NUMERO: 1863A - ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Rotella Luigi

MATERIA: Fisica I - prof. Daghero

02/03/'15

Corso di Fisica I

Meccanica + Termodinamica

Filosofia Naturale → si distingue dalla filosofia per il "metodo".
La Fisica Classica è il limite della Fisica Moderna nel quotidiano. → velocità prossime a quelle della luce o nel molto piccolo.

GALILEO $\xrightarrow{\text{formula}}$ "metodo scientifico":

1) schematizzazione ⟹ si schematizza la realtà e si crea un modello.

2) misurazione di una grandezza fisica
3) correlazione: grafici + tabelle → LEGGI

fit: si cerca una funzione matematica che meglio approssima i valori.

4) LEGGI
5) previsioni: si fanno previsioni cambiando le condizioni.
6) si fanno test sperimentali x verificare le previsioni.

Una QUANTITÀ FISICA è qualcosa che può essere misurata.

MISURAZIONI → DIRETTA / INDIRETTA.

La definizione operativa di una grandezza consiste in una serie di operazioni di misura:
1) criterio di confronto.
2) si possono sommare le lunghezze.
3) serve uno standard di misura unitaria.

es. 1m = spazio percorso dalla luce in 1/299,792,458 sec.

$L = \ell\,[L]$

valore — unità di misura

GRANDEZZE FONDAMENTALI: sono le grandezze fisiche di base che permettono di definire le altre.

L lunghezza — M massa — T tempo → INTERNATIONAL SYSTEM.

grandezza definita a partire dal secondo

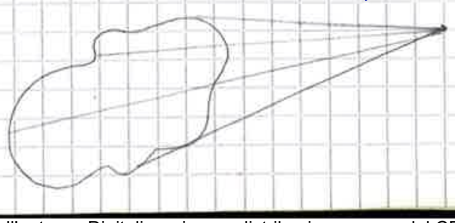
Θ temperatura

secondo: 9,192,631,770 cicli della radiazione prodotta da 2 livelli iperfini ^{133}Cs.
Kelvin (K) = 1/273,16 del punto triplo dell'H_2O.

Ci sono delle grandezze fisiche fondamentali di tipo geometrico:

angolo piano = rad = s/r $\quad [\Theta] = L/L = \sim$

angolo solido = sterad = $\dfrac{\Sigma}{R^2} = \Omega$. $\quad \Sigma$ = lunghezza di circonferenza o della curva chiusa



chiedere al prof. meglio questo

se le misure sono tante? $\longrightarrow$ a che fare con la statistica

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i = \frac{1}{n}\sum n_k x_k = \sum \frac{n_k}{n} \cdot x_k = \sum f_k x_k$$

n_k = valore di volte in cui ho ottenuto x_k $\qquad$ f_k = normalized frequency

e se fossimo nel caso di una variabile continua? devo dividere per intervalli di valori il "campione", sebbene sia finito viene pensato come l'insieme concettuale dei valori possibili.

INTERVALLO: $\Delta x = \dfrac{x_{MAX} - x_{MIN}}{N}$

Δn_k = numeri di valori che cadono nella classe k-esima.

$f_k = \dfrac{\Delta n_k}{n}$ frequenza relativa $\longrightarrow$ la plotto in un istogramma.

se rimpiccioliamo Δx ed aumentiamo 'n' posso confondere il punto medio della classe con il valore medio

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum \Delta n_k \cdot \bar{x}_k \cong \sum_{k=1}^{n} f_k x_k \longrightarrow \frac{1}{n}\frac{\Delta n_k}{\Delta x} \text{ che è la densità di frequenza}$$

l'istogramma di questa nuova grandezza è esattamente il doppio. $\longrightarrow$ indica come sono distribuite le misure sull'asse.

ora $n \longrightarrow \infty$

$\Delta x \longrightarrow dx$
$\Delta n_k \longrightarrow dn$

$$\Longrightarrow \bar{x} = \sum_k \frac{1}{n}\frac{\Delta n_k}{\Delta x}\cdot \Delta x \cdot x_k \longrightarrow \int_{x_{MIN}}^{x_{MAX}} \frac{1}{n}\cdot\frac{dn}{dx}\cdot x \cdot dx$$

si ottiene ciò che viene detto densità di probabilità.
la frequenza si avvicina alla probabilità man mano che si aumenta il numero di misure.

es. $[T] = [g]^{\alpha} \cdot [L]^{\beta} \cdot [M]^{\gamma}$ $\qquad$ $g = a : [L]^{\alpha} \cdot [T]^{-2\alpha}$

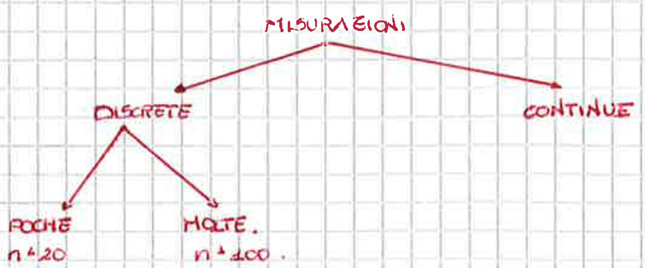
$[L]^{\alpha+\beta} \cdot [T]^{-2\alpha} \cdot [M]^{\gamma}$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -2\alpha = 1 \\ \gamma = 0 \end{cases} \qquad \alpha = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \beta = \frac{1}{2}$$

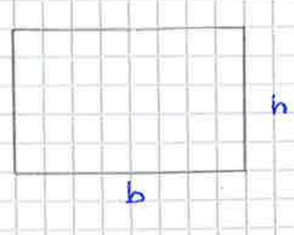
$$T = \sqrt{\frac{L}{g}}$$

· es. $F = \eta \cdot S \cdot \dfrac{dv}{dz}$ $\qquad$ F: forza = m·a $\qquad$ $[M]\cdot[L]\cdot[T]^{-2}$
S = Area $\qquad$ $[L]^2$
v = velocità $\qquad$ $[L]\cdot[T]^{-1}$

$$\eta = \frac{F}{S}\cdot\frac{dz}{dv} \Longrightarrow \frac{M \cdot \cancel{L} \cdot \cancel{L} \cdot \cancel{T}}{T^{\cancel{2}} \cdot \cancel{L^2} \cdot L} = \frac{M}{T \cdot L} = Kg/m \cdot s = \text{poiseuille}.$$



MISURE INDIRETTE.



$b = \bar{b} \pm \Delta b$ $\qquad A = \bar{b} \cdot \bar{h}$

$h = \bar{h} \pm \Delta h$

$A_{MAX} = b_{MAX} \cdot h_{MAX} = (\bar{b} + \Delta b)(\bar{h} + \Delta h)$

$A_{MIN} = b_{MIN} \cdot h_{MIN} = (\bar{b} - \Delta b)(\bar{h} - \Delta h)$

$\Delta A = \dfrac{A_{MAX} - A_{MIN}}{2} = b\Delta h + h\Delta b \longrightarrow \dfrac{\Delta A}{A} = \dfrac{\Delta b}{b} + \dfrac{\Delta h}{h}$

$z = \alpha x_1 \qquad z = \alpha x_1 \qquad \Delta z = |\alpha| \Delta x_1$

$z = x_1^n \qquad z = x_1^n \qquad \dfrac{\Delta z}{z} = |n| \cdot \dfrac{\Delta x_1}{x_1}$

→ variabili non indipendenti fra di loro.

e se le variabili fossero indipendenti? $z = x_1 \pm x_2 \qquad z = x_1 \pm x_2$

$\Delta z = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2}$

e se fosse una funzione a caso?

$z = f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) \qquad \Delta z = \sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1\right)^2 + \ldots\ldots + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n\right)^2}$

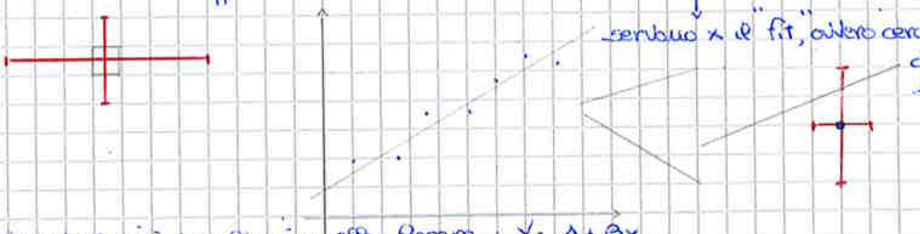
derivata parziale.

es. $f(x, y, z) = 3x^2 + 2yz + 27$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 6x \quad \& \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2z \quad \& \quad \dfrac{\partial f}{\partial z} = 2y$

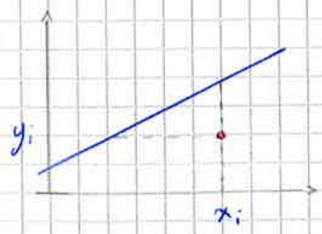
Nei grafici le incertezze si rappresentano facendo riferimento alle barre di errore:

servono x il "fit", ovvero cercare la curva teorica che meglio approssima i punti.



es. la dipendenza più semplice è quella lineare: $y = A + Bx$

per cercare la curva si deve chiedere che la distanza dei punti da essa deve essere minima e che anche la somma dei val. assoluti delle distanze deve essere minima



$dy_i = y_i^{exp} - y_i^{Theor} = y_i - (A + Bx)$

$\chi^2 = \sum \dfrac{[y_i - (A + Bx)]^2}{\sigma^2}$

chi quadro

è come se i valori di x con le loro oscillazioni di errore seguissero anch'essi una distribuzione gaussiana.

$\hookrightarrow \dfrac{\partial \chi^2}{\partial A} = 0 \quad \& \quad \dfrac{\partial \chi^2}{\partial B} = 0$

$A = \dfrac{(\Sigma x_i^2)(\Sigma y_i) - (\Sigma x_i)(\Sigma x_i y_i)}{N(\Sigma x_i) - (\Sigma x_i)^2}$

$\sigma = \sqrt{\dfrac{1}{N-2} \Sigma (y_i - A - Bx_i)^2}$

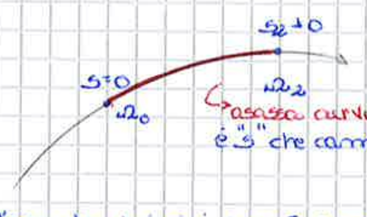
es. $\vec{r}(t) = R\sin(\omega t)\hat{i} + R\cos(\omega t)\hat{j}$

$x(t) = R\sin(\omega t)$
$y(t) = R\cos(\omega t)$

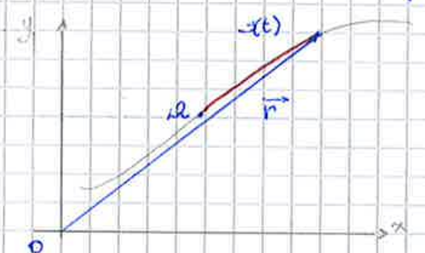
$x(t)^2 + y(t)^2 = R^2\sin^2(\omega t) + R^2\cos^2(\omega t) = R^2$

se avessi avuto $r(t) = R\sin(\omega t)\hat{i} + R\cos(\omega t)\hat{j} + vt\hat{k}$ avrei ottenuto una traiettoria molto diversa.

Tuttavia c'è un modo per separare le informazioni contenute nell'equazione oraria ed è il metodo delle COORDINATE INTRINSECHE:



s = lunghezza dell'arco che unisce i 2 punti = coordinata intrinseca.



$\vec{r} = \vec{r}(s(t))$

$\vec{r} = \vec{r}(s)$ → FORMA della TRAIETTORIA

$s(t)$ → EQUAZIONE ORARIA

$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$

velocità media $\vec{v}_m = \dfrac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta \vec{r}}{t_2 - t_1}$

velocità (ISTANTANEA): $v = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

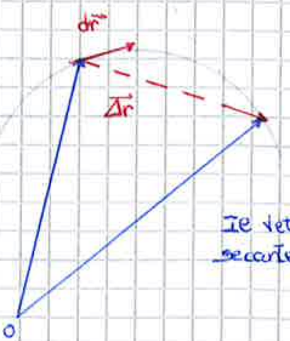
se $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$

$\vec{r}(t+\Delta t) = x(t+\Delta t)\hat{i} + y(t+\Delta t)\hat{j}$
$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$

$\vec{v} = \dfrac{dr}{dt} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}$

VELOCITÀ: → vettore
→ rapporto incrementale.

la velocità istantanea è definita in un istante.



Il vettore velocità media è generalmente secante la traiettoria.

Velocità in diverse coordinate

→ INTRINSECHE
→ POLARI
→ CARTESIANE

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 135

$$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt} \cdot \hat{u}_r + \rho \frac{d\theta}{dt} \cdot \hat{u}_\theta$$

$$\vec{v_A} = \langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \longrightarrow d\vec{r} = \vec{v}\,dt$$

$$\int_{\vec{r}(t_1)}^{\vec{r}(t_2)} d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} v(t')\,dt'$$

$$\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t')\,dt'$$

$$\vec{v_A} \cdot (t_2 - t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t')\,dt'$$

$$\vec{v_A} = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} v(t')\,dt'$$

Accelerazione in diverse coordinate

si chiama $\vec{a_A}$ il vettore $\frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$

$$\vec{a}_{ist} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{\Delta t} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

se il percorso è curvo $\Longrightarrow$ e $\vec{a}$ è sempre rivolto verso l'interno della curva.

se $\vec{v} = \vec{v}(t)$ si ha sempre un'accelerazione.

- Coordinate Intrinseche:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt} \cdot \hat{u}_t\right) = \frac{d}{dt}(v\hat{u}_t)$$

auche $\hat{u}_t$ varia

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}\hat{u}_t + v \cdot \frac{d\hat{u}_t}{dt} \longrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt}\hat{u}_t + v \cdot \ldots \hat{u}_n.$$

come varia la velocità scalare nel tempo $\longrightarrow$ globalmente // al vettore $\hat{u}_t$ $\longrightarrow$ accelerazione tangenziale.

$$d\hat{u}_t = \hat{u}_t(t + dt) - \hat{u}_t$$

$d\hat{u}_t = \|\hat{u}_t\| \cdot d\phi$ in un dato istante il vettore punta verso il centro della circonferenza

$d\hat{u}_t = d\phi \cdot \hat{u}_N$ verso il centro della circonferenza.

$$ds = R\,d\phi \qquad \frac{d\hat{u}_t}{dt} = \frac{d\phi\,\hat{u}_N}{dt} = \frac{ds}{R\,dt}\hat{u}_N = \frac{v_s}{R}\hat{u}_N$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}\hat{u}_t + \frac{v_s^2}{R}\hat{u}_N = a_T\hat{u}_t + a_c\hat{u}_N \qquad \|\vec{a}\| = \sqrt{a_T^2 + a_c^2}$$

- Coordinate Polari:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{d\rho}{dt}\hat{u}_t + \rho\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta\right] = \frac{d^2\rho}{dt}\hat{u}_r + \frac{d\rho}{dt}\frac{d}{dt}\hat{u}_r + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta + \rho\frac{d^2\theta}{dt}\hat{u}_\theta + \rho\frac{d\theta}{dt}\frac{d\hat{u}_\theta}{dt}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 135

$a_x = \frac{dv_x}{dt} \longrightarrow dx = a_x dt$

$\int_{v_x(t_0)}^{v_x(t)} dv_x = \int_{t_0}^{t} a_x(t')dt' \Longrightarrow v_x(t) - v_x(t_0) = \int_{t_0}^{t} a_x(t')dt'$

1) MOTO 1D a VELOCITÀ COSTANTE $\longrightarrow a = 0$

$v_x(t) = v_x(t_0)$

$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_0 dt' \longrightarrow x_0 + v_0(t - t_0)$ legge del moto uniforme.

2) ACCELERAZIONE COSTANTE $\longrightarrow a = k$

$a_x = a_0$

$v_x = v_{x_0} + a(t - t_0) \Longrightarrow x_0 + \int_{t_1}^{t_2} a(t - t_0) + v_0$

$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a (t - t_0)^2$

relazione tra velocità ed accelerazione nello spazio.

$v_x(x(t))$

$a_x = \frac{d}{dt} v_x \longrightarrow \frac{dv_x}{dt} \cdot \frac{dx}{dt}$

$a_x dx = v_x dv_x$

$\int_{x_0}^{x} a\,dx = \int_{v_{x_0}}^{v_x} v_x' dv_x' \longrightarrow 2a_0(x - x_0) = (v^2 - v_0^2)$

$\boxed{v_x^2 = v_0^2 + 2a_0(x - x_0)}$

legge oraria:

$\vec{r}(t) \xrightarrow{\text{der.}} \vec{v}(t) \xrightarrow{\text{der.}} \vec{a}(t)$

$\vec{a}(t) \xrightarrow{\text{der. int.}} \vec{v}(t) \xrightarrow{\text{int}} \vec{r}(t)$

1D: $\vec{a}_x(t) \xrightarrow{\text{CAUCHY}} \vec{x}(t)$

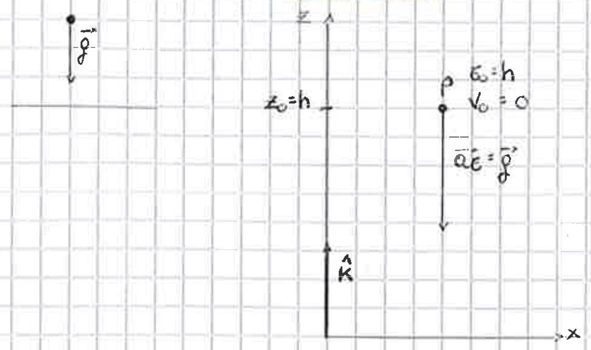
I) $\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \longrightarrow v_x = \text{cost} = v_0$ MOTO UNIFORME $x(t) = x_0 + v_0(t - t_0)$

II) $\frac{d^2x}{dt^2} = a \longrightarrow a_x = a_0 = \text{costante}$ $\frac{dv_x}{dt} = a$ $v_x(t) = v_x(t) + a(t - t_0)$

$x(t) = x(t_0) + v_x(t)(t - t_0) + \frac{1}{2} a (t - t_0)^2$

MOTO di CADUTA

$g = 9.81\, m/s^2 \approx 10\, m/s^2$ e sempre orientato verso il basso.



$\vec{a} = a_\varepsilon \hat{k} = \vec{g} = -g\hat{k} \longrightarrow a_\varepsilon = -g$

$v_\varepsilon(t) = v_\varepsilon(t_0) + a_\varepsilon(t - t_0) \longrightarrow v_\varepsilon(t) = -gt$

$\underbrace{\varepsilon(t) = \varepsilon(t_0)}_{\to h} + v_\varepsilon(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2} a_\varepsilon (t - t_0)^2$

$\varepsilon(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$

introduciamo ora vari tipi di moto:

MOTO ESPONENZIALMENTE SMORZATO:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -Kv$$ è il tipo di moto che si può verificare in un fluido

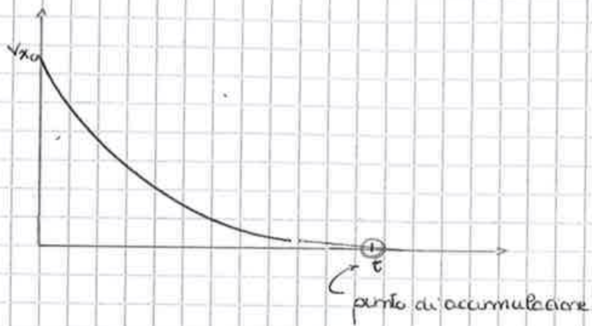
è proporzionale a $\vec{v}$

$$\frac{dv_x}{dt} = -Kv \Longrightarrow \frac{dv_x}{v_x} = -Kdt$$ $v_x(t_0)$ non è zero

$$\int_{v_{x_0}}^{v_x} \frac{dv'_x}{v'_x} = -K\int_0^t dt$$

$$\ln v'_x \Big|_0^{v_x} = -Kt$$

$$\ln \frac{v_x}{v_{x_0}} = -Kt \longrightarrow v_x = v_{x_0} e^{-Kt}$$



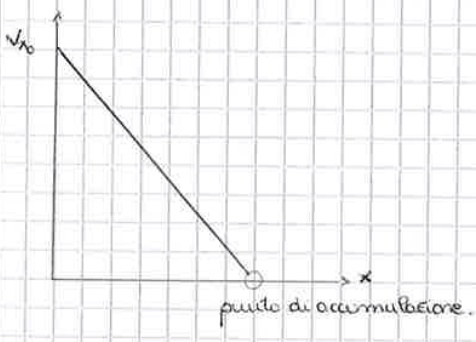
$$a_x = -Kv$$

$$\frac{dv_x}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \cancel{v_x}\frac{dv_x}{dx} = -K\cancel{v_x} \longrightarrow \frac{dv_x}{dx} = -K \longrightarrow dv_x = -Kdx$$

$$\int_{v_{x_0}}^{v_x} dv'_x = -K\int_0^x dx'$$ ricavo la velocità in funzione di x.

$$v_x - v_{x_0} = -Kx$$

$v_x = v_{x_0} - Kx$ la velocità decresce linearmente nello spazio.



