Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: 1862A - ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Venezia Angela

MATERIA: Fondamenti di meccanica strutturale, Esercizi - prof. Goglio

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

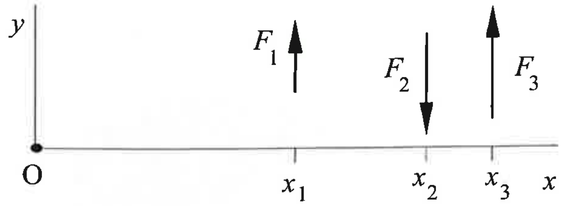
ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 86

FONDAMENTI di MECCANICA STRUTTURALE
Anno accademico 2015/2016 - Esercitazione n° 1

<u>Nota</u>: *le risposte relative alle reazioni vincolari sono date soltanto in modulo in quanto il segno dipende dal verso convenzionale scelto dallo studente.*

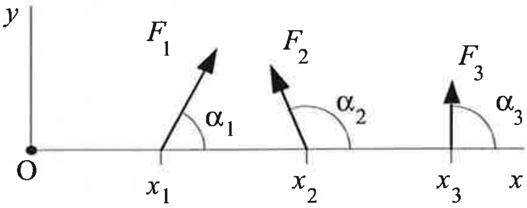
1) Sostituire il sistema di forze schematizzato in figura con la sola risultante opportunamente applicata.



Dati:
F_1 = 500 N, F_2 = 800 N, F_3 = 1000 N;
x_1 = 5 m, x_2 = 7 m, x_3 = 8 m.

[R_F = 700 N, ξ = 7 m (misurata da O)]

2) Per il sistema di forze schematizzato in figura, calcolare la risultante e determinare la retta d'azione su cui applicarla ai fini dell'equivalenza.



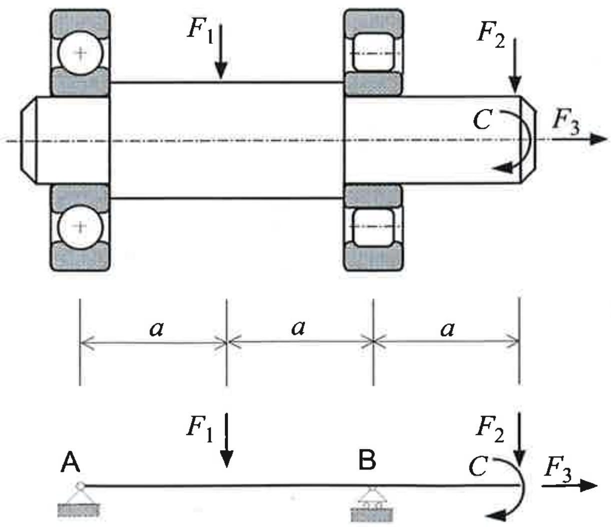
$\alpha_1 = 60°$, $\alpha_2 = 135°$, $\alpha_3 = 90°$.

Dati:
F_1 = 100 N, F_2 = 200 N, F_3 = 50 N;
x_1 = 2 m, x_2 = 3 m, x_3 = 4 m;
$y_1 = y_2 = y_3$ = 0 m;

[R_F = 293 N, α = 108° (misurato da x), ξ = 2.72 m (misurata da O)]

3) L'albero mostrato in figura è vincolato da un cuscinetto a sfere (assimilabile a una cerniera) e da un cuscinetto a rulli (assimilabile a un appoggio). Calcolare le reazioni vincolari causate dai carichi F_1, F_2, C.

Dati:
C = 60 kN·mm,
F_1 = 2 kN,
F_2 = 1 kN,
F_3 = 0.5 kN,
a = 80 mm.



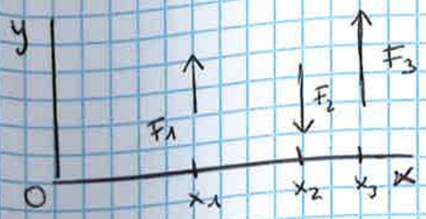
$$\left[\,|O_A| = F_3 = 0.5 \text{ kN},\ |V_A| = \left|\frac{F_1}{2} - \frac{F_2}{2} - \frac{C}{2a}\right| = 0.125 \text{ kN},\ |R_B| = \frac{F_1}{2} + \frac{3F_2}{2} + \frac{C}{2a} = 2.875 \text{ kN}\right]$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 86

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 86

Esercitazione 1

1



$F_1 = 500\ N$ $\quad x_1 = 5\ m$

$F_2 = 800\ N$ $\quad x_2 = 7\ m$

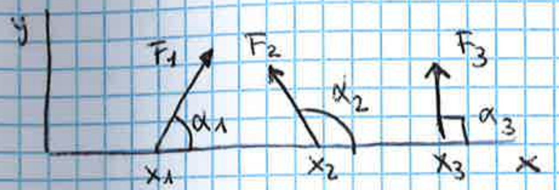
$F_3 = 1000\ N$ $\quad x_3 = 8\ m$

$\uparrow R_F = F_1 - F_2 + F_3 = 500 - 800 + 1000 = 700\ N$

$\circlearrowleft R_{M_O} = F_1 x_1 - F_2 x_2 + F_3 x_3 = 500 \cdot 5 - 800 \cdot 7 + 1000 \cdot 8 = 4900\ N \cdot m$

$\bar{y} = \frac{R_{M_O}}{R_F} = \frac{4900}{700} = 7\ m$ (misurato da O)

2



$F_1 = 100\ N$ $\quad x_1 = 2m$

$F_2 = 200\ N$ $\quad x_2 = 3\ m$

$F_3 = 50\ N$ $\quad x_3 = 4\ m$

$\alpha_1 = 60°$

$\alpha_2 = 135°$

$R_F = \sqrt{R_{Fx}^2 + R_{Fy}^2}$

$\rightarrow R_{Fx} = F_1 \cos\alpha_1 + F_2 \cos\alpha_2 + 0 = 100 \cdot \frac{1}{2} + 200 \cos 135° = -91{,}4\ N$

$\uparrow R_{Fy} = F_1 \operatorname{sen}\alpha_1 + F_2 \operatorname{sen}\alpha_2 + F_3 = 100 \frac{\sqrt{3}}{2} + 200 \operatorname{sen} 135° + 50 = 278 N$

$R_F = \sqrt{278^2 + (-91{,}4)^2} = 293 N$

$R_{M_O} = 100 \frac{\sqrt{3}}{2} x_1 + 200 \operatorname{sen} 135\ x_2 + 50 x_3 = 797{,}5\ N \cdot m$

$\bar{y} = \frac{R_{M_O}}{R_F} = \frac{797{,}5}{293} = 2{,}72\ m$ (misurato da O)

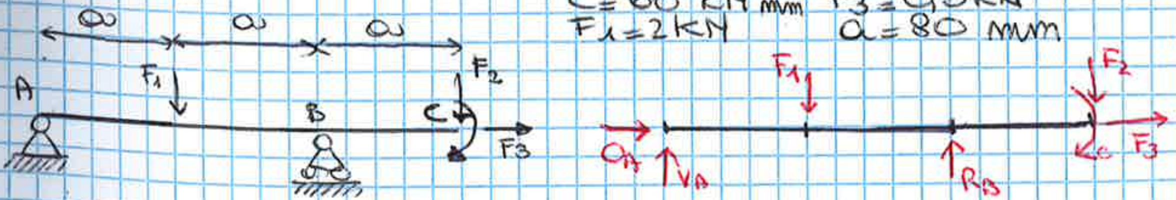
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{C_o}{C_a} = \frac{R_{Fy}}{R_{Fx}} \longrightarrow \alpha = \operatorname{arctg}\left(-\frac{278}{91{,}4}\right) = 71{,}80°$

$180° - 71{,}80 = 108°$ (misurato da x)

3

$C = 60\ kN\ mm$ $\quad F_3 = 0{,}5\ kN$

$F_1 = 2\ kN$ $\quad a = 80\ mm$



$\rightarrow O_A + F_3 = 0 \longrightarrow |O_A| = |F_3| = 0{,}5\ kN$

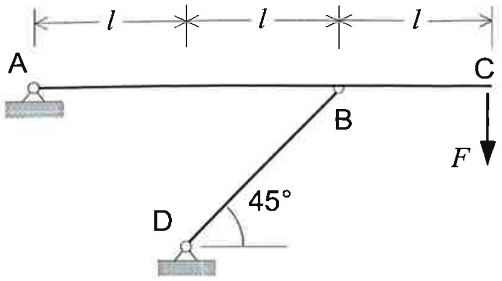
$\uparrow -F_2 - F_1 + V_A + R_B = 0 \longrightarrow V_A = F_2 + F_1 - \frac{3F_2}{2} - \frac{F_1}{2} - \frac{C}{2a} = 0{,}125\ kN$

$A \circlearrowleft F_1 a - 2R_B a + 3F_2 a + C = 0$

$R_B = \frac{-3F_2 a - F_1 a - C}{-2a} = \frac{3F_2}{2} + \frac{F_1}{2} + \frac{C}{2a} = 2{,}875\ kN$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 86

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 86



4) Calcolare tutte le reazioni vincolari (interne ed esterne) della struttura schematizzata in figura.

[$|O_A| = |O_B| = |O_D| = |V_B| = |V_D| = 3/2\,F$, $|V_A| = 1/2\,F$]

5) Dato il tensore della tensione $\sigma_{xx} = 250$ MPa, $\sigma_{yy} = 310$ MPa, $\sigma_{zz} = -180$ MPa, $\tau_{xy} = -90$ MPa, $\tau_{xz} = 110$ MPa, $\tau_{yz} = 0$ MPa, trovare il modulo del vettore della tensione (f), la componente normale (σ), la componente tangenziale (τ) agenti sui piani individuati dai seguenti versori:

a) $\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix}$; b) $\begin{Bmatrix}0\\1\\0\end{Bmatrix}$; c) $\begin{Bmatrix}0\\0\\1\end{Bmatrix}$; d) $\begin{Bmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{Bmatrix}$

[a) 288, 250, 142; b) 323, 310, 90; c) 211, -180, 110; d) 205, 140, 150 (valori in MPa)]

A) Quante equazioni di equilibrio si devono scrivere per un sistema piano di 3 elementi?

B) Per un sistema labile soggetto a carichi, è sempre impossibile trovare l'equilibrio?

C) Quante incognite distinte presenta una cerniera interna tra 2 elementi (non caricata direttamente)?

D) Spiegare perché le componenti di tensione vengono assunte talvolta concordi, talvolta discordi rispetto agli assi corrispondenti.

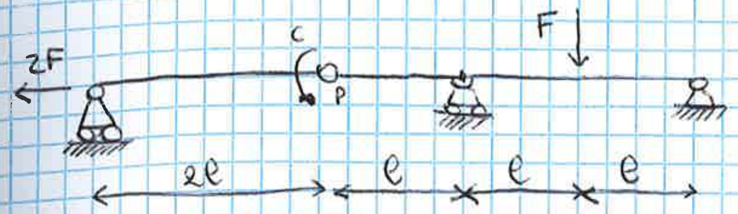
E) Per ottenere la relazione $\{f\} = [\sigma]\{n\}$ si ricorre a un tetraedro (di Cauchy). Perché deve essere inifinitesimo? Perché non si considera un elemento parallelepipedo?

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 86

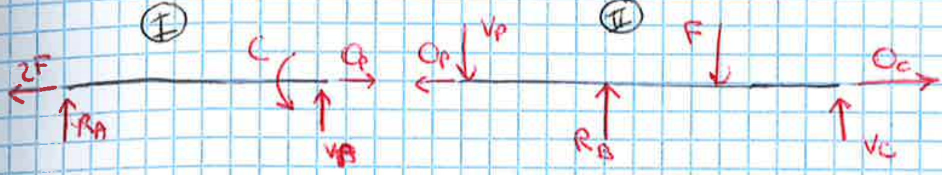
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 86

Esercitazione 2

1



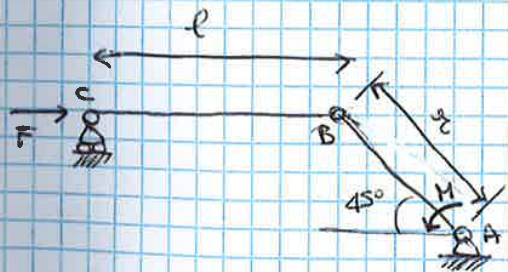
$F = 2000\ N$
$C = 1000\ Nm$
$\ell = 0.5\ m$

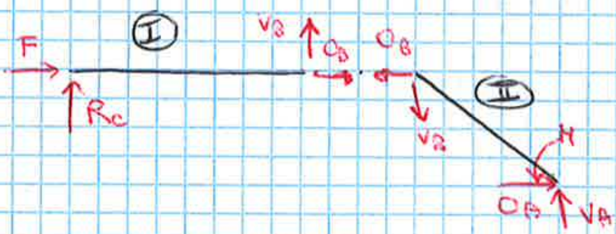


I
$\rightarrow \quad O_P - 2F = 0 \qquad O_P = 2F$
$\uparrow \quad R_A + V_P = 0 \qquad R_A = -V_P = \frac{C}{2\ell}$
$A \circlearrowleft \quad V_P 2\ell + C \qquad V_P = -\frac{C}{2\ell}$

II
$\rightarrow \quad O_C - O_P = 0 \qquad O_C = O_P = 2F$
$\uparrow \quad R_B - F + V_C - V_P = 0$
$V_C = V_P + F - R_B$
$V_C = -\frac{C}{2\ell} + F - R_B$
$C \circlearrowright \quad -F\ell + 2\ell R_B - V_P 3\ell = 0$
$V_C = \frac{F}{2} + \frac{C}{4\ell} \qquad R_B = \frac{F}{2} + \frac{3}{2}V_P = \frac{F}{2} - \frac{3C}{4\ell}$

2





$h = v - 3m$
$v = 2(2) + 1 = 5$
$m = 2$
$h = -1$

I
$\uparrow \quad R_C + V_B = 0 \qquad R_C = -V_B \qquad R_C = V_B = 0$
$\rightarrow \quad F + O_B = 0 \qquad F = -O_B \qquad O_B = -F$
$B \circlearrowright \quad R_C \ell = 0 \qquad R_C = 0$

II
$\leftarrow \quad O_B - O_A = 0 \qquad O_B = O_A = -F$
$\uparrow \quad V_A - V_B = 0 \qquad V_A = V_B = 0$
$B \circlearrowleft \quad \cancel{V_A \frac{r}{\sqrt{2}}} + M + O_A \frac{r}{\sqrt{2}} = 0 \qquad M = -O_A \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{Fr}{\sqrt{2}}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 86

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 86

5

$\sigma_{xx} = 250$ MPa
$\sigma_{yy} = 310$ MPa
$\sigma_{zz} = -180$ MPa
$\tau_{xy} = -90$ MPa
$\tau_{xz} = 110$ MPa
$\tau_{yz} = 0$ MPa

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 250 & -90 & 110 \\ -90 & 310 & 0 \\ 110 & 0 & -180 \end{bmatrix}$$

a) $\{m\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$\{f\} = [\sigma]\{m\}$ $\qquad \{f\} = \begin{bmatrix} 250 & -90 & 110 \\ -90 & 310 & 0 \\ 110 & 0 & -180 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$\{f\} = \begin{Bmatrix} 250 \\ -90 \\ 110 \end{Bmatrix}$

$\|f\| = \sqrt{250^2 + (-90)^2 + 110^2} = 288$ MPa

$\sigma = \{m\}^T\{f\} \longrightarrow \sigma = \{1\,0\,0\} \begin{Bmatrix} 250 \\ -90 \\ 110 \end{Bmatrix} = 250$ MPa

$\tau = \sqrt{288^2 - 250^2} = 142$ MPa

b) $\{m\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$\{f\} = [\sigma]\{m\}$ $\qquad \{f\} = \begin{bmatrix} 250 & -90 & 110 \\ -90 & 310 & 0 \\ 110 & 0 & -180 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$\{f\} = \begin{Bmatrix} -90 \\ 310 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$\|f\| = \sqrt{90^2 + 310^2} = 323$ MPa

$\sigma = \{m\}^T\{f\} \longrightarrow \sigma = \{0\,1\,0\} \begin{Bmatrix} -90 \\ 310 \\ 0 \end{Bmatrix} = 310$ MPa

$\tau = \sqrt{323^2 - 310^2} = 90$ MPa

c) $\{m\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$

$\{f\} = [\sigma]\{m\}$ $\qquad \{f\} = \begin{bmatrix} 250 & -90 & 110 \\ -90 & 310 & 0 \\ 110 & 0 & -180 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$

$\{f\} = \begin{Bmatrix} 110 \\ 0 \\ -180 \end{Bmatrix}$

$\|f\| = \sqrt{110^2 + 180^2} = 211$ MPa

$\sigma = \{m\}^T\{f\} \longrightarrow \sigma = \{0\,0\,1\} \begin{Bmatrix} 110 \\ 0 \\ -180 \end{Bmatrix} = -180$ MPa

$\tau = \sqrt{211^2 - 180^2} = 110$ MPa

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 86

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 86

FONDAMENTI di MECCANICA STRUTTURALE
Anno accademico 2015/2016 - Esercitazione n° 3

Nota: nelle risposte i valori delle tensioni sono arrotondati all'unità.

