN UN ACCUMULO AZIONALE.  
IN QUESTO MODO I FILETTI FLUIDI CHE SONO PIÙ VELOCI  
NELLA PARTE CENTRALE DEL CAPILARE:



- Hanno un  $\uparrow H_T$  RISPETTO AI FILETTI ALLA PARETE
- Hanno una velocità maggiore

→ al GERBATO FINQUE ARRIVERÀ PIÙ SANGUE CON  
EMATOCRITO PIÙ ELEVATO

→  $H_T$  È MENO  $H_D$  XE LA MISURA DEL EMATOCRITO  
DI VOLUME NON PRENDE IN CONSIDERAZIONE LA DINAMICA  
DEL FENOMENO, INFATTI

$$H_V = \frac{\int_0^R H(r) \pi r dr}{V} \sim H_{PARTELA} = \frac{\int_0^R H(r) V(r) \pi r dr}{Q}$$

LA CURVA IN FIGURA SI GENERA XE NON SI OSSERVA LA  
DINAMICA DEL FENOMENO!  
 $H_{PARTELA}$  TENE CONTO ANCHE DELLA DISTRIBUZIONE DI VELOCITÀ  
DANDO MASSIMO PESO ALL'EMATOCRITO DEI FILETTI DI FLUIDO  
CARATTERIZZATI DALLE VELOCITÀ + ELEVATE

IL  $\Delta H_T$  È BASTO ADO SPOSTAMENTO DEL GR SUI ARRE DOVE  
VANTO PIÙ VELOCI

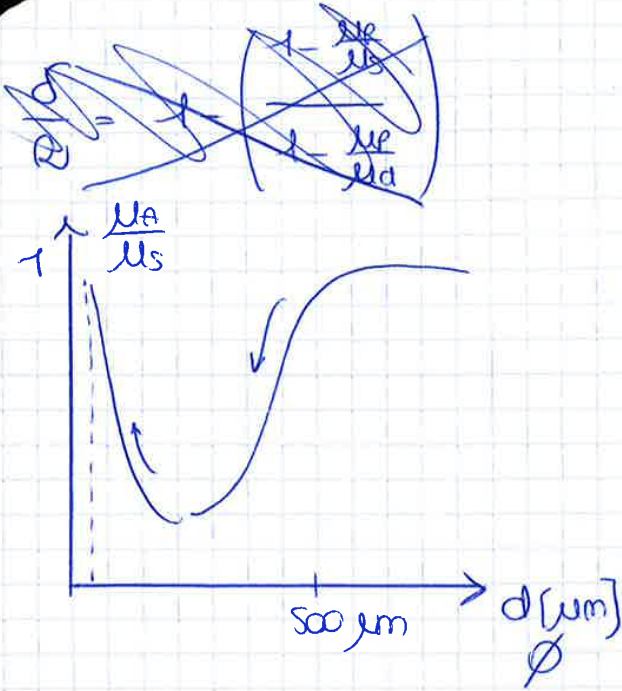
IL LIMITE  $d = 2,7 \mu m$  È XE I GR NON PASSANO PIÙ ANCHE SE  
SONO DEFORMABILI

LA RISULTA INVECE È BASTA AD  $\downarrow d$ ,  $\downarrow$  LO SPESORE DEL  
PLASMA, I GR POSSONO OCCUPARE LA SEZIONE DEL  
CAPILARE









$$\uparrow \frac{\delta}{R} = \downarrow Ma$$

e questo giustifica il grafico decrescente per cui  $\downarrow Ma$  e  $\downarrow \delta$

ma  $\delta$  non è costante al variare di  $Ma$  e  $\phi$

da misure sperimentale si è visto che

$\downarrow \delta$  sia per  $\uparrow Ma$  che  $\downarrow \phi$

ma  $\downarrow \delta$  e  $\downarrow \phi$  non sempre!

la riduzione di  $\delta$  è % inferiore alla riduzione di  $\phi$  al punto che  $\frac{\delta}{R} \uparrow$  e  $\downarrow R$  !!

Così si spiega il grafico

$$\downarrow \delta, \downarrow R \rightarrow \uparrow \frac{\delta}{R} \rightarrow \downarrow Ma$$

IL TRATTO DI CURVA CRESCENTE PER CUI  $d < 10 \mu m$  E L'EFFETTO DI INERTE SI SPIEGA PERCHÉ ULTERIORI DIMINUIZIONI DEL DIAMETRO PORTANO AD  $\uparrow Ma$  X I GR INTERAGISCONO CON LE PARETI DEL CAPILLARE DEFORMANDOSI:  $\uparrow$  attrito,  $\uparrow$  resistenza viscosa = inversione effetto FARRIS-LUNDQVIST

## MOTI IN CAPILLARI

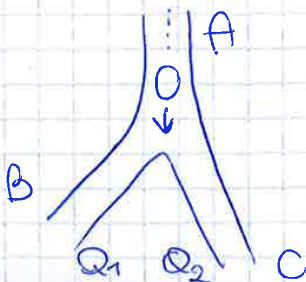
siamo  $\phi < 10/20 \mu m$ , dove l'interazione tra GR e tra GR + parete e la deformabilità del GR diventano determinanti x le proprietà reologiche.

Po' succedere che nel capillare scorra solo plasma e arrivino OGNI TANTO pacchetti di globuli rossi

La fluidità del GR nei capillari dipende dalla sua dimensione e deformabilità  $\rightarrow$  meno def = + lento = accumulo dietro

co porta al fatto che nella circolazione i Ht sia  $\neq$  da capillare a capillare

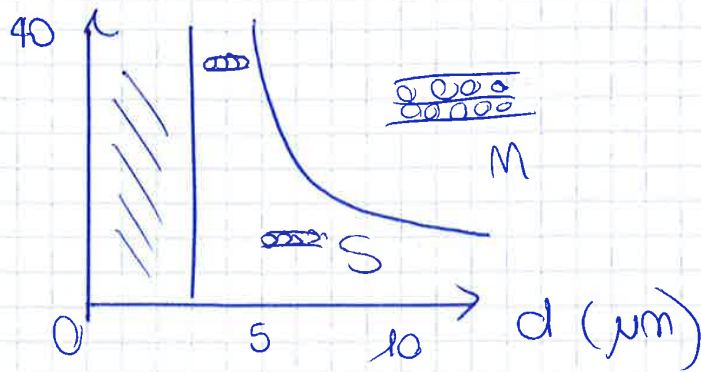
si considera una particella sferica rigida (GR) in moto in un condotto con una biforcazione simmetrica



se il GR è sul lato del condotto e incontra una biforcazione con stesso  $\phi$  e = portata ( $Q_1 = Q_2$ )

$\rightarrow$  allora si ferma sulla biforcazione x l'equilibrio delle forze!

EHAT %



$d < \text{limite}$ :  
no movimento xxi  
GR non formano

sottocurva: S  
moto x singola file  
si impilano a formare  
rouleaux

sopracurva: M  
moto x file multiple

a  $d = \text{fisso}$ , se si  $\uparrow H_t$  il moto cambia e diventa M xk  
cambia la "viscosità" apparente

→ Accade modifiche di  $d$  o  $H_t$  causano  
modifiche sostanziali nelle mappe di trasporto  
del GR



LE PATOLOGIE VASCOLARI COINVOLGONO IL TRASPORTO DI MACROMOLECOLE (COLESTEROLI) DAL FUSO SANGUIGNO ALLA PARETE ARTERIOSA → SI STUDIA QUESTO TRASFERIMENTO DI MASSA.

LE P.V. COINVOLGONO ANCHE DIFUNZIONI DELL'ENDOTELIO (STRATO PW INTERNO DEL VASO) → SI STUDIANO LE RISPOSTE DELLE CELLULE (MECCANO-TRASDUTTORI) AL FUSO

L'UTILIZZO DI STENT DISTURBA IL FUSO ARTERIOSO, DISTURBANDO LA PERFORMANCE



L'UTILIZZO DI DISPOSITIVI IMPIANTABILI MODIFICA QUESTE RELAZIONI ESISTENTI TRA ENDOTELIO E TORRENTE EMATICO → STUDIO IMPO

SI CERCA DI INTERAGIRE CON L'INERGENZA DELLA PATOLOGIA BAMBARDANDOLA CON PARTICELLE CHE DEVONO RAGGIUNGERE SITI SPECIFICI GRAZIE SULLO SFRENTAMENTO DELL'ENDOTELIO LOCALE

## DEFINIZIONI

SUL LAYER ENDOTELIALE AGISCONO 2 FORZE <  $\begin{matrix} \text{LAWA PARETE} \\ \text{O} \\ \text{TANGENZIALE} \end{matrix}$

• **NORMAL STRESS**: È UNA FORZA DI PRESSIONE  
LAWA PARETE  
AGISCE SULLE CELLULE ENDOTELIALI  
CON I BAROCETTORI X VASODILAT E VASOCOSTRIZ.  
(MECCANO-TRASDUTTORI)