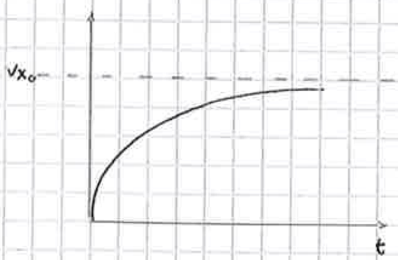
$$v_x = \frac{dx}{dt} \longrightarrow dx = v_x(t)\,dt$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t v_x(t')\,dt'$$

$$x = \int_0^t v_{x_0} e^{-Kt'} dt' = v_{x_0} e^{-Kt} \cdot (-K) \Longrightarrow -\frac{v_{x_0}}{K} e^{-Kt}\Big|_0^t =$$

$$= -\frac{v_{x_0}}{K}\left[e^{-Kt} - 1\right]$$

$$x(t) = \frac{v_{x_0}}{K}\left(1 - e^{-Kt}\right)$$



MOTO ARMONICO SEMPLICE:

accelerazione dipendente da x

$$a_x = -\omega^2 x$$

è evidenziato che è una costante negativa.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$ soluzione caratteristica $\lambda^2 + \omega^2 = 0 \longrightarrow \lambda = \pm i\omega$

2 esempi di moto armonico semplice.

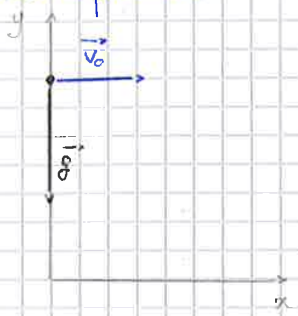
MASSA MOLLA: $\frac{K}{m} = \omega^2$

PENDOLO: $\omega^2 = \frac{g}{L}$

MOTO 2D e 3D.

composizione di moti unidimensionali

es. moto dei proiettili.



$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$

$\vec{a} = \vec{a}_y = -g\hat{k}$, $\vec{a}_x = 0$ ⟶ $v_x = cost$

$x(t) = x_0 + v_{0x}(t - t_0)$, con $x_0 = 0$, $t_0 = 0$

$= 0 + v_{0x}\hat{i}$.

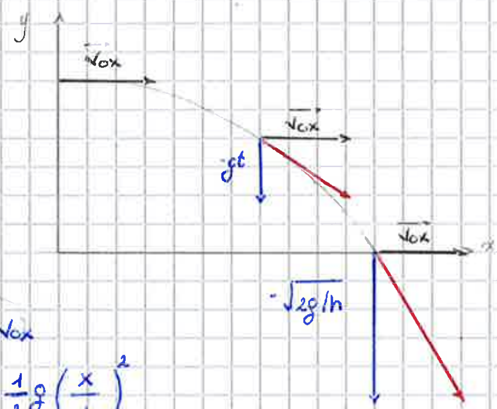
$a_y = -g$ ⟶ $y(t) = y_0 + v_{0y}(t - t_0) + \frac{1}{2}a_y(t - t_0)$

$y = h - \frac{1}{2}gt^2$

$v_y(t^*) = 0 \quad t^* = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

$v_y = -gt$

$v_y(t^*) = -gt^* = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}$



si ricava la traiettoria eliminando 't'.

$x = v_{0x}t$ ⟶ $t = x/v_{0x}$

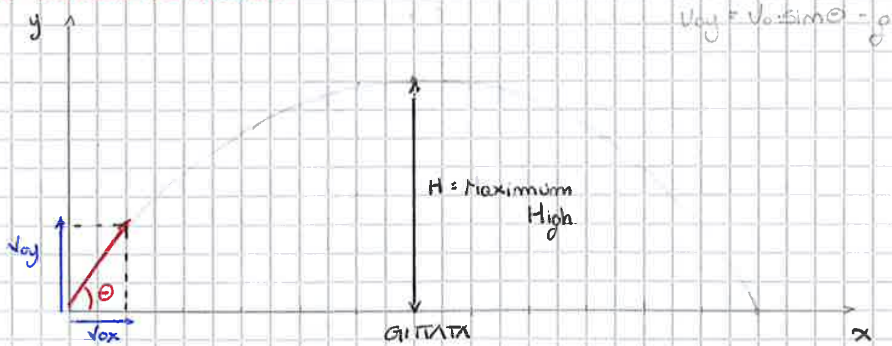
$y = h - \frac{1}{2}gt^2$ ⟶ $y = h - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2$

dove cade il corpo? $\quad x(t^*) = v_{0x}t^* = v_{0x}\sqrt{\frac{2h}{g}}$

corpo lanciato da terra:

$v_{0x} = v_0 \cos\theta$

$v_{0y} = v_0 \sin\theta - gt = v_0 \tan\theta - gt$



$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t & (1) \\ y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 & (2) \end{cases}$$

(1) ⟶ $x(t) = v_{0x}t = v_0\cos\theta\, t$

(2) ⟶ $y(t) = v_0\sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$

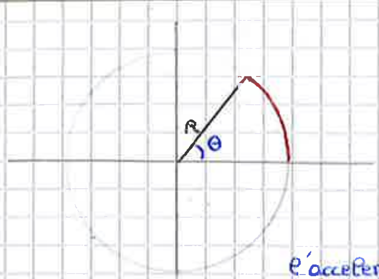
per trovare H pongo $v_{0y} = 0$ ⟶ $v_y(t) = v_0\sin\theta - gt$

$gt^2 - \frac{1}{2}gt^2 \qquad \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}\frac{x^2}{\cos^2\theta\, v_0^2}g$

relazioni: $s = R\Theta$

$$\frac{ds}{dt} = R\frac{d\Theta}{dt}$$

$$v_s = R\omega$$

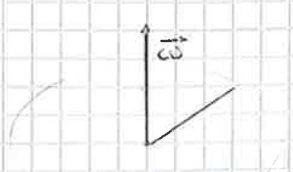


$$v_s = R\omega$$

$$\frac{dv_s}{dt} = R\frac{d\omega}{dt}$$

$$a_t = R\alpha$$

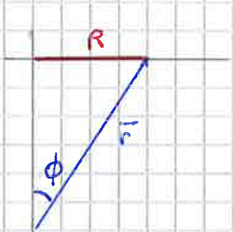
l'accelerazione angolare indica di quanto varia ω.



$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \longrightarrow$$ nel moto piano $\vec{\alpha} \parallel \vec{\omega}$ ma cessa di essere così se $\vec{\omega}$ cambia nel tempo

$$v_s = R\omega = \|\vec{\omega}\| \cdot \underbrace{\|\vec{r}\| \cdot \sin\phi}_{R}$$

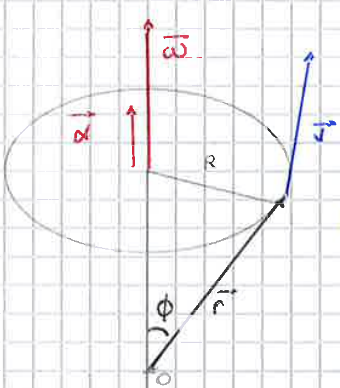
$$v_s \to \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$



$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \Longrightarrow \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}$$

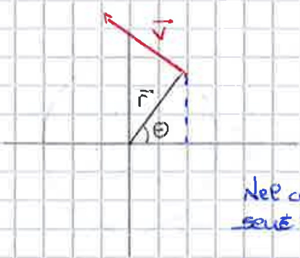
$$a \Longrightarrow \underbrace{\vec{\alpha} \wedge \vec{r}}_{\vec{a}_t = \ddot{s}\,\hat{u}_t} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{v}}_{\vec{a}_c = \frac{\vec{v}^2}{R}\cdot\hat{u}_N}$$

$$\|\vec{\alpha} \wedge \vec{r}\| = \|\vec{\alpha}\| \|\vec{r}\| \cdot \sin\phi = \alpha R = \frac{d\omega}{dt} R = \frac{d\omega}{dt} = a_t$$



$$\|\omega \wedge r\| = \|\vec{\omega}\| \|\vec{r}\| \cdot \sin\frac{\pi}{2} = \omega v = \frac{v}{R} v = \frac{v^2}{R} = a_c$$

ma in coordinate cartesiane?



$$\begin{cases} x = \vec{r} \cdot \cos\Theta(t) \\ y = \vec{r} \cdot \sin\Theta(t) \end{cases}$$

Nel caso in cui ω sia costante si ottiene seuž'altro:

$$\omega = \frac{d\Theta}{dt} \longrightarrow \Theta(t) = \Theta_0 + \omega t$$

e nel caso del moto unif. accelerato: $\omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \alpha(t')\,dt'$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\Theta - \Theta_0)$$

$$x(t) = R\cos\Theta(t) = \underbrace{R\cos(\omega t + \Theta_0)}_{\text{moto armonico semplice}} \longrightarrow$$ la proiezione è un moto armonico la cui pulsazione è uguale alla velocità angolare.

$$y(t) = R\sin(\omega t + \Theta_0)$$

vale solo in SRI.

se pongo $\vec{a}=0 \Longrightarrow \sum \vec{F}=0$.

$\sum \vec{F}=0 \Longrightarrow \vec{a}=0$

in coordinate cartesiane:

$$\left.\begin{array}{l}\sum \vec{F_x}=m\cdot\vec{a_x}\\ \sum \vec{F_y}=m\cdot\vec{a_y}\\ \sum \vec{F_z}=m\cdot\vec{a_z}\end{array}\right\} \sum\vec{F}=m\cdot\vec{a}=m\cdot\frac{d^2x}{dt^2} \longrightarrow \text{da qui posso ottenere } x(t)$$

La forza è quella cosa che provoca accelerazione:

$$[F]=[m]\cdot[a] \Longrightarrow M\cdot L\cdot T^{-2} \Longrightarrow 1N=1\,kg\,ms^{-2}.$$

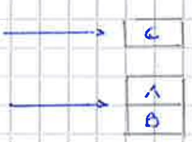
ma la massa come si misura?

1) applico ad un certo corpo una F e misuro l'accelerazione $\Longrightarrow m=\frac{\|\vec{F}\|}{\|\vec{a}\|}$

2) confronto $m_A=m_B$

se $\vec{a_A}=\vec{a_B}$ con la stessa forza.

3) criterio di somma $m_C=m_A+m_B$



$\left.\begin{array}{l}\vec{a_C}\\ \vec{a_{B/A}}\end{array}\right\}$ se $\vec{a_C}=\vec{a_A}+\vec{a_B} \Longrightarrow m_C=m_A+m_B$

$\sum\vec{F}=m\cdot\vec{a}$ ma Newton non l'ha scritta così perché lui parlava in termini di quantità di moto.

$\vec{P}$ (quantità di moto) $=m\cdot\vec{v}$ $\quad [\vec{p}]=[m][\vec{v}]=MLT^{-1}$ $\quad (kg\,ms^{-1})$.

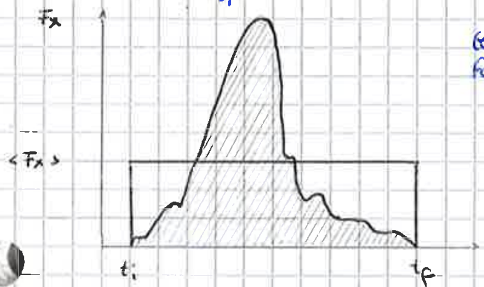
$$\sum\vec{F}=m\cdot\vec{a}=m\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d\vec{p}}{dt} \Longrightarrow \sum\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$$ è valida anche se cambia la massa nel tempo.

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt} \longrightarrow d\vec{p}=\vec{F}\,dt$$

$$\int_{p_i}^{p_f} d\vec{p}=\int_{t_i}^{t_f}\vec{F}(t')dt'$$

$$\vec{p_f}-\vec{p_i}=\underbrace{\int_{t_i}^{t_f}\vec{F}(t')dt'}_{\text{IMPULSO DELLA FORZA}} \longrightarrow \Delta\vec{p}=\vec{J} \longrightarrow \text{Teorema dell'Impulso.}$$

$$p_{xf}-p_{xi}=J_x=\int_{t_i}^{t_f}F(t')dt'$$

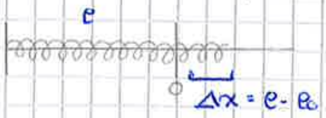


la forza media è la forza che ha lo stesso impulso ma forma funzionale più semplice

$$\langle F_x\rangle\cdot(t_f-t_i)=\int_{t_i}^{t_f}F_x(t')dt'$$

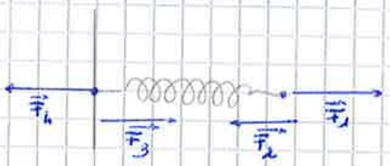
$$\langle F_x\rangle=\frac{1}{(t_f-t_i)}\cdot\int_{t_i}^{t_f}F_x(t')dt'$$

- è rivolta sempre verso il centro O.
- direzione costante
- modulo $\propto$ distanza dal centro.



se comprimo la molla $l < l_0$ $x = (l - l_0)$

e se non avessimo molla fissa?



$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$

$\vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0$

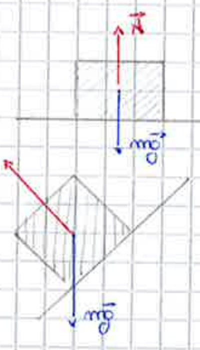
$\vec{F}_4 + \vec{F}_1 = 0$ perché è fermo

se voglio accorciare la molla da tutte e due le parti devo applicare Kx da una parte e Kx dall'altra.

FORZE VINCOLARI:

Un vincolo è un corpo o un sistema di corpi che limitano il moto di un'altro corpo. → limitazione di volume (archeranni) → variazione di traiettoria (altranni)

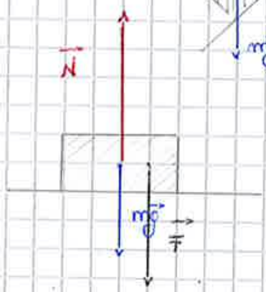
I) Forza Normale:



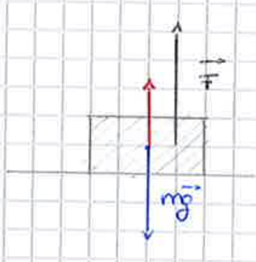
è una forza sempre $\perp$ alla superficie ma non sempre uguale alla forza peso.

↓

basta infatti cambiare le condizioni di forza applicata.



i corpi non si muovono



$\sum \vec{F} = 0 \Longrightarrow \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F} = 0$

$N\hat{j} - mg\hat{j} - F\hat{j} = 0$

$\hat{j}(N - mg - F) = 0$

$N = mg + F > mg$

$N + F - mg = 0 \Longrightarrow N = mg - F < mg$

$\sum \vec{F} = 0$

La normale è responsabile della sensazione di peso ⟶ la normale viene percepita sulla pianta del piede.

ma se fossimo accelerati verso l'alto? $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$

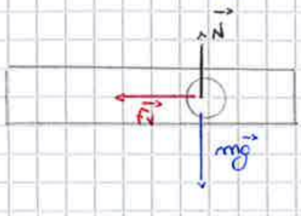
$N - mg = ma$

$N = m(g + a)$

forza di attrito dinamico: $f_K = \mu_K N \quad 0 < \mu_K < 1$

$f_K < f_S$ sempre.

Attrito viscoso: ci sono delle limitazioni alla legge $\vec{f_V} = -b\vec{v}$ 1) il corpo deve essere sferico.



$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$\vec{f_V} = m \cdot \vec{a}$

$-b\vec{v} = -b v_x \hat{i}$

$-b v_x \hat{i} = m \dfrac{dv_x}{dt} \hat{i}$

$\dfrac{dv_x}{dt} + \left(\dfrac{b}{m}\right) v_x = 0$ → K moto esponenzialmente smorzato.

$v_x = v_{0x} - \dfrac{b}{m}(x - x_0)$

$v_x(t) = v_0 \exp\{-Kt\}$

ma se il corpo cade in un mezzo viscoso?

$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$\vec{f_V} + m\vec{g} = m \cdot \vec{a}$

$mg - f_V = m \cdot a$

$mg - bv = m \cdot a \Longrightarrow -bv + mg = m \dfrac{dv}{dt}$

$\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{b}{m} v = g$. equazione differenziale.

o. $\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{b}{m} v = 0 \longrightarrow v(t) = A e^{-b/m\, t}$ $\longrightarrow v(t) = \dfrac{mg}{b} + A^{-b/m\, t} \longrightarrow A = -\dfrac{mg}{b}$

soluzione particolare: $v = \dfrac{mg}{b}$

$v(t) = \dfrac{mg}{b}\left(1 - e^{-b/m\, t}\right) \longrightarrow$ tende a raggiungere un valore limite

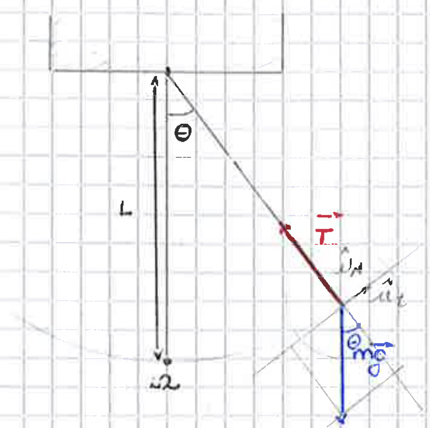
macroscopicamente dato che la forza di attrito viscoso dipende da $\vec{v}$ essa aumenta finché non si arriva ad un punto in cui la f_V = forza di caduta.

caduta in aria: $f_V = \dfrac{1}{2} D \rho A v^2$

$v_L = \sqrt{\dfrac{2mg}{D\rho A}}$

minore è l'area, maggiore sarà la vel. limite.

Pendolo: il vincolo è la fune. → ci sono entrambe le componenti dell'accelerazione.



$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

① $\hat{u}_N$: $\; + T - mg\cos\theta = m a_c$

② $\hat{u}_t$: $\; - mg\sin\theta = m a_T$

① $T = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{L}$ → la tensione T cambia nel tempo ma è max se $\theta = 0$.

② $-g\sin\theta = a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$

$\frac{d^2s}{dt^2} + g\sin\theta = 0$ ⟹ $\frac{d^2s}{dt^2} + g\sin\frac{s}{L}$ oppure $\frac{d^2\theta}{dt^2} + (g\sin\theta)/L = 0$.

$s = R\theta \rightarrow \theta = \frac{s}{R}$

per piccole oscillazioni $\sin\theta \sim \theta$ $\therefore$ $g/L = \omega^2$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

$\theta(t) = \theta_{MAX}\sin(\omega t + \varphi)$

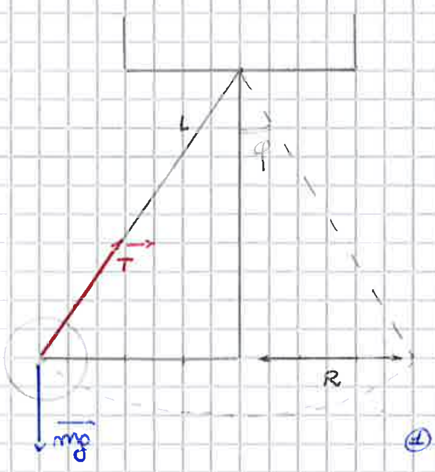
se suppongo $\theta = 0$ a $t = 0$ ⟹ $\theta_{MAX}\sin\varphi = 0$

→ $\varphi = 0$

$\theta(t) = \theta_{MAX}\sin(\omega t)$.

$s(t) = s_{MAX}\sin(\omega t)$.

Pendolo conico: la velocità deve essere legata direttamente all'angolo.



$R = L\sin\varphi$ coordinate cilindriche.