1) Per i seguenti stati di tensione in un punto di un solido (valori in MPa):

a) $\sigma_{xx} = 120$, $\sigma_{yy} = 240$, $\sigma_{zz} = 408$, $\tau_{xy} = -150$, $\tau_{xz} = 0$, $\tau_{yz} = 0$;

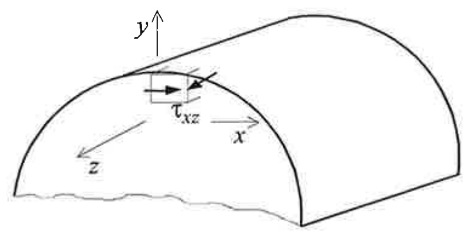
b) $\sigma_{xx} = 0$, $\sigma_{yy} = 0$, $\sigma_{zz} = 150$, $\tau_{xy} = 0$, $\tau_{xz} = 50$, $\tau_{yz} = 0$;

c) $\sigma_{xx} = 40$, $\sigma_{yy} = 350$, $\sigma_{zz} = 170$, $\tau_{xy} = 0$, $\tau_{xz} = 0$, $\tau_{yz} = -100$;

utilizzando i cerchi di Mohr determinare tensioni e direzioni principali e la massima tensione tangenziale.

[a): σ_1 = 408 MPa, σ_2 = 342 MPa, σ_3 = 18 MPa, $\alpha(p_2\hat{\ }x)$ = 56°, τ_{max} = 195 MPa;
b): σ_1 = 165 MPa, σ_2 = 0, σ_3 = -15 MPa, $\alpha(p_1\hat{\ }z)$ = -17°, τ_{max} = 90 MPa;
[c): σ_1 = 395 MPa, σ_2 = 126 MPa, σ_3 = 40 MPa, $\alpha(p_1\hat{\ }y)$ = 24°, τ_{max} = 177 MPa]

2) Un punto della sezione di un albero di trasmissione è sollecitato dalla sola componente di tensione τ_{xz} = 180 MPa. Disegnare i cerchi di Mohr per calcolare le tensioni principali e l'angolo tra la terna principale $p_1p_2p_3$ e quella xyz.



[σ_1 = 180 MPa, σ_2 = 0, σ_3 = -180 MPa;
$\alpha(p_1\hat{\ }z)$ = -45°]

3) Per il campo di spostamenti elastici, espressi nel riferimento xyz dalle relazioni

$$u = Ax\,, \qquad v = By\,, \qquad w = 0\,,$$

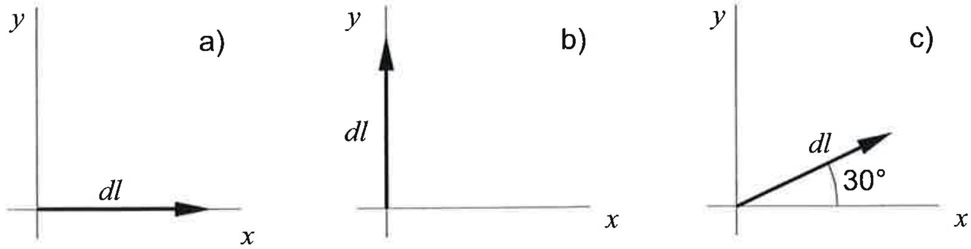
in cui $A = 1\cdot10^{-3}$ e $B = -0.5\cdot10^{-3}$:

a) calcolare gli spostamenti dell'estremo di un segmento di lunghezza dl orientato come l'asse x;

b) calcolare gli spostamenti dell'estremo di un segmento di lunghezza dl orientato come l'asse y;

c) calcolare gli spostamenti dell'estremo di un segmento di lunghezza dl inclinato di +30° sull'asse x.

Verificare se il sistema di riferimento xyz è principale per le deformazioni.



[a) $du = 1.0\cdot10^{-3}\,dl$, $dv = dw = 0$; b) $du = 0$, $dv = -0.5\cdot10^{-3}\,dl$, $dw = 0$;
c) $du = 8.66\cdot10^{-4}\,dl$, $dv = -2.50\cdot10^{-4}\,dl$, $dw = 0$; sì]

A) È sempre possibile trovare tensioni e direzioni principali? Motivare.

B) Esaminando il tensore della tensione, da cosa si riconosce se un asse è direzione principale?

C) Tra quali limiti varia la tensione tangenziale in un punto, al variare dell'orientazione della superficie su cui la si considera?

D) Perché l'angolo (al centro) che identifica le direzioni nel cerchio di Mohr è doppio rispetto a quello nello spazio fisico?

E) Spiegare perché il tensore di deformazione non risente del moto rigido.

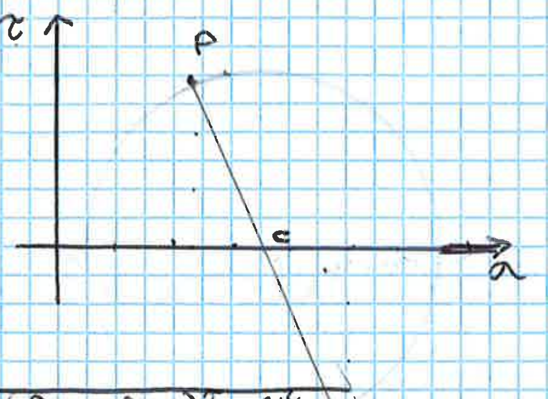
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 86

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 86

esercitazione 3

1

a) $\begin{bmatrix} +120 & -150 & 0 \\ -150 & 240 & 0 \\ 0 & 0 & 408 \end{bmatrix}$



$\sigma_c = \sigma_{zz} = 408$ MPa

$P = (\sigma_{xx}, -\tau_{xy}) = (120, +150)$
$Q = (\sigma_{yy}, \tau_{xy}) = (240, -150)$

$$\sigma_{a,b} = C \pm R = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} =$$

$$\frac{120+240}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{120-240}{2}\right)^2 + 150^2} = 180 \pm 161 \begin{cases} 342 \text{ MPa} \\ 18 \text{ MPa} \end{cases}$$

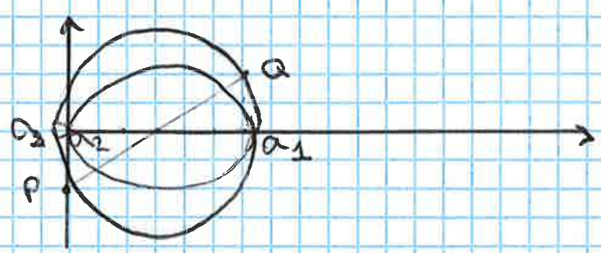
$$\begin{cases} \sigma_1 = 408 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = 342 \text{ MPa} \\ \sigma_3 = 18 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left| \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}} \right| = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left| \frac{-2 \cdot 150}{120-240} \right| = 34°$$

$$\begin{cases} \alpha \\ -\alpha \\ -90+\alpha \\ 90-\alpha \longrightarrow 90-34 = 56° \end{cases}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 195 \text{ MPa}$$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 0 \\ 50 & 0 & 150 \end{bmatrix}$



$\sigma_c = \sigma_{yy} = 0$

$P = (0, -50)$
$Q = (150, 50)$

$$\sigma_{a,b} = \frac{0+150}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0-150}{2}\right)^2 + 50^2} = \frac{150}{2} \pm 90 \begin{cases} 165 \text{ MPa} \\ -15 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = 165 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = 0 \text{ MPa} \\ \sigma_3 = -15 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left| \frac{2 \cdot 50}{0-150} \right| = \frac{-34°}{2} = -15°$$

$$\tau_{MAX} = \frac{165+15}{2} = 90 \text{ MPa}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 86

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 86

b) 

$du = dw = 0$

$dv = -0{,}5 \cdot 10^{-3}\, d\ell$

c) 

$du = 1 \cdot 10^{-3} \cdot \cos 30° = 8{,}66 \cdot 10^{-4}\, d\ell$

$dw = 0$

$dv = -0{,}5 \cdot 10^{-3}\, \mathrm{sen}\, 30° = -2{,}5 \cdot 10^{-4}\, d\ell$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sì è principale perché i termini fuori diagonale sono zero

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 86

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 86

6) Un materiale fragile è sollecitato dalle tensioni $\sigma_{xx} = 90$ MPa, $\sigma_{yy} = -55$ MPa, $\sigma_{zz} = 70$ MPa, $\tau_{xy} = 48$ MPa, $\tau_{xz} = 0$, $\tau_{yz} = 0$ MPa. Trovare quale deve essere la tensione di rottura minima del materiale per ottenere un coefficiente di sicurezza pari a 3.

[313 MPa]

7) Un componente in acciaio da bonifica è sottoposto, nel punto più sollecitato, alle tensioni $\sigma_{xx} = 0$ MPa, $\sigma_{yy} = 0$ MPa, $\sigma_{zz} = 160$ MPa, $\tau_{xy} = 0$ MPa, $\tau_{xz} = 90$, $\tau_{yz} = 0$ MPa. Scegliere un materiale adatto per realizzare un coefficiente di sicurezza di almeno 1.5 rispetto allo snervamento.

[$R_{p0,2}$>360 MPa]

A) Qual è la differenza tra i prodotti $[J]\{dX\}$ e $[\varepsilon]\{dX\}$?

B) In generale, un segmento orientato di un angolo qualsiasi rispetto a un asse principale di deformazione è soggetto a scorrimento o no? Perché?

C) Quanti sono i parametri indipendenti che legano tensioni e deformazioni in un materiale elastico isotropo?

D) In stato di tensione piana, quanti cerchi di Mohr delle tensioni passano per l'origine del diagramma σ τ?

E) La misura della deformazione della provetta mediante estensimetro è influenzata dalla deformabilità della macchina di prova?

F) L'allungamento dopo rottura risente della deformazione elastica? Quale indicazione si ottiene da esso?

G) Perché all'ipotesi della massima τ corrisponde una superficie limite prismatica a sei facce?

H) Spiegare perché l'ipotesi della massima τ è più cautelativa di quella dell'energia di distorsione.

I) Spiegare la differenza tra la "tensione limite" e "tensione ammissibile".

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 86

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 86

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = 6{,}117 \cdot 10^{-3} \\ \varepsilon_2 = 1{,}430 \cdot 10^{-3} \\ \varepsilon_3 = -5{,}09 \cdot 10^{-3} \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left| \frac{4{,}62 \cdot 10^{-3}}{10^{-3}(3{,}39 - 4{,}16)} \right| = 40{,}25^\circ$$

$$45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$$

$$\begin{cases} \alpha = 40{,}25^\circ \\ -\alpha = -40{,}25^\circ \\ 90^\circ - \alpha = 49{,}7^\circ \leftarrow \\ -(90^\circ - \alpha) = -49{,}7^\circ \end{cases} \qquad \boxed{\alpha = 49{,}7^\circ}$$

c)

$$\eta = \frac{1}{2}(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz})$$

$$\eta = \frac{1}{2}(280 \cdot 3{,}39 \cdot 10^{-3} + 320 \cdot 4{,}16 \cdot 10^{-3} + 160 \cdot 5{,}09 \cdot 10^{-3} + 120 \cdot 4{,}62 \cdot 10^{-3})$$

$$\eta = \frac{3{,}6492}{2} = 1{,}82 \ MJ/m^3$$

→ per verificare che sia lo stesso anche su quelle principali devo calcolare $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (posso ricavarle o da $[\sigma]$ o da $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$)

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 280 & -120 & 0 \\ -120 & 320 & 0 \\ 0 & 0 & -160 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_c = \sigma_{zz} = -160 \ MPa$$

$$\sigma_{a,b} = \frac{280+320}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{280-320}{2}\right)^2 + \left(-\frac{120}{2}\right)^2} = 300 \pm 63{,}2 \begin{cases} 363{,}2 \ MPa \\ 236{,}8 \ MPa \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = 363{,}2 \ MPa \\ \sigma_2 = 236{,}8 \ MPa \\ \sigma_3 = -160 \ MPa \end{cases}$$

$$\eta = \frac{1}{2}(363{,}2 \cdot 6{,}117 \cdot 10^{-3} + 1{,}430 \cdot 10^{-3} \cdot 236{,}8 + 160 \cdot 5{,}09 \cdot 10^{-3}) \approx 1{,}69 \ MJ/m^3$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 86

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 86

4

a) $[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 35 \\ 0 & 35 & 80 \end{bmatrix}$

$\sigma_c = \sigma_{zz} = 0$ MPa

$\sigma_{a,b} = \frac{120+80}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{120-80}{2}\right)^2 + 35^2} \Rightarrow 100 \pm \sqrt{400+1225} \begin{cases} 140 \text{ MPa} \\ 60 \text{ MPa} \end{cases}$

$\begin{cases} \sigma_1 = 140 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = 60 \text{ MPa} \\ \sigma_3 = 0 \text{ MPa} \end{cases}$

* $\sigma_{id} = \sigma_1 = 140$ MPa

b) $[\sigma] = \begin{bmatrix} 40 & 150 & 0 \\ 150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\sigma_c = \sigma_{zz} = 0$ MPa

$\sigma_{a,b} = \frac{40+0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{40-0}{2}\right)^2 + 150^2} = \begin{cases} 171 \text{ MPa} \\ -131 \text{ MPa} \end{cases}$

$\begin{cases} \sigma_1 = 171 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = 0 \text{ MPa} \\ \sigma_3 = -131 \text{ MPa} \end{cases}$

* $\sigma_1 = \sigma_{id} = 171$ MPa $\leftarrow$ + pericoloso

5

$[\sigma] = \begin{bmatrix} 110 & -150 & 0 \\ -150 & -140 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$C_s = 1,5$

$\sigma_c = \sigma_{zz} = 0$ MPa

$\sigma_{a,b} = \frac{110-140}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{110+140}{2}\right)^2 + 150^2} \begin{cases} 180 \text{ MPa} \\ -220 \text{ MPa} \end{cases}$

$\begin{cases} \sigma_1 = 180 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = 0 \text{ MPa} \\ \sigma_3 = -220 \text{ MPa} \end{cases}$

$\boxed{\text{Max tensione tangenziale}}$

$\sigma_{id} = \sigma_1 - \sigma_3 = 180+220 = 390$ MPa

$\sigma_{lim} = 390 \cdot 1,5 = 585$ MPa

$\boxed{\text{Energia di distorsione}}$

$\sigma_{id} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_1-\sigma_3)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2} = 338$ MPa

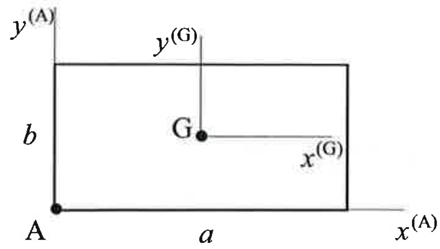
$\sigma_{lim} = 338 \cdot 1,5 = 508$ MPa

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 86

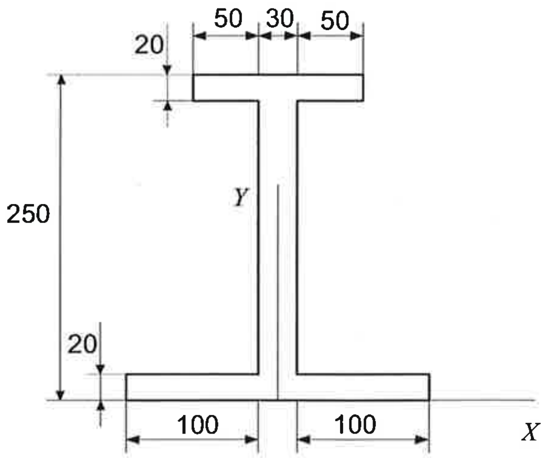
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 86

FONDAMENTI di MECCANICA STRUTTURALE
Anno accademico 2015/2016 - Esercitazione n° 5

1) Per una sezione rettangolare di lati $a = 20$ mm e $b = 10$ mm:
   a) considerando i riferimenti con origine nel baricentro G, determinare quello principale $p_1^{(G)}p_2^{(G)}$ e valutare i relativi momenti d'inerzia;
   b) considerando i riferimenti con origine in A, determinare quello principale $p_1^{(A)}p_2^{(A)}$ e valutare i relativi momenti d'inerzia.

