



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1861A -

ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Venezia Angela

MATERIA: Fondamenti di meccanica strutturale, Teoria - prof.
Goglio

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

Fondamenti di meccanica strutturale

Struttura: costruzione (meccanica, aeronautica...) che nel suo funzionamento sopporta degli sforzi

esempio: albero su cuscinetti

Si fanno schemi statici

Requisiti fondamentali per le strutture:

- Resistenza: assenza di rotture o danneggiamenti
- Rigidità: deformazione in servizio non eccessiva

Statico

- forze, momenti
- vincoli, reazioni
- equazioni di equilibrio per determinare le reazioni

Stato di sollecitazione

- soluzione: "quanto" una struttura o un materiale sono sollecitati
- 2 grandezze: tensione e deformazione

Cedimento dei materiali

- prove, tipi di comportamento
- confrontare lo stato tensionale con la resistenza

Solido di Saint Venant

- problema strutturale per il quale si calcola facilmente lo stato di sollecitazioni
- proprietà delle sezioni
- sollecitazioni note: trazione, flessione

Strutture elementari

Determinazione di

- sollecitazioni in travi e telai semplici
- configurazione deformata

Instabilità

- sotto compressione

Relazioni tra formula e fenomeno \rightarrow dimostrazione

es. Coppia di forze. Il risultato è indipendente dal polo, come se non fosse applicato da alcuna parte. $c = Fh \rightarrow$ coppia di due forze uscite da un motore

Cambio polo da O a O' \rightarrow Trasposizione

$$\begin{aligned} \vec{R}_{Mo'} &= \sum_i [(P_i - O') \wedge \vec{F}_i + \vec{c}_i] \\ &= \sum_i [((P_i - O) + (O - O')) \wedge \vec{F}_i + \vec{c}_i] \\ &= \sum_i [(P_i - O) \wedge \vec{F}_i + \vec{c}_i] + (O - O') \wedge \sum_i \vec{F}_i \end{aligned}$$

sempre costante

$$\vec{R}_{Mo'} = \vec{R}_{Mo} + (O - O') \wedge \vec{R}_F \quad \text{se } \vec{R}_F = \vec{0} \rightarrow \vec{R}_{Mo'} = \vec{R}_{Mo}$$

Equilibrio (statico)

In generale (3D) un sistema è in equilibrio statico se: $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$
 $\sum_i (M_{O_i} + \vec{c}_i) = \vec{0}$

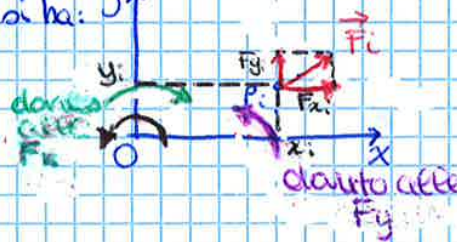
Eq. Traslazionale $\begin{cases} \sum_i F_{xi} = 0 \\ \sum_i F_{yi} = 0 \\ \sum_i F_{zi} = 0 \end{cases}$

3+3=6 condizioni

Eq. Rotazionale $\begin{cases} \sum_i M_{O_{xi}} = 0 \\ \sum_i M_{O_{yi}} = 0 \\ \sum_i M_{O_{zi}} = 0 \end{cases}$

cioè se forza e momento risultanti (polo qualsiasi) sono nulli

Nel piano (2D) si ha:



assumiamo un verso convenzionale come positivo \rightarrow quello antiorario

• Traslazionale

$$\begin{aligned} \sum_i F_{xi} &= 0 \\ \sum_i F_{yi} &= 0 \end{aligned}$$

• Rotazionale

$$\sum_i (-y_i F_{xi} + x_i F_{yi} + c_i) = 0$$

(Se sceglie il verso orario $\sum_i (y_i F_{xi} - x_i F_{yi} + c_i) = 0$)

2+1=3 condizioni

Equivalenza statica

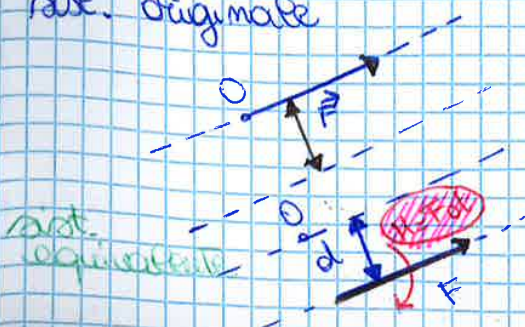
Due o più sistemi sono equivalenti se hanno simultaneamente:

- * stessa forza risultante
- * stesso momento risultante

Equivalente: un oggetto tirato o spinto \rightarrow stessa forza ma è diverso dal punto di vista fisico (cioè non è uguale). Il principio di equivalenza viene utilizzato per sostituire, nelle equazioni, un sistema complicato con uno semplice.

Applicazioni: (due conseguenze di tale proprietà:)

1) "Trasporto" (trasversale) di una forza
 aut. originale



se voglio fare passare la forza sulla stessa retta parallela la risultante è uguale ma il momento è diverso (distanza $O - O'$)
 Per rimettere a posto le cose si vuole un momento che corregga l'errore \rightarrow momento di trasporto
 (regola d'oro) $M = Fd$

Carichi e vincoli

Carichi: forze, momenti esterni applicati alla struttura; di solito noti (nel nostro caso dati dal problema)

Classificazione

- carichi concentrati (puntuali): forza, momento $F \uparrow M_0$
- carichi distribuiti di:
 - * lineari: peso unita lunghezza di un oggetto "monodimensionali"
 - * aree: pressione, peso unita area di un oggetto "bidimensionali"
 - * volume: peso proprio (es. peso specifico di un materiale)