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$

① $\hat{k}$: $\; T\cos\varphi - mg = 0$

② $\hat{u}_r$: $\; -T\sin\varphi = m\frac{v^2}{R}$

① $T = \frac{mg}{\cos\varphi}$ → ② $T\sin\varphi = m\frac{v^2}{R}$

$\cancel{m}g\,tg\,\varphi = \cancel{m}\frac{v^2}{R}$ → $tg\,\varphi = \frac{v^2}{Rg}$

$g\,tg\,\varphi = \frac{v^2}{L\sin\varphi}$ → $g\,tg\,\varphi = \omega v$ → $g\,tg\,\varphi = \omega^2 R$

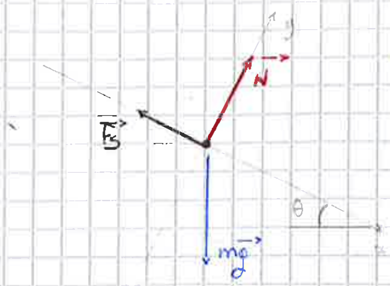
l'angolo è determinato dalla velocità angolare → maggiore ω più grande φ.

$\frac{g}{\cos\varphi} = \omega^2 L$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 135

es. sapendo che $\theta_{critico} = 28°$
$d = 2{,}53\ m$
$t = 3.92\ s.$

determinare i valori μ_s e μ_K.



2 casi: 1) corpo fermo
$$\begin{cases} y: N - mg\cos\theta = 0 \\ x: mg\sin\theta - f_s = 0 \end{cases}$$

$f_s \leq \mu_s N$

se $tg\,\theta \geq \mu_s$ il corpo si stacca
$tg\,\theta_{cr} = \mu_s$

θ_{cr} è un limite quindi punto di discontinuità.

so che $N = mg\cos\theta$

2) corpo che si muove.

$\underbrace{\Delta x}_{d} = \underbrace{v t}_{\to 0} + \frac{1}{2} a t^2$

$a = \frac{2d}{t^2}$ e $f_K = \mu_K N$

$x: mg\sin\theta - \mu_K mg\cos\theta = m a_x.$

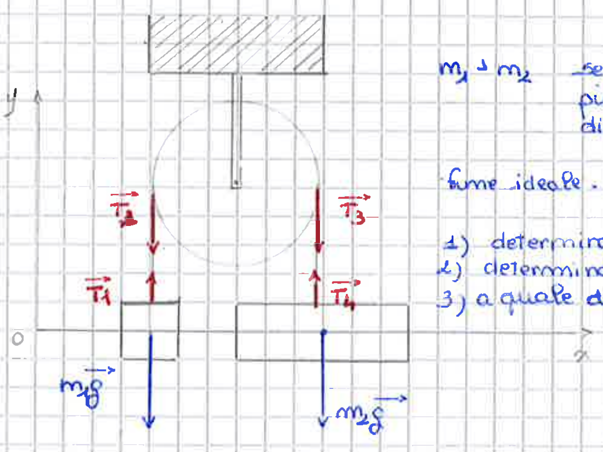
$\mu_K = \frac{\cancel{m}a - \cancel{m}g\sin\theta}{\cancel{m}g\cos\theta} = \frac{a - g\sin\theta}{g\cos\theta} \Longrightarrow \frac{a}{g\cos\theta} - tg\,\theta$

l'accelerazione in un piano inclinato è sempre $a_x = g(\sin\theta_{cr} - \mu_K\cos\theta_{cr})$

$\mu_K = 0.493$

es. macchina di Atwood:

$m_1 = 5.0\ Kg$
$m_2 = 3.0\ Kg$

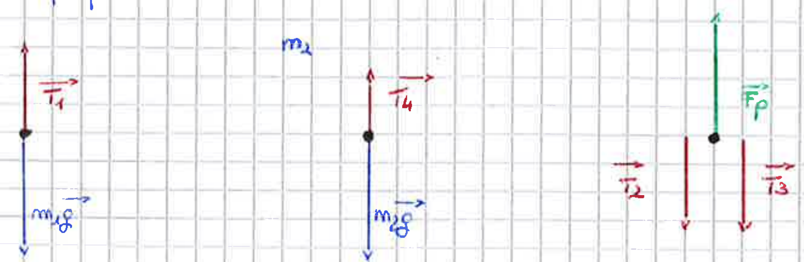


$m_1 > m_2$ se le lascio andare si muoveranno tanto più velocemente quanto maggiore è la differenza delle masse.

fune ideale.

1) determinare a
2) determinare le tensioni
3) a quale distanza si trovano le masse dopo 1 sec.

si studia un corpo per volta:



mettiamo l'asse y lungo la direzione del moto.

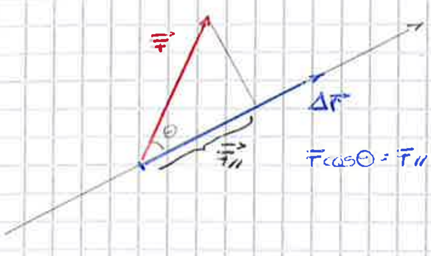
si suppone che la fune non scorra.

$m_1 g - T = m_1 a_y$

Viene definito lavoro $W_{AB} = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = |\vec{F}|\,|\Delta\vec{r}|\cos\theta$ $\quad 0 \le \theta \le \pi/2 \quad W_{AB} \ge 0$

$[W] = N\cdot m = kg\, m s^{-2} m = kg\, m^2 s^{-2} = J$ (Joule)

$1J = 1N \cdot 1m$.



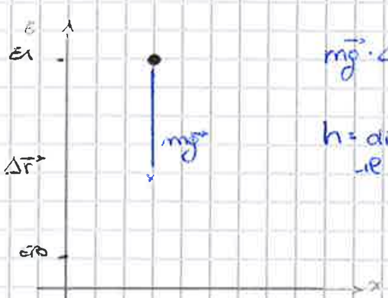
$F\cos\theta = F_{//}$

se $\pi/2 < \theta \le \pi$ $\quad W_{AB} < 0$

$\theta = \pi/2 \quad W_{AB} = 0$

La forza di attrito produce sempre lavoro negativo poiché opposta a $\Delta\vec{r}$

- Una forza costante è la forza peso:

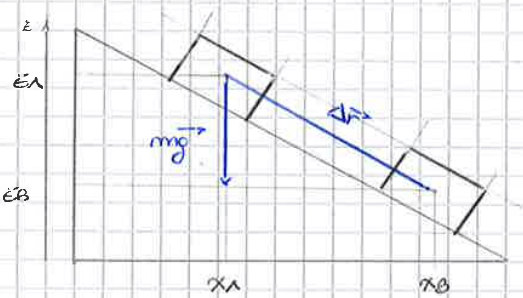


$m\vec{g}\cdot\Delta\vec{r} = W_{AB} = -mg\hat{k}\cdot(z_A - z_B)\hat{k} = mg(z_A - z_B) = mgh$

↳ se $z_B = 0\hat{k}$

h = differenza di quota a cui il corpo è sceso.

Se il corpo va verso il terreno allora il lavoro della forza peso è positivo.



$W_{AB} = m\vec{g}\cdot\Delta\vec{r} = -mg\,\underbrace{\hat{k}\cdot\Delta\vec{r}}_{\Delta r_{//}}$ componente di $\Delta\vec{r}$ lungo $\hat{k}$

$-mg\Delta z = mgh$ il lavoro è identico a quello in cui il corpo cade direttamente.

e se la forza non fosse costante?

La forza cambia nel tempo ma si può scomporre e pensare che in uno spostamento infinitesimo la forza sia costante.

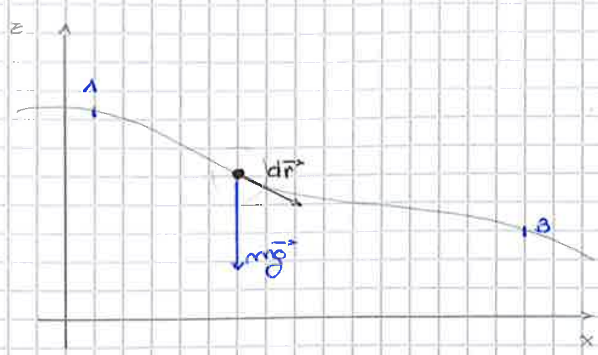
$\vec{F}\cdot d\vec{r} = \delta W$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B F\,dx\,\hat{i} = \int_{x_A}^{x_B} F_x\,dx = \int_{x_A}^{x_B} F_x(x)\,dx$$

questo può servire se bisogna, per esempio, calcolare il valore della forza elastica.

$(F_x\hat{i} + \cancel{F_y\hat{j}} + \cancel{F_z\hat{k}})\,dx\,\hat{i} = F_x\,dx$

In tutti i casi in cui la traiettoria non è rettilinea si usa quella notazione.



$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = mg\hat{k} \int_A^B d\vec{r} \cdot \hat{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mg\,(z_B - z_A) = mgh.$$

il lavoro della forza peso è sempre lo stesso $\longrightarrow$ le forze per le quali il lavoro non dipende dal percorso sono le forze conservative.

POTENZA: ha a che fare con il tempo in cui un lavoro viene compiuto.

$$\langle P \rangle = \frac{W}{\Delta t} \qquad [P] = [W]\cdot[T]^{-1} = [F][\Delta x]\cdot[T]^{-1} = MLT^{-2}\cdot L\cdot T^{-1} = ML^2T^{-3}$$

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{W}{\Delta t} = \frac{\delta W}{dt}$$

non è esattamente una derivata perché il lavoro non è un differenziale esatto $\longrightarrow$ dipende dal tipo di curva.

$$P = \frac{\delta W}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} = F_t v$$

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA (teorema delle forze vive):

F = risultante delle forze.

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B m\,\vec{a}\cdot d\vec{r} = \int_A^B m\,\vec{a}\cdot ds\,\hat{u}_T = \int_A^B m\,(a\cdot\hat{u}_T)\,ds = \int_A^B m\,a_T\,ds = \int v_s\,dv$$

$$\frac{dv_s}{dt}$$

$$= \int_A^B m\,v_s\,dt\cdot\frac{dv_s}{dt} \longrightarrow \int_A^B m\,v_s\,dv_s.$$

$$m\cdot\frac{dv_s}{dt}\cdot ds$$

$$W_{AB} = \int_A^B m\,v_s\,dv_s \longrightarrow \text{integrale unidimensionale in } v_s.$$

$$\int m\,v\,dv$$

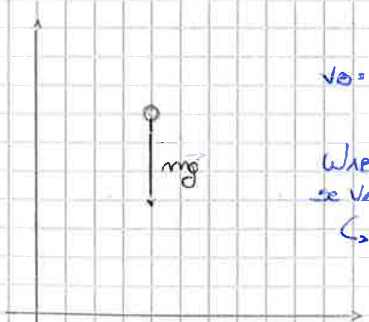
$$\frac{1}{2}mv_s^2\Big|_A^B = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

$$W_{AB} = E_k^B - E_k^A = \Delta E_k$$

se un corpo aumenta la velocità $E_k^A < E_k^B$ il lavoro è positivo.

se il corpo rallenta il lavoro è negativo.

es.



$$v_B = \sqrt{2gh}$$

$$W_{AB} = mgh = E_{k_B} - E_{k_A} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

se $v_A = 0$.

$\hookrightarrow mgh$.

nabla applicato ad un prodotto vettoriale:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = \hat{i}\left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right) - \hat{j}\left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial f_x}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial x}\right)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial f_z}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial z} \wedge \frac{\partial f_z}{\partial x} = \frac{\partial f_x}{\partial z} \wedge \frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x}$$

forza costante: rot $= 0$.

forza elastica: cioè $f_x(x) \longrightarrow$ quindi se derivo in ∂y e ∂z avrò 0.

Forza peso:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{mg} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & -mg \end{vmatrix} = \hat{k} = 0.$$

le forze centrali sono conservative:

- sempre dirette verso lo stesso punto.
- il suo modulo deve dipendere solamente dalla distanza da O.

$$\vec{F}(\vec{r}) = -F(r)\,\hat{u}_r$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (\text{scrivo } d\vec{r} \text{ in coordinate sferiche})$$

$$d\vec{r} = dr\,\hat{u}_r + r\,d\theta\,\hat{u}_\theta + r\sin\theta\,d\varphi\,\hat{u}_\varphi$$

$$W_{AB} = \int_A^B -F(r)\hat{u}_r\,d\vec{r} = -\int_{r_A}^{r_B} F(r)\,dr = -\left[G(r_B) - G(r_A)\right] = G(r_A) - G(r_B)$$

il lavoro della forza centrale dipende solo dalla posizione.

ENERGIA POTENZIALE:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_{pA} - E_{pB} = -\Delta E_p$$

$E_p(x,y,z)$ dipende dalla distanza rispetto ad un centro di riferimento.

$[E_p] = [W] =$ joule.

$W > 0 \Rightarrow E_p$ diminuisce

$W < 0 \Rightarrow E_p$ aumenta

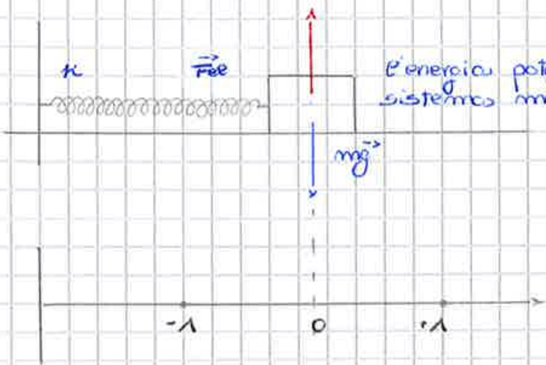
$W_{AB} = E_{pA} - E_{pB} \longrightarrow E_{pB} = E_{pA} - W_{AB}$ bisogna solo scegliere un punto in cui $E_p = 0$.

$$E_p(\vec{r}) = E_p(\vec{r}_c) - \int_{r_c}^{r} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_{pA} - E_{pB}$$

$$\int_A^B \vec{F}\,d\vec{r} = -\int_A^B dE_p \longrightarrow \vec{F}\,d\vec{r} = -dE_p \longrightarrow \vec{F} = -\frac{dE_p}{d\vec{r}}$$

sistema massa-molla



l'energia potenziale ha a che fare con il sistema massa-molla.

$t=0$
$x=A$
$v=0$
$\hookrightarrow E_K^A = 0 \longrightarrow E_K = \frac{1}{2}mv^2$

$$W_{AB}(\vec{F}_{ee}) = \frac{1}{2}K(x_A^2 - x_B^2) = \frac{1}{2}Kx_A^2 - \frac{1}{2}Kx_B^2 = E_{pA} - E_{pB} \Longrightarrow E_p = \frac{1}{2}Kx^2 + \underbrace{c}$$

bisogna fissare "c"

se $c=0 \longrightarrow E_p = 0 \Longleftrightarrow x=0$

$E_p^A = \frac{1}{2}Kx_A^2$

il sistema è conservativo $\Longrightarrow E_m^A = \frac{1}{2}Kx_A^2 + 0 = \frac{1}{2}Kx_A^2 = \frac{1}{2}KA^2$

supponiamo di voler conoscere la v_B in $x_B = \frac{A}{2}$

soluzione con la conservazione dell'energia meccanica.

$E_m^A = E_m^B$

$\frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}Kx_B^2 + \frac{1}{2}mv_B^2$

$mv_B^2 = KA^2 - Kx_B^2 = K\left(A^2 - \frac{A^2}{4}\right) = \frac{K}{m}\cdot\frac{3}{4}A^2 = v_B^2$

$\hookrightarrow$ qui non devo più ricordarmi dell'equazione specifica del moto armonico

soluzione dinamico-cinematica:

$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$

$t=0 \quad x=A$

$x(0) = A\sin\varphi = A \longrightarrow \varphi = \pi/2$

$x(t) = A\sin(\omega t + \pi/2) = A\cos(\omega t)$.

$v(t) = -A\sin(\omega t)\omega$.

ricavo $t(A/2)$ oppure uso:

$\omega^2x^2 + v^2 = A^2\omega^2$

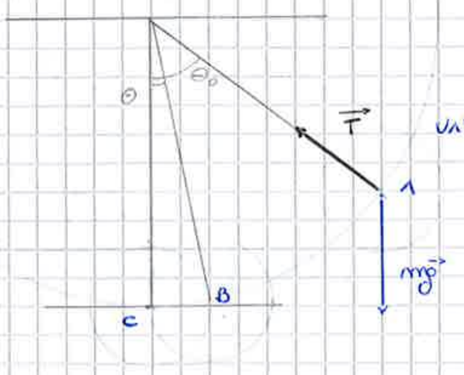
$v^2(x) = \omega^2(A^2 - x^2)$

$v_B^2(A/2) \Longrightarrow \omega^2(A^2 - (A/2)^2) = \frac{3}{4}\omega^2A^2$

ma nel moto armonico semplice: $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$\Longrightarrow \frac{3K}{4m}A^2 = v_B^2$.

PENDOLO (semplice):



$\theta_0 = \theta(t_0)$
$v(0) = ?$

$v_A = 0$

il lavoro totale delle forze $= W^{peso}$ poiché la T è sempre ortogonale allo spostamento.

A) $E_m^A = E_p^A + E_K^A$

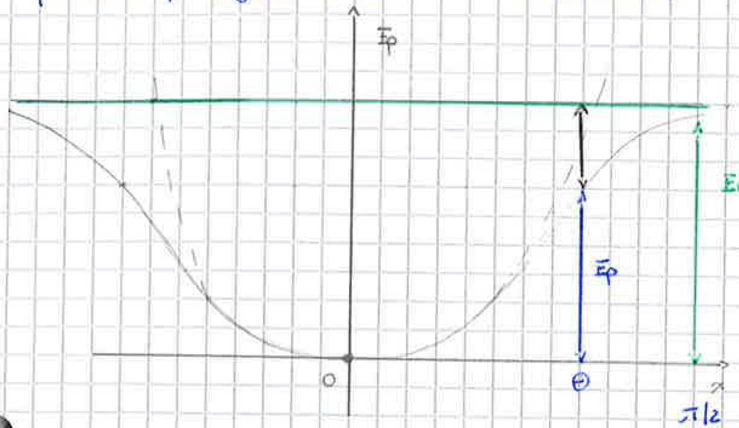
$= mgh_A + 0$.

in $x=0$, $y=0$ } il corpo sta fermo poiché la funzione ha un minimo $\Longrightarrow$ la sua derivata è zero $\longrightarrow$ punto di equilibrio stabile.

$\underset{>0}{F} = m \cdot \underset{>0}{a}$

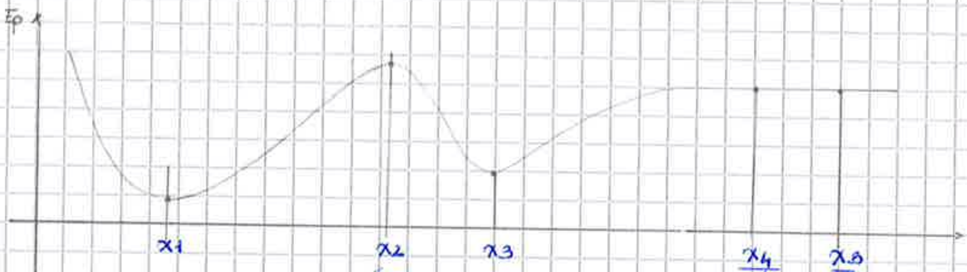
$F_{max} \longrightarrow a_{max}$

- pendolo: $E_p = mgL(1-\cos\Theta)$. $\max \Theta = \pi/2$



affinché il moto sia armonico semplice E_p deve essere una parabola.

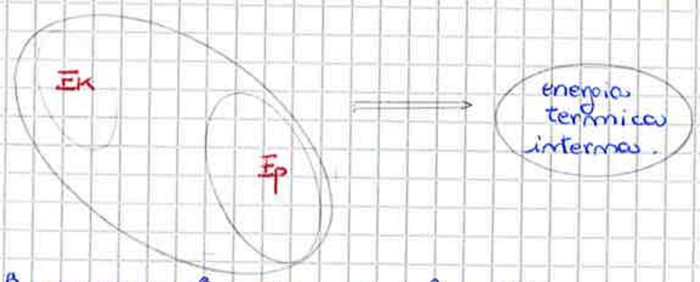
se mi tengo ad angoli molto piccoli localmente l'E_p può essere approssimata alla sua parabola osculatrice.



↳ punto di equilibrio instabile
↳ la forza che si genera tende sempre ad allontanarlo

punti di equilibrio indifferente.

Tutto ciò vale nei sistemi conservativi:
se i sistemi non sono conservativi ? l'E_m viene dissipata.... se ne perde un po'.



$$W_{AB}^{TOT} = \int_A^B \sum_i \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_A^B \sum_i \vec{F}^{cons} \cdot \vec{dr} + \int_A^B \sum_i \vec{F}^{n.c} \cdot \vec{dr} =$$

$$= W_{AB}^{cons} + W_{AB}^{n.c}$$

$$= W_{AB}^{n.c} + E_{pA} - E_{pB}$$

vale il Teorema dell'Energia Cinetica

$E_K^B - E_K^A$

$$W_{AB}^{n.c} = E_K^B - E_K^A - E_p^A + E_p^B$$

$$W_{AB}^{n.c} = (E_K^B + E_p^B) - (E_K^A + E_p^A)$$

$$E_m^B - E_m^A = \Delta E_m < 0$$

$W_{AB}^{n.c}$ = Variazione di energia meccanica ed è sempre < 0.