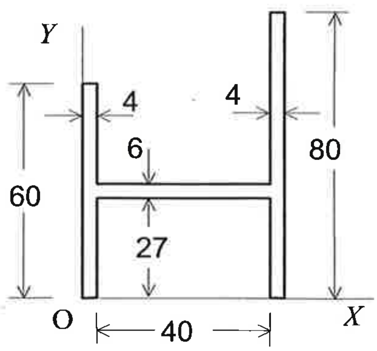


[$\alpha(p_1^{(G)} \wedge x^{(G)}) = 90°$, $J_1^{(G)} = 0.667 \cdot 10^4$ mm^4, $J_2^{(G)} = 0.167 \cdot 10^4$ mm^4,
$\alpha(p_1^{(A)} \wedge x^{(A)}) = 67.5°$, $J_1^{(A)} = 3.081 \cdot 10^4$ mm^4, $J_2^{(A)} = 0.253 \cdot 10^4$ mm^4]



2) Valutare la posizione del baricentro G per la sezione a I indicata in figura, successivamente calcolare i momenti d'inerzia nel riferimento baricentrico xy avente assi paralleli a XY. Il riferimento xy è principale?

[$Y_G = 108$ mm, $X_G = 0$ mm;
$J_{xx} = 11.47 \cdot 10^7$ mm^4, $J_{yy} = 2.44 \cdot 10^7$ mm^4]



3) Per la sezione schematizzata in figura, determinare:
   a) la posizione del baricentro G;
   b) i momenti d'inerzia e centrifugo rispetto al riferimento Gxy avente assi paralleli a OXY;
   c) l'orientazione del riferimento centrale principale e i momenti d'inerzia principali.

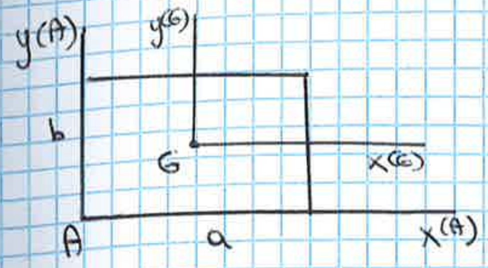
[$X_G = 26.3$ mm, $Y_G = 34.0$ mm;
$J_{xx} = 2.63 \cdot 10^5$ mm^4, $J_{yy} = 3.00 \cdot 10^5$ mm^4, $J_{xy} = 0.63 \cdot 10^5$ mm^4;
$J_1 = 3.47 \cdot 10^5$ mm^4, $J_2 = 2.15 \cdot 10^5$ mm^4, $\alpha(p_1 \wedge x) = 53.2°$]

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 86

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 86

Esercitazione 5

1



a) Solo locale!

$J_{xx} = \frac{ab^3}{12} = 1666,7 \text{ mm}^4$

$J_{yy} = \frac{a^3 b}{12} = 6666,7 \text{ mm}^4$

$J_{xy} = 0 \text{ mm}^4$

b) $X_G = 10$ mm
$Y_G = 5$ mm

$J_{XX} = J_{xx} + 5^2 \cdot 200 = 1666,7 + 25 \cdot 200 = 6666,7 \text{ mm}^4$

$J_{YY} = J_{yy} + 10^2 \cdot 200 = 26666,7 \text{ mm}^4$

$J_{XY} = 200 \cdot 10 \cdot 5 = 10000 \text{ mm}^4$

$J_{1,2} = \frac{J_{XX} + J_{YY}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{XX} - J_{YY}}{2}\right)^2 + J_{XY}^2}$

$16666,7 + 14142,13 = 3,08 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$

$16666,7 - 14142,13 = 0,253 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$

$\alpha' = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left| \frac{2 J_{XY}}{J_{XX} - J_{YY}} \right| = 22,5°$

$\alpha = 90 - \alpha' = 67,5°$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 86

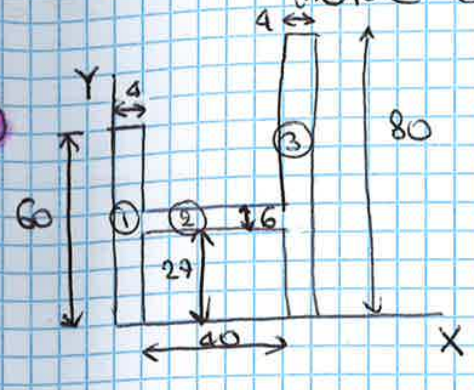
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 86

- $J_Y = A_1 x_1^2 + J_{\mu\mu_1} + A_2 x_2^2 + J_{\mu\mu_2} + A_3 x_3^2 + J_{\mu\mu_3} =$ $\left(\to \frac{b^3 h}{12}\right)$

$$= 2600 \cdot 0 + \frac{20 \cdot 130^3}{12} + 0 + \frac{240 \cdot 30^3}{12} + 0 + \frac{20 \cdot 230^3}{12} = 2{,}44 \cdot 10^7\ mm^4$$

- $J_{xy} = 0 \longrightarrow$ il riferimento xy è principale
  asse di simmetria
  non è centrale principale, solo principale

③



① $X_1 = 2\ mm$
$Y_1 = 30\ mm$
$A_1 = 4 \cdot 60 = 240\ mm^2$

② $X_2 = 20 + 4 = 24\ mm$
$Y_2 = 30\ mm$
$A_2 = 6 \cdot 40 = 240\ mm^2$

③ $X_3 = 4 + 40 + 2 = 46\ mm$
$Y_3 = 40\ mm$
$A_3 = 4 \cdot 80 = 320\ mm^2$

$A_{TOT} = A_1 + A_2 + A_3 = 240 \cdot 2 + 320 = 800\ mm^2$

$S_X = A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + A_3 Y_3 = (240 \cdot 30) + (240 \cdot 30) + (320 \cdot 40) = 27200\ mm^3$

$S_Y = A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 = 240 \cdot 2 + 240 \cdot 24 + 320 \cdot 46 = 20960\ mm^3$

$X_G = \frac{20960}{800} = 26{,}2\ mm \qquad Y_G = \frac{27200}{800} = 34\ mm$

Gxy riferimento baricentrico $\begin{cases} X = X_G + x \\ Y = Y_G + y \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = X_1 - X_G = 2 - 26{,}2 = -24{,}2\ mm \\ y_1 = Y_1 - Y_G = 30 - 34 = -4\ mm \end{cases}$

$\begin{cases} x_2 = 24 - 26{,}2 = -2{,}2\ mm \\ y_2 = 30 - 34 = -4\ mm \end{cases}$

$\begin{cases} x_3 = 46 - 26{,}2 = 19{,}8\ mm \\ y_3 = 40 - 34 = 6\ mm \end{cases}$

- $J_{xx} = 240 \cdot (-4)^2 + \frac{4 \cdot 60^3}{12} + 240 \cdot (-4)^2 + \frac{40 \cdot 6^3}{12} + 320 \cdot 6^2 + \frac{4 \cdot 80^3}{12} = 2{,}63 \cdot 10^5\ mm^4$
- $J_{yy} = 240 \cdot (24{,}2)^2 + \frac{60 \cdot 4^3}{12} + 240 \cdot (-2{,}2)^2 + \frac{6 \cdot 40^3}{12} + 320 \cdot (19{,}8)^2 + \frac{80 \cdot 4^3}{12} = 3{,}00 \cdot 10^5\ mm^4$
- $J_{xy} = A_1 x_1 y_1 + A_2 x_2 y_2 + A_3 x_3 y_3 = 240(-24{,}2)(-4) + 240(-2{,}2)(-4) + 320(19{,}8)(6) =$
$= 63360\ mm^4 = 0{,}63 \cdot 10^5\ mm^4$

$10^6\ mm^3$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 86

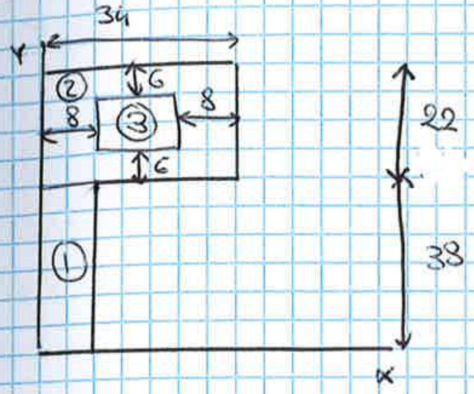
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 86

$$J_{1,2} = \left(\frac{3,06+6,6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3,06-6,6}{2}\right)^2 + 0,173^2}\right) \cdot 10^5 \begin{cases} 6,61 \cdot 10^5 \ mm^4 \\ 3,05 \cdot 10^5 \ mm^4 \end{cases}$$

$$\alpha' = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left| \frac{2 \cdot J_{xy}}{J_{xx} - J_{yy}} \right| = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left| \frac{2 \cdot 0,173 \cdot \cancel{10^5}}{(3,06-6,6) \cdot \cancel{10^5}} \right| = -2,8$$

$$\alpha = 90 + \alpha' = 87,2^\circ$$

5



① $X_1 = 4$ mm
$Y_1 = 19$ mm
$A_1 = 8 \cdot 38 = 304 \ mm^2$

② $X_2 = 17$ mm
$Y_2 = 38 + \frac{22}{2} = 11 + 38 = 49$ mm
$A_2 = 34 \cdot 22 = 748 \ mm^2$

③ $X_3 = 8 + \frac{(34-8-8)}{2} = 8 + 9 = 17$ mm
$Y_3 = 38 + \frac{22}{2} = 49$ mm
$A_3 = 18 \cdot 10 = 180 \ mm^2$

$A_{TOT} = A_1 + A_2 - A_3 = 304 + 748 - 180 = 872 \ mm^2$

$S_x = A_1 Y_1 + A_2 Y_2 - A_3 Y_3 = 304 \cdot 19 + 748 \cdot 49 - 180 \cdot 49 = 33608 \ mm^3$

$S_y = A_1 X_1 + A_2 X_2 - A_3 X_3 = 304 \cdot 4 + 748 \cdot 17 - 180 \cdot 17 = 10872 \ mm^3$

$X_G = \frac{S_y}{A} = \frac{10872}{872} = 12,5$ mm

$Y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{33608}{872} = 38,5$ mm

Sistema baricentrico $\begin{cases} X = X_G + x \\ Y = Y_G + y \end{cases}$

$x_1 = X_1 - X_G = 4 - 12,5 = -8,5$ mm
$y_1 = Y_1 - Y_G = 19 - 38,5 = -19,5$ mm

$x_2 = X_2 - X_G = 17 - 12,5 = 4,5$ mm
$y_2 = Y_2 - Y_G = 49 - 38,5 = 10,5$ mm

$x_3 = X_3 - X_G = 17 - 12,5 = 4,5$ mm
$y_3 = Y_3 - Y_G = 49 - 38,5 = 10,5$ mm

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 86

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 86

- $J_{xx} = A_1 y_1^2 + J_{\xi\xi_1} + A_1 y_1^2 + J_{\xi\xi_1} + A_2 y_2^2 + \underbrace{J_{\xi\xi_2}}_{bh^3/12}$

$= 2(J_{\xi\xi_1} + A_1 y_1^2) + A_2 y_2^2 + \frac{bh^3}{12}$

$= 2(5{,}52 \cdot 10^6 + 2{,}12 \cdot 10^3 (15{,}5)^2) + 200 \cdot 10 \cdot (-37{,}5)^2 + \frac{200 \cdot 10^3}{12} = 15{,}03 \cdot 10^6 \ mm^4$

$x_1 = 24{,}4 - 0 = 24{,}4 \ mm$

- $J_{yy} = 2(J_{\eta\eta} + A_1 x_1^2) + \underbrace{A_2 x_2^2}_{\to 0} + \frac{10 \cdot 200^3}{12} = 13{,}28 \cdot 10^6 \ mm^4$

- $J_{1,2} = \frac{J_{xx} + J_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{xx} - J_{yy}}{2}\right)^2 + \underbrace{J_{xy}^2}_{=0}}$ $\begin{cases} J_{xx} = J_1 \\ J_{yy} = J_2 \end{cases}$

simmetrico

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 86

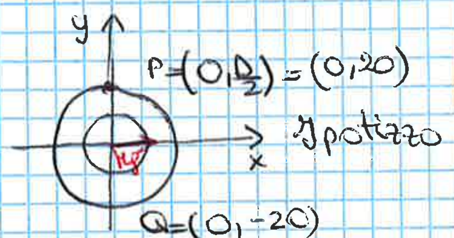
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 86

esercitazione 6

(1)
$d = 10\ mm$
$D = 40\ mm$
$M_g = 750\ kN\,mm$
$N = 170\ kN$
$R_{p02} = 540\ MPa$ (duttile)

$$C_s = \frac{\sigma_{lim}}{\sigma_{id}} = \frac{R_{p02}}{\sigma_{id}}$$

$\sigma_{lim} = R_{p02}$
$\sigma_{zz} \rightarrow [\sigma] \rightarrow \sigma_{id}$ $\Big\} C_s$



Ipotizzo M_g coincidente con M_x

$M_x = M_g$

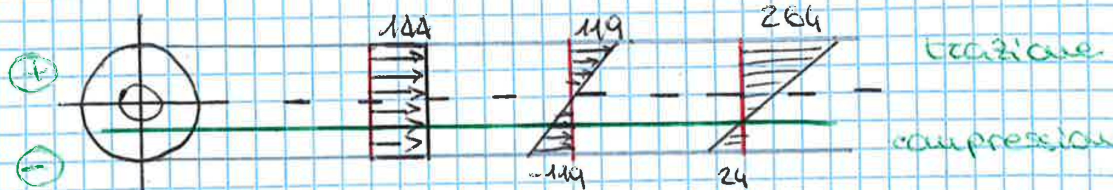
$$\sigma_{zz} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_{xx}} y$$

$$A = \pi \frac{D^2 - d^2}{4} = \pi \frac{40^2 - 10^2}{4} = 1178{,}1\ mm^2$$

$$J_{xx} = \pi \frac{D^4 - d^4}{64} = \pi \frac{40^4 - 10^4}{64} = 125172{,}8\ mm^4$$

$$\sigma_{zz}^{P} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_{xx}} y_P = \frac{170 \cdot 10^3}{1{,}178 \cdot 10^3} + \frac{750 \cdot 10^3}{125{,}172 \cdot 10^3} \cdot \frac{40}{2} = 264{,}15\ MPa$$

$$\sigma_{zz}^{Q} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_{xx}} y_Q = \underbrace{\frac{170}{1{,}178}}_{144} + \underbrace{\frac{750}{125{,}172} \cdot \left(-\frac{40}{2}\right)}_{-119} = 24{,}477\ MPa$$



$$\sigma_{zz} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_{xx}} y = 0 \qquad y = -\frac{N}{A} \frac{J_{xx}}{M_x} = \frac{-170}{1178{,}1} \cdot \frac{125{,}172 \cdot 10^3}{750 \cdot 10^3} = 2{,}4 \cdot 10^{-2}\ mm$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \qquad [\sigma]^P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{264{,}15} \end{bmatrix} \qquad [\sigma]^Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24{,}477 \end{bmatrix}$$

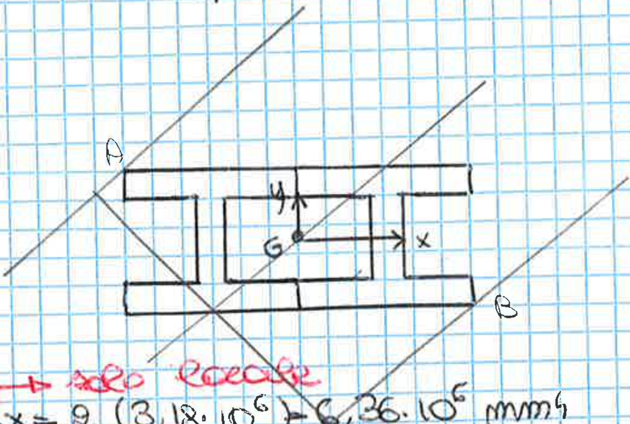
σ_3 σ_2 σ_1

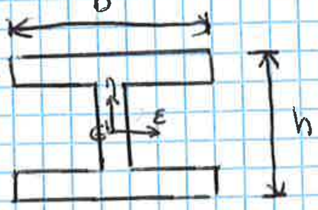
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 86