Vincoli: collegano gli elementi strutturali fra di loro (vincoli interni) o al suo basamento (vincoli esterni), esercitando reazioni (di solito incognite del problema)

Duplice aspetto

- **cinematico** : limitazione del moto
 - * **vincoli interni** : punti di elementi diversi sono obbligati ad assumere uguali componenti di spostamento/rotazione
 - * **vincoli esterni** : punti di elementi diversi sono obbligati ad assumere le componenti di spostamento/rotazione imposte dal basamento (di solito nulle)
- **statico** : applicazione delle reazioni
 - * **vincoli interni** - forze, momenti di reazione scambiati tra gli elementi collegati
 - * **vincoli esterni** - forze, momenti di reazione applicati dal basamento della struttura e viceversa

Dei due termini, cinematico (spostamento o rotazione) e statico (forza o momento) associati a un certo grado di libertà, sempre uno dei due è noto e l'altro è incognito.

Es. se è noto il carico applicato è incognito lo spostamento

Tipi di vincoli

Ordine del vincolo: numero di gradi di libertà (coincidente col numero di componenti di reazione) vincolati: vincolo semplice, doppio, triplo ecc.

Vincoli materici nel piano

- **APPOGGIO O CARRELLO** (1 reaz. incognita)



sistemi di scorrimento (come i cassetti): vietato il movimento sia in alto sia in basso



Forma elementare di vincolo

- **CERNIERA** (2 reaz. incognite)

Non c'è lo scorrimento



O_B : reazione orizzontale

V_B : reazione verticale

Esiste anche la cerniera con incognite R e α

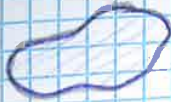


- **CERNIERA INTERNA** (2 reaz. incognite) (cariche reazioni scambiate tra gli elementi)



Esempi

• $m = 1$



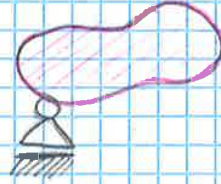
$N = 0$

$h = 0 - 3 = -3 \rightarrow h < 0$ c'è possibilità di movimento non vincolato

• $N = a = 1$

$h = -2$

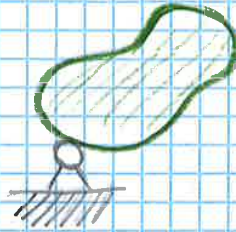
$\rightarrow n =$ gradi di libertà residui del sistema (es. candela)



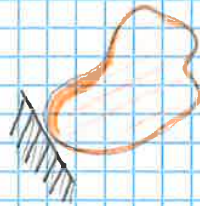
• $N = 2c = 2$

$h = -1$

\rightarrow può ruotare solo intorno al suo fulcro

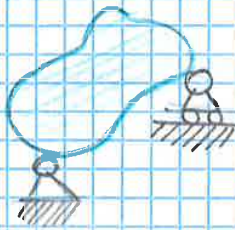


• $N = 3c = 3$
 $h = 0$



• $N = 2c + a = 3$

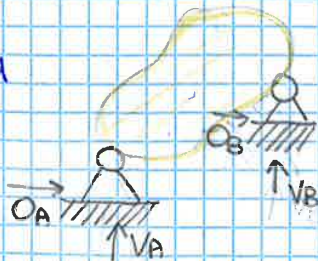
$h = 0$



• $N = 2c = 4$

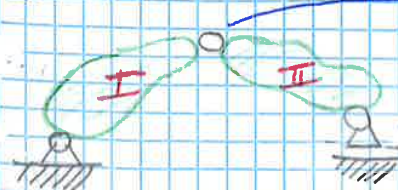
$h = 4 - 3 = 1$

condizione iperstatica

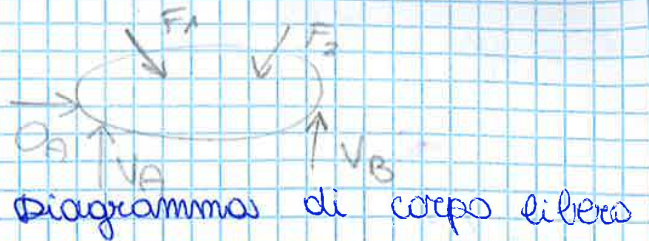


• $N = 2c + a = 5$

cerniera che collega due pezzi cerniera interna



$h = 5 - 3 \cdot 2 = -1$ (grado di libertà residuo)

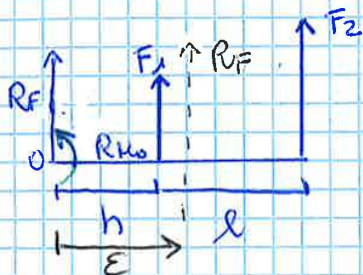


Eserciziare

① calcolo della forza risultante e della sua retta d'azione



Scegliere un polo (per il momento al quale viene calcolato) rispetto al quale calcolare R_F e R_{Mo} e necessariamente indicare il polo rispetto al quale viene calcolato)



E = distanza della retta d'azione dal polo scelto come arbitrario

$$\uparrow R_F = F_1 + F_2$$

$$\curvearrow R_{Mo} = F_1 \cdot h + F_2 \cdot (h + l) = (F_1 + F_2)h + F_2 l$$

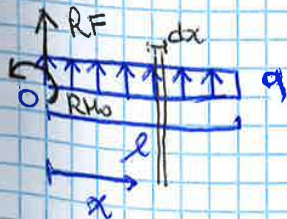
$$E = \frac{R_{Mo}}{R_F} = \frac{(F_1 + F_2)h + F_2 l}{F_1 + F_2}$$

Se $F_1 = F_2$ $E = \frac{2F_1 h + F_1 l}{2F_1} = h + \frac{l}{2}$

Se $F_1 = 0$ $E = \frac{F_2 h + F_2 l}{F_2} = h + l$

Se $F_2 = 0$ $E = \frac{F_1 \cdot h}{F_1} = h$

②.