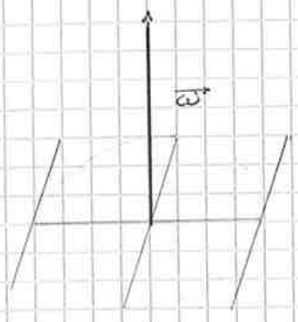
$E_m^c = E_p^c = mg\,(L\sin\theta)$

$W_{nc} = -|f_k|\cdot|\Delta\vec r| = -\mu_k N \cdot L$

$N = mg\cos\theta$

$E_m^c = E_m^B = W_{nc}^{BC} \longrightarrow L = \dots$

Moto Relativo:



$|\vec r| = \text{cost}$

$v = \omega R$

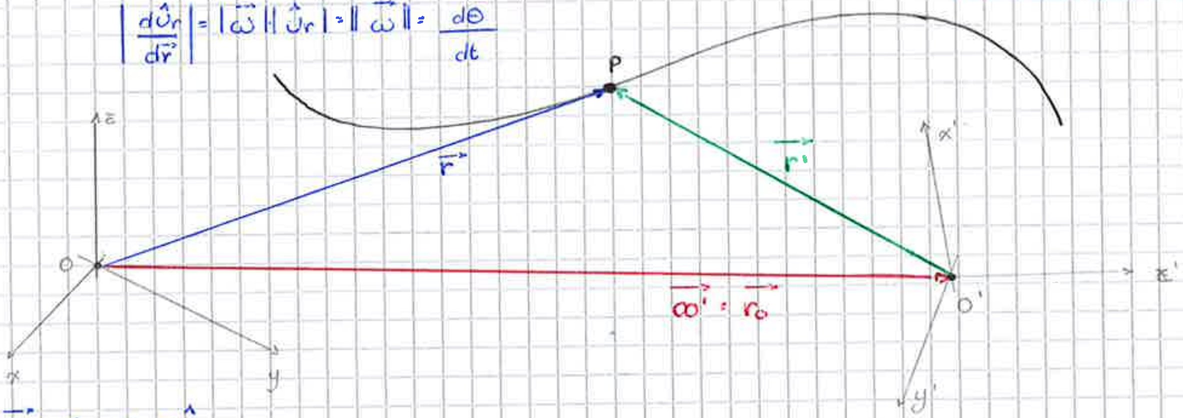
$\vec v = \vec\omega \wedge \vec r$

$\frac{d\vec r}{dt} = \vec\omega \wedge \vec r$ si ha un vettore che cambia in direzione ma non in verso.

$$\Longrightarrow \frac{d\hat u_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat u_\theta$$

$$\frac{d\hat u_r}{d\vec r} = \vec\omega \wedge \hat u_r$$

$$\left|\frac{d\hat u_r}{d\vec r}\right| = |\vec\omega|\,|\hat u_r| = \|\vec\omega\| = \frac{d\theta}{dt}$$



$$\begin{cases} \vec r = x\hat i + y\hat j + z\hat k \\ \vec r\,' = x'\hat i' + y'\hat j' + z'\hat k' \\ \vec r_0 = x_0\hat i + y_0\hat j + z_0\hat k \end{cases}$$

$$\boxed{\vec r = \vec r_0 + \vec r\,'}$$

calcoliamo la velocità di P rispetto ad O.

$$\vec v = \frac{d\vec r}{dt} = \frac{d}{dt}(x\hat i + y\hat j + z\hat k) = \frac{dx}{dt}\hat i + \frac{dy}{dt}\hat j + \frac{dz}{dt}\hat k$$

velocità di P rispetto ad O'.

$$\vec v\,' = \frac{d\vec r\,'}{dt} = \frac{d}{dt}(x'\hat i' + y'\hat j' + z'\hat k') = \frac{dx'}{dt}\hat i' + \frac{dy'}{dt}\hat j' + \frac{dz'}{dt}\hat k'$$

ora so che $\vec r = \vec r\,' + \vec r_0$

$\vec{a_T} = \vec{a_0} + \alpha \wedge \vec{r'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r'})$ ⟶ ACCELERAZIONE di TRASCINAMENTO.

$\vec{a_{co}} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v'}$ ⟶ ACCELERAZIONE di CORIOLIS.

$\vec{a} = \vec{a'} + \vec{a_T} + \vec{a_{co}}$

se O' non ruota $\Longrightarrow \vec{a_{co}} = 0$

se $\vec{v'} = 0 \longrightarrow \vec{a_{co}} = 0$

come se fosse agganciato.

per O $\Sigma_i \vec{F} = m\vec{a}$ — SRI

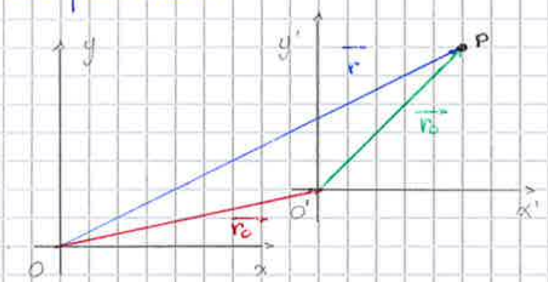
per O' $\Sigma_i \vec{F} \neq m\vec{a}$ — SRNI ma posso dire:

- $\Sigma_i \vec{F} = m \cdot \vec{a} = m(\vec{a'} + \vec{a_T} + \vec{a_{co}})$
- $\Sigma_i \vec{F} - \underline{m(\vec{a_T} + \vec{a_{co}})} = m \cdot \vec{a'}$

oltre alle forze vere mi invento delle "forze apparenti".

casi particolari:

es.

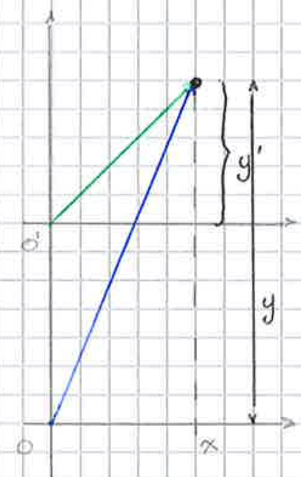


$\vec{v} = \vec{v'} + \cancel{\vec{\omega} \wedge \vec{r'}} + \vec{v_0}$

$\vec{a} = \vec{a'} + \cancel{\vec{a_0}} + \cancel{2\vec{\omega} \wedge \vec{v'}} + \cancel{\alpha \wedge \vec{r'}} + \cancel{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r'})}$

è un sistema di riferimento inerziale

es.



$\vec{r_0} = \vec{v_0} \cdot t$

$\vec{r} = \vec{r'} + \vec{r_0}$

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 = y' + v_0 t \end{cases}$$

$x_0 \to 0$ coordinata dell'ascensore rispetto al suolo.

$$\begin{cases} v_x = v_x' = 0 \\ v_y = v_y' + v_0 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ velocità di caduta + velocità di salita dell'ascensore.

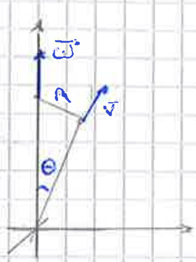
$$\begin{cases} a_x = 0 = a'_x \\ a_y = a'_y \end{cases}$$

per O il moto è di salita perché ha una V iniziale.

$y = h + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$.

$\longrightarrow$ uso la regola della mano destra per verificare la direzione.

$\|\vec{a}\| = \|\vec{\omega} \wedge \vec{v}\| = \omega \cdot v \cdot 1 \longrightarrow v = \omega R \longrightarrow a = \frac{v^2}{R}$

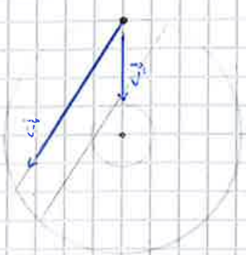


es. giradischi.

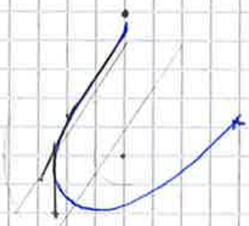
serve ad esemplificare la presenza dell'accelerazione di Coriolis

$\vec{a}_{co} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v'}$ se $\vec{v'} = 0$ essa non c'è

visto ogni volta che un corpo si muove tra punti in cui le v_T sono diverse.



il centro gira più lentamente.

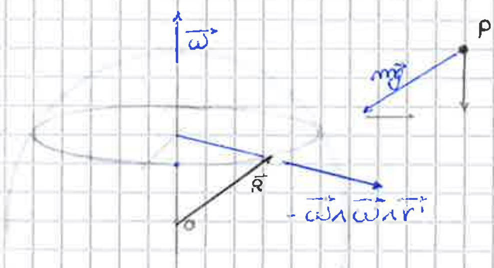


questo è ciò che accade per O con $\vec{v'}$ interna.

se $\vec{v'}$ fosse esterna accadrebbe questo per O'

(DISCO): $\vec{a}' = \vec{a} \underbrace{- \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}'}_{\vec{a}_{centrifuga}} \underbrace{- 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'}_{\vec{a}_{co}}$

· sistema di riferimento terra SNRI O'



$\vec{g} = \vec{a}$

$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}' - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$, $=0$ se il corpo non si muove

$\downarrow$

$\vec{a}' = \vec{g} - \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$

i corpi cadono un po' verso sud (emisfero boreale) o verso nord (emisfero australe).
L'effetto Coriolis è sempre diretto a est.

Gli uragani si formano per effetto Coriolis.

OSCILLAZIONI:

$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \qquad a = -\omega^2 x$

$\hookrightarrow$ moto oscillatorio armonico

equazione caratteristica $\lambda^2 + \omega^2 = 0 \qquad \lambda = \pm i\omega$

$\hookrightarrow$ sol. generale $x(t) = a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t)$

$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) \qquad a = A\cos\phi \qquad b = A\sin\phi$

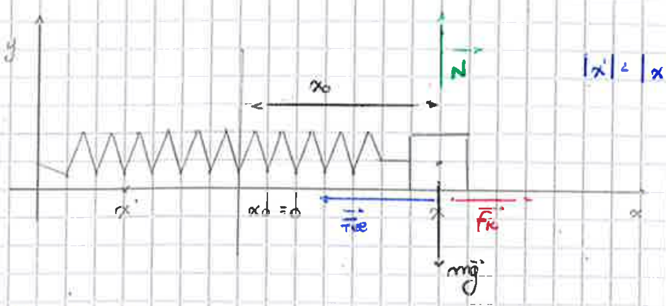
$x(t) = B\cos(\omega t + \psi) \qquad a = -B\sin\psi \qquad b = B\cos\psi$

$\tan\phi = \frac{b}{a} \qquad A^2 = a^2 + b^2$

$B^2 = a^2 + b^2$

$\omega^2 = \frac{k}{m}$

2) moto oriz. con forza di attrito dinamico.



$|x'| < |x|$ poiché un po' di Em si perde.

$f_k = \mu_d N = \mu_d mg$

$$\left.\begin{aligned} -kx + f_k &= ma_x \\ -kx + \mu_d mg &= ma_x \end{aligned}\right\} \quad m\frac{d^2x}{dt} + kx = \mu_d mg \Longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \mu_d g$$

I) $x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$

II) $x_p = \dfrac{\mu_d mg}{k}$

$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) + x_p$

$v(t) = \omega A\cos(\omega t + \phi)$

condizioni al contorno

$x(t=0) = x_0 \wedge v(t=0) = 0$

$x(t) = A\sin\phi + x_p$

$\omega A\cos\phi = 0 \longrightarrow \cos\phi = 0 \longrightarrow \phi = \pi/2$

$A = (x_0 - x_p)$

posso cercare di trovare il secondo punto cui il corpo si arresta.

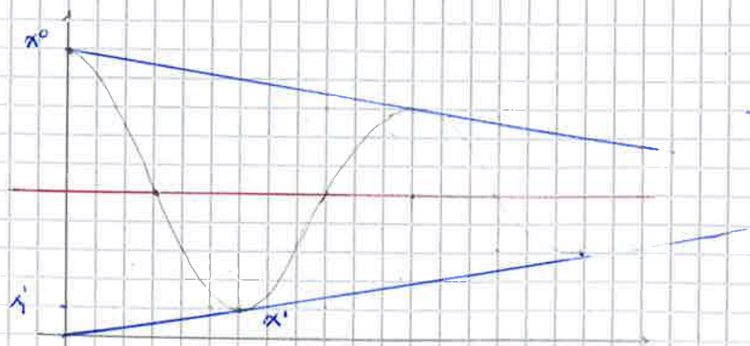
$x(t) = (x_0 - x_p)\cos(\pi/2) + x_p \longrightarrow v(t) = -(x_0 - x_p)\omega\sin(\omega t)$

$v(t') = 0$ $\quad \hookrightarrow \omega t' = n\pi \Longrightarrow t' = \dfrac{n\pi}{\omega}$

1°) $\dfrac{\pi}{\omega} \longrightarrow$ cui la x deve valere $-x'$

$x(t') = (x_0 - x_p)\cos(1) + x_p \Longrightarrow x_p - x_0 + x_p = 2x_p - x_0 = -(x_0 - 2x_p)$

$x' = x_0 - 2x_p$ ad ogni periodo perdo $4x_p$



il corpo si ferma quando

$\vec{F}_{el} < \vec{f}_s$

$kx_n < \mu_s mg \qquad x_n < \dfrac{\mu_s mg}{k}$

moto lineare pseudoperiodico smorzato

$b^2 < 4mK$ condizione di smorzamento debole

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t) + B e^{-\gamma t} \sin(\omega t) =$$

$$= e^{-\gamma t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] =$$

$$= \underbrace{e^{-\gamma t} A_0}_{\text{è l'ampiezza dell'oscillazione}} \underbrace{(\omega t + \phi)}_{\text{funzione considerata pseudoperiodica}}$$

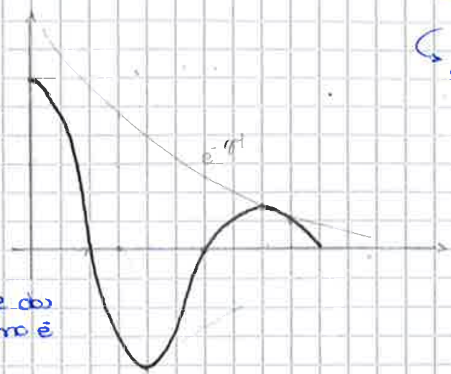
se a $t = 0$ $\quad x(0) = A_0$

$x(0) = e^0 A_0 \sin\phi = A_0$

$\sin\phi = 1$

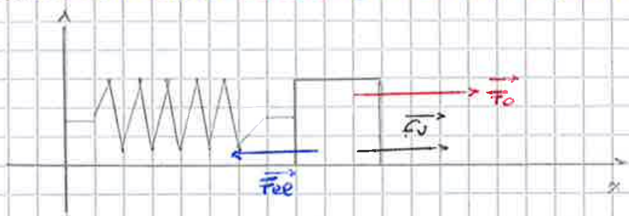
$\phi = \pi/2$

$x(t) = e^{-\gamma t} A_0 \cos(\omega t)$



il tempo che si impiega per andare da un massimo ad un altro massimo è lo PSEUDOPERIODO.

4) oscillatore armonico forzato (F è oscillante) in un fluido viscoso.



$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$-Kx - bv + F_0 \sin(\omega t) = m \cdot a$$

$$-Kx - b\frac{dx}{dt} + F_0 \sin(\omega t) = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{m}\sin(\omega t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\sin(\omega t)$$

$x(t)$ = sol omogenea ass. generale + soluzione particolare.

cerco una soluzione del tipo
$$\left.\begin{aligned} x(t) &= A\sin(\omega t + \phi) \\ \frac{dx}{dt}(t) &= A\omega\cos(\omega t + \phi) \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi) \end{aligned}\right] \rightarrow$$
sostituisco e vedo cosa ottengo.

$$-A\omega^2\sin(\omega t + \phi) + 2\gamma A\omega\cos(\omega t + \phi) + \omega_0^2 A\sin(\omega t + \phi) = \frac{F_0}{m}\sin(\omega t) =$$

$$= A(\omega_0^2 - \omega^2)\sin(\omega t + \phi) + 2\gamma A\omega\cos(\omega t + \phi) = F_0/m \cdot \sin(\omega t) =$$

$$= A(\omega_0^2 - \omega^2)[\sin(\omega t)\cos\phi + \cos(\omega t)\sin\phi] + 2\gamma A\omega[\cos(\omega t)\cos\phi - \sin(\omega t)\sin\phi] = (F_0/m)\sin(\omega t)$$

$$\downarrow$$

$$\sin(\omega t) \underbrace{[A(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\phi - 2\gamma A\omega\cos\phi]}_{F_0/m} + \cos(\omega t) \underbrace{[A(\omega_0^2 - \omega^2)\sin\phi + 2\gamma A\cos\phi\,\omega]}_{0} = \frac{F_0}{m}\sin(\omega t)$$

ora impongo

$$\begin{cases} ① \; A(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\phi - 2\gamma A\omega\sin\phi = \dfrac{F_0}{m} \\ ② \; A(\omega_0^2 - \omega^2)\sin\phi + 2\gamma A\omega\cos\phi = 0 \end{cases}$$

quali sono le condizioni di massimo ampiezza? $A(\omega)$ poiché le altre sono note

$$\frac{dA}{d\omega}=0 \longrightarrow \omega=\sqrt{\omega_0^2-2\gamma^2}<\omega_0$$

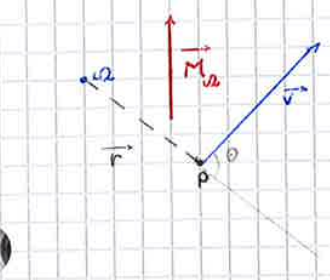
$\exists$ max solo quando $\omega_0^2-2\gamma^2>0 \longrightarrow 2\gamma^2<\omega_0^2 \longrightarrow \gamma^2 \le \omega_0^2$

sono in condizioni di "smorzamento debole".

se $\gamma^2 > \frac{\omega_0^2}{2}$ il max è a $\omega=0$.

MOMENTO di UN VETTORE. si può applicare a tutti i vettori

vettore applicato $(\vec v, P)$

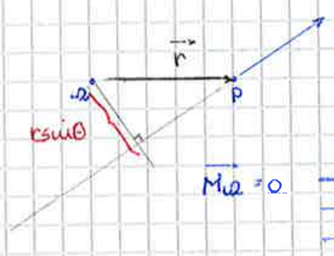


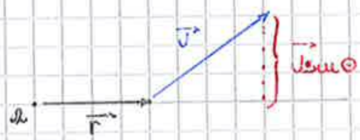
$\vec M_\Omega = \vec r \wedge \vec v$ momento di $\vec v$ rispetto al polo Ω ma non necessariamente è applicato al polo.

$$\|\vec M_\Omega\| = \|r\|\,\|\vec v\|\sin\theta$$

$$\|\vec M_\Omega\| = (r\sin\theta)\,v = v\cdot d(\vec r_v;\Omega)$$

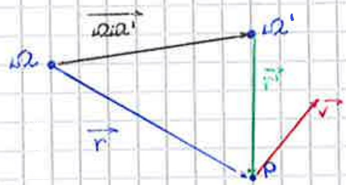
oppure $\vec M_\Omega = (v\sin\theta)\,r = r\cdot v_\perp$





$\vec M_\Omega = 0 \longrightarrow \vec r = 0$
$\longrightarrow \vec v = 0$
$\longrightarrow \vec r \parallel \vec v$

possiamo inoltre dire che il momento di un vettore dipende dal polo.



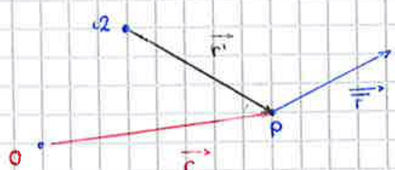
$M_\Omega = \vec r \wedge \vec v$

$M_{\Omega'} = \vec r' \wedge \vec v$

$M_\Omega = \vec r \wedge \vec v = (\vec{\Omega\Omega'} + \vec r') \wedge \vec v = \vec{\Omega\Omega'} \wedge \vec v + \vec r' \wedge \vec v$

$\vec r' \wedge \vec v = M_{\Omega'}$: ogni volta che cambio il polo, spunta un elemento in più.

Momento di una forza (torsione).