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 86

$$\begin{cases} \sigma_{zz}^{A} = \dfrac{1{,}76\cdot 10^6}{2{,}80\cdot 10^6}\cdot 70{,}71 - \left(\dfrac{-1{,}76\cdot 10^6}{0{,}73\cdot 10^6}\right)\cdot 30{,}81 = 119\ MPa \\ \sigma_{zz}^{B} = \dfrac{1{,}76\cdot 10^6}{2{,}80\cdot 10^6}\cdot 0 - \left(\dfrac{-1{,}76}{0{,}73}\right)(-39{,}88) = -96\ MPa \\ \sigma_{zz}^{C} = \dfrac{1{,}76}{2{,}80}(-70{,}71) - \left(-\dfrac{1{,}76}{0{,}73}\right)(30{,}83) = 29{,}9\ MPa \end{cases}$$

3





$h = 120\ mm$
$b = 64\ mm$
$A = 1{,}32\cdot 10^3\ mm^2$
$J_{\xi\xi} = 3{,}18\cdot 10^6\ mm^4$
$J_{\eta\eta} = 2{,}77\cdot 10^5\ mm^4$

$$x_1 = \frac{64}{2} = 32\ mm$$

solo locale

$$J_{xx} = 2\,(3{,}18\cdot 10^6) = 6{,}36\cdot 10^6\ mm^4$$

trasporto

$$J_{yy} = x_1^2 A + J_{\eta\eta} =$$
$$= 2\left[(32)^2\cdot 1{,}32\cdot 10^3 + 2{,}77\cdot 10^5\right] = 3{,}26\cdot 10^6\ mm^4$$

$$J_{xy} = 0$$

$N = 8{,}0\cdot 10^4\ N$
$M_x = 5{,}3\cdot 10^6\ N\,mm$
$M_y = 2{,}5\cdot 10^6\ N\,mm$

$$tg\,\varphi = \frac{M_y\,J_{xx}}{M_x\,J_{yy}} = \frac{10^6\,(2{,}5\cdot 6{,}36)}{10^6\,(5{,}3\cdot 3{,}26)} = 0{,}92 \qquad \varphi = 42{,}6 \approx 43°$$

$$\sigma_{zz}^{A} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_{xx}}y_A - \frac{M_y}{J_{yy}}x_A = \frac{8\cdot 10^4}{2\cdot 1{,}32\cdot 10^3} + \frac{5{,}3}{6{,}36}\cdot 60 - \frac{2{,}5}{3{,}26}(-64) = 129\ MPa$$

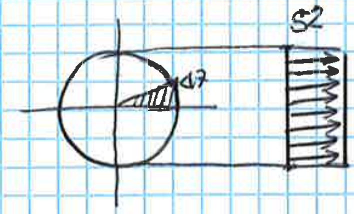
$$\sigma_{zz}^{B} = 30{,}3 + \frac{5{,}3}{6{,}36}(-60) - \frac{2{,}5}{3{,}26}(64) = 69\ MPa$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 86

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 86

esercitazione 7

1) $D = 35\ mm$
Ghisa grigia GJL-300
$N = 50\ kN$
$M_t = 400\ kN\ mm$



$A = \pi \cdot \left(\frac{35}{2}\right)^2$

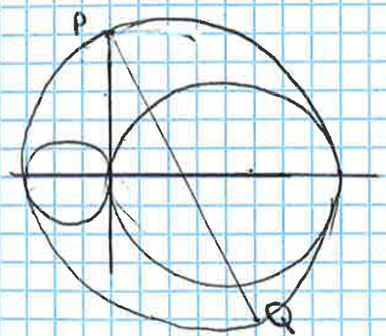
sezione piena

$J_p = \frac{\pi}{32} D^4 = \frac{\pi}{32} \cdot 35^4 = 1,473 \cdot 10^5\ mm^4$

$J_f = \frac{\pi}{64} D^4 = \frac{\pi}{64} \cdot 35^4 = 7,366 \cdot 10^4\ mm^4$

$\sigma_{zz} = \frac{N}{A} = \frac{50 \cdot 10^3}{\pi \left(\frac{35}{2}\right)^2} = 52\ N/mm^2$

$\tau_{cz} = \frac{M_t}{J_p} \cdot \frac{D}{2} = \frac{400 \cdot 10^3}{1,473 \cdot 10^5} \cdot \frac{35}{2} = 47\ N/mm^2$



P (0, 47)
Q (52, -47)

$R_m = 300\ N/mm^2$

$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_{zz}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{zz}}{2}\right)^2 + \tau_{cz}^2} = \frac{52}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{52}{2}\right)^2 + 47^2}$ $\begin{cases} 79\ N/mm^2 \\ -27\ N/mm^2 \end{cases}$

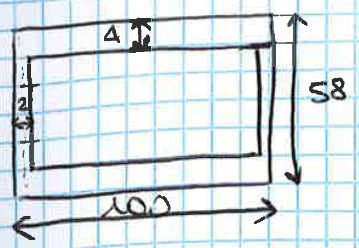
$\sigma_{id} = \sigma_1 = 106\ N/mm^2$

$C_s = \frac{300}{79} = 3,79$

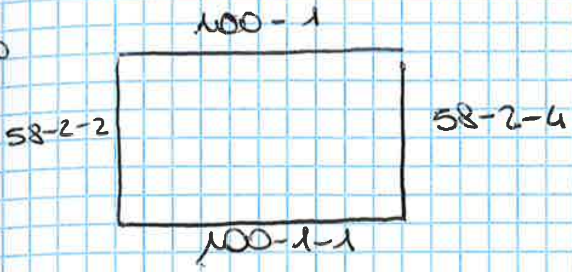
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 86

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 86

3



a) aperto



$$J_t = \frac{1}{3}(l - n \cdot 0{,}3 s) s^3$$

$$J_{t1} = \frac{1}{3}(99 - 0{,}3 \cdot 4) \cdot 4^3 = 2086{,}4 \text{ mm}^4$$

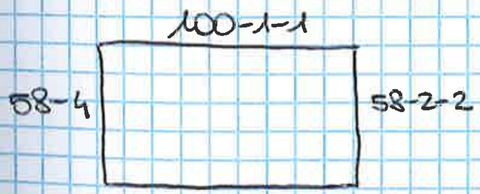
$$J_{t2} = \frac{1}{3}(54) \cdot 2^3 = 1{,}44 \cdot 10^2 \text{ mm}^4$$

$$J_{t3} = \frac{1}{3}(98) \cdot 4^3 = 2{,}091 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

$$J_{t4} = \frac{1}{3}(52 - 0{,}3 \cdot 2) 2^3 = 1{,}37 \cdot 10^2 \text{ mm}^4$$

$$J_t = J_{t1} + J_{t2} + J_{t3} + J_{t4} = 4{,}46 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

b) chiuso



$$J_t = \frac{4 \Omega^2}{\oint_l \frac{dl}{s}} = 4 \cdot \frac{(98 \cdot 54)^2}{2 \cdot \frac{98}{4} + 2 \cdot \frac{54}{2}} = 1{,}09 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

a) $M_t = 2{,}0 \cdot 10^5$ Nmm

$$\tau_{picco1} = \tau_{picco3} = \pm \frac{M_t}{J_t} \cdot s_i = \pm \frac{2 \cdot 10^5}{4{,}46 \cdot 10^3} \cdot 4 = \boxed{179 \text{ N/mm}^2}$$ τ_{MAX}

$$\tau_{picco2} = \tau_{picco4} = \pm \frac{2 \cdot 10^5}{4{,}46 \cdot 10^3} \cdot 2 = 89{,}6 \text{ N/mm}^2$$

b) $\tau_{picco} = \frac{t}{s} = \frac{M_t}{2 \Omega s}$

$$\tau_{picco1} = \frac{2{,}0 \cdot 10^5}{2(98 \cdot 54) \cdot 2} = \boxed{9 \text{ N/mm}^2}$$ τ_{MAX}

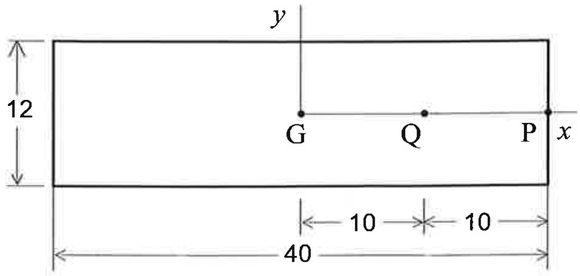
$$\tau_{picco2} = \frac{2{,}0 \cdot 10^5}{2(98 \cdot 54) \cdot 4} = 4{,}7 \text{ N/mm}^2$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 86

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 86

FONDAMENTI di MECCANICA STRUTTURALE
Anno accademico 2015/2016 - Esercitazione n° 8

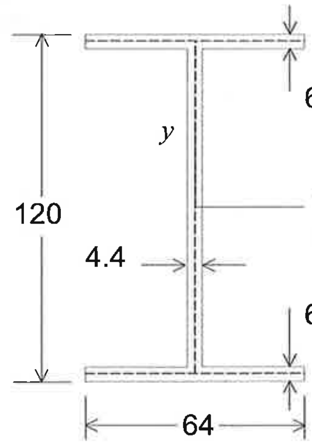
1) Una sezione rettangolare di lati a=12 mm e b=40 mm, è soggetta al momento flettente M_y=–4.50·10^5 Nmm e al taglio T_x=1.3·10^4 N. Calcolare le tensioni σ_{zz} e τ_{xz} e la tensione ideale (ipotesi della massima tensione tangenziale) nei punti P, Q, G. Quale punto è il più sollecitato?

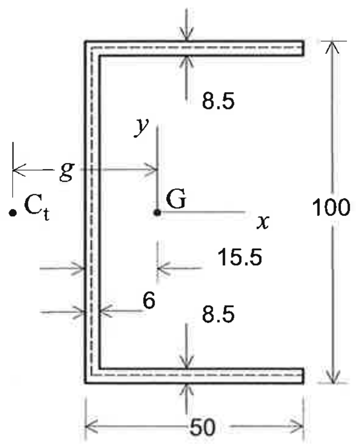


[P: σ_{zz} = 141 N/mm^2, τ_{xz} = 0, σ_{id} = 141 N/mm^2;
Q: σ_{zz} = 70 N/mm^2, τ_{xz} = 30 N/mm^2, σ_{id} = 92 N/mm^2;
G: σ_{zz} = 0, τ_{xz} = 41 N/mm^2, σ_{id} = 82 N/mm^2]

2) La figura mostra la sezione di un profilato IPE 120 UNI 5398 realizzato in acciaio S235 (tensione limite 235 N/mm^2) soggetta al momento flettente M_x = 6.5·10^6 Nmm e al taglio T_y = 2.8·10^4 N. Determinare il coefficiente di sicurezza per il punto più sollecitato.
Dati:
A=1.32·10^3 mm^2,
J_{xx}=J_1=3.18·10^6 mm^4,
J_{yy}=J_2=2.77·10^5 mm^4.

[$C_S \approx$ 1.9]





3) Per la sezione di un profilato a **U** 100 UNI 5680 mostrata in figura e sottoposta al taglio T_y = 1.00·10^4 N, valutare:
   a) la posizione del centro di taglio C_t;
   b) le massime tensioni causate dal taglio nell'anima e nelle piattabande;
   c) le tensioni aggiuntive di torsione che si producono nell'anima e nelle piattabande se T_y è applicato nel baricentro G.

   Dati: A=1.35·10^3 mm^2,
   J_{xx}=J_1=2.05·10^6 mm^4,
   J_{yy}=J_2=2.91·10^5 mm^4.

[g=31.7 mm; taglio: $\tau_{an.}$=20 N/mm^2, $\tau_{piatt.}$=10 N/mm^2;
torsione: $\tau_{an.}$=77 N/mm^2, $\tau_{piatt.}$=109 N/mm^2]

A) Spiegare perché in caso di momento flettente non costante lungo l'asse del solido di St. Venant il taglio deve essere non nullo.

B) Nello studio delle tensioni di taglio i momenti d'inerzia J_{xx}, J_{yy} e quelli statici S_x^*, S_y^* si riferiscono alla stessa area?

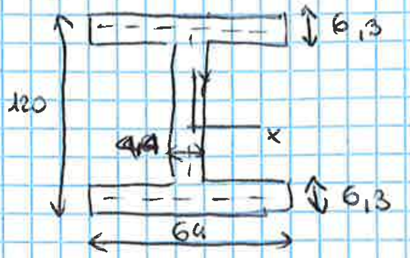
C) Considerando una sezione rettangolare soggetta a taglio verticale, perché in corrispondenza dei bordi inferiore e superiore la tensione τ si deve annullare?

D) Che effetto si produce se la forza di taglio non viene applicata nel centro di taglio?

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 86

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 86

2



$A = 1{,}32 \cdot 10^3 \ mm^2$

$J_{xx} = J_1 = 3{,}18 \cdot 10^6 \ mm^4$

$J_{yy} = J_2 = 2{,}77 \cdot 10^5 \ mm^4$

$\sigma_{lim} = 235 \ N/mm^2$

$M_x = 6{,}5 \cdot 10^6 \ Nmm$

$T_y = 2{,}8 \cdot 10^4 \ N$

Flessione

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{J_{xx}} \cdot \frac{h}{2} = \frac{6{,}5 \cdot \cancel{10^6} \cdot 120}{3{,}18 \cdot \cancel{10^6} \cdot 2} = 122 \ MPa$$

Taglio

$$\tau_{picco\ ala} = \frac{T_y \frac{b}{2} h}{J_{xx} \ 2} = \frac{2{,}8 \cdot 10^4 \cdot \frac{64}{2} \cdot 120}{3{,}18 \cdot 10^6 \cdot 2} = 16{,}9 \ MPa$$

$$\tau_{picco\ anima} = \frac{T_y}{J_{xx} s_2} \left(\frac{b s_1 h}{2} + s_2 \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} \right) =$$

$$= \frac{2{,}8 \cdot 10^4}{3{,}18 \cdot 10^6 \cdot 4{,}4} \left(\frac{32 \cdot 6{,}3 \cdot 120}{2} + 4{,}4 \cdot \frac{120 \cdot 120}{8} \right) = 40{,}05 \ MPa$$

$$\sigma_{id} = \sqrt{\overset{\sigma_{zz}^2}{122^2} + 4 \cdot \tau^2}$$

Ala $\quad \sigma_{id} = \sqrt{122^2 + 4 \cdot 16{,}9^2} = 127{,}21 \ MPa$

Anima $\quad \sigma_{id} = \sqrt{0^2 + 4 \cdot 40{,}05^2} = 80{,}1 \ MPa$

$$C_S = \frac{\sigma_{lim}}{\sigma_{id}} = \frac{235}{127{,}21} = 1{,}9$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 86

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 86

FONDAMENTI di MECCANICA STRUTTURALE
Anno accademico 2015/2016 - Esercitazione n° 9

1) Un estensimetro ($R = 120\ \Omega$, $K = 2.1$), collegato a quarto di ponte e alimentato alla tensione di 5 V, è montato su un particolare in acciaio ($E = 2.06 \cdot 10^5$ MPa) sollecitato da trazione uniassiale e soggetto alla temperatura di 95 °C; la griglia è allineata sulla direzione di trazione. La variazione del fattore di taratura con la temperatura è trascurabile, mentre l'andamento della deformazione apparente dichiarato dal produttore dell'estensimetro è approssimato dalla formula

$$\varepsilon_a = -17.0 + 1.7 \cdot T - 5.1 \cdot 10^{-2} \cdot T^2 + 2.4 \cdot 10^{-4} \cdot T^3 \quad (\mu\text{m/m},\ T \text{ in °C})$$

Calcolare la sollecitazione nel particolare corrispondente alla tensione di squilibrio del ponte di Wheatstone misurata, pari a $U = 3.65$ mV.