• **SHEDD STRESS**: È UNA FORZA TANGENZIALE  
AGISCE TANGENTE ALLA PARETE  
"

QUESTE 2 FORZE PARTECIPANO AL COMPORTAMENTO DELLE CELLULE ENDOTELIALI = PAVIMENTO SULL'INTERNO DEL CONDOTTO  
NON SONO STRAVERGATE DA MACROMOLECOLE DEL SANGUE  
ATTIVAMENTE COMMERCE

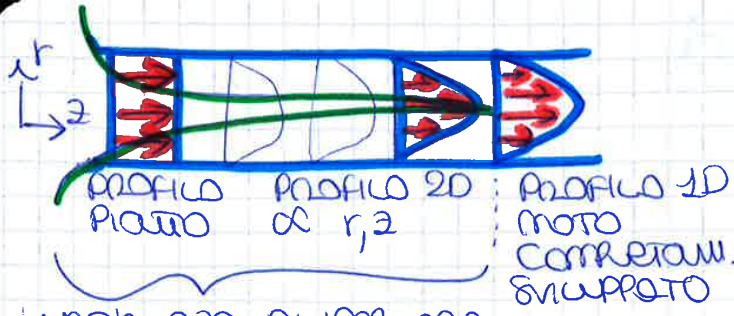


SE DIVENTANO + COMPLIANTI E PERDONO IL CONTATTO TRA DI ENDE, X ↑ FORZE E FORZE NON DIRECTIONATE UNIVOCAMENTE, RENDONO IL PAVIMENTO + PERMEABILE → ENTRANO.  
PARTICELLE GRASSE COME COLESTEROLO E TRAMBASENICHE



FUSO DISTURBATO → MODIFICA GENETICA DELLE CELLULE CHE SECRETANO MARKER INFIAMMATORI CHE RICHIAMA MONO PI E GB





lunghezza di imbocco  
 $\propto$  Reynolds  
 (Rapporto forze  
 inerziali e viscosi)

qui esistere il profilo  
 è costante e non si  
 modifica

Moto parabolico di  
 Poiseuille in condotto  $\propto$  r

il moto è completamente  
 sviluppato se lo strato  
 limite  $= R$  e il gradiente  
 di velocità è zero sulla  
 parete

Lo strato limite  $e =$  alla  
 distanza dalla parete in  
 cui la velocità è max,  
 $grad(v) = 0$

## Poiseuille

flusso stazionario in un condotto cilindrico  $\propto$  rigido

$$v(r) = \frac{R^2 - r^2}{4\mu L} \Delta p \quad \text{profilo di velocità}$$

$$Q = \int_0^R 2\pi v(r) r dr = \pi R^4 \frac{\Delta p}{8\mu L} = \frac{\pi R^4}{8\mu} \cdot \frac{\Delta p}{L}$$

$$\bar{v} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{v_{max}}{2}$$

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\mu L} R^2 (1 - y^2) \quad y = \frac{r}{R}$$

ipotesi e limitazioni:

- fluido newtoniano  $\Rightarrow$  assunzione che si può utilizzare solo in condizioni con  $\uparrow \gamma$
- flusso laminare  $\Rightarrow$  il moto nel raso non è nemmeno turbolento ma generalmente laminare con alcune regioni transitorie  
 si ha un'instabilità ed una perdita di energia che non si sviluppano in turbolenza completa che non ne hanno nel tempo (pulsazioni) nello spazio, in più le distanze  $x$  sviluppate sono  $\uparrow$  ancora di + della viscosità e della resistenza del fluido
- no scivolamento sulla parete  $\Rightarrow$  cellule endoteliali
- flusso stazionario  $\Rightarrow$  pulsatile
- pareti rigide  $\Rightarrow$  elastiche
- condotto cilindrico  $\Rightarrow$  forma emisferica + rastremazione (tapering)

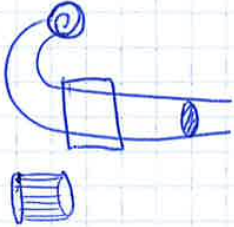




A un certo punto i flussi possono separarsi e generare vortici sopra da una parete a geometria completa come una parete curva.

▲ due pareti cardiache: a valle di esse si ha un restringimento della zona disponibile al moto

x valutare una valvola cardiaca si vuole su di essa un moto 2D, ma essendo in un circuito idraulico completo, ciò non si verifica

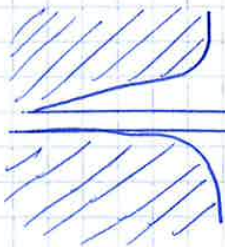


x per questo si mette prima un raddrizzatore di flusso come cannaoce raggruppate che rieliminano il flusso in uscita

### - REGIONI DI FLUSSO VISCOSO / IN VISCIO

- vicino alla parete = il fluido è viscoso xk c'è un'interazione importante fluido/parete dove gli effetti frictionali si segnalano
- lontano dalla parete = se le velocità sono elevate, il fluido è inviscido xk i termini inerziali sono maggiori di quelli viscosi

(se il fluido non è viscoso, la parete rigida non lo rallenta, xk non ci sono scambi di forze o attrito)



Flusso inviscido  
 Regione viscosa  
 Flusso inviscido

I fenomeni viscosi sono importanti in prossimità della parete

### - simulazione computazionale delle velocità in un graft come in biforcazione carotidea



Bisognare fare stenosi al 30% / seno carotideo ovvero un allargamento della sezione che contribuisce a generare una separazione di flusso = zona preferenziale x la formazione di placche



★ zona di vortici a bassa velocità che ↓ il diametro idraulico e generano flussi secondari e profili di velocità fortemente asimmetrici



si adimensionalizzano:

- CURVATURA adimensionale  $\delta = \frac{a}{R}$

$a$  = RAGGIO DESTINO  
 $R$  = RAGGIO CURVATURA

- FUSO adimensionale  $\frac{\rho Q}{\mu a}$

$\rho$  = DENSITA'  
 $\mu$  = VISCOSITA'

DEAN HA RISCritto l'eq. di NAVIER - STOKES nelle coordinate naturali e poi ha effettuato il passaggio all'unità  $\delta \rightarrow 0$  ( $a \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$ )

la soluzione ( $\delta \rightarrow 0$ ) è POISEUILLE.

Riscrivendo il problema ed effettuando il limite  $\delta \rightarrow 0$  il termine delle forze centrifughe non scompare

se  $Re$  è basso (assenza di turbolenza), l'equazione si risolve con uno sviluppo in serie:

$$u_r = Q^2 u_{r,0} + Q^4 u_{r,1} + \dots$$

$$u_\theta = Q^2 u_{\theta,0} + Q^4 u_{\theta,1} + \dots$$

$$u_s = Q u_{s,0} + Q^3 u_{s,1} + Q^5 u_{s,2} + \dots$$

} potenze pari  
 x le direzioni in  
 REIN

} potenze dispari  
 x la direzione  
 attraverso il piano

$Q u_{s,0}$  è il termine significativo  
 indica il moto poiseuilleano  
 e' prevalente x la propria potenza

$Q^3 u_{s,1}$  ... su altri termini sono la perturbazione  
 del profilo di velocità

$Q^2 u_{\theta,0}$  ...  $Q^2 u_{r,0}$  ... sono  $\emptyset$  per poiseuille  
 introducono multidimensionalità nel campo  
 di moto e descrivono i moti secondari in REIN  
 sono i termini di DEAN

$Q$  è il FUSO adimensionalizzato

POISEUILLE ha una relazione lineare tra FUSO  $Q$  e  
 GRADIENTE DI PRESSIONE

IN DEAN, I PRIMI TERMINI NON CONTRIBUISCONO, PERCIÒ LA  
 RELAZIONE non lineare tra  $Q$  e  $dp$  occorre alla 5ª POTENZA

$$Q = c_0 D + c_1 D^5 + \dots = \underbrace{\frac{dp}{ds} L_0}_{\text{CONTRIBUTO POISEUILLEIANO}} + \underbrace{\left(\frac{dp}{ds}\right)^5 c_1}_{\text{TERMINE x LA CURVATURA}} + \dots$$

è una relazione fortemente non lineare = PER GENERARE  
 LA STESSA PORTATA si perde energia a causa dei flussi  
 secondari e serve perciò un gradiente di pressione + elevato



La resistenza include anche sulle strutture fluidodinamiche che si generano, con una modifica degli effetti di ingresso.