(forze) per unità di lunghezza

$$0 \leq x \leq l$$

R_F non si può scrivere come sommatoria perché il carico è distribuito

$$\uparrow R_F = \int_0^l q \cdot dx = q \int_0^l dx = ql$$

$$\curvearrow R_{Mo} = \int_0^l qx \cdot dx = q \int_0^l x dx = q \frac{l^2}{2}$$

Posso scrivere anche altre equazioni

B)

C)

\uparrow
 \rightarrow

\uparrow non va bene perché non deve essere nella direzione \perp congiungente i due poli

B) $Rcb + Fa = \phi$ $Rc = -Fa/b$

C) $Vsb - Fa = \phi$ $Vs = Fa/b$

\rightarrow $O_B - F = \phi$ $O_B = F$ **NO!**

\uparrow $Re + Vs = \phi$ \parallel B) + C): $Rcb + Vsb = 0$ **combinazione lineare**

Altre equazioni

B) $Rcb + Fa = \phi$ $Rc = -Fa/b$

C) $Vsb - Fa = \phi$

A) $O_B \omega + Rcb = \phi$ $O_B = -\frac{Rcb}{\omega} \rightarrow O_B = F$

Equazioni di equilibrio nel piano

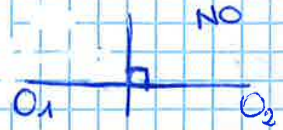
a) 2 trasl. + 1 rot.

b) 2 rot. + 1 trasl.

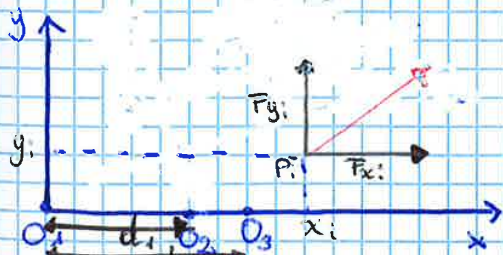
c) 3 rot.

$O_1, O_2 \neq \perp O_2 O_2$

O_1, O_2, O_3 non allineati



• Spiegare limitazione su b)



$O_1 (0, 0)$
 $O_2 (d_1, 0)$

$O_1 \uparrow$: $-\sum_i F_{xi} y_i + \sum_i F_{yi} x_i + \sum_i c_i = 0$

$O_2 \uparrow$: $-\sum_i F_{xi} y_i + \sum_i F_{yi} (x_i - d_1) + \sum_i c_i = 0$

$O_1 \rightarrow - O_2 \uparrow$: $+d_1 \sum_i F_{yi} = 0$

eq. di equilibrio della traslazione lungo y ($\perp d$) dunque Eq. equil. $O_2 \uparrow$ $y = d(O_1, O_2)$

• Limitazione relativa alla scelta c)

$O_3 \uparrow$: $-\sum_i F_{xi} y_i + \sum_i F_{yi} (x_i - d_2) + \sum_i c_i = 0$

$O_2 O_2 \uparrow - d_1 O_3 \uparrow$: $-(d_2 - d_1) \sum_i F_{xi} y_i + (d_2 - d_1) \sum_i F_{yi} x_i - d_1 d_2 \sum_i F_{yi} +$

$+ d_1 d_2 \sum_i F_{yi} + (d_2 - d_1) \sum_i c_i = 0$

$\parallel O_1 \uparrow$: $-\sum_i F_{xi} y_i + \sum_i F_{yi} x_i + \sum_i c_i = 0$

combinazione lineare

$-\sum_i F_{xi} y_i + \sum_i F_{yi} x_i - \sum_i F_{yi} d_2 + \sum_i c_i + \sum_i F_{xi} y_i - \sum_i F_{yi} x_i + \sum_i F_{yi} d_2 - \sum_i c_i$

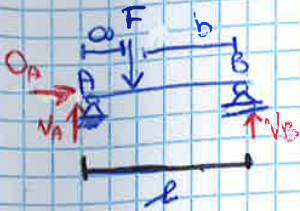
$-\sum_i F_{yi} d_1 + \sum_i F_{yi} d_2 = \sum_i F_{yi} (d_2 - d_1)$

Condizioni di vincolo anomale

- caso isostatico m° incognite = m° equazioni
 ↳ reazioni equilibri

sempre risolvibile?

es. 1 elemento, 3 reazioni (cerniera + appoggio)

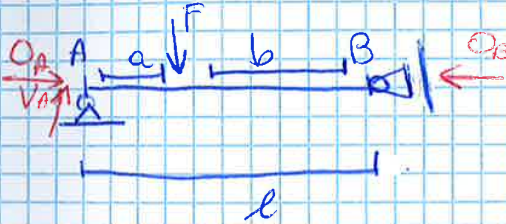


$$\begin{aligned} \rightarrow : O_A &= 0 \\ \uparrow : V_A + V_B - F &= 0 & V_A &= F - V_B & V_A &= F \left(\frac{l-a}{l} \right) \\ \curvearrowright : V_B l - Fa &= 0 & V_B &= \frac{Fa}{l} \end{aligned}$$

in forma matriciale $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} O_A \\ V_A \\ V_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \\ Fa \end{Bmatrix}$