$\vec M_\Omega = \vec r' \wedge \vec F$

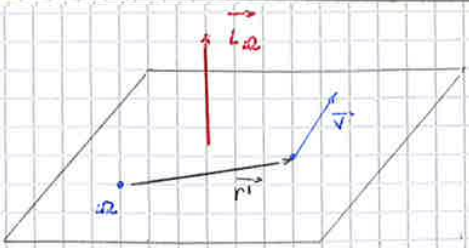
$\vec M_\Omega = 0$: $\vec F$ è in Ω, $\vec F = 0$, $\vec F \parallel \vec r'$

$$[M_\Omega] = L[F] = LMLT^{-2} = ML^2T^{-2} = Nm.$$

e se ci sono più forze applicate allo stesso punto?

$$\vec M_\Omega = \vec r' \wedge \vec F_1 + \vec r' \wedge \vec F_2 + \dots \vec r' \wedge \vec F_n$$
$$= \vec r' \wedge (\vec F_1 + \vec F_2 + \dots \vec F_n) = \vec r' \wedge \sum \vec F$$

la risultante dei momenti = momento del risultante delle forze.



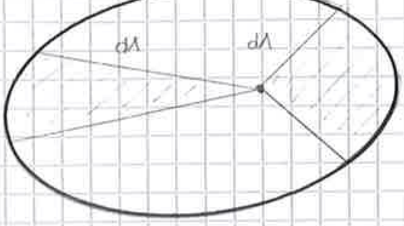
L_Ω è costante anche in modulo:

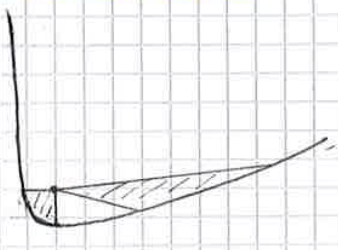
$$L_\Omega = m\, r'^2 \omega = m r'^2 \frac{d\theta}{dt}$$

I) se $\vec{r'} = cost \longrightarrow$ moto circolare attorno ad Ω.

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega = cost$$

II) se $\vec{r'}$ non è costante $\longrightarrow$ la velocità areale è costante





$$\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = \underbrace{\vec{v}_\Omega \wedge \vec{p}} + \sum_i \vec{M}_\Omega$$

$$\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = \sum_i \vec{M}_\Omega \qquad \sum_i \vec{M}_\Omega = \overset{0}{cost} \longrightarrow \frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = 0 \longrightarrow \vec{L}_\Omega = cost \Longrightarrow$$

1) moto piano
2) velocità areale costante.

$d\vec{r} = \vec{v}\,dt$

ma $dA = \frac{1}{2} \vec{dr} \wedge \vec{r'}$

$\vec{a}, \vec{b}$

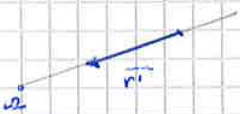
$\| \vec{a} \wedge \vec{b} \| = ab \sin\theta$

$$dA = \frac{1}{2} \| \vec{r'} \wedge \vec{dr} \| = \frac{1}{2} \| \vec{r'} \wedge \vec{v}dt \| = \frac{1}{2} r' v_\perp dt \longrightarrow \frac{dA}{dt} = \text{velocità areale} = \frac{1}{2} r' v_\perp = \frac{1}{2} r'^2 \omega.$$

$$\| \vec{L}_\Omega \| = \| \vec{r'} \wedge \vec{p} \| = \| \vec{r'} \wedge m\vec{v} \| = m \| \vec{r'} \wedge \vec{v} \| = m r' v_\perp$$

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r' v_\perp = \frac{\| \vec{L}_\Omega \|}{2m}}$$ è tutto costante se $\vec{L}_\Omega$ si conserva

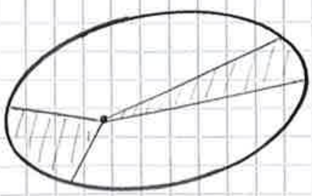
se il corpo è sottoposto solo a forze centrali si ha $L_\Omega = cost$



$$\vec{F}(r') = F(r')\, \hat{u}_r$$

$$\vec{M}_\Omega = \vec{r'} \wedge \vec{F}(r') = r' \hat{u}_r \wedge (-F(r'))\hat{u}_r = 0 \Longrightarrow L_\Omega = cost.$$

i pianeti hanno momento angolare costante:
I) le orbite sono piane.
II) velocità areale costante



$$\vec{L}_\Omega = \vec{r'} \wedge m\vec{v}$$

$$\| \vec{L}_\Omega \| = m r' v_\perp = m r'^2 \omega$$

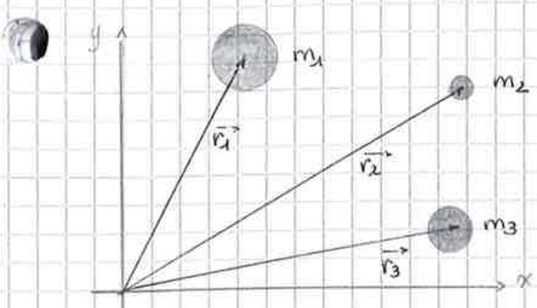
$$\frac{dA}{dt} = \frac{A}{T} = \frac{\| \vec{L}_\Omega \|}{2m} \longrightarrow T = \frac{2m}{L} \cdot A$$

T ↳ periodo orbitale

2ª LEGGE di KEPLERO.

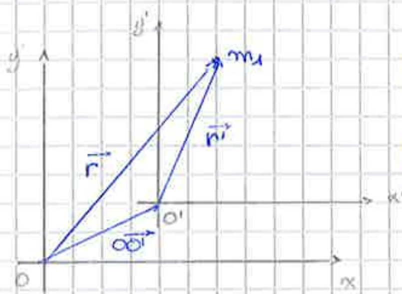
ma $\vec{r} = \sum_i \vec{r_i}$?

si definisce il punto CM (centro di massa) nel quale si può pensare concentrata la massa e serve per scrivere le eq. come su un corpo puntiforme.



$$\vec{r_{CM}} = \frac{\sum \vec{r_i} m_i}{\sum_i m_i} = \frac{r_1 m_1 + r_2 m_2 + r_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_1}{M}\vec{r_1} + \frac{m_2}{M}\vec{r_2} + \frac{m_3}{M}\vec{r_3}$$

Il CM sta più vicino ai corpi più massivi non necessariamente coincide con i punti del sistema.
la posizione del CM non dipende dal sistema di riferimento.



per O : $\vec{r_{CM}} = \dfrac{\sum_i m_i \vec{r_i}}{\sum_i m_i}$

per O' : $\vec{r'_{CM}} = \dfrac{\sum_i m_i \vec{r'_i}}{\sum_i m_i}$

$$\vec{r'_i} = \vec{r_i} - \vec{OO'}$$

$$\vec{r'_{CM}} = \frac{1}{\sum_i m_i} \sum_i m_i (\vec{r_i} - \vec{OO'}) = \frac{1}{\sum_i m_i} \sum_i m_i \vec{r_i} - \frac{\cancel{\sum_i m_i}\, \vec{OO'}}{\cancel{\sum_i m_i}} = \vec{r_{CM}} - \vec{OO'}$$

Velocità del centro di massa:

$$\vec{v_{CM}} = \frac{d}{dt}\vec{r_{CM}} = \frac{\sum_i m_i}{\sum_i m_i} \cdot \frac{d\vec{r_i}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \vec{v_i}}{\sum m_i}$$

1° Teorema del Centro di Massa:

$$M\vec{v_{CM}} = \sum m_i \vec{v_i} \longrightarrow \vec{P} = \sum \vec{p_i} \Rightarrow \vec{P} = M\vec{v_{CM}}$$ quantità di moto totale del sistema.

accelerazione del centro di massa.

$$\vec{a_{CM}} = \frac{d\vec{v_{CM}}}{dt} = \frac{\sum m_i \vec{a_i}}{\sum m_i}$$

2° Teorema del Centro di Massa:

$$M\vec{a_{CM}} = \sum (m_i \vec{a_i}) \longrightarrow M\vec{a_{CM}} = \sum_i \vec{R_i} = \sum \vec{F}^{ext}$$

$$\sum_i \vec{F}^{ext} = M\vec{a_{CM}}$$

Prima equazione cardinale:

$$\sum \vec{F}^{ext} = M\vec{a_{CM}} = M\frac{d\vec{v_{CM}}}{dt} = \frac{d}{dt}(M\vec{v_{CM}}) = \frac{d}{dt}\vec{P}$$

$\sum_i \vec{F}^{ext} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$ è più generale poiché la massa può variare.

se $\sum \vec{F}^{ext} = 0$ $\longrightarrow$ $\sum_i \vec{F}^{ext} = 0$ ma $\vec{F}_i^{ext} \neq 0$

$\longrightarrow$ non ci sono $\vec{F}^{ext}$ isolato.

$P_{x_i} = P_x^f \qquad \vec{F}^{ext} = 0$

$\cancel{M} v_{cm_x}^i = \cancel{M} v_{cm_x}^f \longrightarrow v_{cm_x}^i = v_{cm_x}^f$

$$x_{cm} = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B} = \frac{m_B \, d/2}{m_1 + m_2} = \frac{m_B}{m_A + m_B} \, d/2 .$$

fare per esercizio il problema del cannone e del pacco

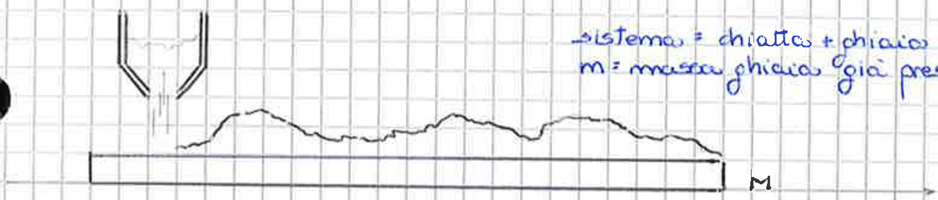
es. (sistema con massa variabile).

chiatta $M \quad \vec{v}_0$

$\frac{dm}{dt} = K \longrightarrow$ massa di pietrisco che viene scaricata al secondo sulla chiatta.

$(t=0)$ chiatta vuota

Ob. determinare il moto della chiatta.



sistema = chiatta + ghiaia (sulla chiatta).
m = massa ghiaia già presente sulla chiatta

$P_y = 0 \qquad P_x = \text{cost}$

$P_x(t) = P_x(t+dt)$.

$[M + m(t)] \cdot v(t) = [M + m(t+dt)] \cdot v(t+dt)$

$[M + m(t)] \cdot v(t) = [M + m(t) + dm] \cdot [\cancel{v(t+dt)}\; v(t) + dv]$

} è l'approccio standard che si usa quando si ha massa variabile

$(\cancel{M+m}) v = (\cancel{M+m}) v + M dv + m dv + dm \cdot v + \cancel{dm\, dv}$

sviluppo ma trascuro gli infinitesimi di secondo ordine.

$0 = M dv + m dv + dm\, v$

$0 = (M+m) dv + dm\, v$

$(M+m) dv = -dm\, v$

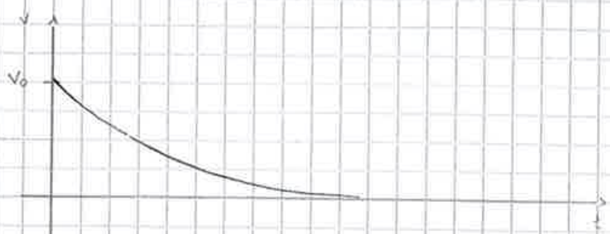
$\frac{dv}{v} = \frac{-dm}{m(t)+M}$ equazione differenziale in cui c'è dipendenza dal tempo.

$$\int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{dv}{v} = \int_{t_0}^{t} \frac{-K dt}{m(t)+M} \Longrightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{dv}{v} = -\int_{t_0}^{t} \frac{K dt}{M+Kt}$$

$$\ln \frac{v(t)}{v_0} = -\int_0^{Kt} \frac{d(Kt)}{M+mt} \longrightarrow -\ln \frac{M+Kt}{M}$$

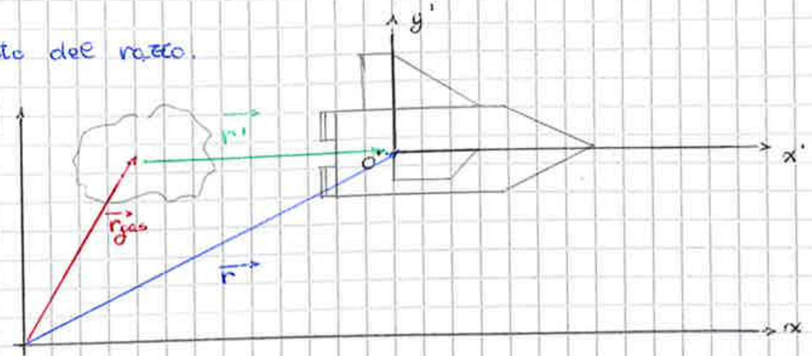
$v(t) < v_0$ la velocità della chiatta diminuisce

$v(t) = \frac{v_0 M}{M + Kt}$



la velocità va a zero all'infinito.

- es. moto del razzo.



problema di sistema di riferimento.

il sistema di riferimento è razzo + gas espulso in dt.

$\vec{P}(t) = M(t)\,v(t)$

$\vec{P}(t+dt) = M(t+dt)\,v(t+dt) + dm\,\vec{v}_g$

se $\vec{r}_g = \vec{r} + \vec{r}_g' \longrightarrow \vec{v}_g = \vec{v} + \vec{v}_g'$

$dM < 0$ variazione della massa del razzo.

$dm > 0$ massa del gas espulso

$\|dM\| = \|dm\|$

$\vec{P}(t+dt) = (M+dM)(\vec{v}+d\vec{v}) + dm\vec{v} + dm\vec{v}_g'$

$P = cost.$

$\sum \vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$

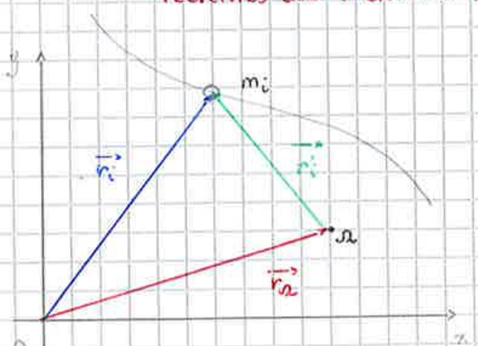
$\sum \vec{F}^{ext}dt = d\vec{P} \longrightarrow \underbrace{(M-dm)(v+dv) + dm\,v + dm\,v_g}_{P(t+dt)} - \underbrace{M\cdot v}_{P(t)}$

$\sum \vec{F}^{ext}dt = \cancel{Mv} - dm\,v + M\,dv + dm\,v' + dm\,v_g - \cancel{Mv} = M\,dv + dm\,v_g'$

$\sum \vec{F}^{ext} = \frac{M\,dv + dm\,v_g'}{dt}$

$M\frac{dv}{dt} = \sum \vec{F}^{ext} - \frac{dm}{dt}v_g' \longrightarrow$ spinta, $\vec{v}'$ è al contrario.

Teorema del Momento Angolare (per i sistemi).



$\vec{\ell}_\Omega = \vec{r}_i' \wedge \vec{p}_i$

$\vec{L}_\Omega = \sum_{i=1}^{m} \vec{r}_i' \wedge \vec{p}_i$

$\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{r}_i'}{dt} \wedge \vec{p}_i + \sum_i \vec{r}_i' \wedge \frac{d\vec{p}_i}{dt}$

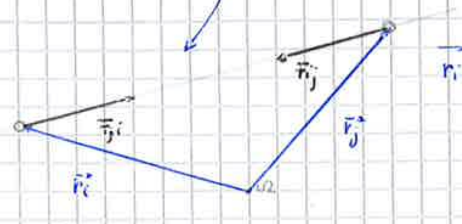
$\frac{dL_\Omega}{dt} = \sum \frac{d}{dt}(r_i - r_\Omega) \wedge p_i + \sum \vec{r}_i' \wedge R_i$

$= \sum \underbrace{\vec{v}_i \wedge \vec{p}_i}_{0} - \sum \vec{v}_\Omega \wedge \vec{p}_i + \sum \vec{r}_i \wedge \vec{R}_i$

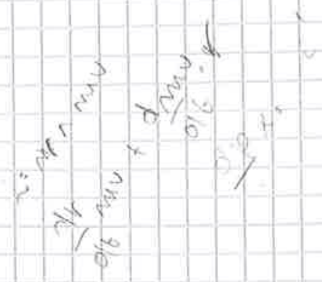
$R_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} + \sum \vec{F}^{ext}$

$= (-\vec{v}_\Omega \wedge \sum \vec{p}_i) + \underbrace{\sum \vec{r}_i' \wedge \sum_{j\neq i} \vec{F}_{ji}} + \sum \vec{r}_i' \wedge \sum \vec{F}_{ext}$

$= -\vec{v}_\Omega \wedge \vec{P} + \sum \vec{M}_\Omega^{ext}$



$\vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ji} + \vec{r}_j \wedge \vec{F}_{ij} = 0$



$\vec{r}'_{CM} = \dfrac{\sum_i m_i \vec{r}'_i}{\sum_i m_i} = 0 \longrightarrow \sum_i m_i \vec{r}'_i = 0$

II) $\vec{v}'_{CM} = \dfrac{\sum m_i \vec{v}'_i}{\sum m_i} = 0 \longrightarrow \sum m_i \vec{v}'_i = 0$

$\vec{P}' = 0$

III) i-esimo $\sum \vec{F}_i + m_i \vec{a}_o = m\vec{a}'_i$

$\vec{a}_o = \vec{a}_{CM}$

$\underbrace{\sum \vec{F}_i}_{R_i} - m_i \vec{a}_{CM} = m_i \vec{a}'_i$ poiché gli assi di CM non ruotano

$\sum \vec{F}^{ext} - \sum m_i \vec{a}_{CM} = \sum m_i \vec{a}'_i$

$\sum \vec{F}^{ext} - M \vec{a}_{CM} = 0$

SRI $\sum \vec{F}^{ext} = M \vec{a}_{CM}$

SRCM $\sum \vec{F}^{ext} = M \vec{a}_{CM}$

IV) $\vec{M}'_{CM} = \sum_i \vec{r}'_i \wedge (\vec{R}_i - m_i \vec{a}_{CM}) =$ $\Omega = CM$

$= \sum \vec{r}'_i \wedge \vec{R}_i - \sum_i \vec{r}'_i \wedge m_i \vec{a}_{CM} =$

$= \vec{M}_{CM} - \sum (\underbrace{m_i \vec{r}'_i}_{\to 0}) \wedge \vec{a}_{CM}$

$\underset{SRCM}{\vec{M}'_{CM}} = \underset{SRI}{\vec{M}_{CM}}$ non mi devo preoccupare delle forze di inerzia

V) $\sum \vec{M}_{\Omega}^{ext} = \dfrac{d\vec{L}_{\Omega}}{dt} + \underbrace{\cancel{\vec{v}_{\Omega}} \wedge \vec{P}_i}_{\to 0}$ $v_{\Omega} = 0$ in SRCM.
↳ se il polo è il CM

VI) $\vec{L}_{CM} = \sum \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i$

$= \sum \vec{r}'_i \wedge m_i (\vec{v}'_i + \vec{v}_{CM}) =$

$= \sum \vec{r}'_i \wedge [m_i \vec{v}'_i + m_i \vec{v}_{CM}] = \underbrace{\sum \vec{r}'_i \wedge m_i \vec{v}'_i}_{\vec{L}'_{CM}} + \sum \vec{r}'_i \wedge \underbrace{m_i}_{\to 0} \vec{v}_{CM}$

$\vec{L}_{CM} = \vec{L}'_{CM}$

se $\sum \vec{M}_{CM}^{ext} = \dfrac{d\vec{L}_{CM}}{dt}$ rimane uguale anche in SRCM.

• es. (sistema di punti).