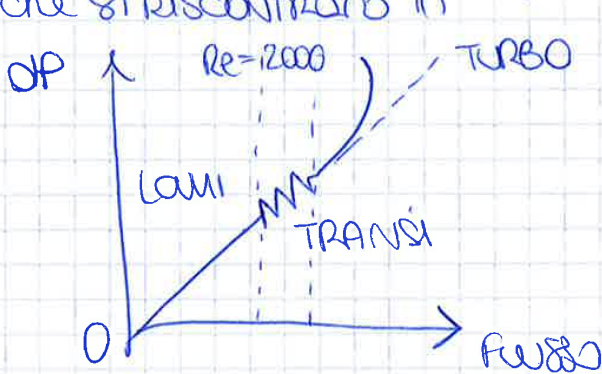
La viscosità d'ingresso diventa importante nelle simulazioni, xk si devono conoscere le condizioni al contorno

- Flusso turbolento

Il numero di Re ( $Re = \frac{\rho v D}{\mu}$ ) definisce il passaggio da moto stazionario a turbolento tramite un valore critico pari a 2000, sotto le ipotesi di Poiseuille

→ per  $Re > 2000$ , si ha flusso turbolento in un condotto a ungo, rigido, cilindrico

Nel sistema cardiovascolare non si sviluppano mai flussi turbolenti, ma si cade in flussi transizionali che portano a stenosi, aneurismi, dia e valvole che si riscontrano in



Si può avere una turbolenza a  $Re < 2000$  x fattori geometrici etc

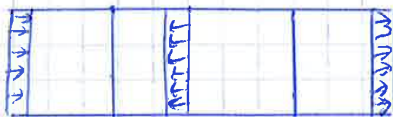
Nel flusso turbolento non ci sono + lamine xk si intersecano tra di loro

Effetti delle forze

① Inerziali



condotto a ungo + moto pulsatile

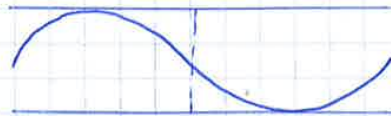


il profilo è piatto l'avela non si scambiano forze xk non è viscosa

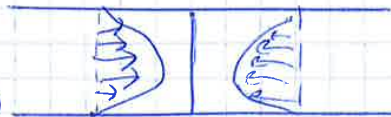
inversione

de xk manifeste solo sulle velocità

② Viscose



il gradiente di pressione varia come sinusoidale



profilo parabolico che si allunga e si riduce ma non varia

inversione

③ Uniche

I filotti centrali ci mettono + tempo a modificare il moto xk sono veloci mentre sul qua parete sono più lenti e sono i primi a invertire la velocità



È STATO ENFATIZZATO COME L'INIZIO E IL PROSEGUIRE DEL PROBLEMA ARTERIOSCLEROTICO SIA INFLUENZIATO DAL " **FUSSO DISTURBATO** ".

È INFATTI UNA SERIE DI EVENTI EMODINAMICI AGGRAVANTI, CORRELATI CON UNA SERIE DI FENOMENI FISIOLOGICI ANORMALI, A LORO VOLTA METTI IN RELAZIONE CON ALCUNI INDICATORI / DESCRITTORI EMODINAMICI SINTETICI:

### EVENTI DI FUSSO AGGRAVANTI:

- Zone di separazione e riattacco di flusso
- Zone in cui il vettore sforzo di taglio cambia continuamente direzione con il tempo (oscilla)
- Zone di flusso con vortici a bassa velocità
- Punti di stagnazione del flusso
- Regioni con elevati sforzi di taglio
- Flussi persistenti → pressioni elevate
- Lunghe tempi di residenza delle particelle

### EVENTI BIOLOGICI ANORMALI

- DIFUNZIONE cellule endoteliali
- Danneggiamento dell'endotelio
- Permeabilità della parete
- Afflusso di LDL lipoproteine, monociti ed albumina dal sangue a dentro la parete
- Aggregazione e deposizione di piastrine e fibrina con formazione di trombi e intorciamento dell'intima
- Proliferazione delle cellule lise a causa di ↑ sforzi → si portano proprio verso l'interno o verso l'esterno ( entrambi problematici )

### INDICATORI = DESCRITTORI DI CRATE EMODINAMICHE LOCALI

- WSS = sforzo di taglio alla parete
- e sue variazioni, come gradiente, oscillazioni.
- Gradiente di pressione normale
- Patterns e tempi di residenza / deposizione delle macromolecole in prossimità della parete e loro densità

↳ PORTANO A DIFUNZIONI VASCOLARI ← arteriosclerosi, iperplasia, trombosi

I DESCRITTORI SONO FACILMENTE QUANTIFICABILI CON

- simulazioni image-based
- tecniche di imaging (peggio)

INIZIAMO A STUDIARE IL **WSS** ED IL SUO IMPATTO SULLA PATOLOGIA VASCOLARE.



esempio: BIFURCAZIONE CAROTIDEA

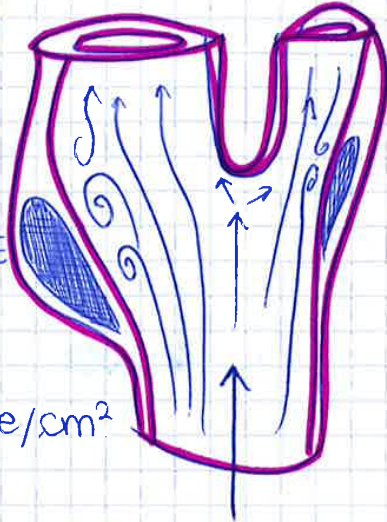
INTERNO

ESTERNO

zona di separazione

$< 0,4 Pa$

$0,4 Pa = 4 \text{ dyne/cm}^2$



In zona prossimale c'è una zona di separazione - marcata

- WSS  $< 0,4 Pa$  : Patologica
- WSS  $> 1,5 Pa$  : Fisiologica
- WSS  $>> 1,5 Pa$  (50) : Male

Sono tutti fenomeni focali che devono essere studiati con strumenti ad elevata precisione → no possibile con imaging clinico ma si usano informazioni provenienti dall'imaging integrandole in un framework computazionale x trovare il campo di moto.

Processo



immagini cliniche → segmentazione del vasi → ricostruzione del modello 3D e delle superfici



→ estrazione delle condizioni al contorno dai dati clinici → discretizzazione del modello (mesh) e scelta del metodo numerico x risolvere le eq di Navier Stokes in ogni cella della griglia

→ si ottengono velocità e pressioni nel centro di ogni cella della griglia di calcolo numerico di discretizzazione

→ così si possono calcolare  $\left\{ \begin{matrix} \text{gradienti} \\ \text{tensore degli sforzi} \\ \text{WSS} \end{matrix} \right.$

è diventato lo strumento clinico! (risposta ≈ h)

Si come WSS varia nel tempo lungo il ciclo cardiaco e in ogni punto dello spazio si considera il

$$TA_{WSS} = \frac{1}{T} \int_0^T |WSS(s,t)| dt$$

ris: l'integrale sul ciclo cardiaco del WSS x ogni punto della parete

TA = time-averaged



L'oscillazione tra  $0 \leq OSI \leq 0,5$

★  $OSI = 0 \rightarrow$  RAPPORTO = 1  $\rightarrow$   $E_{em} = N_{M}$   $\rightarrow$

IL VETTORE NON CAMBIA MAI DIREZIONE  
IL VETTORE È **UNIDIREZIONALE**  
zone aTEROPROTETTIVE  
MINIMO DISTURBO DEL FUSO

★  $OSI = 0,5 \rightarrow$  RAPPORTO = 0  $\rightarrow$   $N_{M} = 0 \rightarrow$

esempio di sinusoidale  
**non** esiste una direzione preferenziale  
zone aTEROSUSCETTIBILI  
ma il **non** allungamento delle cellule endoteliali

OSI INDICATORE HA PERÒ DEL UNITI XE NON COINCIDE SU ASPETTI DI MULTIDIREZIONALITÀ E DIVERSE MOLTO DAL DISTURBO VASCOLARE

esempio : 3 ≠ flussi con ≠  $N_{M}$  e  $TAWSS = 2/3$



- moto PRONAMENTE laminare  
 $OSI = 0$



- moto REVERSALE, FUSO AVANTI/RETRO MA CON =  
DIREZIONE  
 $OSI = 0,367$   
allungamento della cellula endoteliale



- FUSO MULTIDIREZIONALE  
 $OSI = 0,367$   
la cellula non si allunga

XI OSI SERVE SEMPRE IN CORRISPETTIVO DAL PUNTO DI VISTA BIOLOGICO!