$\det [K] = l$

Variante : ruotiamo appoggio B



$$\begin{aligned} \rightarrow : O_A - O_B &= 0 \\ \uparrow : V_A - F &= 0 \\ \curvearrowright : -Fa &= 0? \end{aligned}$$

rispetto al polo A posso anche far componente $O_B \rightarrow$ non c'è braccio

in forma matriciale $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} O_A \\ V_A \\ O_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \\ Fa \end{Bmatrix}$

una riga di zeri, caso singolare
 $\det [K] = 0$

con altro sistema di equazioni $\begin{aligned} \rightarrow O_A - O_B &= 0 \\ B) V_A l - Fb &= 0 \\ A) -Fa &= 0 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} O_A \\ V_A \\ O_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Fb \\ Fa \end{Bmatrix}$

ancora

$$\begin{aligned} \rightarrow : O_A - O_B &= 0 \\ \uparrow : V_A - F &= 0 & V_A &= F \\ B) : V_A l - Fb &= 0 & V_A &= \frac{Fb}{l} \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & l & 0 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} O_A \\ V_A \\ O_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \\ Fb \end{Bmatrix}$$

la 3 riga è comb. lineare della seconda
 sistema fisicamente anomalo

Equilibrio I

$$\begin{cases} \rightarrow O_A - O_B = 0 \\ \uparrow V_A - V_B = F \\ A) \downarrow V_B l_1 = -F l_2 \end{cases}$$

Equilibrio II

$$\begin{cases} \rightarrow O_B + O_C = 0 \\ \uparrow V_B + V_C = 0 \\ C) \downarrow V_B l_2 = 0 \end{cases}$$

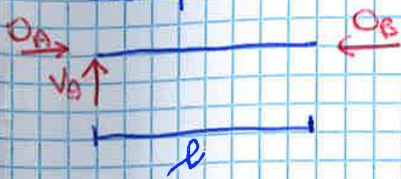
In forma matriciale la III e la VI sono combinazione lineare

$$V_B = -\frac{F l_1}{l_1} \quad \dots \quad V_B = 0$$

LD c'è un errore, il caso è anomalo

Alternative per riconoscere casi anomali:
 • possibilità di trovare equilibrio con: 1) reazioni $\neq 0$
 2) assenza di vincoli

esempio



$O_B = k$ arbitrario

$$\rightarrow O_A - O_B = 0 \rightarrow O_A = O_B = k$$

$$\uparrow V_A = 0$$

$$B) \downarrow V_B l = 0$$

• moto rigido infinitesimo non impedito dai vincoli



Stato di tensione

Grandezze "macroscopiche" (forza, momento)

- scala caratteristica: dimensioni del componente (sezione ecc.)
- insufficienti a prevedere la resistenza strutturale

Necessità di grandezze "microscopiche": le tensioni



- scala caratteristica: grandezze specifiche (puntuali)
- sufficienti a prevedere la resistenza strutturale, mediante confronto tra la tensione applicata e quella limite del materiale

Barra soggetta a F, è supportabile?

dipendenza: geometria, materiale

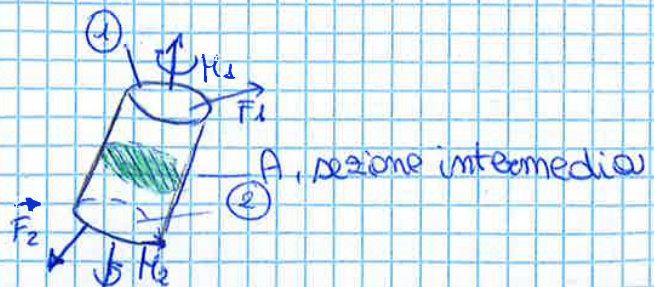
Tensione

- (2) \rightarrow carichi esterni
- (1) \rightarrow reazioni vincolari

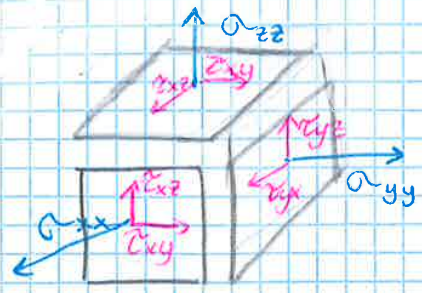
Elemento soggetto a carichi

estremo 1 $\vec{F}_1 \vec{R}_1$

estremo 2 $\vec{F}_2 \vec{R}_2$



Proprietà delle componenti di tensione
 Posso parlare di tensioni una volta orientata la faccia (mediante la normale) e con la direzione della componente
 Riferimento x, y, z



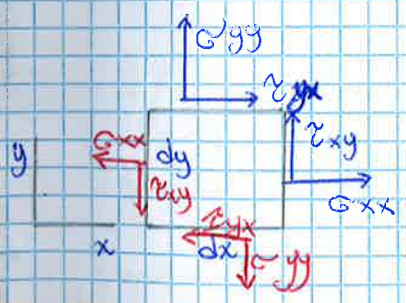
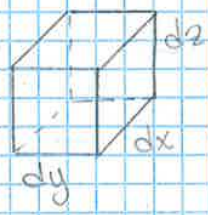
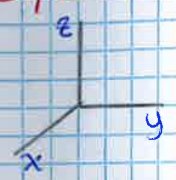
- Indici:
- faccia (i)
 - direzione (j)

Uno stesso σ, τ su facce diverse \rightarrow comportamento diverso

(3) componenti normali: $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$

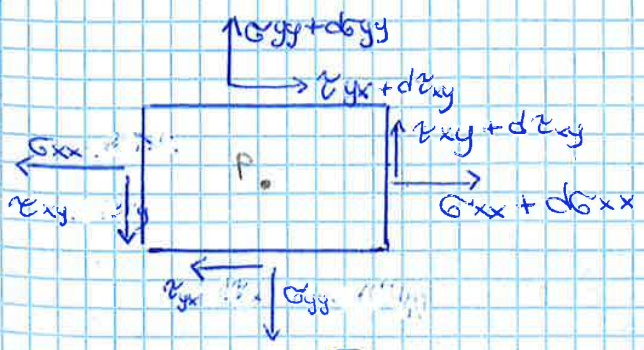
(6) componenti tangenziali: $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$
 $\tau_{yx}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$
 Tutte diverse?