$M = 2500$ kg
$m = 5$ kg

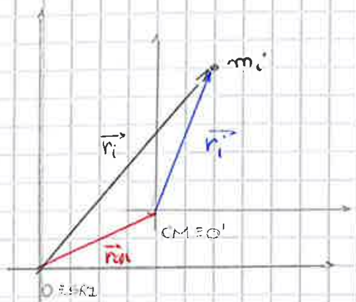
$v_0 = 300$ m/s

il sistema è fatto da cannone + proiettile.
ci sono $\vec{F}^{ext}$

$\sum \vec{F}_y^{ext}$ sono lungo y $\longrightarrow$ non c'è moto

$\sum \vec{F}_x^{ext} = 0 \longrightarrow \dfrac{dP}{dt} \longrightarrow P_x = \text{cost}$

TEOREMI di KÖNIG



$\vec{L}_O = \sum \vec{r_i} \wedge m_i \vec{v_i}$ ma $\vec{r_i} = \vec{r}_{CM} + \vec{r_i}'$, $\vec{v_i} = \vec{v}_{CM} + \vec{v_i}'$

$\vec{L}_O = \sum_i (\vec{r}_{CM} + \vec{r_i}') \wedge m_i (\vec{v}_{CM} + \vec{v_i}') =$

$= \sum_i \vec r_{CM}\wedge m_i \vec v_{CM} + \sum \vec r_{CM}\wedge m_i \vec v_i' + \sum \vec r_i' \wedge m_i \vec v_{CM} + \sum \vec r_i' \wedge m_i \vec v_i' =$

$= \vec r_{CM} \wedge (\sum_i m_i) \vec v_{CM} + \vec r_{CM} \wedge (\underbrace{\sum m_i \vec v_i'}_{\vec P' = 0}) + (\sum m_i \vec r_i') \wedge \vec v_{CM} + \sum \vec r_i' \wedge m_i \vec v_i' =$

$= \vec r_{CM} \wedge M \vec v_{CM} + 0 + 0 + \vec L'_{CM} =$

$= \vec r_{CM} \wedge \vec P' + \vec L'_{CM}$

$\vec L_O = \vec r_{CM} \wedge \vec P + \vec L'_{CM}$ il momento angolare calcolato rispetto al polo O è come se ci fossero 2 termini 1) $^O L$ come se la massa fosse in CM.

2) L rispetto a CM

E_K (rispetto al SRI).

$E_K = \sum \frac12 m_i v_i^2 = \sum_i \frac12 m_i (\vec v_i\cdot \vec v_i) = \frac12 \sum m_i (\vec v_{CM} + \vec v_i')\cdot(\vec v_{CM}+\vec v_i') =$

$= \frac12 \sum m_i [(\vec v_{CM}\cdot\vec v_{CM}) + (\vec v_i'\cdot \vec v_{CM}) + (\vec v_{CM}\cdot \vec v_i') + (\vec v_i'\cdot\vec v_i')]$

$= \frac12 \sum m_i [v_{CM}^2 + 2 \vec v_i' \vec v_{CM} + v_i'^2] =$

$= \frac12 (\sum m_i) v_{CM}^2 + \frac{1}{\cancel{2}} (\sum m_i \cancel{\vec v_i'}) v_{CM} + \frac12 \sum m_i v_i'^2 =$

$= \frac12 M v_{CM}^2 + 0 + \frac12 \sum m_i v_i'^2 =$

$= \underbrace{\frac12 M v_{CM}^2}_{E_K \text{ del CM}} + \underbrace{E_K'}_{E_K \text{ rispetto al CM o "intrinseca"}}$

• es.

$m_1 = m_2 = m$
$\|\vec v_1\| = \|\vec v_2\| = v$

$\vec L_O = \vec r_1 \wedge m_1 \vec v_1 + \vec r_2 \wedge m_2 \vec v_2 =$
$= 0$

$\vec L_{CM} = \vec L_O = 0$ $\vec r_{CM} \wedge \vec P = 0$

$E_{K_O} = \frac12 m_1 v_1^2 + \frac12 m_2 v_2^2 = mv^2$ $E_K' = mv^2$

$E_{K,CM} = \frac12 M v_{CM}^2 = 0$

$\vec L_O = \vec r_{CM} \wedge \vec P + \vec L'_{CM}$

$E_K = E_{K,CM} + E_K'$

se ho più forze applicate in punti diversi?

$$\sum \vec{M}_O = \sum \vec{r}_i \wedge \vec{R}_i$$

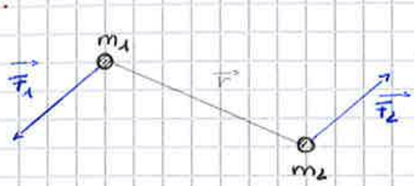
$$\sum \vec{M}_{\Omega'} + \vec{\Omega\Omega'} \wedge \sum \vec{R}_i$$

$$\sum \vec{M}_O = \sum \vec{M}_{\Omega'} + \vec{\Omega\Omega'} \wedge \sum \vec{F}^{ext}$$

il momento delle forze dipende dal polo che scelgo.

se globalmente la somma è zero allora posso calcolare il momento rispetto a qualunque polo!

Coppia di Forze:



$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

$\sum \vec{F}^{ext} = 0$

$$M_O = 0 + m_1 \wedge \vec{F}_2 = F_2 b\hat{k} = Fb\hat{k}$$

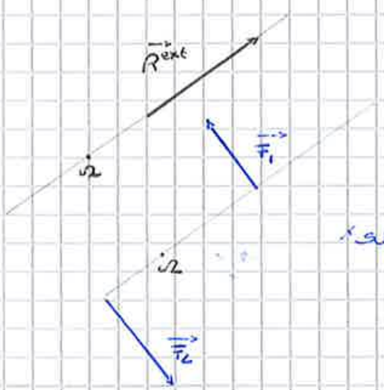
perché pongo una forza applicata al polo $\Longrightarrow$ posso farlo poiché $\sum \vec{F}^{ext} = 0$.

$\vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2 = \hat{k}\vec{F}_2$ b = braccio della coppia.

In generale $\sum \vec{F}^{ext} = \vec{R}^{ext}$ non posso calcolare $\sum \vec{M}^{ext}$

ci sono però alcuni casi in cui capita che se $\sum \vec{F}^{ext} = \sum \vec{M}^{ext}$ è possibile trovare un

$$\vec{r}_c \,/\, \sum \vec{M}_O^{ext} = \vec{r}_c \wedge \sum \vec{F}^{ext}$$

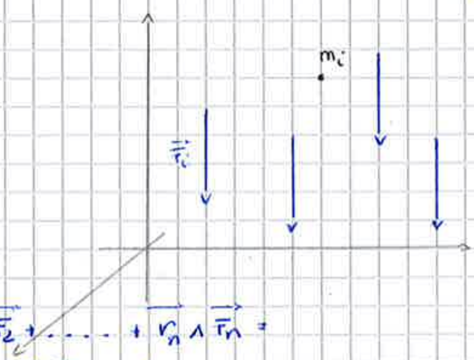


$$\vec{M}_\Omega = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2 = \sum \vec{M}^{ext}$$

posso separare la parte della risultante da quella delle forze.

supponiamo di avere un sistema di $\vec{F}_{//}$.

$\vec{F}_i = F_i \hat{u}$



$$\sum \vec{M}_O = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2 + \dots + \vec{r}_n \wedge \vec{F}_n =$$

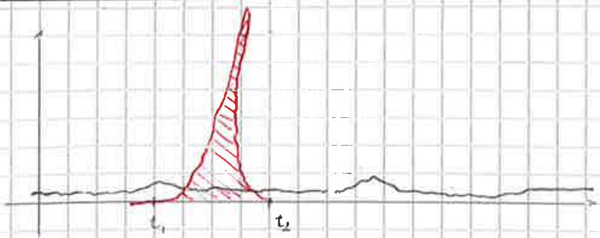
$$= \sum \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = \sum \vec{r}_i \wedge F_i \hat{u}$$

$$\sum \vec{M}_O = \sum F_i \vec{r}_i \wedge \hat{u} \qquad \vec{R} = \sum \vec{F}_i = \left(\sum F_i\right)\hat{u}$$

supponiamo che esista $\sum \vec{M}_O = \vec{OC} \wedge \vec{R} =$

$$= \vec{r}_c \wedge \vec{R} =$$

$$= \vec{r}_c \wedge \left(\sum F_i\right)\hat{u} \Longrightarrow \sum F_i \vec{r}_c \wedge \hat{u}$$



l'impulso della $\vec{F}^{ext}$ viene trascurato

$$\Delta \vec{p}_1 = \int \vec{F}_{21}\, dt \qquad \Delta p_1 + \Delta p_2 = \Delta P = \int \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}\, dt = 0$$

$$\Delta \vec{p}_2 = \int \vec{F}_{12}\, dt \qquad \vec{P} \text{ si conserva} \longrightarrow V_{cm} = cost$$

$$\vec{L}_1 = \vec{r}_1' \wedge \vec{p}_1 \qquad \vec{L}^{iniz}_{u2} = \vec{r}_1 \wedge \vec{p}_1^{\,i} + \vec{r}_2 \wedge \vec{p}_2^{\,i} \qquad \text{nell'urto } r_1 = r_2$$

$$\vec{L}_2 = \vec{r}_2' \wedge \vec{p}_2 \qquad = \vec{r} \wedge (\vec{p}_1^{\,i} + \vec{p}_2^{\,i}) = \vec{r} \wedge \vec{P}^{\,i}$$

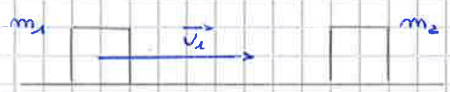
$$\vec{L}^f_{u2} = \vec{r} \wedge \vec{P}^f$$

$$\Delta \vec{p}_j = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_j(t)\, dt = \langle \vec{F}_j \rangle \Delta t$$

$W^{int} = \Delta E_K = 0$? dipende
- $\longrightarrow$ se le forze sono elastiche si
- $\longrightarrow$ forze anelastiche no

UAN.

In un urto ci sono forze impulsive quando il corpo è vincolato.



$$\vec{P}_i = m_1 \vec{v}_1^{\,i} \qquad \vec{P}_f = 0 \Longrightarrow \Delta \vec{P} \neq 0$$

$$\Delta \vec{p}_1 = 0 - m_1 \vec{v}_1^{\,i} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{21}\, dt \qquad \Delta \vec{p}_2 = 0 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{12}\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_2^{\,ext} \longrightarrow -\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_2^{\,ext}$$

l'impulso esterno è uguale a quello che riceve dall'interno $\Longrightarrow$ ogni volta che il corpo è vincolato la P non si conserva.

S.L. (sistema laboratorio: S.R. I solidale con il lab. in cui avviene l'urto)

SRCM $\longrightarrow$ CM fermo $\Longrightarrow \vec{v}_{cm}' = 0$

$\vec{P}' = 0 \longrightarrow$ la P si annulla per definizione

$$\vec{P}_i' = \vec{P}_f' = 0 \Longrightarrow m_1 \vec{v}_1'^{\,i} + m_2 \vec{v}_2'^{\,i} = \vec{P}_i' = m_1 \vec{v}_1'^{\,f} + m_2 \vec{v}_2'^{\,f} = \vec{P}_f' = 0$$

$$\vec{p}_{1i}' + \vec{p}_{2i}' = \vec{p}_{1f}' + \vec{p}_{2f}'$$

$$\vec{p}_1^{\,i\prime} = -\vec{p}_{2i}' \qquad \vec{p}_1^{\,f\prime} = -\vec{p}_{2f}'$$

rispetto al CM le quantità di moto dei 2 corpi sono uguali

$\downarrow$

le $\vec{v}$ sono anch'esse uguali

$\Updownarrow$

$m_1 = m_2$

II) Urto Elastico

Implica che i 2 corpi rimbalzino.

3D incognite $v_1^f \wedge v_2^f$ — ma quante equazioni ho?

3 componenti, 3 componenti

$$\left.\begin{array}{l}\vec{P}_i = \vec{P}_f \\ E_k^i = E_k^f\end{array}\right\} \text{4 equazioni}$$

nel caso di corpi puntiformi: la conservazione di $\vec{P}$ $\Longrightarrow$ conservazione di $\vec{L}_{O2}$

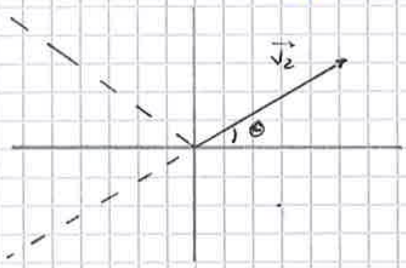
se il $\vec{L}_{O2}$ si conserva il moto è piano

2D incognite $\vec{v}_1^f$, $\vec{v}_2^f$

2 componenti = 4 incognite

$$\left.\begin{array}{l}P_i = P_f \longrightarrow 2 \text{ eq.} \\ E_K^i = E_K^f \longrightarrow 1 \text{ eq.}\end{array}\right\} 3 \text{ eq.}$$

ma se danno anche l'angolo di incidenza allora si può risolvere.



1D

$$\left.\begin{array}{l}\vec{P}_i = \vec{P}_f \longrightarrow P_x^i = P_x^f \\ E_k^i = E_k^f \longrightarrow \end{array}\right\} 2 \text{ eq.} \wedge \underline{2 \text{ incognite}} \Longrightarrow \text{sempre risolubile}$$

$\longrightarrow v_{1x}^f \wedge v_{2x}^f$

S.L. $\vec{P}_i = \vec{P}_f$

$$m_1 v_{1x}^i + m_2 v_{2x}^i = m_1 v_{1x}^f + m_2 v_{2x}^f$$

$$E_K^f = E_K^i$$

$$\frac{1}{2} m_1 (v_{1x}^i)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_{2x}^i)^2 = \frac{1}{2} m_1 (v_{1x}^f)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_{2x}^f)^2$$

posso fare questi passaggi partendo dall'SRCM e poi tornando indietro con le trasformazioni relativistiche.

SRCM. $\vec{P}_x'^i = \vec{P}_x'^f = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{p}_{1x}'^i + \vec{p}_{2x}'^i = 0 \\ \vec{p}_{1x}'^f + \vec{p}_{2x}'^f = 0\end{array}\right\} \quad E_{K_i}' = E_{K_f}' \Longrightarrow \begin{array}{l}(p_{1x}'^i)^2 = (p_{1x}'^f)^2 \\ (p_{2x}'^i)^2 = (p_{2x}'^f)^2\end{array}$$

$$(p_{1x}'^i)^2 = (p_{1x}'^f)^2 \longrightarrow p_{1x}'^i = -p_{1x}'^f$$

$$v_{1x}^i - v_{cm} = -(v_{1x}^f - v_{cm})$$

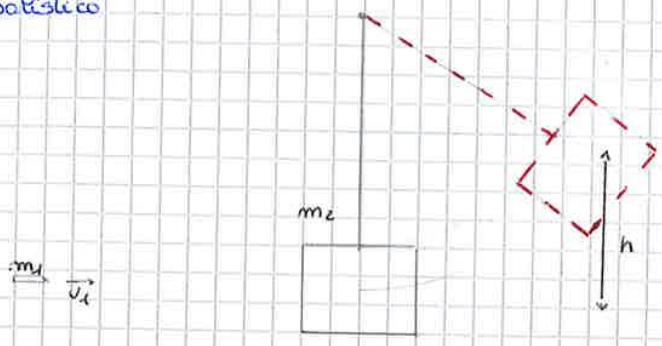
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 135

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}'_{1xf} = -e\vec{v}'^{\,i}_{1x} \\ \vec{v}'_{2xf} = -e\vec{v}'^{\,i}_{2x} \end{array}\right\} \vec{v}'_i = \vec{v}_i - \vec{v}_{CM}$$

$$v_{1x}^f = \frac{(m_1 - e m_2)v_{1x}^i + m_2(1+e)v_{2x}^i}{(m_1+m_2)}$$

$$v_{2x}^f = \frac{m_1(1+e)v_{1x}^i + (m_2 - e m_1)v_{2x}^i}{(m_1+m_2)}$$

es. "pendolo balistico"



$m_2 \gg m_1$

$\vec{P}_i = \vec{P}_f$

$P_{xi} = P_{xf}$

L'urto è del tipo completamente anelastico.

$$m_1 v_{1x} = (m_1+m_2)v_{xf}$$

$$v_{xf} = \frac{m_1 v_{1x}}{(m_1+m_2)} \Longrightarrow \frac{m_1}{m_1+m_2} v_x^{+}$$

teorema E_K

$$W^{tot} = \int \left[(m_1+m_2)\vec{g} + \vec{T}\right] d\vec{r} = \Delta E_K$$

$$\int (m_1+m_2)\vec{g}\, d\vec{r} = \Delta E_K$$

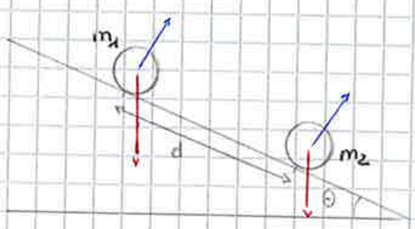
$$-(m_1+m_2)gh = \Delta E_K$$

$$-(m_1+m_2)gh = 0 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_f^2$$

$$v_f^2 = \sqrt{2gh}$$

$$2gh = \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2} v_{1x}^2 \longrightarrow v_{1x}^2 = \frac{(m_1+m_2)^2}{m_1^2} 2gh$$

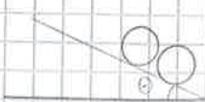
es. 4.14.



@ $t = t_0$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{distanza} = d \\ v_{01}, v_{02} \end{array} \right.$

$v_f = ?$

$$\cancel{m_1 v_{01} + m_2 v_{02} = (m_1+m_2)v_f} \; ?$$



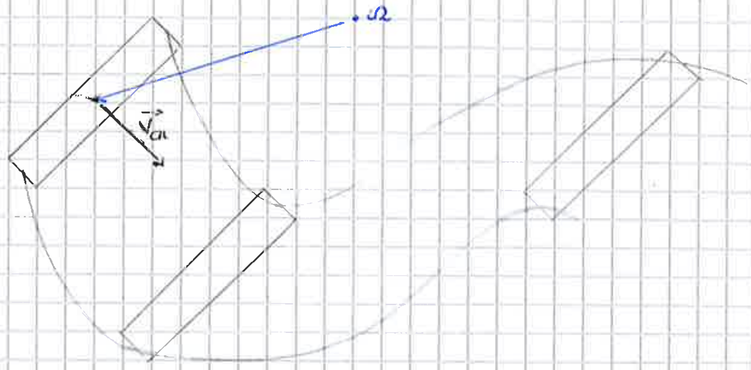
La velocità non sono le stesse dell'urto perché i corpi prima di toccarsi accelerano.

SISTEMA $m_1 \wedge m_2$ $\sum \vec{F}^{ext} \neq 0$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 135

Il moto di un corpo rigido può essere di 3 tipi:
I) TRASLAZIONE
II) ROTAZIONE
III) ROTOTRASLAZIONE.

I) Moto di pura traslazione



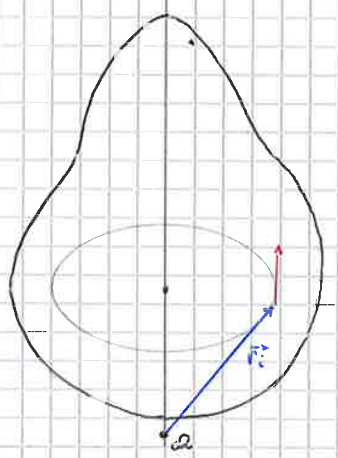
$\vec{P} = M\vec{v}_{cm}$

$E_K = \underset{\to 0}{E_K'} + \frac{1}{2}M\vec{v}_{cm}^{\,2}$

$\vec{L}_{\Omega} = \vec{r}_{cm} \wedge \vec{P} + \underset{\to 0}{\vec{L}'_{cm}}$

questo spiega l'esistenza della definizione di corpo puntiforme: poiché il corpo non ruota il suo moto può venire completamente descritto dal moto del CM che è un punto fisico.

II) Moto di pura rotazione.



$\vec{v}_i = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i$

$\vec{P} = 0$

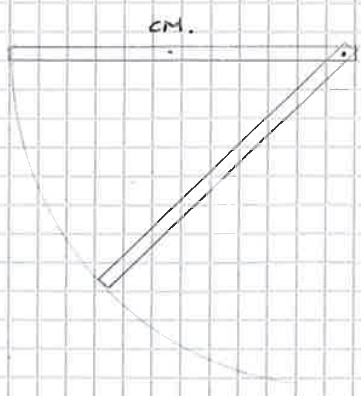
$\vec{L}_{\Omega} = \vec{L}'_{cm}$

$E_K = E_K'$

$\sum_i \vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$

$\sum \vec{M}_{\Omega} = \frac{d\vec{L}_{\Omega}}{dt}$

In generale tuttavia il moto di un corpo rigido è più complesso e viene definito come moto di ROTOTRASLAZIONE e può essere visto in 2 modi differenti:



1) pura rotazione attorno ad O

2) traslazione + rotazione attorno al CM.

Tuttavia se il corpo rigido è omogeneo ed ho piani di simmetria il CM si trova sempre nelle intersezioni di questi

$\Downarrow$

ciò mi permette, il più delle volte, a ricondurmi ad un integrale di linea

- es.