Si mettono in combinazione OSI e  $TAWSS$  nel **RRT**  
(Relative Residence Time) cioè il tempo di residenza di particelle aTEROGENICHE sulle pareti.

$$RRT = \frac{T}{\int_0^T WSS(st) dt} = \frac{1}{(1 - 2OSI) \cdot TAWSS}$$

è l'inverso del modulo dell'integrale sul ciclo cardiaco, del WSS

$\uparrow OSI + \downarrow TAWSS \rightarrow \uparrow RRT$

perché la c'è una tra basse perfici ed elevate oscillazioni, sintetizzano l'informazione dei 2 indicatori  $TAWSS + OSI$

Può essere che  $\uparrow RRT$  anche se  $\downarrow TAWSS$  ma non  $\uparrow OSI$

XI QUEI VALORI DI  $TAWSS$  LA POLARIZZANO, INDEPENDENTEMENTE DAI VALORI DI OSI, X CUI NON È BENE UNIZZARLI X SOSTITUIRE I 2 INDICATORI



DA UN GRAFICO SI VEE CHE IL RAPPORTO TRA LE PORTATE  
 BENE E CAROTIDI INT ED EST VARIA.  
 PER NEGLI ALTRI MODELLI IMPONE LE FRAZIONI DI PORTATA  
 CHE VOLE (20/80, 40/60, 30/70)  
 ED USAZZA GLI INDICATORI X COMPARARLI.  
 ANCHE SE I MODELLI SEMBRANO ASSIMILARSI, SE SI  
 CALCOLANO LE DIFFERENZE ASSOLUTE E % SI VEE CHE IN  
 CERTE ZONE I VALORI DI OSI E RRT SONO MOLTO DIFFERENTI  
 LE DIFFERENZE IN PARTICOLARE AVVERGONO IN REGIONI O DOVE  
 L'OSI E MOLTO BASSO, XC SONO SENSIBILI AGLI GRADIENTI FORTI,  
 BEN L'RRT E PORTEMENTE PILOTATO DALL'OSI

QUESTI SONO I DESCRITTORI LEGATI ALLA PARETE (NSS)

IN RESULTA SONO IMPORTANTI ANCHE LE STRUTTURE VASCOLARI  
 (**BULK FLOW**) SOPRAFF DA SUANDO SI E RUSCITI A  
 SINTETIZZARLE, XC SONO INTRICATE, QUADRIDIMENSIONALI ETC.

IMPORTANTI X I SEGUENTI MOTIVI:

ESISTONO GLI IDIOLI DI  
 SINTESI DELLE STRUTTURE  
 INTRAVASCOLARI

① GEOMETRY SHAPES THE FLOW : LE STRUTTURE VASCOLARI  
 SONO MODELLATE DALLA  
 GEOMETRIA DEL VASO

② ARTERIAL FLOW IN ARTERIES HAS BEEN FOUND TO BE  
 HELICAL

I MOTI SPIRALEIFORMI SONO DOVUTI ALLA GEOMETRIA DEI  
 VASI: SONO MOTI IN CUI LE COMPONENTI IN PIANO SI  
 COMBINANO CON LA PRINCIPALE DIREZIONE DI MOTO

③ WHICH IS THE PHYSIOLOGICAL MEANING OF ARTERIAL  
 BLOOD FLOW?

- LA SPIRALIZZAZIONE AIUTA A MISCOLARE  
 LE SOSTANZE PRESENTI NEL SANGUE
- AIUTA A DISORGANIZZARE MENO IL MOTO A  
 CAUSA DEGLI EFFETTI INERZIALI, OTTIMIZZANDO  
 LA PERFUSIONE, RENDENDO ENERGICAMENTE  
 FAVOROLE

IL MOTO RIMANE ORGANIZZATO IN SPIRALI CHE SEGUONO  
 I VASI SANGUIGNI SENZA INNESCARE TURBOLENZA,  
 PERCIO' NON SI HA TRASFERIMENTO DI ENERGIA DALLE  
 GRANDI SCALE A QUELLE PIU' PICCOLE DOVE SI HA  
 DISSIPAZIONE (EFFETTO REYNOLDS)

SI HA PERCIO' UN' OTTIMIZZAZIONE DEL TRASFERIMENTO  
 DEL SANGUE DA C A PERIFERIA

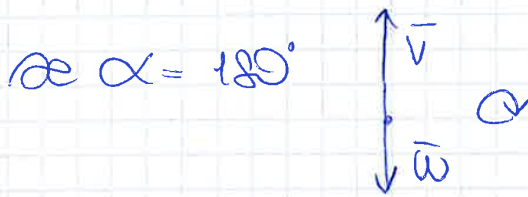
- AIUTA A RIDURRE LE REGIONI DI SEPARAZIONE  
 DI FLUSSO, E' UN EFFETTO WASH-OUT,  
 IMPEDISCE LA FORMAZIONE DI ALTE  
 REGIONI XC SPINGE IL MOTO VERSO  
 LA PARETE







le 2 strutture sono **CONTRO-ROTANTI**, ruotano in senso opposto



Dal segno si capisce se la struttura ruota in senso orario / antiorario

questi versi sono molto importanti nei vortici

se si normalizza  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  si ottiene l'unità locale normalizzata

$$LNH = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \cos(\alpha)$$

cioè è l'indicazione della mutua direzione, dove il segno indica il verso di rotazione

$$-1 \leq LNH \leq 1$$



è utile x visualizzare delle "superfici" all'interno del vortice.

con un approccio lagrangiano si possono seguire le particelle nel loro moto x ogni punto e trovare perciò l'LNH in ogni punto della traiettoria, in modo da vedere come le particelle ruotano

colorando i valori si ottiene un'immagine che nel t mostra le strutture spiraliiformi.

si è scoperto ad esempio che in certa occasione le particelle ruotano in una direzione intradonna mentre dalla parte opposta ruotano in senso inverso (extradonna)

si riesce perciò ad avere una sincronizzazione nello spazio e nel tempo

$hf_{ik}$  = media di LNH lungo una traiettoria

$$HFI = \frac{1}{N_p} \sum_{k=1}^{N_p} hf_{ik}$$

media su  $N_p$  le traiettorie delle particelle

$$0 \leq HFI \leq 1$$

Indice del punto suice

Indicatore senza segno, solo intensità

esempio su suice



# CFD models: INCERTEZZA, VERIFICA E VALIDAZIONE

Verifica e validazione sono fondamentali nell'utilizzo di modelli computazionali, soprattutto se si parla del settore cardiovascolare.

Costruito un modello, analitico o numerico bisogna capire se le sue soluzioni sono vicine alla realtà fisica → il modello deve essere validato

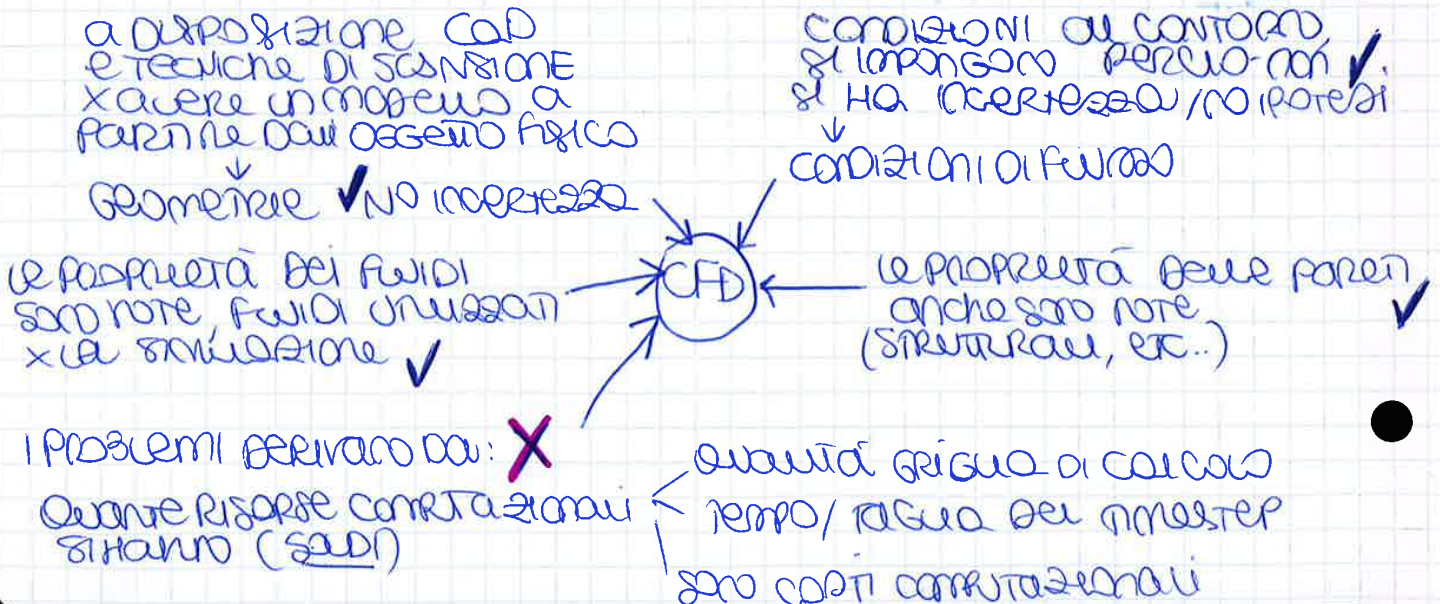
- || semplice se non c'è incertezza
  - || difficile se la quantità di incertezze alla base del modello sono tali x cui non si riesce nemmeno a riprodurre → succede neiflussi cardiovascolari ci sono troppe variabili
    - difetti realistici
    - condizioni al contorno
    - incertezza nei flussi di acquisizione e scarsa risoluzione nei modelli
- } al massimo si fa una verifica

|| se sono le ipotesi del modello, i risultati sono contraddittori, allora si è soddisfatta la verifica! non si viene mai la validazione