[309 MPa]

2) Con una rosetta a tre griglie di tipo rettangolare (0°/45°/90°) applicata su un componente in lega di alluminio ($E = 6.86 \cdot 10^4$ N/mm², $\nu = 0.33$) si sono misurati i seguenti valori di deformazione:

$\varepsilon_0 = 1200\ \mu$m/m, $\quad \varepsilon_{45} = 620\ \mu$m/m, $\quad \varepsilon_{90} = 410\ \mu$m/m

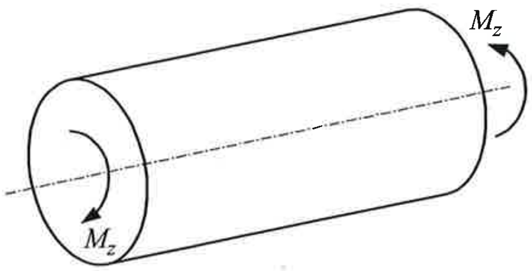
Determinare le tensioni principali e l'orientazione del riferimento principale.

[$\sigma_1 = 105$ N/mm², $\sigma_2 = 60$ N/mm², $\sigma_3 = 0$, $\alpha(p_1\text{^}x) = 12.5°$]

3) Si vuole costruire un trasduttore estensimetrico a ponte completo (fattore di taratura $K = 2$) utilizzando una lamina piatta (sezione 10×0.5 mm) di acciaio ad alta resistenza ($E = 2.06 \cdot 10^5$ N/mm², $\nu = 0.29$, $R_{p0,2} = 1200$ N/mm²) soggetta alla forza di trazione F. Scegliere il tipo di posizionamento e collegamento degli estensimetri in modo da avere sensibilità massima alla sola trazione e nulla rispetto alla flessione; determinare la relazione tra sbilanciamento del ponte (mV) e forza di trazione applicata (N) per un'alimentazione di 5 V.

[$U = 6.26 \cdot 10^{-3}\ F$]

4) Per misurare la coppia agente su una barra di torsione in acciaio ($E = 2.06 \cdot 10^5$ N/mm², $\nu = 0.29$) a sezione circolare, di diametro $D = 50$ mm, si vuole usare un ponte completo di estensimetri da 350 Ω, $K = 2$, alimentato a 10 V. Scegliere la disposizione degli estensimetri e trovare la relazione tra sbilanciamento del ponte (mV) e momento torcente (Nm).



[$U = 5.10 \cdot 10^{-3}\ M_z$]

A) Perché un estensimetro autocompensato risente poco della variazione di temperatura?

B) Come cambia la deformazione rilevata da un estensimetro al variare dell'orientazione con cui è applicato sulla superficie?

C) Nel caso di misure estensimetriche su elementi soggetti a trazione, perché si piazzano gli estensimetri ortogonalmente?

D) Si consideri una trave a sezione rettangolare con 2 estensimetri (collegati a ½ ponte) applicati sulle superfici superiore e inferiore e orientati assialmente. L'installazione è sensibile alla forza di trazione?

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 86

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 86

il tensore ε diventa

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_0 = 1200\ \mu m/m$

$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{90} = 410\ \mu m/m$

$\varepsilon_{45} = n_{45}^T [\varepsilon] n_{45} \xrightarrow{\text{ricavo}} \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{45} - \varepsilon_0 - \varepsilon_{90}$

$\gamma_{xy} = 2(620) - 1200 - 410 = -370$

non so nulla di ε_{zz}

ma dalla tensione piano so che $\sigma_{zz} = 0$

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) = \frac{6{,}86 \cdot 10^4}{1-0{,}33^2}(1200 \cdot 10^{-6} + 0{,}33 \cdot 410 \cdot 10^{-6}) = 102{,}8\ MPa \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}) = \frac{6{,}86 \cdot 10^4}{1-0{,}33^2}(410 \cdot 10^{-6} + 0{,}33 \cdot 1200 \cdot 10^{-6}) = 62\ MPa \\ \tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \gamma_{xy} = \frac{6{,}86 \cdot 10^4}{2(1+0{,}33)} \cdot (-370 \cdot 10^{-6}) = -9{,}542\ MPa \end{cases}$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 102{,}8 & -9{,}54 & 0 \\ -9{,}54 & 62 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\sigma_c = 0\ MPa$

$$\sigma_{a,b} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\frac{102{,}8 + 62}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{102{,}8 - 62}{2}\right)^2 + (-9{,}54)^2} \begin{cases} 82{,}4 + 22{,}5 = 104{,}92\ MPa \\ 59{,}9\ MPa \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = 104{,}92\ MPa \\ \sigma_2 = 59{,}9\ MPa \\ \sigma_3 = 0\ MPa \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left| \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right| = 12{,}5°$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 86

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 86

Siccome hai 2 a (a_1 e a_2) $\rightarrow U_{TOT} = 2V$

$$2 \cdot \frac{16 M_T}{\pi 50^3} \cdot 1{,}29 = 5{,}10 \cdot 10^{-10} M_T$$

$$U = \frac{VK}{4} \cdot 5{,}10 \cdot 10^{-10} M_T$$

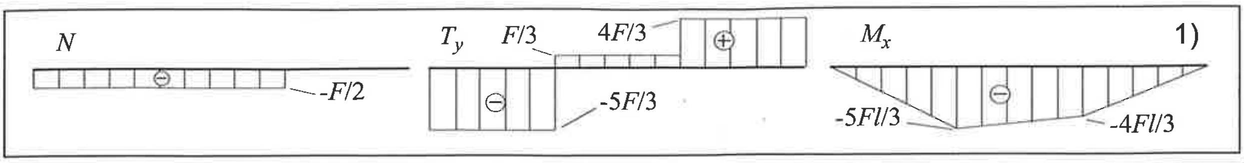
ma U in mV $\quad V = 10 \cdot 10^3$ mV

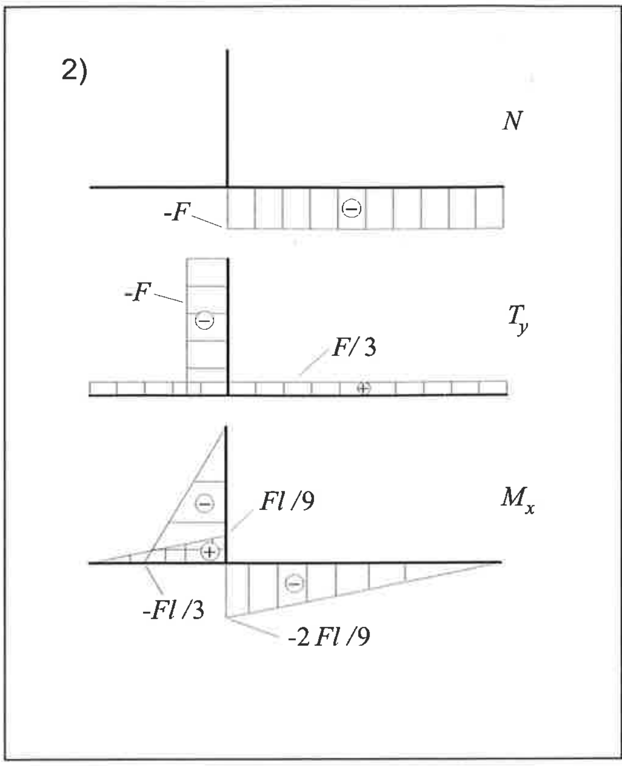
$$U = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 2}{4} \cdot 5{,}10 \cdot 10^{-10} = \frac{5{,}10 \cdot 10^{-6}}{2} M_T$$

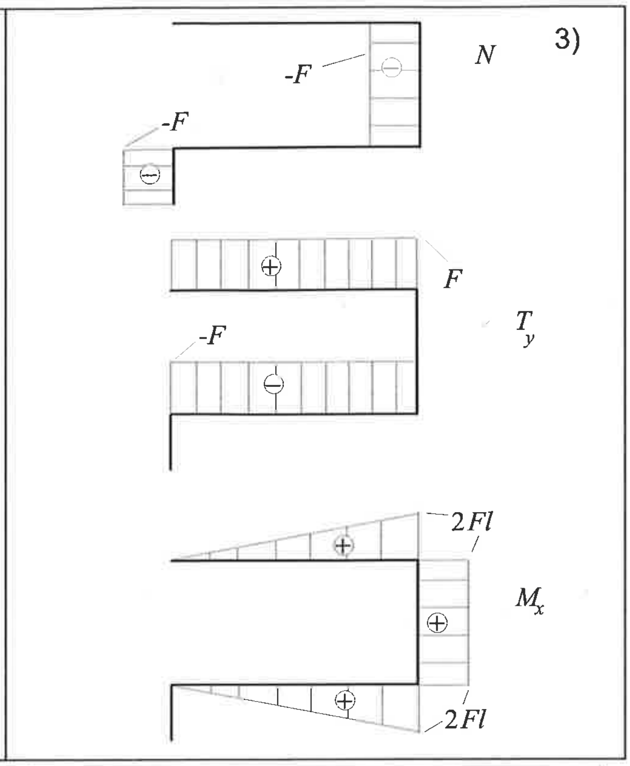
$$U_{TOT} = 2U = 5{,}10 \cdot 10^{-6} M_T$$

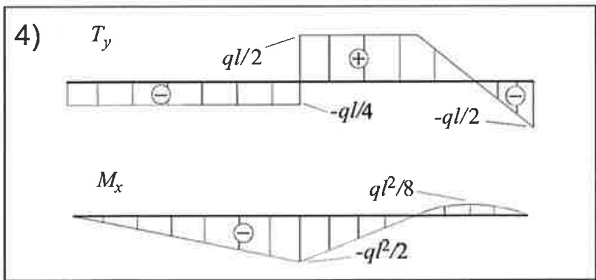
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 86

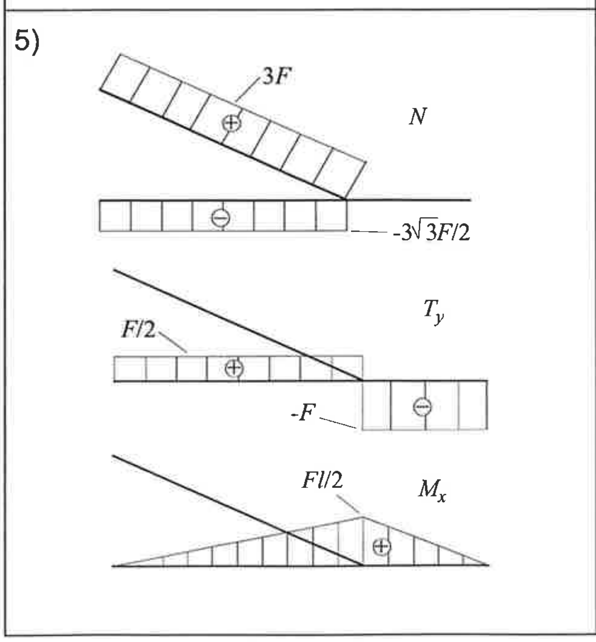
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 86

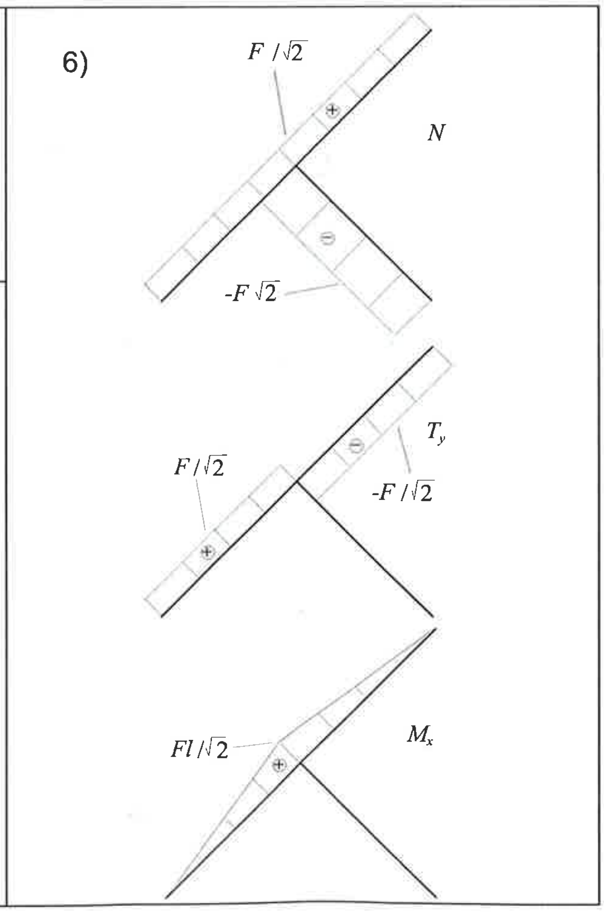












© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 86

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 86

II BIS

DEVI AGGIUNGERE

$0 \le z_2 \le \ell$

$\rightarrow \; N + O_A = 0 \qquad N = -F/2$

$\uparrow \; T_y + V_A - 2F = 0 \qquad T_y = \frac{1}{3}F$

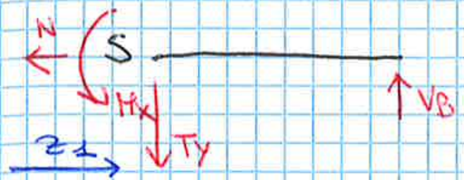
$S \circlearrowright \; M_x - 2Fz_2 + V_A(z_2 + \ell) = 0$

$M_x = 2Fz_2 - V_A(z_2 + \ell)$

$* \; z_2 = 0 \qquad M_x = -\frac{5}{3}F\ell$

$* \; z_2 = \ell \qquad M_x = -\frac{4}{3}F\ell$

III



$2\ell \le z_1 \le 3\ell$

$\rightarrow \; -N = 0 \qquad N = 0$

$\uparrow \; -T_y + V_B = 0 \qquad T_y = V_B = \frac{4}{3}F$

$\circlearrowleft S \; M_x + V_B(3\ell - z_1) = 0$

$M_x = -V_B(3\ell - z_1)$

$* \; z_1 = 2\ell \qquad M_x = -\frac{4}{3}F\ell$

$* \; z_1 = 3\ell \qquad M_x = 0$

III BIS

$0 \le z_2 \le \ell$

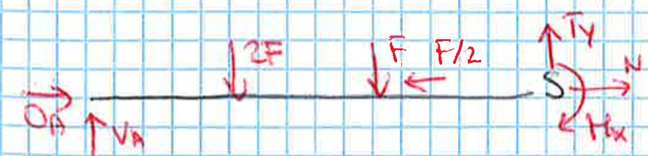
$\circlearrowleft S \; M_x + V_B(\ell - z_2) = 0$

$M_x = -V_B(\ell - z_2)$

$* \; z_2 = 0 \qquad M_x = -\frac{4}{3}F\ell$

$* \; z_2 = \ell \qquad M_x = 0$

II TRIS



$2\ell \le z_1 \le 3\ell$

$\rightarrow N + O_A - \frac{F}{2} = 0 \qquad N = 0$

$\uparrow \; T_y + V_A - 2F - F = 0 \qquad T_y = \frac{4}{3}F$

$S \circlearrowright \; M_x - F(z_1 - 2\ell) - 2F(z_1 - \ell) + V_A(z_1) = 0$

$M_x = F(z_1 - 2\ell) + 2F(z_1 - \ell) - V_A(z_1)$

$* \; z_1 = 2\ell \qquad M_x = 2F\ell - \frac{5}{3}F2\ell = -\frac{4}{3}F\ell$

$* \; z_1 = 3\ell \qquad M_x = F\ell + 4F\ell - \frac{5}{3}F(3\ell) = 0$

$0 \le z_1 \le \ell$

$S \circlearrowright \; M_x - F(z_1) - 2F(z_1 + \ell) + V_A(z_1 + 2\ell) = 0$

$M_x = Fz_1 + 2F(z_1 + \ell) - V_A(z_1 + 2\ell)$

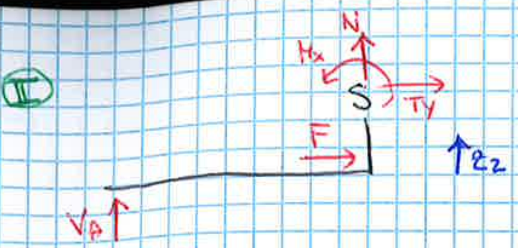
$* \; z_1 = 0 \qquad M_x = 2F\ell - V_A 2\ell = \left(2 - \frac{10}{3}\right)F\ell = -\frac{4}{3}F\ell$

$* \; z_1 = \ell \qquad M_x = F\ell + 4\ell F - V_A(3\ell) = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 86

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 86

II



$\rightarrow$ $T_y + F = 0$ $\quad T_y = -F$

$\downarrow$ $N = 0$

$S\curvearrowleft$ $M_x + F\left(\frac{1}{3}\ell - z_2\right) = 0$

$M_x = -F\left(\frac{1}{3}\ell - z_2\right)$

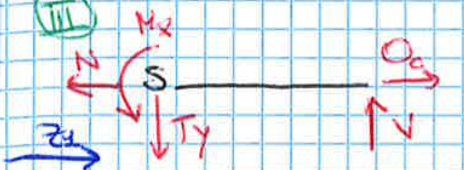
$M_x = -\frac{F\ell}{3} + F z_2$

Perché non c'è V_A?