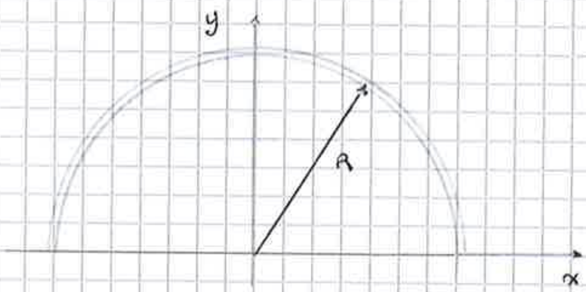
$$\lambda = \frac{dm}{dl} = \lambda x = \frac{dm}{dx}$$

$$x_{cm} = \frac{\int dm\, x}{\int dm} = \frac{\int \lambda(x)\, dx \cdot x}{\int \lambda(x)\, dx} = \frac{\int_0^l \lambda_0 x^2 dx}{\int_0^l \lambda_0 x\, dx} = \frac{2}{3} L$$

numeratore: $\lambda_0 \int_0^L x^2 dx = \lambda_0 \frac{L^3}{3}$

denominatore: $\lambda_0 \int_0^l x\, dx = \lambda_0 \frac{L^2}{2}$

- es.



$$\lambda = \frac{dm}{dl} = cost \qquad x_{cm} = 0 \qquad y_{cm} = ?$$

$$r_{cm} = \frac{\int dm\, \vec{r}}{\int dm} = \frac{\int \lambda \, ds\, \vec{r}}{M} =$$

$\pi R \lambda = M$

$$= \frac{\lambda \int \vec{r}\, ds}{\pi R \lambda} = \frac{1}{\pi R} \int R \hat{u}_r \cdot R d\theta =$$

poiché $\vec{r} = R\hat{u}_r$

$ds = R d\theta$

$$= \frac{R^2}{\pi R^2} \int \hat{u}_r d\theta =$$

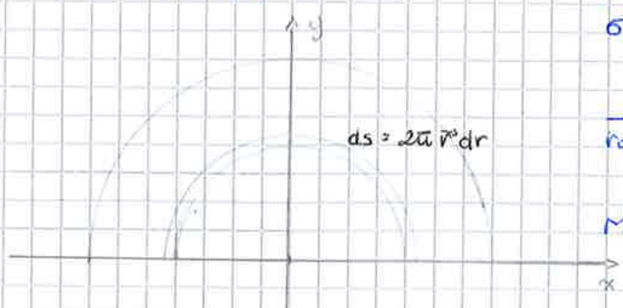
$\cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}$

$$= \frac{R}{\pi} \int \sin\theta\, d\theta \hat{j} + \frac{R}{\pi} \int \underbrace{\cos\theta \hat{i}\, d\theta}_{0}$$

$$y_{cm} = \frac{R}{\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = \frac{R}{\pi} 2 = \frac{2R}{\pi}$$

$$x_{cm} = \frac{R}{\pi} \int_0^{\pi} \cos\theta\, d\theta = 0.$$

- es (semidisco omogeneo)



$$\sigma = \frac{dm}{ds} \qquad dm = 2\pi r\, dr\, \sigma$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int dm\, \vec{r} \longrightarrow \frac{1}{M} \int dm_{se} \cdot \vec{r}_{cm_{se}}$$

$$M = \frac{1}{2} \pi R^2 \sigma$$

$$\frac{1}{M} \int 2\pi r^2 dr\, \sigma$$

$$2 \frac{\cancel{2}\pi r^3}{M\ 3} \cancel{\pi R^2 \sigma}$$

SISTEMA: $\vec{L} = \sum_i \vec{L_i} = \sum_i \vec{L_{i\varepsilon}} + \sum_i \vec{L_{i\perp}} = \vec{L_\varepsilon} + \vec{L_\perp}$

se si riuscisse a scrivere qualcosa di simile a $\vec{L} = (\ )\vec{\omega}$ si potrebbe indicare la parte rotazionale di $\vec{P} = M\vec{v}_{cm}$

$\vec{L_\varepsilon} = \sum \vec{L_{i\varepsilon}} = (\sum m_i R_i^2)(\omega \hat{k}) = I_\varepsilon \vec{\omega}$ MOMENTO di INERZIA

è l'equivalente rotazionale della massa!

$\vec{L_\varepsilon} = I_\varepsilon \vec{\omega}$ $\qquad \vec{P} = M\vec{v}_{cm}$ $\qquad I_\varepsilon = \sum_i m_i R_i^2 = \int dm\, R^2$ $\qquad$ s.i. $kg \cdot m^2$

$\frac{dL_\varepsilon}{dt} \parallel \hat{k}$

$\sum \vec{M}^{ext} = \frac{d\vec{L_{\Omega}}}{dt}$

$\sum \vec{M}^{ext} = \frac{d}{dt}(\vec{L_\varepsilon} + \vec{L_\perp}) = \frac{d\vec{L_\varepsilon}}{dt} + \frac{d\vec{L_\perp}}{dt}$

$\sum \vec{M}_\varepsilon^{ext} = \frac{d\vec{L_\varepsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_\varepsilon \vec{\omega}) = I_\varepsilon \vec{\alpha}$

$\sum \vec{M}_\perp^{ext} = \frac{d\vec{L_\perp}}{dt}$

$\sum \vec{F}^{ext} = M a_{cm} \longrightarrow \sum \vec{M}_\varepsilon^{ext} = I_\varepsilon \alpha$

solo le componenti ε dei momenti producono una α

solo le forze tangenziali hanno una componente α.

$\alpha_\varepsilon = \alpha = \frac{\sum \vec{M}_\varepsilon}{I_\varepsilon}$

$\omega(t) = \omega(t_0) + \int_0^t \alpha(t)\,dt$

$\theta(t) - \theta(t_0) = \int_0^t \omega(t)\,dt$

se $\alpha = cost$

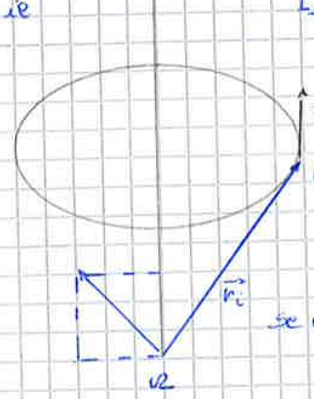
$\omega(t) = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$

$\theta(t) = \theta(t_0) + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$

$\alpha = 0 \Longleftrightarrow \vec{M}_\varepsilon^{ext} = 0$

$\vec{L_\perp}$ ruota con il corpo

$L_\perp$ cambia: - direzione
- modulo



$L_\perp = \sum L_{i\perp} = \sum_i m_i R_i \omega h_i \hat{u}_i$

$L_\perp \propto \omega$

se $\vec{\omega} = cost$

$\vec{L_\perp} = cost$

$\vec{L_\perp}$ cambia solo in direzione

$\vec{L_\perp} = L_\perp \hat{u}$

$\frac{d\vec{L_\perp}}{dt} = \frac{dL_\perp}{dt}\hat{u} + L_\perp \frac{d\hat{u}}{dt} = L_\perp(\vec{\omega} \wedge \hat{u}) = \vec{\omega} \wedge L_\perp \hat{u} = \sum \vec{M}_\perp^{ext}$

$\frac{d\vec{L_\perp}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{L} \longrightarrow \vec{\omega} \wedge \vec{L_\perp} + \underbrace{\cancel{\vec{\omega} \wedge \vec{L_\varepsilon}}}_{=0}$

$\sum \vec{M}_\perp^{ext} = \vec{\omega} \wedge \vec{L}$

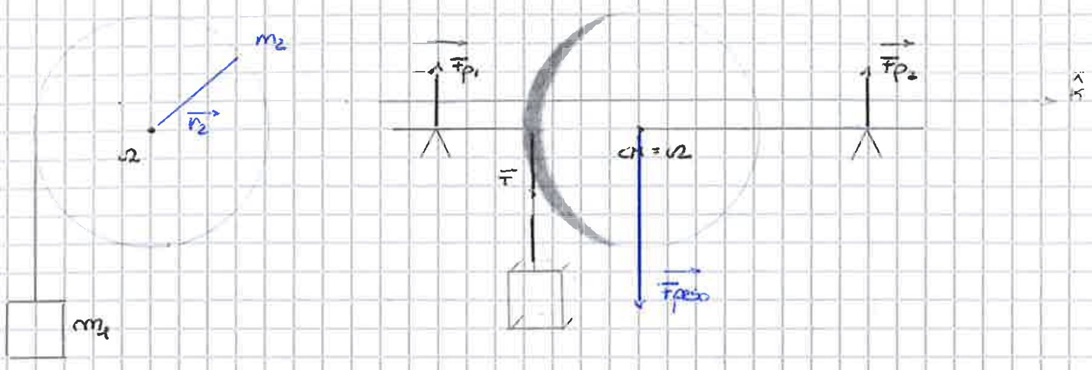
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 135

$dW = dE_K$

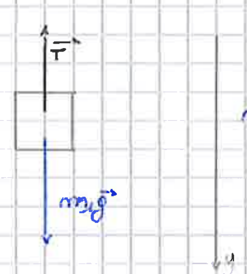
$= d\left(\frac{1}{2} I_E \omega^2\right) = \frac{1}{2} I_E 2\omega d\omega = I_E \frac{d\theta}{dt} \alpha\, dt = I_E \alpha\, dt$

componente e esterna dei momenti $\Sigma \vec{M}_E$

• es.



m_1



$m_1 g - T = m_1 a$

corpo 2 $\quad \sum \vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M a_{CM} = 0$

$2\vec{F}_p + m_2\vec{g} + \vec{T} = 0 \Longrightarrow m_2 g + T - 2F_p$

$\sum \vec{M}^{ext}_{\Omega} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

$\sum \vec{M}^{ext} = r_2 T$ scelgo la direzione dell'asse in modo tale che α sia concorde.

$r_2 T = I_E \alpha$

$$\begin{cases} m_1 g - T = m_1 a \\ r_2 T = I_E \alpha \end{cases} \qquad a = \alpha r_2 \qquad \alpha = \frac{a}{r_2}$$

accelerazione $\quad T = \frac{1}{2} m_2 a$

$a = m_1 g$

E_m si conserva $= cost$

$= E_K + E_p = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} I_E \omega^2 + m g y$

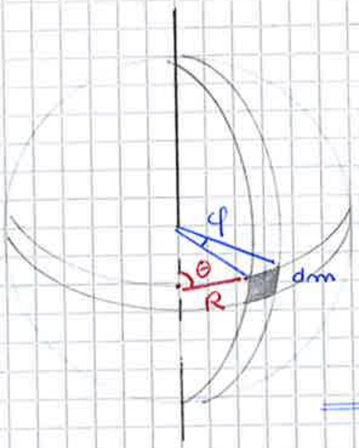
impongo $\frac{dE_m}{dt} = 0 \Longrightarrow \frac{1}{\cancel{2}} m \cancel{2} v_1 a_1 + \frac{1}{\cancel{2}} I_E \cancel{2} \omega \alpha + m g v_1 = 0$

$m_1 v_1 a_1 + I_E \omega \frac{a}{r_2} + m g v_1 = 0$

$m_1 \cancel{v_1} a_1 + I_E \frac{\cancel{v_1}}{r_1^2} a_1 + m g \cancel{v_1} = 0$

$m_1 a_1 + \frac{I_E}{r_1^2} a_1 + m g = 0.$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 135



prendo i paralleli e i meridiani e uso le coordinate sferiche

$R\sin\theta\, d\varphi$

$$I = \int dm\,(R\sin\theta)^2 =$$

$$= \int \sigma\, \underbrace{R\sin\theta\, d\varphi \cdot R\,d\theta}_{\text{sono i 2 lati}} \cdot (R\sin\theta)^2$$

$$\Longrightarrow \sigma R^4 \int \Big[\underbrace{\int \sin^3\theta\, d\theta}_{\substack{\text{non dipende da } \varphi \\ \text{ed è una costante}}} \Big] d\varphi =$$

$$= \sigma R^4 \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$\varphi \Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$= 2\pi\sigma R^4 \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta = \frac{8}{3}\pi\sigma R^4 =$$

↳ devo trovare σ

$$\sigma = \frac{M}{4\pi R^2}$$

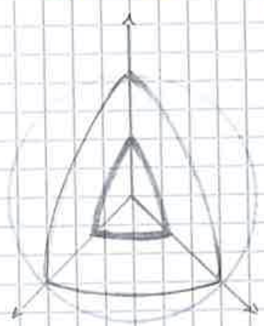
$$= \frac{8}{3}\pi \frac{M}{4\pi R^2} R^4 = \frac{2}{3} M R^2$$

VI) SFERA PIENA:

$I = \int I'$ ⟶ dei singoli gusci sferici che compongono la sfera

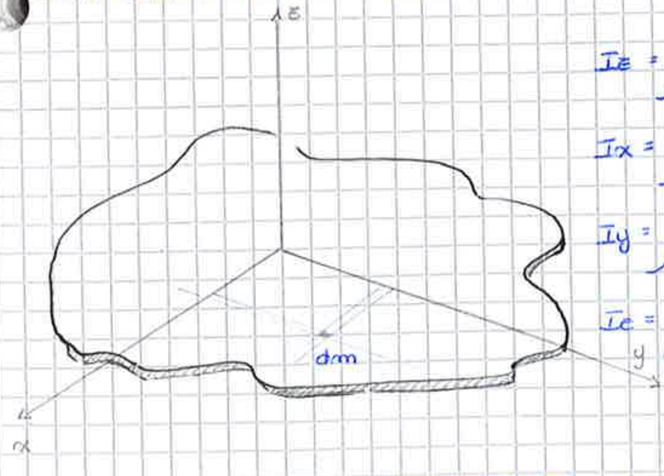
$$= \int \frac{2}{3}\, dm\, r^2$$

$$\rho = \frac{dm}{dV} \Longrightarrow dm = \rho\, 4\pi r^2 dr$$



$$I = \frac{2}{3}\int 4\pi\rho r^2 dr \cdot r^2 = \frac{8}{3}\pi\rho \int_0^R r^4 dr = \frac{8}{3}\pi\rho \frac{R^5}{5} \longrightarrow \frac{2}{5} M R^2$$

VII.) OGGETTO PIATTO (2D)



$$I_z = \int dm\,(x^2 + y^2)$$

$$I_x = \int dm\, y^2$$

$$I_y = \int dm\, x^2$$

$$I_z = \int dm\, x^2 + \int dm\, y^2 = I_x + I_y$$

se il corpo è simmetrico $\longrightarrow I_x = I_y$

$$I_z = 2I_x = 2I_y \longrightarrow I_x = I_y = \frac{1}{2} I_z$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 135

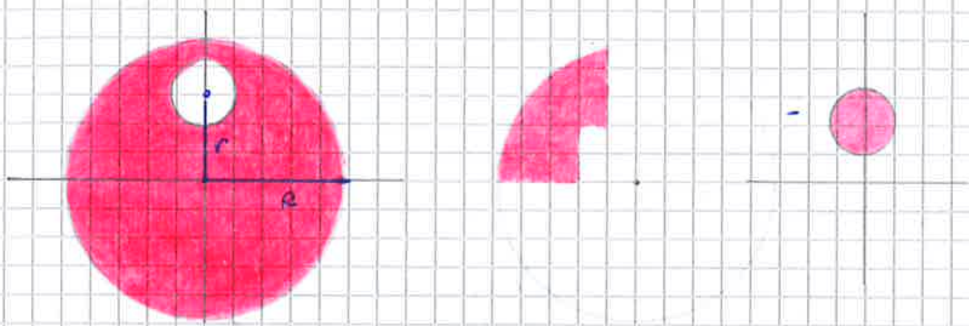
$I_i(E) = m_i(x_i^2 + y_i^2) \longrightarrow m_i(x'^2 + (d+y')^2) = m_i(x'^2 + d^2 + 2dy' + y'^2) =$
$= m_i((x'+y')^2 + d^2).$

$I = \sum_i I_i = \sum_i m_i(x_i'^2 + y_i'^2) + \sum m_i d^2 + (2 \sum m_i y')d$
$y'_{cm} = 0.$

$I = \underbrace{M(x'^2 + y'^2)}_{I_{cm}} + Md^2$

se c'è un disco che ruota attorno un suo estremo avrò $I_E = \frac{3}{2}MR^2$

es. DISCO FORATO: (omogeneo)



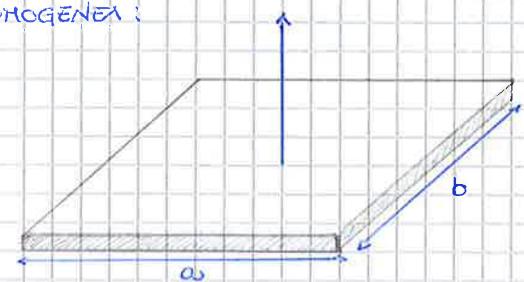
$I = \frac{1}{2}MR^2$

$\frac{1}{2}(\sigma \pi R^2)R^2 - I_f \hookrightarrow \frac{1}{2}mr^2 + md^2$

$\frac{1}{2}(\pi r^2 \sigma)r^2 + (\pi r^2 \sigma d^2)$ uso il Teorema di Huygens-Steiner.

$I_{tot} = \frac{1}{2}\sigma\pi R^4 - \frac{1}{2}\pi\sigma r^4 - \pi r^2 \sigma d^2 = \pi\sigma\left(\frac{R^4}{2} - \frac{r^4}{2} - r^2d^2\right)$

• es. PIASTRA OMOGENEA:



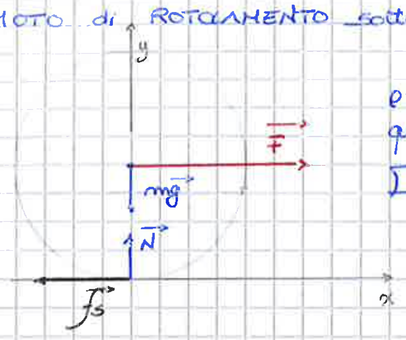
$I_{cm} = \frac{1}{12}M(a^2+b^2)$

Il Teorema di Huygens-Steiner si riflettono anche sui Teoremi di König.

$E_K = \frac{1}{2}I_E\omega^2 = \frac{1}{2}(I_{cm} + Md^2)\omega^2 = \underbrace{\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2}_{E_K'} + \frac{1}{2}Md^2\omega^2$
$\hookrightarrow \frac{1}{2}M(\omega d)^2 = \frac{1}{2}Mv_{cm}$

di pura rotazione attorno al cm.

MOTO di ROTOLAMENTO sotto l'EFFETTO di una $\vec{F}$



l'attrito impedisce lo strisciamento in avanti e quindi è una forza frenante.

$\sum_i \vec{F} = m \cdot \vec{a}_{cm}$

$$\begin{cases} x: & +F - f_s = m \cdot a_{cm} \\ y: & N - mg = 0 \end{cases}$$

$\sum \vec{M}^{ext} = I_E \vec{\alpha}_E$ lo posso scrivere così perché è simmetrico o ruota attorno ad un asse principale di inerzia.

$\sum M_E = I_E \alpha_E \longrightarrow$ sempre vera

$\sum \vec{M}^{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt} + \underbrace{\vec{v}_\Omega \wedge \vec{P}}_{=0}$ se pongo Ω nel CM o nel punto di contatto.

l'unica forza con $\vec{M} \neq 0$ è $\vec{f_s}$

$\sum_i \vec{M}^{ext} = \vec{r}_\Omega \wedge \vec{f_s}$ scelgo l'asse entrante

$R f_s = I_{cm} \alpha_E$

$v_{cm} = \omega R$

$a_{cm} = \alpha R$

$$\begin{cases} F - f_s = m a_{cm} \\ N = mg \\ R f_s = I_{cm} \alpha \Longrightarrow \alpha = \frac{R f_s}{I_{cm}} \\ a_{cm} = \alpha R \longrightarrow \alpha = \frac{a_{cm}}{R} \end{cases}$$

$f_s \leq \mu_s mg$.

$$a_{cm} = \frac{F}{\left(m + \frac{I_{cm}}{R^2}\right)}$$

e se voglio trovare f_s?