## DEFINIZIONI

- incertezza:
  - ↳ cose che si sa o non sapere
  - ↳ cose che non si sa o non sapere
- verifica = "validazione" = validazione di sovrapposizione ma non del tutto soprattutto x le simulazioni "patient-specific"

## PUNTO DI VISTA INGENIERALE DELLA CFD





① il clinico nella misura con l'ecodoppler assume che il flusso sia parabolico per cui trova il massimo e:

$$V_m = \frac{V_{max}}{2}$$

si misura con l'ecodoppler  
x essere "PATIENT-SPECIFIC"

↘ è una misura "PATIENT-SPECIFIC"

DATO POI IL DIAMETRO DEL VASO E PERCORSO LA SEZIONE, TROVA LA PORTATA

$$Q = V_m \cdot A$$

non è x' ragionevole che il flusso sia parabolico!

② ipotizzando il flusso laminare non ci si rende conto se sono presenti delle instabilità!

Dalla letteratura si sa che il flusso raramente è turbolento, anzi laminare, ma ci sono instabilità in aneurismi etc.

③ si ignora la viscoelasticità dei globuli rossi ma potrebbe essere mpo nella scala di KOLMOGOROV (Scala dei tempi piccoli)

· SHEAR-THINNING  
Δ alla cinetica dei rouleaux formati dai GB

· CONTINUO  
SOSTITUITO x Darteria >> D<sub>0</sub> ma si riferiva poi ai capillari dove D = D<sub>0</sub>

## LA VERIFICA / VALIDAZIONE

≠ Risoluzione spaziale } ≠ Risultati  
≠ " " temporale }

↓ si sceglie fin quando si è indifferenti da questa scelta

stesse immagini  
studio con stesso modello di aneurisma cerebrale a 28 gruppi → Risultati si ottengono e NON  
le differenze sono il frutto delle scelte nella ricostruzione della geometria, scelta condizionali al contorno, scelta p. ricostruite, scelta setting numerici!

- ↑ assurtimi e ↑ steps = soluzioni simili  
- processo corto = molto ≠

Differenze anche CFD/AV cioè simulazione/vitro: si sta lavorando il codice, non la sostituzione della realtà fisica! che è il flusso nell'aneurisma

Come si può validare?

• al posto di si potrebbero misurare accuratamente in vivo le grandezze emodinamiche → non serve la CFD, tranne nel caso di valutazione di interventi chirurgici  
in vivo cioè alcune cose si vedono GB accuratamente, ma l'immagine non è la realtà, ma sta una sua comparazione con la tecnica di imaging (L'acquisizione è un filtraggio grossa incertezza)



# WOMERSLEY THEORY ★

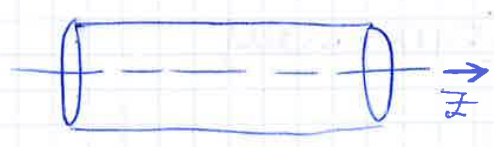
MOTO DI UN FLUIDO IN UN CONDOTTO CILINDRICO.  
 ∞ LUNGO, PARETI RIGIDE  
 IN CONDIZIONI PULSANTI = PERIODICHE

Si parte dalle eq. di **NAVIER-STOKE** scritte x un FLUIDO INCOMPRESSIBILE newtoniano ( $\rho = \text{cost}$ ,  $\mu = \text{cost}$ )

$$\begin{cases} \rho \frac{dV}{dt} = -\nabla p - [\nabla \cdot \tau] + F & \text{forma generale} \\ \nabla \cdot V = 0 & \text{conservazione massa} \end{cases}$$

$$\rho \left( \frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \nabla V \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 V + F \quad \text{si scrive in forma vettoriale}$$

Termine inerziale → acc. x la non stazionarietà  
 Gradiente di pressione → accelerazione convettiva  
 Termine viscoso  
 Forze di volume ex: forza peso



**Moto monodimensionale** = solo una componente della velocità nella direzione dell'asse del condotto

$$\vec{v} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + w\hat{k} \quad \leftarrow w = \text{componente longitudinale}$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + f_z$$

## in coordinate cilindriche

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial w}{\partial t} \quad \text{senza forze di volume}$$

$\frac{\Delta p}{l} = \frac{p_1 - p_2}{l}$  l - lunghezza tratto  
 x fare come Womersley  
 differenza di pressione tra 2 sezioni a distanza l

Si immagina una una grandezza complessa

$$\frac{\Delta p}{l} = A e^{i\theta}, \quad \theta = \omega t$$

la **FORZANTE** è una grandezza **periodica** con pulsazione  $\omega = 2\pi f$

ricordo  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$



si considera la parte reale del gradiente di  $p$

$$\text{Re} \left\{ \frac{\Delta p}{\rho} \right\} = \text{Re} \{ A e^{int} \} = A \cos(nt)$$

x la sovrapposizione degli effetti, se si assume (OST), si trova la soluzione x che è forzanti periodiche (serie di FOURIER:  $\sin + \cos$ )

La separazione in parte reale e immaginaria di  $\omega$  è difficile xie de la funzione di Bessel. meglio esprimere i risultati in forma di **modulo e fase**

ci sono delle tabelle come t-student x  $J_0$ .

Le formulazioni tabellate sono nella forma:

$$J_0(x) = \underbrace{M_0(x)}_{\text{modulo}} e^{i \underbrace{\theta_0(x)}_{\text{fase}}} \quad \left. \vphantom{J_0(x)} \right\} \text{ del moto}$$

Espressione della velocità in termini di modulo e fase

Per cui:

$$\left\{ \begin{array}{l} J_0(\alpha y) = M_0(y) e^{i \theta_0(y)} \quad \text{dipende da } y \\ J_0(\alpha) = M_0 e^{i \theta_0} \quad \text{valore costante} \end{array} \right.$$

$$\text{Re} \left\{ \frac{\Delta p}{\rho} \right\} = \text{Re} \{ A e^{int} \} = M \cos(nt + \Phi)$$

ancora sostituendo nella velocità si ottiene:

$$\omega = \frac{M}{\rho} \cdot \frac{1}{n} \left\{ \sin(nt + \Phi) - \frac{M_0(y)}{M_0} \sin(nt + \Phi - \delta_0) \right\}$$

con  $\delta_0 = \theta_0 - \theta_0(y)$

ci sono **2 sfasamenti**, vogliamo 1 sola relazione di fase. si definiscono:

$$h_0 = \frac{M_0(y)}{M_0}$$

$$M_0' = \sqrt{1 + h_0^2 - 2 h_0 \cos \delta_0}$$

$$\tan(\epsilon_0) = \frac{h_0 \sin \delta_0}{1 - h_0 \cos \delta_0}$$

si sostituisce e si ottiene

$$\omega = \frac{M}{\rho} \cdot \frac{1}{n} \cdot M_0' \sin(nt + \Phi + \epsilon_0)$$

fase che dipende da  $h_0$  e  $\delta_0$

sia fase che ampiezza dipendono da  $y$

in forma stazionaria abbiamo ottenuto. Per confrontarli, si usa un numero di Womersley

$$\omega = R \sqrt{\frac{\rho}{\Delta}}$$



$$Q = \frac{\pi R^2 A}{\rho} \frac{1}{in} \left\{ 1 - \frac{2 \alpha i^{3/2}}{i^3 \alpha^2} \frac{J_1(\alpha i^{3/2})}{J_0(\alpha i^{3/2})} \right\} e^{int}$$

è in forma complessa.