Equilibrio alla rotazione intorno a P



A destra ci sarà un'altra faccia con altre reazioni con versi opposti (azione-reazione, III principio)
 Quindi quelle a sinistra sono.

- facce \oplus normale uscente concorde all'asse (x)
 \ominus normale uscente discorde all'asse (x)



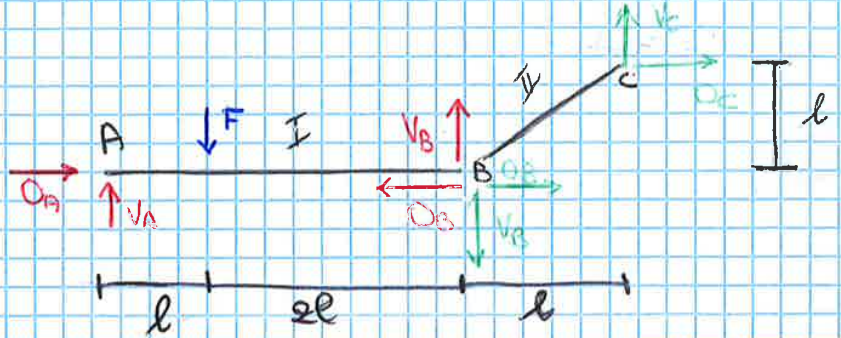
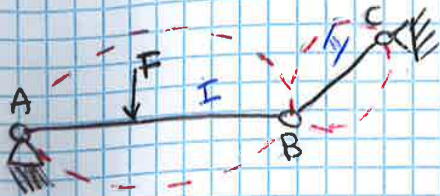
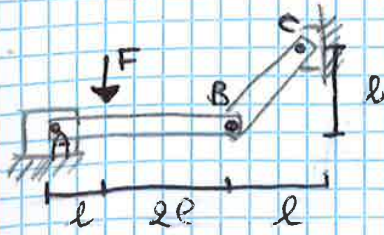
Passando da una faccia all'altra incremento il valore della componente

$$\tau_{xy} dy dz \frac{dx}{2} - \tau_{yx} dx dz \cdot \frac{dy}{2} + (\tau_{xy} + d\tau_{xy}) dy dz \frac{dx}{2} - (\tau_{yx} + d\tau_{yx}) dx dz \frac{dy}{2} = 0$$

$$\tau_{xy} - \tau_{yx} \rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}$$
 le componenti tangenziali con variabili scambiate sono uguali

Esercizio

1



Equilibrio I

Se prendo polo A (o polo B) l'unica componente è quella trasversale (V_B) perché i poli O_A e O_B si annullano in orizzontale (O_A perché in A cioè il polo, O_B perché è sulla retta d'azione di $O_A \rightarrow$ resta V_B)

B): $V_B 3l - 2Fl = 0 \quad V_B = \frac{2}{3}F$

A): $V_B 3l - Fl = 0 \quad V_B = \frac{1}{3}F$

$\rightarrow O_A - O_B = 0 \quad O_A = O_B = -\frac{1}{3}F$

Equilibrio II

c): $O_B l + V_B l = 0 \quad O_B = -V_B \quad O_B = -\frac{1}{3}F$

$\uparrow V_C - V_B = 0 \quad V_C = V_B = \frac{1}{3}F$

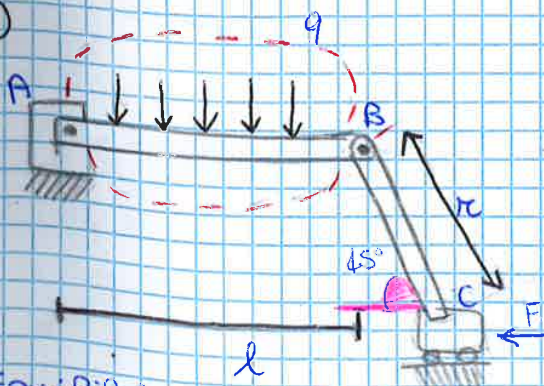
$\rightarrow O_C + O_B = 0 \quad O_C = -O_B = \frac{1}{3}F$