$F - f_s = m a_{cm}$

$$f_s = \frac{I_{cm}}{R^2} a_{cm} = \frac{I_{cm}}{R^2} \cdot \frac{F}{m + \frac{I_{cm}}{R^2}} =$$

$$= \frac{F}{\frac{R^2}{I_{cm}}\left(m + \frac{I_{cm}}{R^2}\right)} = \frac{F}{\left(\frac{mR^2}{I_{cm}} + 1\right)}$$

quand'è la condizione per cui il corpo continua a strisciare?
↳ rotola senza strisciare $\longleftrightarrow f_s \leq \mu_s N = \mu_s mg$.

$$\frac{F}{\left(\frac{mR^2}{I_{cm}} + 1\right)} \leq \mu_s mg \qquad F_{max} \leq mg\left(1 + \frac{mR^2}{I_{cm}}\right)$$

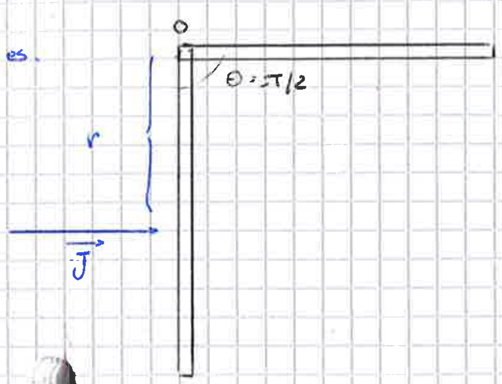
Impulso Angolare $\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\, dt = \vec{\Delta L}$ $\vec{M}$ = momento risultante, $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

- l'impulso angolare molte volte viene applicato in un punto particolare del corpo.

$r \wedge F$ impulsivo e le altre no: $\int \sum \vec{M}\, dt \sim \int \sum \vec{M}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{r} \wedge \vec{F} dt = \vec{r} \wedge \int \vec{F} dt = \vec{r} \wedge \vec{J}$

se Δt minuscolo il corpo non si muove.

es.



Trovare $\vec{J}$ da applicare in $r < \ell$ tale che faccia ruotare l'asticella imperniata in O di $\pi/2$.

$\int \vec{M}_0\, dt = \vec{\Delta L}$

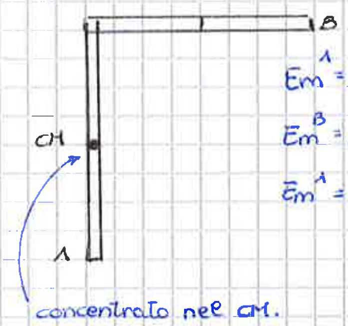
scelgo il polo in O in modo tale che l'impulso generato dal perno non produchi un momento.

$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_0\, dt = \vec{\Delta L}_0 \Longrightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{\Delta L}_0 = \vec{r} \wedge \vec{J}$

$r \wedge J = \Delta L_{0,\ell}$

$rJ = L_{0,\ell}^{f} - L_{0,\ell}^{i}$ (L^i è fermo = 0)

$rJ = I_{\ell,}\vec{\omega}$ → cerco la $\vec{\omega}$



$Em^A = mg y_A + \frac{1}{2} I_\ell \omega^2$

$Em^B = mg y_B$

$Em^A = Em^B \longrightarrow \frac{1}{2} I_\ell \omega^2 = mg (y_B - y_A)$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} m\ell^2\right)\omega^2 = mg\frac{\ell}{2}$

concentrato nel CM.

$\omega^2 = \cancel{2}\cancel{m}g\frac{\cancel{\ell}}{\cancel{2}} \cdot \frac{3}{\cancel{m}\ell^{\cancel{2}}} \Longrightarrow \omega^2 = \frac{3g}{\ell} \Longrightarrow \sqrt{\frac{3g}{\ell}}$ trovo J

$^* J = \frac{I_\ell \omega}{r} \Longrightarrow \frac{1/3\, m\ell^2 \sqrt{3g/\ell}}{r} = \frac{m}{r}\sqrt{\frac{g\ell^3}{3}} = J.$

$\vec{J} = \Delta \vec{p}$?

$\vec{J_x} = \Delta P_x$? $\Longrightarrow \frac{I_\ell}{r}\omega = \frac{1}{3} m \frac{\ell^2}{r}\omega$ $\Delta P_x = P_x^f = mv_{cm} = m\omega\, \ell/2$

in generale accade non lo so

è vero sempre questo $\vec{J} + \vec{J_0} = \vec{\Delta P} \Longrightarrow$ calcolo l'impulso della reazione vincolare

$J_{0x} = \Delta P_x - J_x$

$= \frac{1}{2} m\ell\omega - \frac{1}{3} m \frac{\ell^2}{r}\omega \Longrightarrow J_{0x} = m\omega\ell\left(\frac{1}{2} - \frac{\ell}{3r}\right)$

Rotolamento

$v_{cm}(t^*) = \omega(t^*) R$

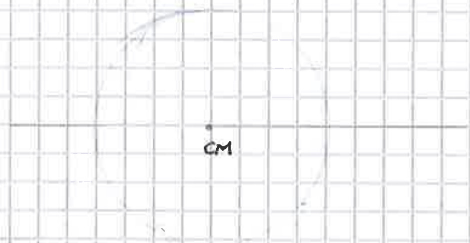
$v_{cm}(t) = v_{cm}(t_0) + a_{cm}(t - t_0)$

$\omega(t) = \omega(t_0) + \alpha(t - t_0)$

$v^0_{cm} + a_{cm}(t^*) = 0 + \alpha t^* R \longrightarrow$ ricavo $t^* = \frac{2}{7} \cdot \frac{J}{\mu_k m g}$

• casi intermedi:

I) asse con un punto fisso = CM



CM fisso

$\sum \vec{M}^{ext} = 0$

$\vec{L} = cost$

$\vec{L} = I_{CM} \vec{\omega}$

bisogna dare un momento per stabilizzarlo

II) CM fisso + momento non nullo

$M = \frac{dL}{dt}$ se $\vec{L}$ ruota $\Longrightarrow$ anche asse ruota

III) punto fisso che non è il CM.

descrive un moto di precessione

$\sum \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{L}$ $\vec{\Omega}$ è la seconda vel. ang.

$\vec{r}_{cm} \wedge m\vec{g} = \vec{r} \wedge \vec{L}$

$r_{cm} \hat{k} \wedge m\vec{g} = \vec{\Omega} \wedge L\hat{k} \Longrightarrow \hat{k} \wedge m\vec{g} r_{cm} = -\hat{k} \wedge L\vec{\Omega}$

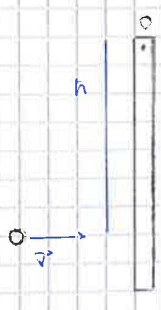
$\hat{k} \wedge m\vec{g} r_{cm} = \hat{k} \wedge (-L\vec{\Omega})$

$\hat{k} \wedge m\vec{g} r_{cm} = \hat{k} \wedge (-I\omega\vec{\Omega})$

$m\vec{g} r_{cm} = -I\omega\vec{\Omega} \Longrightarrow \Omega = \frac{-m g r_{cm}}{I_{cm}\omega}$

$\sum \vec{F}^{ext} = 0 \longrightarrow \vec{P} = cost$, $\vec{v}_{cm} = cost$

$E_k = E_k' + \overbrace{E_{k,cm}}^{cost}$



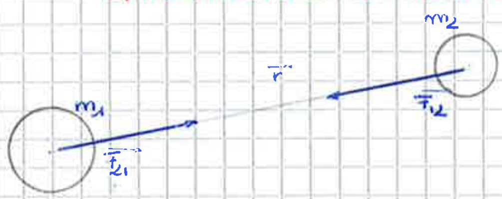
$\vec{L}_0^f = (\vec{r} \wedge m\vec{v}')_e + I_G \cdot \omega$

$L_{0_e}^{i} = L_{0_e}^{f}$

$m v r = m v' r + \frac{1}{3} M e^2 \omega$

$$\omega = \frac{m v r}{\left(\frac{1}{3} M e^2 + m r^2\right)}$$

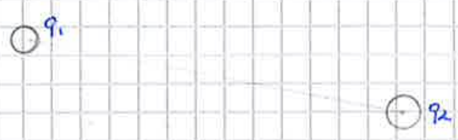
GRAVITAZIONE ed ELETTROSTATICA



$\vec{F}_{12} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_r$ forza gravitazionale.

Forza elettrostatica $\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \hat{u}_r$

$\rightarrow K = 8{,}99 \cdot 10^9 \, Nm^2/c^2$



- centrali
- conservative
- $\vec{M}_0 = 0$ $\longrightarrow$ $\vec{L}_0$ = costante, $\vec{L}_0 = \vec{r} \wedge m_2 \vec{v}_2$ $\longrightarrow$ il moto è piano; velocità areale è costante

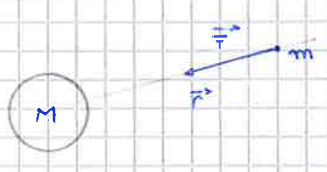
la massa gravitazionale è concettualmente diversa da quella inerziale.

$\boxed{\vec{F} = m_i \vec{a}}$ corpo sotto l'effetto di forza gravitazionale

$-\gamma \frac{\cancel{m_g} M_T}{R_T} \cancel{\hat{u}_r} = \cancel{m_i} g \cancel{\hat{u}_r} \Longrightarrow \left(\frac{m_g}{m_i}\right) = \frac{g \cdot R_T^2}{\gamma M_T} = 1$ si sceglie γ in modo tale che il rapporto sia 1

Si chiama campo una regione dello spazio in ogni punto del quale sia definita una grandezza fisica.
la seconda particella sente istantaneamente la forza generata dalla carica sorgente.

CAMPO GRAVITAZIONALE:



$\vec{G} = \frac{\vec{F}_G}{m} \Longrightarrow \vec{F}_G = m\vec{G}$ $\qquad \vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q}$

per come è scritto il campo, dipende dalla carica che lo crea

$\vec{F}_G = -\gamma \frac{mM}{r^2} \hat{u}_r = m\,\vec{G}(r) \Longrightarrow -\frac{\gamma M}{r^2} \hat{u}_r$ $\qquad m \ll M$

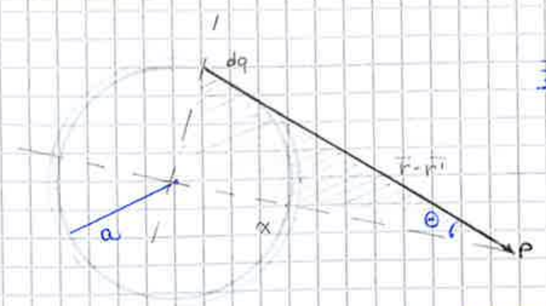
$\vec{F}_e = K \frac{qQ}{r^2} \hat{u}_r = q\vec{E}(r) \Longrightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{KQ}{r^2} \hat{u}_r$ $\qquad q \ll Q$

il campo elettrostatico può essere entrante o uscente.

$Q < 0$ entrante $\qquad Q > 0$ uscente

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 135

6.



$$\vec E_P = \int_A \frac{dq}{\|\vec r - \vec r'\|^3}\cdot(\vec r - \vec r')$$

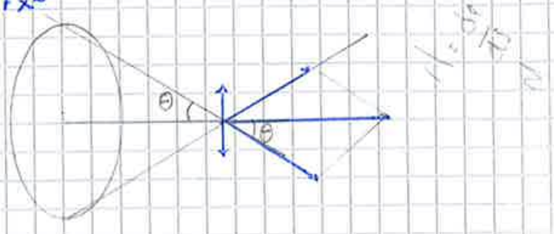
$$dq = \sigma\, d_2S$$

$$\|\vec r - \vec r'\| = \sqrt{a^2+x^2}$$

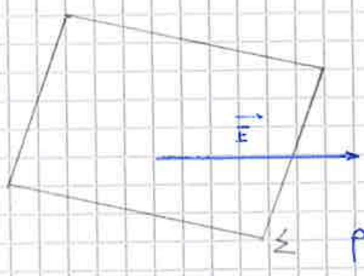
$$d\vec E = k\frac{\sigma\, d_2S'}{\|\vec r - \vec r'\|^3}\cdot(\vec r - \vec r')$$

$$= dE_i = \frac{k\sigma\, dS'}{a^2+x^2}\cdot\cos\theta = \frac{k\sigma\, dS'}{a^2+x^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$E = \frac{k\sigma x}{(a^2+x^2)^{3/2}}\int d_2S' \rightarrow \frac{k\sigma x}{(a^2+x^2)^{3/2}}\cdot 2\pi a$$

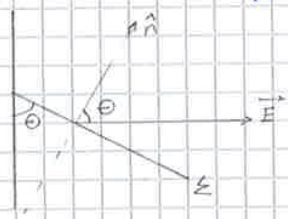


Flusso: a) campo uniforme. superficie piana.

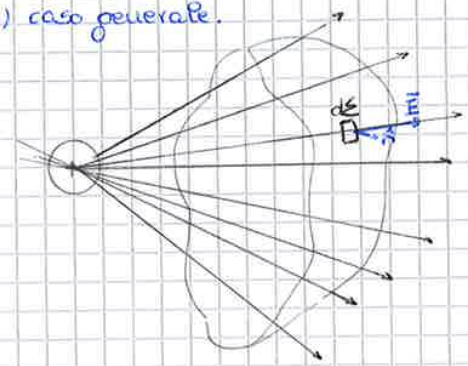


$$\Phi_\Sigma(\vec G) = \vec E\cdot\hat u_\Sigma$$
$$= \vec E\,\Sigma\cos\theta = E\Sigma_\perp$$

proiezione di Σ su un piano ⊥ alla superficie data



b) caso generale.



$$\Phi_\Sigma(\vec E) = \int_\Sigma \vec E\,\hat n\, d\Sigma$$

Teorema di Gauss

il flusso di un campo gravitazionale (elettrostatico) attraverso una superficie chiusa è proporzionale alla somma delle masse (cariche) interne alla superficie.

Energia Potenziale:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = E_{pA} - E_{pB}$$

massa puntiforme $\vec{F} = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \hat{u}_r$

$$W_{AB} = \int -\gamma \frac{Mm}{r^2} \hat{u}_r \cdot \underbrace{d\vec{r}}_{dr} = -\gamma Mm \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr = -\gamma M \left(-\frac{1}{r} \right)_{r_A}^{r_B} = -\gamma Mm \left(-\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A} \right) =$$

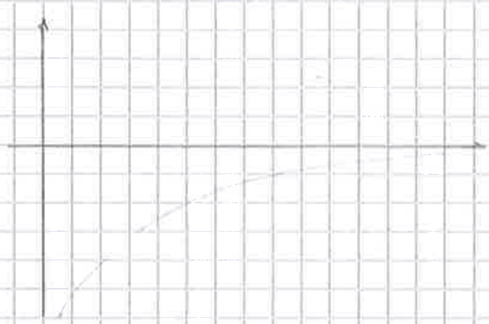
$$= -\frac{\gamma Mm}{r_A} + \frac{\gamma Mm}{r_B} = E_{pA} - E_{pB}$$

$E_p(r) = -\gamma \frac{mM}{r} + c$ se $E_p(R_T) = 0$.

$E_p(R_T) = -\frac{\gamma mM}{R_T} + c = 0$ $\qquad c = +\frac{\gamma mM}{R_T}$

$E_p(r) = -\frac{\gamma mM}{r} + \frac{\gamma mM}{R_T} = \gamma mM \left(\frac{-R_T + r}{r \cdot R_T} \right)$ $\qquad r = R_T + h$

$$= \gamma mM \frac{h}{R_T^2} = \frac{\gamma mM}{R_T^2} h = mgh$$



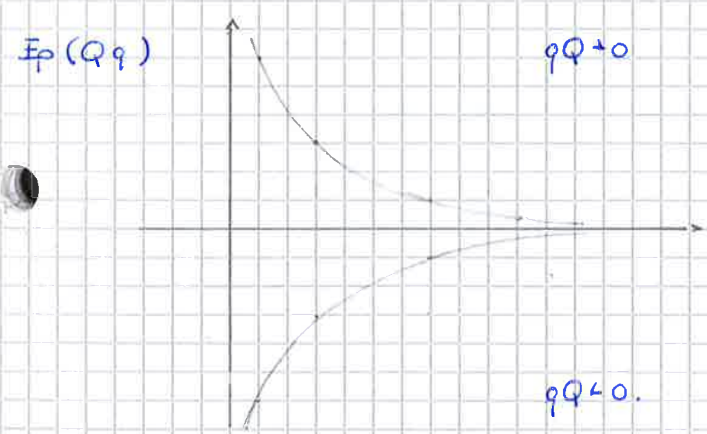
se fisso $E_p(r = \infty) = 0$

$E_p(r \to \infty) = \frac{\gamma mM}{r} + c \longrightarrow c = 0$

$$E_p(r) = -\frac{\gamma mM}{r}$$

caso elettrostatico = carica puntiforme

$E_p(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qQ}{r} + c$ $\qquad E_p(r \to \infty) \Longrightarrow c = 0.$



$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$

$\vec{F} \cdot \hat{u}_r = -\vec{\nabla} E_p \cdot \hat{u}_r$

$F_r = -\frac{dE_p}{dr}$

Energia Meccanica

se orbita circolare $\qquad E_m = \frac{1}{2} m v^2 + E_p(r)$

$v = cost$
$\vec{a} = a_c$

$$= \frac{1}{2} m v^2 - \frac{\gamma mM}{r}$$

$-\frac{\gamma mM}{r^2} \hat{u}_r = m \cdot \frac{v^2}{2r} (-\hat{u}_r) \longrightarrow v^2 = \frac{\gamma M}{r}$

$m(r) = \frac{M}{R^3} r^3$ $\qquad dm = \rho dV = \rho 4\pi r^2 dr = \frac{M 4\pi dr\, r^2}{\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)} = \frac{3 M r^2 dr}{R^3}$

$dW_g = +\gamma \frac{M}{R^3} r^3 \cdot \frac{3 M r^{\cancel{2}}}{R^3} \frac{dr}{\cancel{r}} = 3\gamma \frac{M^2}{R^6} r^4 dr$

$W_g^{TOT} = \int dW_g = \frac{3\gamma M^2}{R^6} \int_0^R r^4 dr \qquad W^{TOT} = \frac{3\gamma M^2}{R^6} \cdot \frac{R^5}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{\gamma M^2}{R}$

in un orbita circolare $V = cost \Longrightarrow R$ determino V.

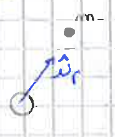
LEGGI di KEPLERO

1) Ogni pianeta che si muove attorno al Sole si muove di orbita ellittica di cui il Sole occupa un fuoco.

2) Le velocità areali costanti.

3) Il quadro del periodo di un pianeta è prop. al cubo dell'asse maggiore dell'orbita.

$\frac{T^2}{a^3} = cost.$



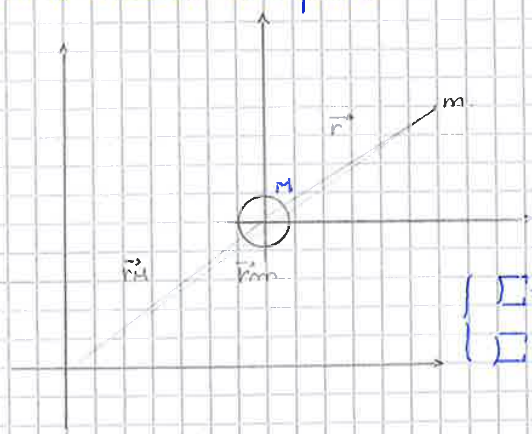
$\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$-\frac{\gamma m M}{r^2} \hat{u}_r = -m \frac{v^2}{r} \hat{u}_r$

$\frac{\gamma}{r^2} M = \frac{v^2}{r} \longrightarrow \frac{\gamma M}{r^2} = \frac{4\pi^2}{T^2 \cancel{r}} r^{\cancel{2}} \qquad v = 2\pi r / T$

$\frac{r^3}{T^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2}$

il CM di un sistema è fermo.



$\vec{r} = (\vec{r}_m - \vec{r}_M)$

$\vec{a} = \vec{a}_m - \vec{a}_M$

$\vec{F}$ forza gravitazionale che agisce su m in SRI

$\begin{cases} \sum \vec{F} = m\vec{a}_m \\ \sum \vec{F} = M\vec{a}_M \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \vec{F} = m\vec{a}_m \\ -\vec{F} = M\vec{a}_M \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} \vec{a}_m = \frac{\vec{F}}{m} \\ \vec{a}_M = -\frac{\vec{F}}{M} \end{matrix}$

SRNI

$\sum \vec{F} - m\vec{a}_M = m\vec{a}$

$\vec{F} - m\vec{a}_M = m\vec{a} \longrightarrow \vec{F} + \frac{m}{M}\vec{F} = m\vec{a}$

$\vec{F}\left(1 + \frac{m}{M}\right) = m\vec{a} \longrightarrow \vec{F} = \left(\frac{m}{1 + \frac{m}{M}}\right)\vec{a} \qquad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{M}$