Bisogna renderla utilizzabile: servono il modulo e la fase.

si pone  $J_1(\alpha i^{3/2}) = M_1 e^{i\theta_1}$

e si ottiene

$$Q = \frac{\pi R^4}{\mu} \cdot \frac{M}{\alpha^2} \left\{ \sin(nt + \Phi) - \frac{2M_1}{\alpha M_0} \sin(nt + \Phi - \delta_{10}) \right\}$$

con  $\delta_{10} = 135^\circ - \theta_1 + \theta_0$

anche  $M_1$  e  $\theta_1$  sono tabellati come  $M_0$  e  $\theta_0$ .

si vuole avere uno sfasamento complessivo invece che 2 fasi.

poniamo  $k = \frac{\alpha M_0}{2M_1}$  e

$$M'_{10} = \frac{1}{k} \sqrt{\sin^2 \delta_{10} + (k - \cos \delta_{10})^2}$$

$$\tan(\epsilon_{10}) = \frac{\sin \delta_{10}}{k - \cos \delta_{10}}$$

si arriva a

$$Q = \frac{\pi R^4}{\mu} \cdot M \frac{M'_{10}}{\alpha^2} \sin(nt + \Phi + \epsilon_{10})$$

la portata è sfasata, non è in fase con la forzante

se forze stazionarie:  $Q = \frac{\Delta P}{4\mu l} \pi R^4 \int_0^1 (1-y^2)^2 dy$

$$Q = \frac{\Delta P}{8\mu l} \pi R^4 = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{\Delta P}{l}$$

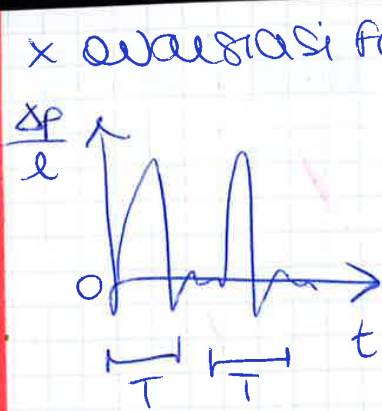
ovvero la portata è in fase!

se il moto è periodico: la portata è sfasata!

Per l'esame indico solo passaggi principali, 3/4 e poi commento i risultati!







x analizzata forzante periodica di periodo  $T$ ,  
 si esprime in serie di Fourier  
 e ci si calcola la legge del moto  
 si può anche usare al contrario!  
DATA  $Q$ , si applica Womersley  
all'inverso, e si trova il profilo di  
velocità!

si assegna un valore di velocità x ogni istante:  
 non si misurano ma si trovano all'inverso dall'integrale  
 della portata → si recupera informazione che non si ha!  
 importante quando si fa della modellistica.

(Nella nostra simulazione si è ipotizzato che  
 $w = \frac{Q}{A}$  portata media sua sezione in ingresso (inver)  
 il profilo della velocità fosse piatto, usuale in ogni  
 punto, non tridimensionale!)

(La forma d'onda della portata invece che piatta  
 si poteva esprimere come serie di Fourier, ad esempio  
 10 termini, con cui ricavare il profilo della velocità  
 applicando Womersley al contrario)

Womersley va molto bene nei grandi vasi!

(anche se ti queste sono sempre approssimazioni)

Se conosci il coefficiente di attrazione  
 nel vaso, il raggio del condotto ed  
 il raggio di sangue determinato per  
 anche se si conosce  $Q$  si può invertire la  
 formula e trovare l'andamento del profilo  
 di velocità x ogni istante del ciclo cardiaco  
 e x ogni punto lungo il raggio del vaso  
 grazie a Womersley si parte da una misura  
 integrale  $Q$  e una misura locale  $w(r,t)$   
 che non si possono misurare nella realtà  
 che si possono appunto ricavare da misure  
 integrabili che invece si riescono a calcolare/  
 misurare con semplicità in clinica

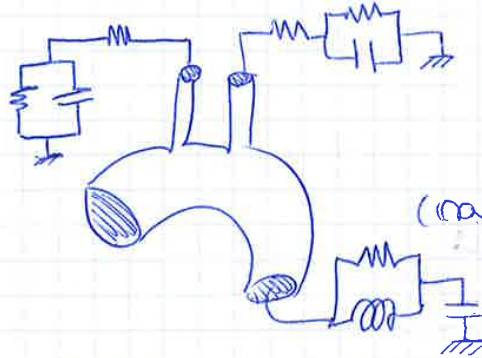
Quindi sempre nelle approssimazioni di Womersley  
 → meno errori rispetto a Poiseuille



Approssimazione forte  $x \ll a$  a valle ed all'inizio assessoro  
 le altre impedenze dei vasi vicini  $\rightarrow$  modello 2D  
 non si può nemmeno modellizzare tutto il sistema in 3D  
 $x \ll$  spessore chilometri  $\rightarrow$  modello 3D

Meglio combinare più dimensioni = modelli multiscalari:

- dentro l'arteria modello 3D con geometria ricostruita da immagini cliniche
- + modello a scala ridotta negli inlet/outlet x avere un'idea dell'impedenza vista a valle



analogie idraulico/elettriche

C  $\rightarrow$  compliance  
 R  $\rightarrow$  resistenza  
 I  $\rightarrow$  inerzia

non è facile trovare un modello matematico x accoppiare questi 2 modelli!

$\gamma$  **FRONTERA** del dominio  $\Gamma$  x studiare un volume di sangue bene definito il contorno ( $\Omega = \text{volume}$ )

composta da  $\neq$  superfici

- laterale / fisica (parete vaso)  $\Gamma^w$
- finite (inlet-outlet) attraverso cui transita il sangue (inflow - outflow)  $\Gamma^i + \Gamma^o$

x risolvere le eq. di Navier-Stokes bisogna conoscere le opportune condizioni iniziali e condizioni al contorno (condizioni 3D)

$\left\{ \begin{array}{l} \text{eq. NS} \\ + \\ \text{eq. bilancio massa} \end{array} \right.$

equazioni x fluido newtoniano incompressibile a cui devono essere associate

- Cond. Iniziali (variabili iniziali imposte)

$$V(t_0) = \text{nota} = u_0 ; u(t=t_0, x) = u_0(x), x \in \Omega$$

- Cond. al contorno

$\gamma$  composta da 2 sottosistemi misurabili  $\Gamma^N$  e  $\Gamma^D$  con 2 proprietà specifiche da ricordare

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma^N \cup \Gamma^D = \partial\Omega \text{ frontiera specifica di } \Omega \\ \Gamma^N \cap \Gamma^D = \emptyset \text{ con si intersecano mai} \end{array} \right.$$

D = DIRICHLET  
 N = NEUMANN

$$\gamma = \partial\Omega$$

Se si ha un modello 3D servono condizioni al contorno 3D, che devono essere imposte sulla frontiera  $\partial\Omega$  del dominio



nuova situazione

PROFLO DI VELOCITÀ → velocità = 0

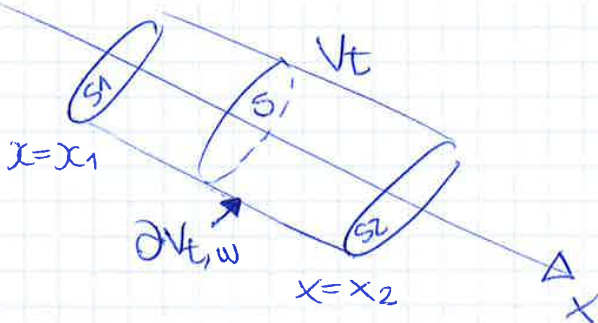
- 2 condizioni di D: iniet - Parete
- 1 condizione di N: outlet  $p = t_e = 0$  ( $p = k = p_{atm}$ )  
Si impone uno stato di sforzo (scarico zero in atmosfera)

PRIMA FORMULAZIONE SU SCALA RIDOTTA  $x$   
TROVARE IL SISTEMA CARDOVASCOLARE  
POI SI SCENDE DI SCALA  $3D \rightarrow 2D \rightarrow 1D \rightarrow 0D$   
E POI IL COMBINO ABBINE.

SI SCRIVONO LE EQ IN MANIERA MADDIMENSIONALE 1D  
SOTTO LE SEGUENTI IPOTESI SIGNIFICATIVE:

- SIMMETRIA ASSIALE: TUTTE LE QUANTITÀ SONO INDIPENDENTI DALLA COORDINATA CILINDRICA RADIALE / ANGOLARE
- SPOSTAMENTI SOLO RADIALI DELLA PARETE, GLI SPOSTAMENTI ASSIALI VENGONO TRASCURATI
- PREDOMINANZA DELLA VELOCITÀ ASSIALE  $u_x$
- ASSI DEL CILINDRO IN POSIZIONE FISSA: NON SI SPORTA
- PRESSIONE COSTANTE SU OGNI SEZIONE ASSIALE, LA PRESSIONE DIPENDE SOLTANTO DA  $z$  E  $t$

SI CONSIDERA:



CILINDRO CILINDRICO  
ASSE IN DIREZIONE  $x$   
VOLUME RACCHIUSO  $V_t$   
 $dv_{t,w}$  FRONTIERA

SI UTILIZZA IL TEOREMA  
DEL **TRASPORTO DI REYNOLDS**  
E RICAVARE DA ESSO L'EQ.  
DEL MOTO MONODIMENSIONALE

$x$  UNA FUNZIONE CONTINUA  $f$  QUALUNQUE (Espressione Generica)

$$f = f(x, t)$$

$x = (x, y, z)$  vettore

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} f dV = \int_{V_t} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{\partial V_t} f v_n d\sigma$$