Verifica

$\uparrow: V_A + V_B - F = 0 \quad \frac{2}{3}F + \frac{1}{3}F - F = 0$

B) + A): $V_B 3l - 2Fl + V_B 3l - Fl = 0 \quad V_A + V_B - F = 0$

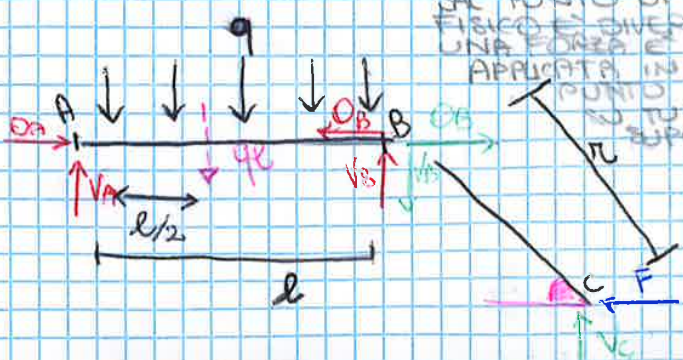
2



Trovare reazioni e F in funzione di q

$h = 10 - 3m = 2 \cdot 2 + 1 - 3 \cdot 2 = -1$

IN PUNTO DI VISTA FISICO È DIVERSO SE UNA FORZA È APPLICATA IN UN PUNTO O TUTTA LA SUPERFICIE

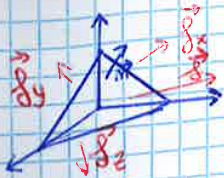


Equilibrio I

B): $V_B l - ql \cdot \frac{l}{2} = 0 \quad V_B = \frac{1}{2}ql$

A): $V_B l - ql \cdot \frac{l}{2} = 0 \quad V_B = \frac{1}{2}ql$

Tetraedro di Cauchy



Vettori di tensione

$$f = \begin{Bmatrix} f_{nx} \\ f_{ny} \\ f_{nz} \end{Bmatrix}$$

$$f_x = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}$$

$$f_y = \begin{Bmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}$$

$$f_z = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix}$$

Equilibrio $\vec{f} + m_x \vec{e}_x + m_y \vec{e}_y + m_z \vec{e}_z = 0$

$$\begin{cases} f_{nx} = \sigma_{xx} m_x + \tau_{xy} m_y + \tau_{xz} m_z \\ f_{ny} = \tau_{xy} m_x + \sigma_{yy} m_y + \tau_{yz} m_z \\ f_{nz} = \tau_{xz} m_x + \tau_{yz} m_y + \sigma_{zz} m_z \end{cases}$$

forma matriciale

$$\begin{Bmatrix} f_{nx} \\ f_{ny} \\ f_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{Bmatrix}$$

$\vec{e}_x \quad \vec{e}_y \quad \vec{e}_z$

- simmetrico, componenti normali sulla diagonale, tangenziali fuori diagonale
- le colonne (o le righe) sono i vettori di tensione agenti sulla superficie $\perp x, y, z$
- descrive completamente lo stato di tensione in P. da esso si ottiene il vettore di tensione su qualunque superficie di normale \vec{m}

forma breve

$$\{f\} = [C] \{m\} \rightarrow \text{orientazione della superficie}$$

vettore della tensione

3x3 tensore della tensione simmetrico (+ informazioni, oggetto 3D)

esempio fotografia dell'oggetto solo una faccia

diagonale $\rightarrow \sigma_{ii}$
fuori diagonale $\rightarrow \tau_{ij}$

Tensioni principali:

Abbiamo detto in precedenza \vec{f} non parallelo a \vec{m} (a causa delle componenti di tensione τ)



tali che i vettori $\{f\}$ sono \perp alla superficie (quindi $\tau = 0$)

- esistono condizioni privilegiate tali che $\vec{f} \parallel \vec{m}$

Autovalori / Autovettori

$$[C] \{f\} = \lambda \{f\}$$

fa variare il modulo ma non l'orientazione

$$([C] - \lambda [I]) \{f\} = \{0\}$$

Soluzione non banale ($\{f\} \neq \{0\}$) se $\rightarrow \det([C] - \lambda [I]) = 0$

Soluzioni $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ **AUTOVALORI**

tensioni principali

$L \{n_i\}, \{f_i\}$ -- **AUTOVETTORI**

direz. principali

Equilibrio del cuneo

- Equilibrio in direzione normale alla faccia obliqua

$$a \cdot d\ell/ds - \alpha_1 d\ell_2/ds \cos\alpha - \alpha_2 d\ell_3/ds \sin\alpha = 0$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 cetera
 di cui
 agisce $d\ell \cos\alpha$ $d\ell \sin\alpha$

$$a - \alpha_1 \cos^2\alpha - \alpha_2 \sin^2\alpha = 0$$

$$a = \alpha_1 \cos^2\alpha + \alpha_2 \sin^2\alpha$$

- Equilibrio in direzione tangenziale alla faccia obliqua

$$\tau \cdot d\ell/ds - \alpha_1 d\ell_2/ds \sin\alpha + \alpha_2 d\ell_3/ds \cos\alpha = 0$$

$$\tau - \alpha_1 \sin\alpha \cos\alpha + \alpha_2 \sin\alpha \cos\alpha = 0$$

$$\tau = (\alpha_1 - \alpha_2) \sin\alpha \cos\alpha$$

- Si applicano le trasformazioni trigonometriche

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad \cos\alpha \sin\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

- Le due equazioni di equilibrio diventano

$$\begin{cases} a - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \cdot \cos 2\alpha \\ \tau = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \cdot \sin 2\alpha \end{cases}$$

Quadrando e sommando

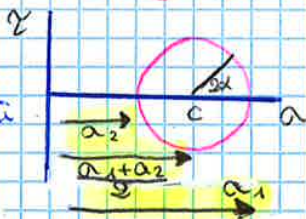
$$\left(a - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right)^2 \rightarrow \text{ricorda } (x-x_c)^2 + y^2 = R^2$$

Rappresenta in un piano avente per coordinate i valori a e τ l'equazione di una circonferenza di centro C e raggio r

CERCHIO DI MOHR riferito ai piani del fascio avente per sostegno l'asse p_3

Osservazioni

- l'angolo sul cerchio è il doppio dell'angolo di inclinazione del piano



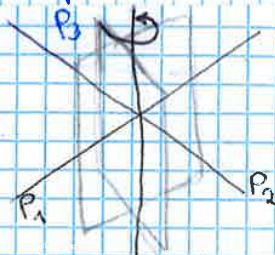
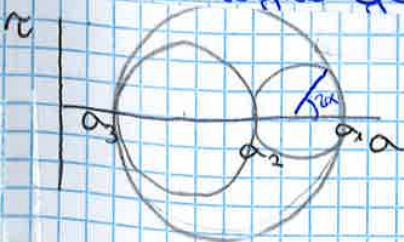
$$\text{se } \alpha = 90^\circ \begin{cases} a = a_2 \\ \tau = 0 \end{cases}$$