$0 \leq z_2 \leq \frac{1}{3}\ell$

* $z_2 = 0$ $\quad M_x = -\frac{F\ell}{3}$
* $z_2 = \frac{1}{3}\ell$ $\quad M_x = 0$

III



$\frac{1}{3}\ell \leq z_1 \leq \ell$

$\rightarrow$ $-N + O_c = 0$ $\quad N = -F$

$\uparrow$ $-T_y + V_c = 0$ $\quad T_y = \frac{1}{3}F$

$S\curvearrowleft$ $M_x + V_c(\ell - z_1) = 0$

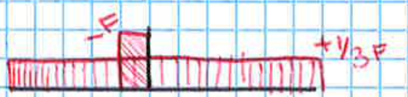
$M_x = -V_c(\ell - z_1)$

* $z_1 = \frac{1}{3}\ell$ $\quad M_x = -\frac{2}{9}F\ell$
* $z_1 = \ell$ $\quad M_x = 0$

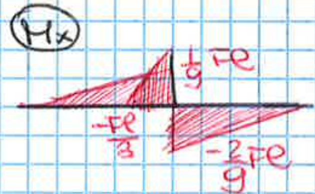
Diagrammi

N

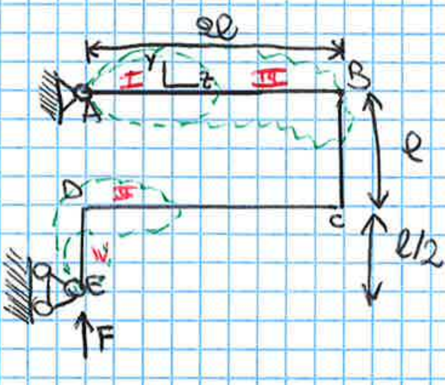
Ty

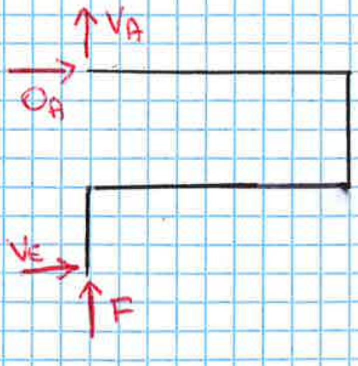


Mx



3





$V = 3i + 2(C+D) + \infty$

$V = 2 + 1 = 3$

$h = V - 3m = 3 - 3 = 0$

Reazioni vincolari

$\rightarrow$ $O_A + V_E = 0$ $\quad O_A = 0$

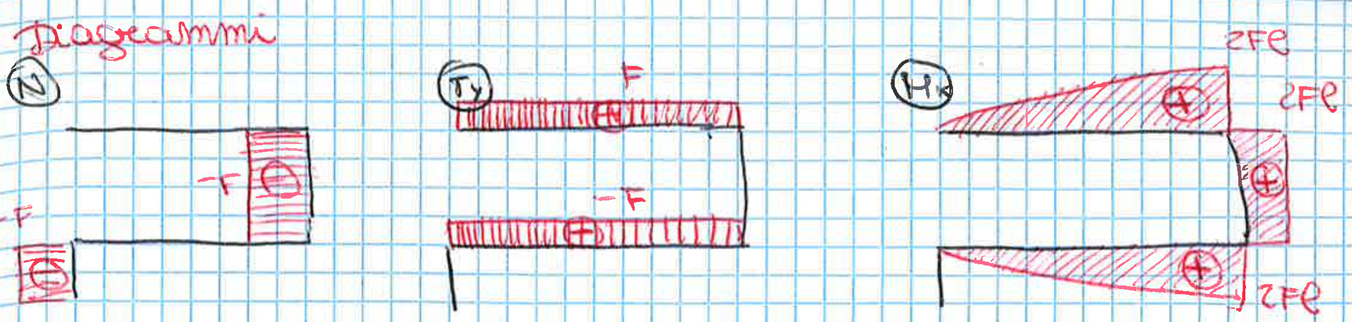
$\uparrow$ $V_A + F = 0$ $\quad V_A = -F$

$A\curvearrowleft$ $-V_E \frac{3}{2}\ell = 0$ $\quad V_E = 0$

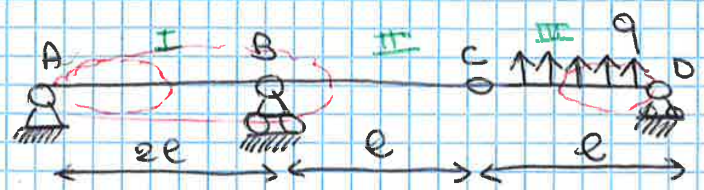
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 86

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 86

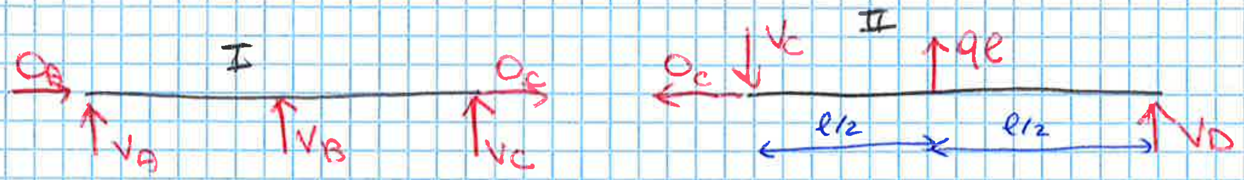
Diagrammi



1



$V = 2+2(2) = 6$
$h = V - 3m = 6 - 6 = 0$



Reazioni vincolari

I

$\rightarrow \quad O_A + O_C = 0 \qquad O_C = -O_A = 0$

$\uparrow \quad V_A + V_B + V_C = 0 \qquad V_A = \frac{3}{4}(ql) - \frac{ql}{2} = \frac{1}{4}ql$

$A) \quad -2l V_B - 3l V_C = 0 \qquad V_B = -\frac{3}{2}V_C = -\frac{3}{2}\frac{ql}{2} = -\frac{3}{4}ql$

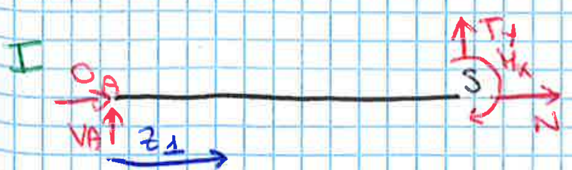
II

$\rightarrow \quad O_C = 0$

$C) \quad V_D \cancel{l} + q\cancel{l}\frac{l}{2} = 0 \qquad V_D = -\frac{ql}{2}$

$D) \quad V_C \cancel{l} - q\cancel{l}\frac{l}{2} \qquad V_C = \frac{ql}{2}$

Caratteristiche di sollecitazione



$0 \leq z_1 \leq 2l$

$\rightarrow N = -O_A = 0$

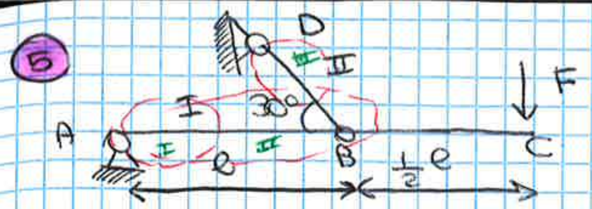
$\uparrow \quad T_y = -V_A = -\frac{1}{4}ql$

$S) \quad M_x + V_A z_1 = 0$
$M_x = -\frac{1}{4}ql z_1 \quad \begin{cases} z_1 = 0 & M_x = 0 \\ z_1 = 2l & M_x = -\frac{1}{2}ql^2 \end{cases}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 86

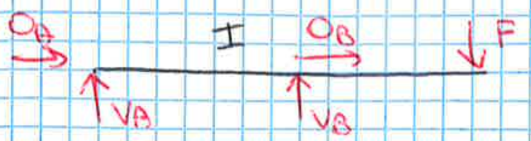
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 86

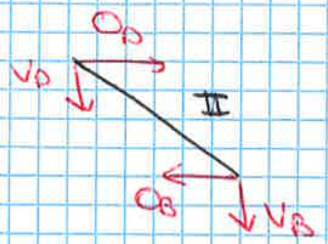
5



$v = 2 \cdot 3 = 6$
$h = v - 3m = 6 - 6 = 0$

Reazioni vincolari





I

$\rightarrow \quad O_A + O_B = 0 \qquad O_A = \frac{3}{2}\sqrt{3}F$

$\uparrow \quad V_A + V_B - F = 0 \qquad V_B = \frac{1}{2}F + F = \frac{3}{2}F$

$B \circlearrowright \quad V_A\ell + F\frac{1}{2}\ell = 0 \qquad V_A = -\frac{1}{2}F$

II

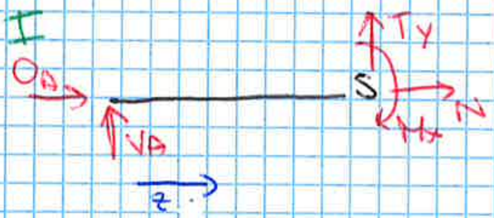
$\rightarrow \quad O_D - O_B = 0 \qquad O_B = O_D = -\frac{3}{2}\sqrt{3}F$

$\downarrow \quad V_B + V_D = 0 \qquad V_D = -V_B = -\frac{3}{2}F$

$D \circlearrowright \quad V_B\ell + O_B\frac{\ell}{\sqrt{3}} = 0 \qquad O_B = -V_B\cancel{\ell}\frac{\sqrt{3}}{\cancel{\ell}} = -\frac{3}{2}\sqrt{3}F$

Caratteristiche di sollecitazione

I



$0 \le z \le \ell$

$\rightarrow \quad N + O_A = 0 \qquad N = -O_A = -\frac{3}{2}\sqrt{3}F$

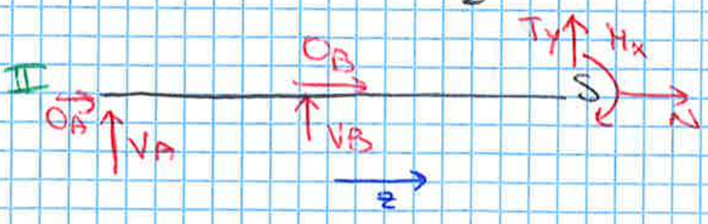
$\uparrow \quad T_y + V_A = 0 \qquad T_y = \frac{1}{2}F$

$S \circlearrowright \quad M_x + V_A z = 0 \qquad M_x = \frac{1}{2}F z$

$* \; z = 0 \qquad M_x = 0$

$* \; z = \ell \qquad M_x = \frac{1}{2}F\ell$

II



$\ell \le z \le \frac{3}{2}\ell$

$\rightarrow \quad N + O_A + O_B = 0 \qquad N = 0$

$\uparrow \quad T_y + V_B + V_A = 0 \qquad T_y = -F$

$S \circlearrowright \quad M_x + V_B(z - \ell) + V_A z = 0$

$M_x = -V_B(z - \ell) - V_A z$

$* \; z = \ell \qquad M_x = \frac{1}{2}F\ell$

$* \; z = \frac{3}{2}\ell \qquad M_x = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 86

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 86

II

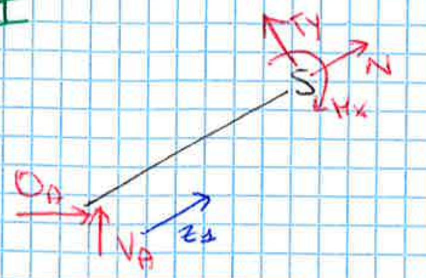
$\rightarrow \; O_D - O_B = 0 \qquad O_D = O_B = -F$

$\uparrow \; V_D - V_B = 0 \qquad V_D = V_B = F$

$D\circlearrowleft \; -V_B\frac{\sqrt{2}\,\ell}{2} - O_B\frac{\sqrt{2}\,\ell}{2} = 0 \qquad O_B = -F$

Caratteristiche di sollecitazione

I



$0 \le z_1 \le \ell$

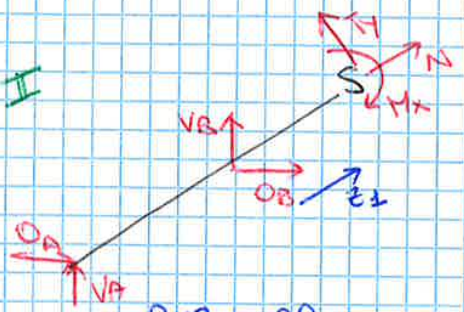
$\nearrow \; N + \cancel{O_A\frac{\sqrt{2}}{2}} + V_A\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad N = F\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\nwarrow \; T_y + \cancel{O_A\frac{\sqrt{2}}{2}} + V_A\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad T_y = F\frac{\sqrt{2}}{2}$

$S\circlearrowleft \; M_x + V_A\frac{\sqrt{2}}{2}z_1 = 0 \qquad M_x = F\frac{\sqrt{2}}{2}z_1$

* $z_1 = 0 \qquad M_x = 0$
* $z_1 = \ell \qquad M_x = F\ell\frac{\sqrt{2}}{2}$

II



$\ell \le z_1 \le 2\ell$

$\nearrow \; N + \cancel{O_A\frac{\sqrt{2}}{2}} + V_A\frac{\sqrt{2}}{2} + O_B\frac{\sqrt{2}}{2} + V_B\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$N = F\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\nwarrow \; T_y + \cancel{O_A\frac{\sqrt{2}}{2}} + V_A\frac{\sqrt{2}}{2} + V_B\frac{\sqrt{2}}{2} - O_B\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$T_y = -\cancel{V_A\frac{\sqrt{2}}{2}} - \cancel{V_B\frac{\sqrt{2}}{2}} + O_B\frac{\sqrt{2}}{2} = -F\frac{\sqrt{2}}{2}$

$S\circlearrowleft \; M_x + V_A\frac{\sqrt{2}}{2}z_1 - O_B\frac{\sqrt{2}}{2}(z_1-\ell) + V_B\frac{\sqrt{2}}{2}(z_1-\ell) = 0$

$M_x = -V_A\frac{\sqrt{2}}{2}z_1 + O_B\frac{\sqrt{2}}{2}(z_1-\ell) - V_B\frac{\sqrt{2}}{2}(z_1-\ell)$

$M_x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-V_A z_1 - V_B(z_1-\ell) + O_B(z_1-\ell)\right)$

$z_1 = \ell \qquad M_x = F\ell\frac{\sqrt{2}}{2}$

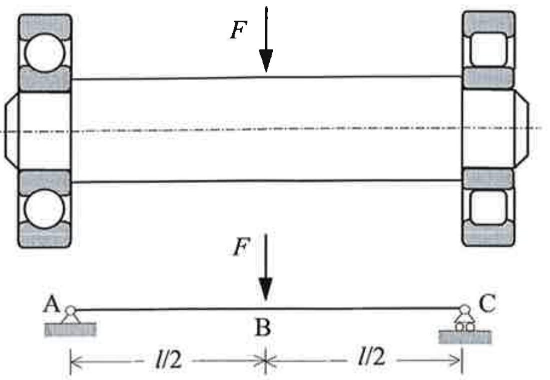
$z_1 = 2\ell \qquad M_x = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 86

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 86

FONDAMENTI di MECCANICA STRUTTURALE
Anno accademico 2015/2016 - Esercitazione n° 11

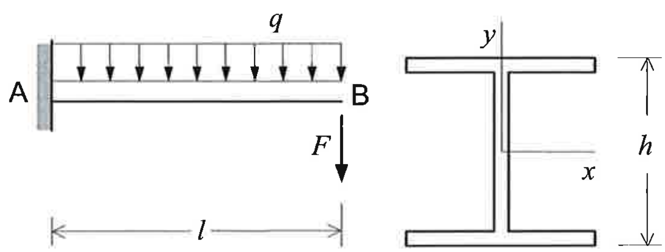
1) Un albero a sezione circolare di diametro d e sopportato alle estremità da cuscinetti è soggetto a una forza trasversale F applicata in mezzeria. Dopo aver calcolato le reazioni vincolari determinare:
   a) l'andamento delle caratteristiche di sollecitazione (tracciare i relativi diagrammi), il momento flettente massimo e la massima tensione di flessione;
   b) la linea elastica dell'albero e la freccia della sezione soggetta al maggior abbassamento.