$U_b$  = velocità della frontiera ( $\cdot n$  = componente normale)

$$\partial V_t = \partial V_{t,w} \cup S_1 \cup S_2 \text{ Parete + iniet + outlet}$$

su  $S_1$  e  $S_2$ ,  $U_b \cdot n = 0$ , cioè sono fisse, non si muovono

su  $\partial V_t$ ,  $U_b = U_w$  velocità di spostamento della parete del condotto che si deforma nel e' estensibile, e permeabile



si ottiene:

$$\int_{\partial V_t} f u \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial V_{t,w}} f u_w \cdot n \, d\sigma$$

invece  $u = \text{velocità del fluido}$

$$u_w \neq u$$

la velocità relativa tra parete e fluido è:

$$\bar{w} = \bar{u}_w - \bar{u}$$

Bisogna fare una media sulle variabili spaziali su una generica sezione S (x ottenere risultato medio)

$$\hookrightarrow \bar{f} = \frac{1}{a} \int_S f \, d\sigma$$

$$a = a(x,t) = \int_S d\sigma$$

varia nel tempo e lungo l'asse del condotto

per cui:

$$\int_{V_t} f \, dV = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \int_S f \, d\sigma \right] dx = \int_{x_1}^{x_2} a \bar{f} \, dx \quad (2)$$

poiché  $x_1$  e  $x_2$  sono indipendenti dal tempo + (1) + (2)

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} f \, dV = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} (a \bar{f}) \, dx$$

considerando  $\bar{w} = \bar{u}_w - \bar{u}$        $\bar{u}_w = \bar{w} + \bar{u}$

$$\int_{\partial V_t} f u \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial V_{t,w}} f u_w \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial V_{t,w}} f w \cdot n \, d\sigma + \int_{\partial V_{t,w}} f u \cdot n \, d\sigma$$

ma  $\int_{\partial V_{t,w}} f u \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial V_t} f u \cdot n \, d\sigma - \int_{S_1} f u \cdot n \, d\sigma - \int_{S_2} f u \cdot n \, d\sigma$

essendo  $u = u(u_1, u_2, u_3)$ ,  $u(S_1) = u_1$ ,  $u(S_2) = u_1$

si considera  $u = u(u_1)$  sulle  $S_1$  e  $S_2$   
 cioè la velocità ha componente solo lungo l'asse del condotto

$$\int_{\partial V_{t,w}} f u \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial V_t} f u \cdot n \, d\sigma + \int_{S_1} f u_1 \, d\sigma - \int_{S_2} f u_1 \, d\sigma$$

la normale è  $[+]$  x convenzione in direzione uscente.  
 x questo da un cambio di segno.



Adesso l'equazione derivata dal teorema del trasporto diventa

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (A \bar{u}_1) = \int_{\partial S} w \cdot n \, d\gamma$$

(il secondo termine è zero)

Questa è l'equazione di conservazione della massa

• L'eq. invece × la conservazione della quantità di moto

$\leadsto \nabla \cdot \tau = \rho f$ 
 Ricordo che  $u = u_1 \hat{i} + u_2 \hat{j} + u_3 \hat{k}$

$$\frac{\partial}{\partial t} (A \bar{u}_1) + \frac{\partial}{\partial x} (A \bar{u}_1^2) = \int_S \left[ \frac{\partial u_1}{\partial t} + u \cdot \nabla u_1 \right] d\sigma + \int_{\partial S} u_1 w \cdot n \, d\gamma$$

componente allineata con l'asse

poiché  $\nabla \cdot (\rho u) = \nabla \rho \cdot u + \rho \nabla \cdot u$   
 $= 0$  ×k incompressibile

che si può riscrivere:

$$\frac{\partial}{\partial t} (A \bar{u}_1) + \frac{\partial}{\partial x} (A \bar{u}_1^2) = \int_S \frac{D u_1}{D t} d\sigma + \int_{\partial S} u_1 w \cdot n \, d\gamma$$

poiché  $\frac{D}{D t} = \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla$  derivata materiale sostanziale / totale

DANS, a bilancio di moto si scriveva (integrata sul volume e completa)

$$\int_{V_t} \frac{D(\rho u)}{D t} dV = \int_{V_t} \rho f^b dV + \int_{\partial V_t} T \cdot n \, d\sigma$$

integrale delle F. di volume (peso)

tenore degli sforzi si integra solo sulla frontiera (T. divergente)

avvolgimento  $\rho = \rho_0 \kappa$   
(fluidi incompressibili)

si esprime l'equazione con

$$\int_{V_t} \frac{D u}{D t} dV = \int_{V_t} \rho f^b dV + \frac{1}{\rho} \int_{V_t} \nabla \cdot T \, dV$$

ma  $T = -P I + D$

$I =$  tensore di identità  
 $D =$  tensore degli sforzi con diag. principale = 0  
 $P =$  pressione

oè  $\nabla \cdot D = d$



Eq. generale che descrive il bilancio della quantità di moto in 1 dimensione

insieme con un'altra equazione.

Se si assume che la parete non sia permeabile

$$\int_{\partial S} w \cdot n \, dy = 0$$

$$\int_{\partial S} u_1 w \cdot n \, dy = 0$$

$A, \bar{p}, \bar{u}_1$  : si hanno 3 incognite ma solo 2 equazioni

area sezione  
pressione media  
su sezione  
velocità media

$$\bar{u} = u$$

$$\bar{p} = p \quad \times \text{costante}$$

$$Q = A \cdot \bar{u} = Au = \int_S u_1 \, d\sigma$$

si scrive per cui:

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha \frac{Q^2}{A} \right) + \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + k_R \frac{Q}{A} = 0 \end{cases}$$

manca un'equazione che legghi queste 2  
cioè relazione tra pressione del condotto e area

$$p(t, x) - p_{ext} = \Psi(A(t, x); A_0(x); \beta(x))$$

si calcola il  
rispetto alla  
p. di riferimento  
(imp. x fero)

condizione  
di riferimento  
(pressione a riposo)

coefficiente che  
dipende dalla  
coordinata  
assiale x

$$\text{se } \gamma = \frac{\sqrt{A} - \sqrt{A_0}}{\sqrt{u}}$$

ipotesi di comportamento univariante elastico

$$\Psi(A, A_0, \beta) = \beta_0 \left( \frac{\sqrt{A} - \sqrt{A_0}}{A_0} \right)$$

spessore  
parete

In questo caso  $\beta = \beta_0 = \frac{\sqrt{u} h_0 E}{1 - \nu^2}$

$$p = \frac{\sqrt{u} h_0 E}{1 - \nu^2} \cdot \frac{\sqrt{A} - \sqrt{A_0}}{A_0}$$

allo stesso modo si procede con l'integrazione  $\int_0^l$  della legge della continuità di moto.

Soltanto si misura la variazione di  $A$  rispetto a  $z$  cioè la posizione lungo il condotto rispetto alle variazioni di  $p$  e  $Q$ .

Si misura anche il contributo convettivo cioè

$$\frac{Q_2^2}{A_2} - \frac{Q_1^2}{A_1} \cong 0 \quad \text{per } Q_1 \cong Q_2 \text{ e } A_1 \cong A_2$$

$$\text{si ottiene: } \frac{pl}{A_0} \frac{d\hat{Q}}{dt} + \frac{\rho k_R l}{A_0^2} \hat{Q} + P_2 - P_1 = 0 \quad \begin{matrix} P_1 = P(0) \\ P_2 = P(l) \end{matrix}$$

anche le 2 equazioni:  $\partial D$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{pl}{A_0} \frac{d\hat{Q}}{dt} + \frac{\rho k_R l}{A_0^2} \hat{Q} + P_2 - P_1 = 0 \\ k_1 l \frac{d\hat{p}}{dt} = \Delta Q \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \Delta P = \frac{pl}{A_0} \frac{d\hat{Q}}{dt} + \frac{\rho k_R l}{A_0^2} \hat{Q} \\ \Delta P = \alpha Q \quad (\text{legge di Ohm}) \end{array}$$

ci sono tre serie di coefficienti che influenzano le variabili che sono  $\hat{p}$  e  $\hat{Q}$  (2 eq x 2 incognite) suddivisi ante le condizioni al contorno.

Questi coeff hanno un significato fisico:

$$R = \frac{\rho k_R l}{A_0^2} = \begin{array}{l} \text{resistenza opposta al flusso} \\ \text{resistenza idraulica del condotto} \end{array}$$

$$L = \frac{pl}{A_0} = \begin{array}{l} \text{inerzia} \cong \text{induttanza elettrica} \\ \text{capacità del sistema di rispondere} \\ \text{ad una variazione di portata nel tempo} \end{array}$$

$$C = k_1 l = \frac{3\pi \rho k^3 l}{2Eh} = \begin{array}{l} \text{legge carica/scarica di un condensatore} \\ \text{capacità idraulica del sistema} \\ \cong \text{capacità} \end{array}$$

si riscrivono così

$$\left\{ \begin{array}{l} C \frac{d\hat{p}}{dt} = \Delta Q \\ L \frac{d\hat{Q}}{dt} + R \hat{Q} = \Delta P \end{array} \right. \quad \text{"circuito elettrico"}$$

= sintetica descrizione del flusso ematico in un vaso cilindrico esponibile, ovvero attraverso i valori di portata e pressione medi nel punto  $\hat{Q}$  e  $\hat{p}$  e relativi alle sezioni di ingresso e uscita  $Q_1, Q_2, P_1, P_2$ .