$$\text{se } \alpha = 0^\circ \begin{cases} a = a_1 \\ \tau = 0 \end{cases}$$

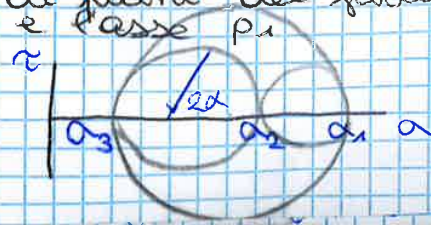
$$\text{se } \alpha = \pi/4 \begin{cases} a = \frac{a_1 + a_2}{2} \\ \tau = \frac{a_1 - a_2}{2} \end{cases}$$

le intersezioni con l'asse delle ascisse sono tensioni principali

- analogamente si possono ottenere altri due cerchi relativi alle tensioni sui piani del fascio aventi rispettivamente per sostegno gli assi p_1 e p_2



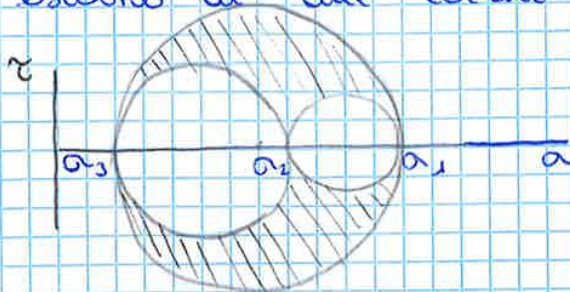
Cerchio di Mohr riferito ai piani del fascio avente per sostegno l'asse p_2 e l'asse p_1



Altre proprietà

Caso di una superficie qualsiasi, non appartenente a uno dei fasci di piani ortogonali per sostegno uno degli assi principali.

- il punto rappresentativo dello stato di tensione su esso è
 - interno al cerchio maggiore (estremi σ_1, σ_3)
 - esterno ai due cerchi rimanenti (estremi σ_1, σ_2 e σ_2, σ_3)



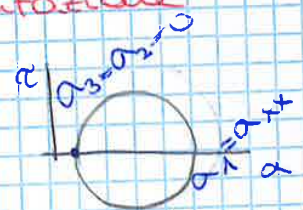
Conseguenze notevoli, qualunque sia l'orientazione della superficie passante per il punto in esame

- la tensione normale σ non è mai $> \sigma_1$, né $< \sigma_3$
- la tensione tangenziale τ in modulo non è mai $> (\sigma_1 - \sigma_3)/2$

Cerchi di Mohr per casi notevoli di sollecitazione

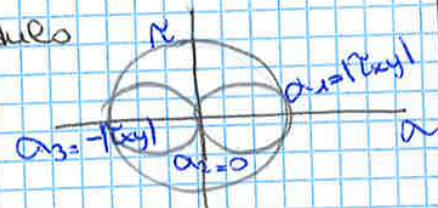
* Trazione semplice

- due tensioni principali nulle
- due cerchi sovrapposti, uno collassato a punto



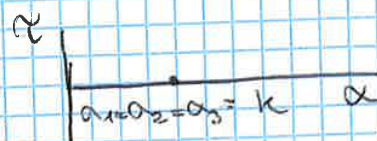
* Torsione semplice

- due tensioni principali uguali in modulo e opposte in segno, una nulla
- cerchi simmetrici

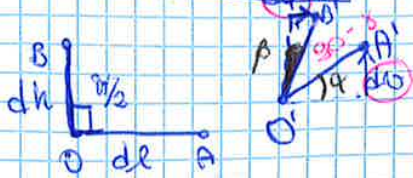


* Idrostatico

- tre tensioni principali uguali
- cerchi collassati a punto
- tensione tangenziale nulla
- ogni riferimento è principale



Misura dello scorrimento



• si deve seguire una coppia di segmenti, inizialmente L , di cui si osserva la variazione relativa di orientazione

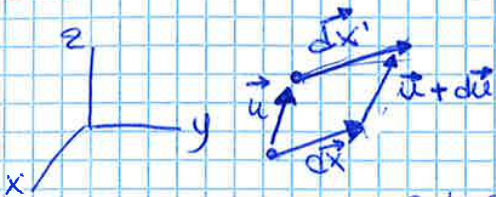
Spostamenti u, v piccoli

$$\tan \alpha \approx \alpha = \frac{dv}{dh} \quad \tan \beta \approx \beta = \frac{du}{dh}$$

Scorrimento $\alpha + \beta = \gamma = \frac{du}{dh} + \frac{dv}{dh}$

• lo scorrimento γ è il complemento a 90° dell'angolo compreso tra i due segmenti sotto osservazione

Derivazione analitica di dilatazione e scorrimento



- In generale, un elemento può essere soggetto simultaneamente a
 - moto rigido: traslazione e rotazione
 - moto deformativo: dilatazione e scorrimento

Evduzione di $dx' = \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix}$

• consideriamo un vettore $\{dx\}$ che si trasforma in $\{dx'\}$ ciò significa osservare la lunghezza e le variazioni angolari fra le componenti

Spostamenti estremi $u, u + du$
il primo si sposta di u , il secondo $u + du$, dx diventa dx'