Dati:
l = 300 mm,
d = 20 mm,
$E = 2.06 \cdot 10^5$ N/mm^2,
F = 1500 N.

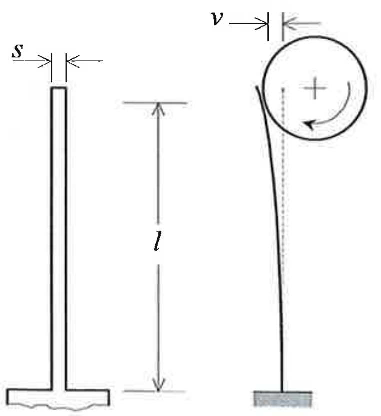
[$M_x^B = -Fl/4$ = $-1.13 \cdot 10^5$ Nmm,
σ_{zz}^B = 144 N/mm^2;
$v^B = -Fl^3/48EJ_{xx} \approx$ -0.5 mm]

2) Un profilato UNI HE 100 B, montato orizzontalmente, è incastrato all'estremo A e soggetto all'altro estremo B ad una forza trasversale F:
   a) tenendo conto anche dell'effetto del peso proprio q, calcolare il valore di F che provoca un abbassamento dell'estremo B di 2 mm;
   b) calcolare la massima tensione di flessione nell'elemento.



Dati:
l = 1500 mm, $J_{xx} = 4.50 \cdot 10^6$ mm^4,
h = 100 mm, $E = 2.06 \cdot 10^5$ N/mm^2,
q = 0.2 N/mm.

[$v_q^B = -\dfrac{ql^4}{8EJ_{xx}} \approx$ -0.1 mm, $v_F^B = -\dfrac{Fl^3}{3EJ_{xx}}$,
F = 1570 N; σ_{zz}^A = 29 N/mm^2]



3) Un contatto strisciante è costituito da una lamina in rame ($E = 1.18 \cdot 10^5$ N/mm^2) montata a mensola, di lunghezza (dalla radice al punto di contatto) l = 40 mm, avente sezione rettangolare di larghezza b = 5 mm e spessore s = 0.5 mm. La freccia v imposta al punto di contatto è pari a 1 mm; calcolare la forza scambiata al contatto e la massima tensione di flessione.

[0.29 N, 55 N/mm^2]

A) Spiegare perché la curvatura locale in una trave è proporzionale al momento flettente.
B) Di cosa tiene conto il fattore di taglio χ?
C) Nella flessione di un elemento "snello" prevale la deformazione per flessione o per taglio?
D) Come si determinano le costanti di integrazione dell'equazione della linea elastica?

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 86

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 86

Linea elastica

1) $\alpha_x(z_1) = \int \frac{M_x}{EJ_{xx}} dz_1 = \int -\frac{F}{2}\cdot\frac{1}{EJ_{xx}} dz_1 = -\frac{F}{2EJ_{xx}}\frac{z^2}{2} = \frac{-Fz^2}{4J_{xx}E} + C_1$

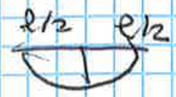
$v(z) = -\int \alpha_x(z) dz_1 = \frac{F}{EJ_{xx}}\frac{z_1^3}{12} - C_1 z_1 + C_2$

$v(0) = 0 \longrightarrow C_2 = 0$

2) $\alpha_x(z_2) = \int \frac{M_x}{EJ_{xx}} dz = \int \frac{-\frac{F}{2}(\frac{\ell}{2} - z_2)}{EJ_{xx}} dz = -\frac{F\ell}{4} z_2 + \frac{F}{4} z_2^2 + d_1$

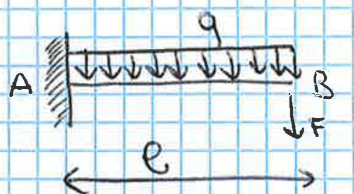
$v(z_2) = \frac{F\ell z_2^2}{8} - \frac{Fz_2^3}{12} - d_1 z_2 + d_2$

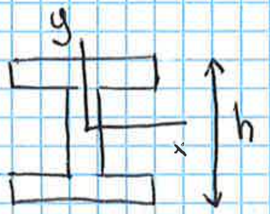
1) $\alpha_x(\frac{\ell}{2}) = -\frac{F\ell^2}{16EJ_{xx}} + C_1$ $\quad C_1 = \frac{F\ell^2}{16EJ_{xx}}$ è uguale a 0



$v(\ell/2) = \frac{F}{EJ_{xx}}\cdot\frac{\ell^3}{36} - \frac{F\ell^3}{32EJ_{xx}} = (\frac{1}{3} - 1)\frac{F\ell^3}{32EJ_{xx}} = -0,32\ m$

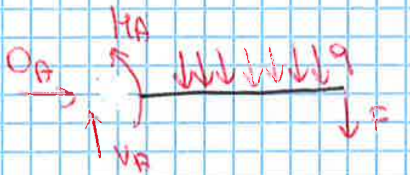
2





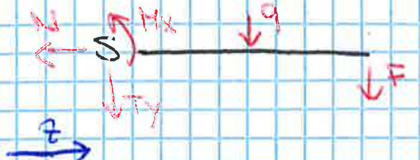
$\ell = 1500$ mm
$J_{xx} = 4,5\cdot10^6$ mm^4
$h = 100$ mm
$E = 2,06\cdot10^5$ N/mm^2
$q = 0,2$ N/mm
abbassamento di B di 2 mm

Reazioni vincolari



$O_A = 0$
$V_A = q\ell + F$
$M_A = \frac{q\ell^2}{2} + F\ell$

Caratteristiche di sollecitazione



$0 \leq z \leq \ell$

$\rightarrow N = 0$

$\uparrow T_y = -q(\ell - z) - F$

$S \circlearrowleft M_x - q\frac{(\ell - z)^2}{2} - F(\ell - z) = 0$

$M_x = q\frac{(\ell - z)^2}{2} + F(\ell - z)$

* $z = 0 \quad M_x = \frac{q\ell^2}{2} + F\ell = 2,528\cdot10^6$ N mm
* $z = \ell \quad M_x = 0$

Linea elastica

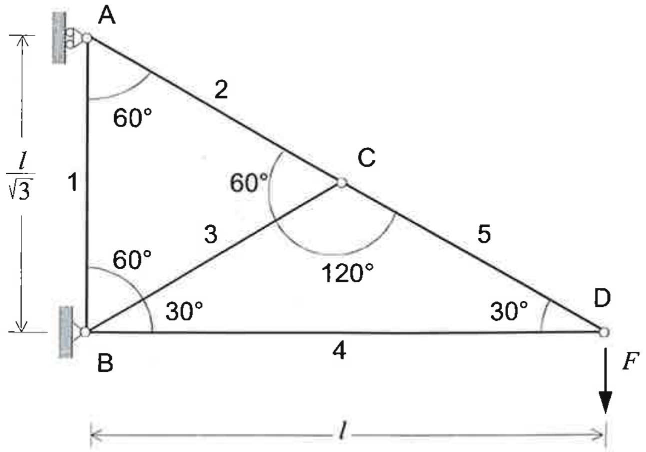
$M_x = \frac{q\ell^2}{2} - q\ell z + \frac{qz^2}{2} + F\ell - Fz$

$\alpha_x(z) = \int \frac{M_x}{J_{xx}E} dz = \frac{1}{J_{xx}E}\left(\frac{q\ell^2}{2}z - q\ell\frac{z^2}{2} + q\frac{z^3}{6} + F\ell z - F\frac{z^2}{2}\right) + C_1$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 86

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 86

FONDAMENTI di MECCANICA STRUTTURALE
Anno accademico 2015/2016 - Esercitazione n° 12



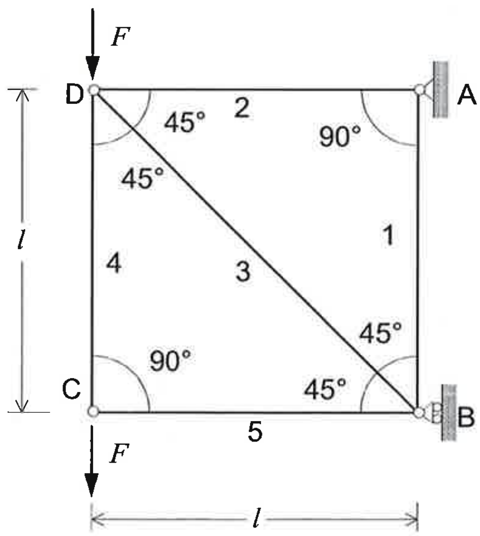
1) Dopo avere determinato le reazioni vincolari esterne, costruire per ogni nodo il corrispondente poligono delle forze e calcolare le forze normali in tutte le aste della struttura reticolare illustrata nella figura.

Dati: l = 1500 mm, F = 3000 N.

[N_1 = -F = -3000 N, $N_2 = 2F$ = 6000 N, N_3 = 0, $N_4 = -\sqrt{3}F$ = -5200 N, $N_5 = 2F$ = 6000 N]

2) Le aste della struttura reticolare schematizzata in figura sono formate da elementi tubolari aventi diametro interno d_i e diametro esterno d_e:
a) calcolare le reazioni vincolari e le forze normali nelle aste;
b) verificare la resistenza delle aste, considerando anche il pericolo dell'instabilità per quelle compresse.

Dati:
l = 2000 mm, F = 20 kN,
d_e = 50 mm, d_i = 40 mm,
$E = 2.06 \cdot 10^5$ N/mm^2,
$R_{p0,2}$ = 230 N/mm^2.



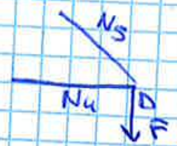
[$N_1 = 2F$ = 40 kN, $N_2 = 2F$ = 40 kN, $N_3 = -2\sqrt{2}F$ = -56.6 kN, $N_4 = F$ = 20 kN, N_5 = 0;
asta 3: ρ = 16 mm, l_0 = 2830 mm, $\sigma_{cr} \approx 65$ N/mm^2]

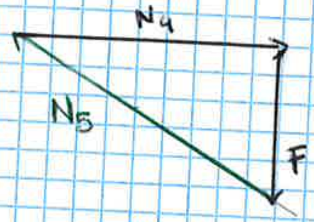
A) Spiegare sotto quali ipotesi le aste sono soggette a sola forza assiale.
B) Perché in una cerniera multipla le reazioni incognite non sono semplicemente due?
C) Quali proprietà del materiale influenzano il carico critico di instabilità? E quali parametri geometrici?
D) In cosa differisce il comportamento, al crescere del carico, di un'asta non perfettamente rettilinea rispetto al caso senza imperfezione?

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 86

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 86

NODO D



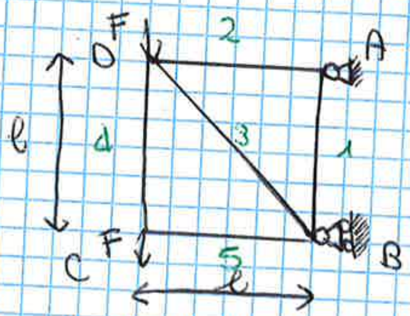


$N_5 \operatorname{sen} 30 = F$

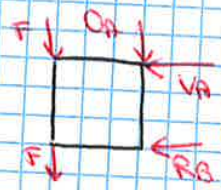
$|N_5| = \dfrac{F}{\operatorname{sen} 30°} = 2F$

N_5 (uscente +) $= 6000\ N$

②



$l = 2000\ mm$
$d_e = 50\ mm$
$E = 2{,}06 \cdot 10^5\ N/mm^2$
$R_{p0,2} = 230\ N/mm^2$
$F = 20\ kN$
$d_i = 40\ mm$

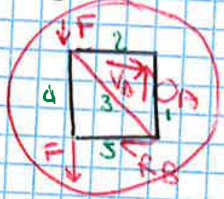


Reazioni vincolari

$\rightarrow\ V_A + R_B = 0 \qquad V_A = -R_B = -2F$

$\downarrow\ O_A + 2F = 0 \qquad O_A = -2F$

$B)\ R_B l - F l - F l = 0 \qquad R_B = 2F$



NODO A

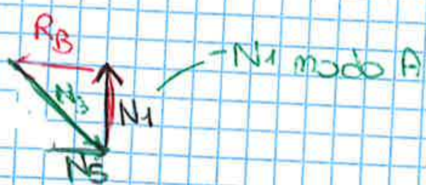
$|N_1| = O_A = 2F$

N_1 (uscente +) $= 40\ kN$

$|N_2| = 2F$

N_2 (uscente +) $= 40\ kN$

NODO B

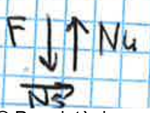


$N_5 = 0$

$|N_3| = 2\sqrt{2}\,F$

N_3 (entrante −) $= -56{,}6\ kN$

NODO C



$N_5 = 0$

$|N_4| = F$

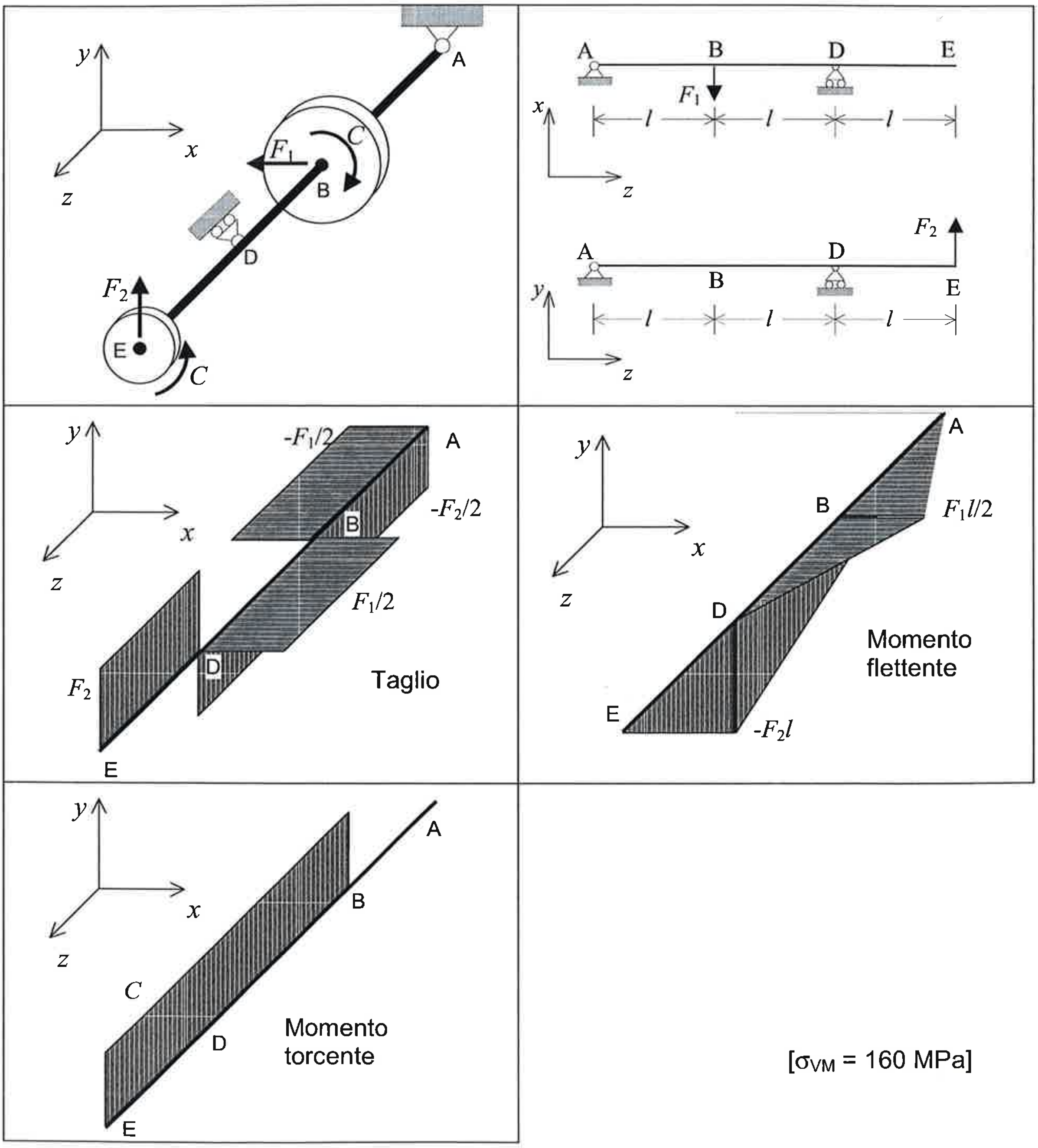
N_4 (uscente ...