Attraverso il processo di integrazione, le condizioni al bordo del problema 3D diventano dati medi relativi alle sezioni di ingresso e di uscita



Le informazioni considerate dai 2 modelli relative ai 2 domini, devono determinare la stessa situazione fisica su  $\Gamma_A : (-Q, -P)$  si deve vedere la stessa cosa guardando da un modello 10 e 30

ESISTO: sono espondibili? se si, si espongono nello stesso modo? x non avere discontinuità

Il trattamento della parete

<sup>19</sup>  
[20-21]

Il trattamento all'interfaccia:

Formalismo: se  $f$  è una generica variabile cui interno del dominio:

$f(a^-)$ : valore di  $f$  su  $\Gamma_a$ , interpretato come proiezione di  $\partial\Omega_{30}$

$f(a^+)$ : valore di  $f$  in corrispondenza di  $z=a$  nel dominio  $\partial\Omega_{10}$

Il problema fisico suggerisce che in corrispondenza della superficie di interfaccia la sua soluzione assume la continuità di alcune quantità:

- [A] Conservazione portata  $Q(a^-) = Q(a^+)$
- [B] pressione statica  $\bar{p}(a^-) = \bar{p}(a^+)$
- [C] Condiz. di area  $A(a^-) = A(a^+)$   $\Delta$
- [D] Pressione totale = statica + dinamica  $p_t(a^-) = p_t(a^+)$
- [E] Garanzia in alcuni casi la continuità di una variabile caratteristica esattamente in  $S_{10}$   $g_1(t, a^-) = W_1(a^+)$

ricordo la forma compatta delle prec. equazioni

$$\frac{\partial U}{\partial t} + H(U) \frac{\partial U}{\partial z} + S(U) = 0$$

$$U = \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix} \quad S(U) = \begin{bmatrix} kr \frac{Q}{A} + A \frac{\partial \psi}{\partial A_0} \frac{dA_0}{dz} + A \frac{\partial \psi}{\partial B} \frac{dB}{dz} \end{bmatrix}$$

$$H(U) = \begin{bmatrix} A \frac{\partial \psi}{\partial A} & 0 \\ -d_2 \frac{Q^2}{A} & 2d_2 \frac{Q}{A} \end{bmatrix}$$



• la condizione [D] sulla condizione di P totale deriva da Bernoulli (linee di corrente streamline), ma un'ora in condizione di "salto"

eventualmente si assume un termine che rappresenta le perdite totali di energia (come le perdite visose) sempre del disaccoppiamento meccanico e rilevante.

$$P_t(\alpha^-) = P_t(\alpha^+) + \Pi \quad ; \quad \Pi = \frac{\rho(u_z|_{r_1} - u_z|_{r_2})^2}{2}$$

• per la condizione [E] si può analizzare il problema attraverso l'uso di variabili caratteristiche, che sono espresse in funzione di dei valori medi di  $u_z$  e  $\bar{p}$  sulle sezioni del tubo

$$W_{1,2} = \bar{u}_z(\alpha^-) \pm 2\sqrt{\frac{2}{\rho}} \left( \sqrt{\bar{p}(\alpha^-) - p_{ext} + \beta_0} - \sqrt{\beta_0} \right)$$

con  $\beta_0 =$  coefficiente elastico precedentemente ottenuto

si procede come se anche nel dominio 3D fosse previsto un modello 1D da accoppiare con quello in 1D. così la condizione si interpreta come la propagazione all'interno del dominio  $\Omega_{1D}$  dell'informazione contenuta nelle variabili caratteristiche

→ la var. car. rappresenta il modello 3D come 1D esistente perciò la sua propagazione

se il modello 3D è rigido e con presenza l'estensibilità della parete, questa condizione di continuità non è valida

• la condizione [B] sulla pressione statica si può riformulare se si trascura il contributo dei termini viscosi

$$\rightarrow \bar{\sigma}_{30}(\alpha^-) = \bar{p}_{20}(\alpha^+) \quad \text{dove la pressione è lo sforzo normale alla sezione}$$

$$\text{con } \bar{\sigma} = (\overline{T \cdot n \cdot n})$$

$\overline{T}$  = tensore degli sforzi del fluido

• lo stesso si può fare x la condizione [E]

$$\rightarrow \bar{u}_z(\alpha^-) + 2\sqrt{\frac{2}{\rho}} \left( \sqrt{\bar{\sigma}(\alpha^-) - p_{ext} + \beta_0} - \sqrt{\beta_0} \right) = W_1(\alpha^+)$$

In generale, il problema del fluido nel dominio 3D richiede come condizioni al bordo soltanto quantità medie. il modello 1D necessita di un'unica condizione al contorno in corrispondenza della sezione di interfaccia.



Come l'imposizione della  $\bar{p}$  è una condizione che funziona quasi sempre (è robusta)

Ma l'eventuale non annullabilità di  $[C]$  porta a non garantire neppure la (A) e in questo caso questo modello 2 non va bene  $\rightarrow$  non tutti i modelli vanno bene sempre.

La seconda del problema, bisogna selezionare il modello di interaz. corretto che difende dalle carenze, forse che le buone ipotesi fatte.



Come si affrontano le strategie risolutive?

La suddivisione del problema nei 2 domini 3D, 1D può essere riformulata matematicamente grazie ad una tecnica di decomposizione del dominio. Se la soluzione esiste  $x$  il sistema accoppiato, allora può essere risolto risolvendo il problema separatamente nei 2 domini e utilizzando la soluzione parziale ottenuta in ciascun dominio  $x$  calcolare le condizioni al bordo nell'altro, in una logica iterativa.

Il problema accoppiato va risolto secondo il seguente schema:

- 1) Risolvere il problema fluido-struttura in 1D con condizioni al contorno sull'interfaccia ricavate da una delle condizioni previste dal modello di interazione scelto (e condizioni assorbenti) sull'altro estremo del dominio).
- 2) Risolvere il problema fluido-struttura in 3D con condizioni al contorno sull'interfaccia ricavate dalle rimanenti condizioni del modello di interazione e condizioni di Neumann o Dirichlet sui altri bordi del dominio 1D.
- 3) Se il problema è matematicamente ben posto in ciascuno dei 2 domini, è possibile cercare la soluzione globale come l'insieme delle soluzioni dei 2 sottoproblemi, compatibili con le condizioni di interfaccia.

★ caso specifico (3D rigid)

Se  $\Omega_{3D}$  è rigid/indeformabile, si fa riferimento al suo modello di interazione 1). La continuità dell'area non ha senso e la sua misura  $x$  il modello 1D in generale è un caso espansivo.

Le condizioni al contorno  $x \Omega_{3D}$  sono calcolate in base ad (A) portata o (D) pressione totale, valori calcolati in  $\Omega_{3D}$ . Le condizioni al contorno  $x \Omega_{3D}$  sono calcolate in base alla condizione non ancora sfruttata e quindi a partire dai valori di pressione totale o di portata calcolati in  $\Omega_{3D}$ . Si possono costruire 2 algoritmi a seconda di come vengono sfruttate le condizioni di continuità (non vedere 1).



Se il metodo converge  $Q_{k+1}^{n+1}(a^-) = Q_{k+1}^{n+1}(a^+)$  per  $k \rightarrow \infty$ .

Se si considera  $Q_{k+1}^{n+1}(a)$  un' approssimazione di  $Q_{k+1}^{n+1}(a^+)$  e possibile progettare un test di arresto x il metodo iterativo, valutando l'errore assoluto e l'errore relativo di tale approssimazione

Scegli 2 valori di tolleranza  $\epsilon^{rel}$  e  $\epsilon^{abs}$

$$SE \begin{cases} Q_{k+1}^{n+1}(a^-) - Q_{k+1}^{n+1}(a^+) > \epsilon^{abs} \\ \left( \frac{Q_{k+1}^{n+1}(a^-) - Q_{k+1}^{n+1}(a^+)}{\min \{ Q_{k+1}^{n+1}(a^-), Q_{k+1}^{n+1}(a^+) \}} \right) > \epsilon^{rel} \end{cases}$$

$K = k+1$  e si torna alla costruzione sull'interfaccia.

- ★ si presenti/indichino le problematiche principali dell'adattamento del metodo multiscala
- ★ lavorare su questi principali teoria di Womersley