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 86

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 86

FONDAMENTI di MECCANICA STRUTTURALE
Anno accademico 2014/2015 - Esercitazione n° 13

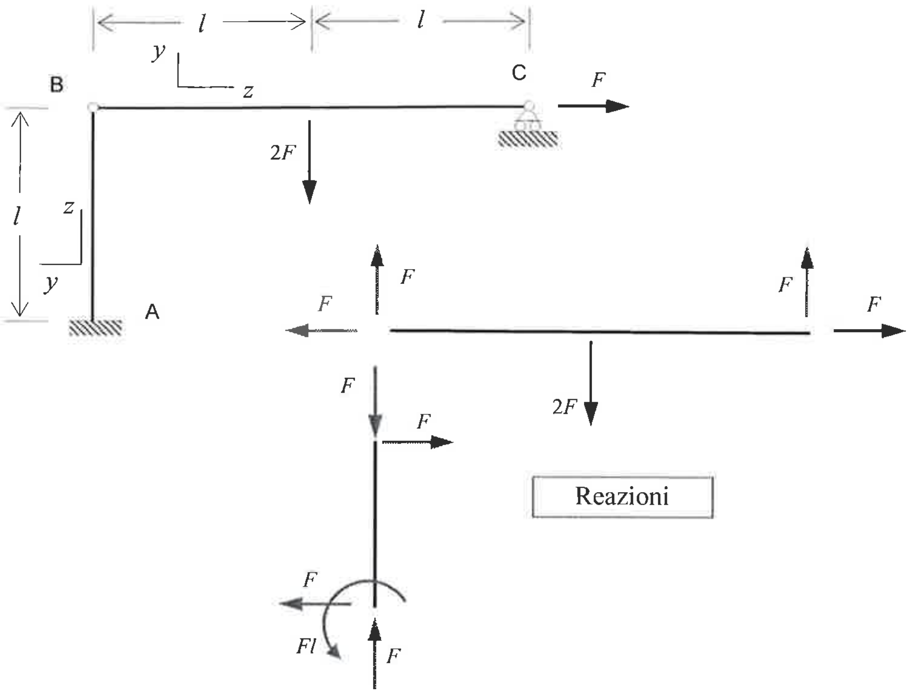
1) Si consideri l'albero di lunghezza 900 mm di diametro D = 40 mm schematizzato in figura. Le due pulegge in B e in E trasmettono all'albero due forze F_1 = 2 kN e F_2 = 3 kN, e una coppia torcente C = 500 Nm.
   a) Calcolare le reazioni vincolari in corrispondenza dei cuscinetti, schematizzati come una cerniera (A) e un appoggio (D).
   b) Calcolare e tracciare l'andamento delle caratteristiche di sollecitazione lungo l'abero.
   c) Identificare la sezione più sollecitata e calcolare massima tensione ideale secondo il criterio di Von Mises.

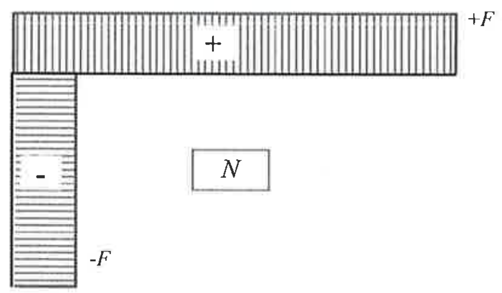


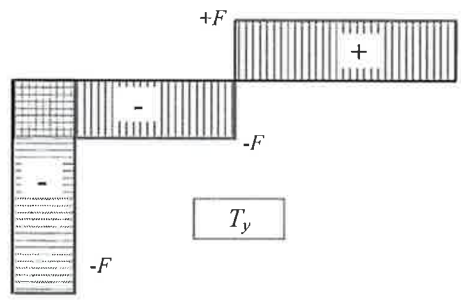
[σ_{VM} = 160 MPa]

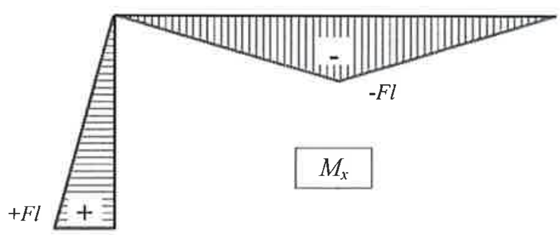
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 86

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 86









© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 86

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 86

esercitazione 14

1

$F = 100\ kN$

a) $C_S = 3$

b) $C_S = 1{,}5$

$D = 60\ mm$
$d = 40\ mm$
$r = 4\ mm$

$$\left.\begin{aligned} \frac{r}{d} &= \frac{4}{40} = 0{,}1 \\ \frac{D}{d} &= \frac{60}{40} = 1{,}5 \end{aligned}\right\} K_T = 2$$

$$K_T = \frac{\sigma_p}{\sigma_m} \rightarrow \sigma_p = \sigma_m K_T$$

$$\sigma_m = \frac{F}{A_{min}} = \frac{F}{\pi \frac{d^2}{4}} \approx 80\ MPa$$

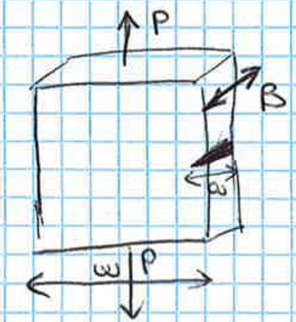
$$\sigma_p = \sigma_m K_T = 160\ MPa$$

1) $C_S = \frac{R_m}{\sigma_p} \Rightarrow R_m = C_S \sigma_p = 480\ MPa$

2) $C_S = \frac{R_{eH}}{\sigma_m} \rightarrow \sigma_m = R_{eH} \cdot C_S = 120\ MPa$

2

$w = 100 mm$
$P = 400\ kN$
$Y = 1{,}99$
$a = 6\ mm$
$C_{SP} = 1{,}5$
$C_{SF} = 3{,}0$



$\boxed{CP}$

$$R_{p0,2} = \sigma_{nom} = \frac{P}{(w-a)B}$$

$$K_I = Y \sigma \sqrt{a} = 1{,}99 \cdot \frac{400 \cdot 10^3}{100-6} \sqrt{6} = 2 \cdot 10^4$$

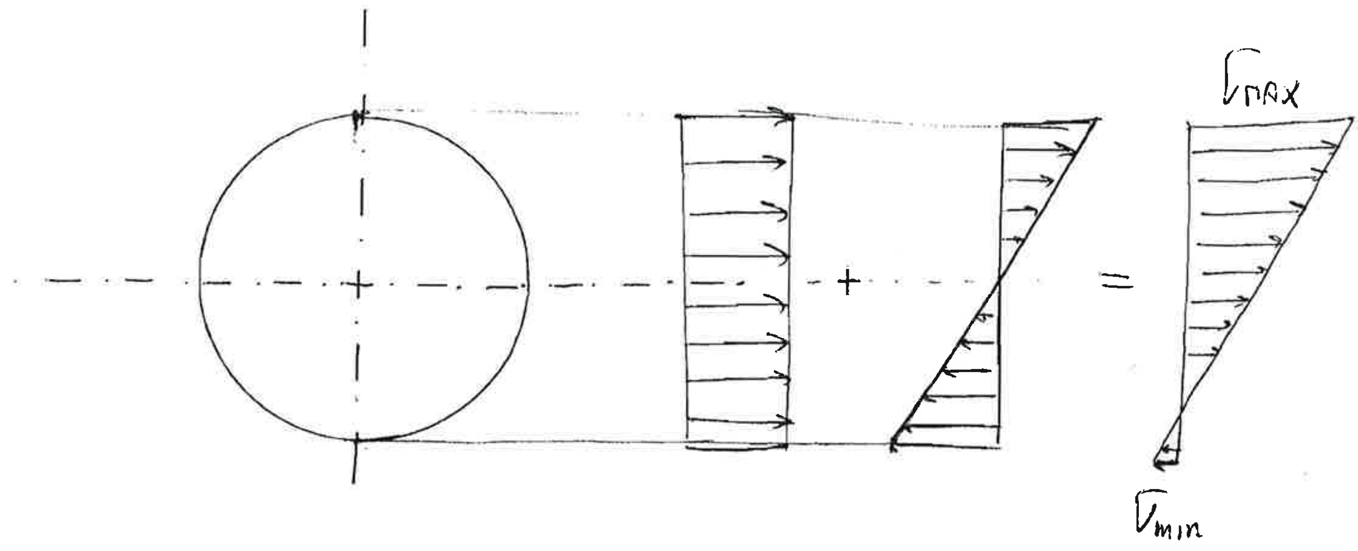
$$C_S = \frac{R_{p0,2}}{\sigma} \rightarrow \sigma = \frac{R_{p0,2}}{C_S}$$

$$\frac{R_{p0,2}}{C_S} = \frac{F}{(w-a)B} \rightarrow B = \frac{P}{(w-a)\ R_{p0,2}} \cdot C_S = 3{,}75\ m$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 86

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 86

1



$$\sigma_N = \frac{T}{A} = \frac{12000}{\pi \cdot 18^2/4} = 47 \ N/mm^2$$

$$\sigma_f = \frac{M_f}{J_{xx}} \cdot z = \frac{64 \cdot M_f}{\pi d^4} \cdot z = 5.82 \cdot z$$

$\sigma^f_{MAX} = 52 \ MPa$

$\sigma^f_{min} = -52 \ MPa$

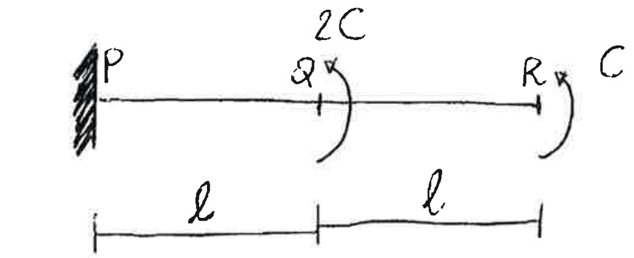
$\Downarrow$

$\sigma_{MAX} = 52 + 47 = 99 \ MPa \qquad \sigma_{min} = -52 + 47 = -5 \ MPa$

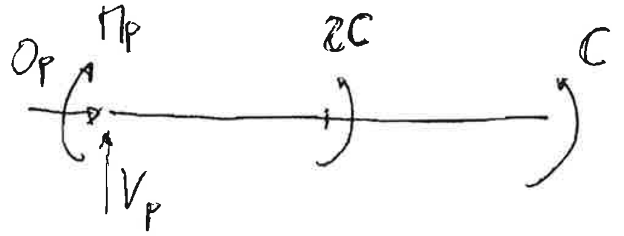
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 86

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 86

3



Reazioni vincolari



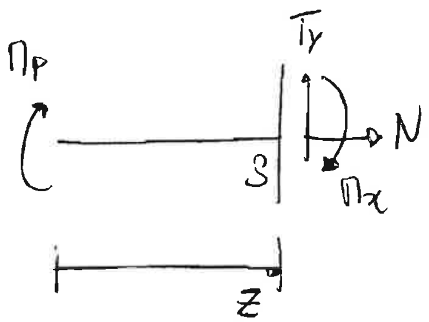
$O_P = \varnothing$

$V_P = \varnothing$

$M_P = 3C$

Caratt. di sollecitazione

- $\overline{PQ}$

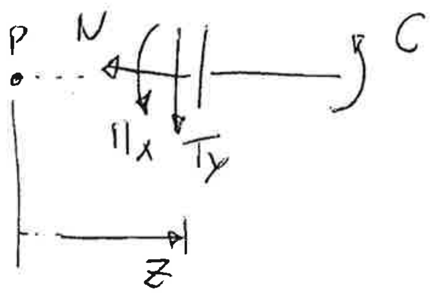


$M_x = -M_P$

$N = \varnothing$

$T_y = \varnothing$

$\overline{QR}$



$M_x = -C$

$T_y = \varnothing$

$N = \varnothing$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 86

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 86

QR

$$\alpha_x^{II} = \int \frac{M}{EJ} dz = -\frac{C}{EJ} \cdot z + D_1$$

$$v^{II} = -\int \left(-\frac{C}{EJ} z + D_1 \right) dz = \frac{C}{EJ} \frac{z^2}{2} - D_1 z + D_2$$

$$\alpha_x^{II}(z=l) = \alpha_x^{I}(z=l)$$

$$-\frac{C}{EJ} l + D_1 = -\frac{3C}{EJ} l \Rightarrow \boxed{D_1 = -\frac{2C}{EJ} l}$$

$$v^{II}(z=l) = v^{I}(z=l)$$

$$\frac{C}{EJ} \cdot \frac{l^2}{2} + \frac{2C}{EJ} l^2 + D_2 = \frac{3C}{EJ} \cdot \frac{l^2}{2} \rightarrow \boxed{D_2 = -\frac{Cl^2}{EJ}}$$

$$v_R = \frac{C}{EJ} \cdot \frac{4l^2}{2} + \frac{2Cl}{EJ} \cdot 2l - \frac{Cl^2}{EJ} = \boxed{5 \frac{Cl^2}{EJ}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 86

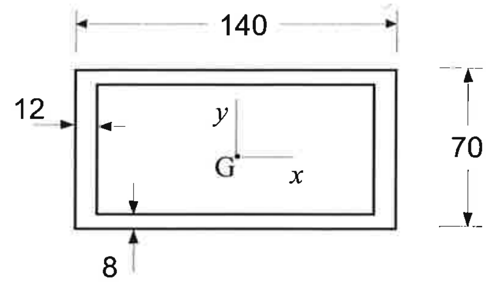
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 86

FONDAMENTI di MECCANICA STRUTTURALE
Esame scritto – Esempio 2

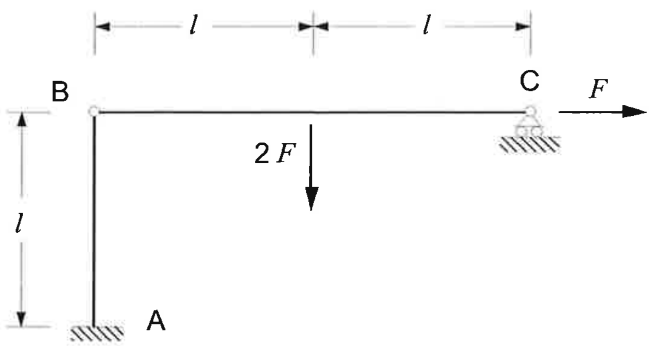
1) Un punto di un elemento in ghisa grigia GJL-300 (R_m = 300 MPa) è sollecitato dalle tensioni seguenti: σ_{xx} = -70 MPa, σ_{yy} = 110 MPa, σ_{zz} = 60 MPa, $\tau_{xy} = \tau_{xz}$ = 0, τ_{yz} = 40 MPa. Calcolare il coefficiente di sicurezza.

2) La sezione rettangolare cava schematizzata in figura è soggetta ai momenti flettenti $M_x = -6.0 \cdot 10^6$ Nmm, $M_y = 4.0 \cdot 10^6$ Nmm e al momento torcente $M_t = 2.0 \cdot 10^6$ Nmm:
   a) tracciare il diagramma della tensione σ_{zz} e calcolare i valori massimo e minimo;
   b) calcolare i valori massimi delle tensioni τ sui tratti rettangolari.

   Dati sezione: $J_{xx} = 2.48 \cdot 10^6$ mm^4, $J_{yy} = 8.98 \cdot 10^6$ mm^4.



3) Per la struttura mostrata in figura:
   a) calcolare le reazioni vincolari;
   b) determinare, negli elementi AB e BC, l'andamento delle caratteristiche di sollecitazione (forza normale, taglio, momento flettente);
   c) tracciare i diagrammi di queste ultime.



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 86