• Spostamenti reciproci $\{u\} \rightarrow \{u\} + \{du\}$

$$u + dx' = dx + u + du \quad \text{traslazione rigida e minimata}$$

$$dx' = dx + du \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rotazione rigida} \\ \text{dilatazione} \\ \text{scorrimento} \end{array} \right.$$

di cui può essere scritto come di spostamenti

$$\{du\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = [J] \{dx\}$$

$$\{du\} = [J] \{dx\}$$

↳ jacobiana $[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$
 trasposta

• La matrice $[J]$ contiene gli effetti della rotazione rigida e della deformazione

$$[E] = \frac{1}{2} [J] + \frac{1}{2} [J]^T - \frac{1}{2} [J]^T$$

DILATAZIONE + SCORRIMENTO

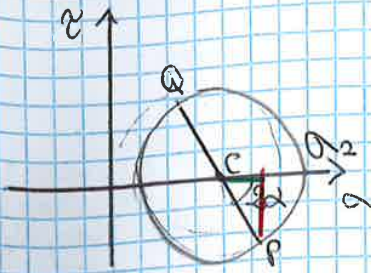
$$\frac{1}{2} [J] + \frac{1}{2} [J]^T = [E] =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

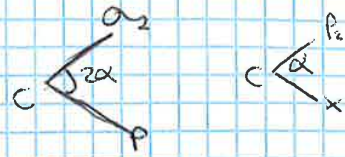
simmetria 3x3

Tensore della deformazione

Travare inclinazione degli assi principali



$$|\tan 2\alpha| = \left| \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right|$$



$-90^\circ \leq 2\alpha \leq 0 \rightarrow$ tabella
 $\boxed{-45^\circ \leq \alpha \leq 0}$

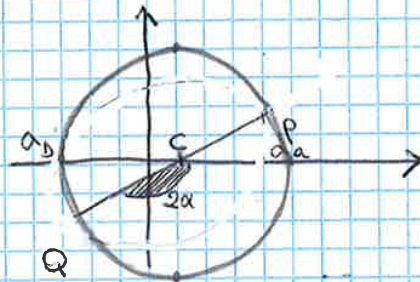
$$2\alpha = \arctan \left| \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right| \rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \arctan \left| \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right| \rightarrow \alpha = -31,7^\circ$$

2 angoli di mezzo
 cambia segno

autovalori $\rightarrow \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$
 autovettori \rightarrow direzioni

2) a) $[\sigma] = \begin{bmatrix} 250 & 0 & 90 \\ 0 & 170 & 0 \\ 90 & 0 & -190 \end{bmatrix}$ MPa $\begin{matrix} \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \\ \alpha \end{matrix}$

$\sigma_c = \sigma_{yy} = 170$ MPa
 P (250, 90)
 Q (-190, -90)



$$\begin{cases} \alpha \\ -\alpha \\ 90+\alpha \\ 90-\alpha \end{cases}$$

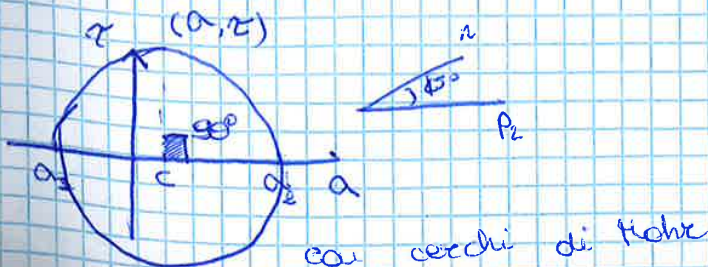
$$\sigma_{a,b} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \begin{cases} 271 \text{ MPa} \\ -141 \text{ MPa} \end{cases}$$

$\sigma_1 = 271$ MPa
 $\sigma_2 = 170$ MPa
 $\sigma_3 = -141$ MPa

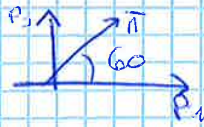
$\begin{matrix} 12,9 \\ \uparrow \\ -90 + \alpha \end{matrix}$

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\tau_{xz}}{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}} \right) = -77^\circ$$

b) σ_1, σ_2 su piano del fascio con asse P_1 e \vec{n} a 15° rispetto a P_2



b) $\vec{n} = \begin{Bmatrix} \cos(60^\circ) \\ 0 \\ \sin(60^\circ) \end{Bmatrix}$



$$p = \begin{bmatrix} 350 & 120 & 0 \\ 990 & -990 & 0 \\ 0 & 0 & 110 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 195\sqrt{3} \\ 110\sqrt{3} \\ 90 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{f}\| = \sqrt{\frac{195^2}{3} + \frac{110^2}{3} + 90^2} = 129,4 \text{ MPa}$$

$\sigma = \sqrt{3} \cdot p = 129,5 \text{ MPa}$

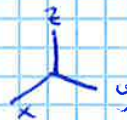
Tensore delle deformazioni

$$[E] = \begin{bmatrix} E_{xx} & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & E_{yy} & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{xz}/2 & \gamma_{yz}/2 & E_{zz} \end{bmatrix}$$

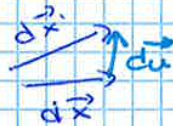
E_{ii} dilatazione (effetto longitudinale)
 γ_{ij} scorrimenti (effetto trasversale)

$$[E] = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} & E_{xz} \\ E_{xy} & E_{yy} & E_{yz} \\ E_{xz} & E_{yz} & E_{zz} \end{bmatrix}$$

$E_{ij} = \gamma_{ij}/2$



$\{dU\} = [E] \{d\epsilon\}$



semplifico \vec{U} della figura dell'altra lezione

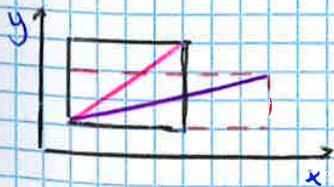
dovuto alle
 sole deformazioni [E]

[E] tensore 3x3 simmetrico

tracce autovalori e autovettori

↓
 deformazioni principali E_1, E_2, E_3
 ↓
 direzioni principali

Segmenti allineati su direzioni principali: variano solo lunghezza, non orientazione



Si chiarisce quindi l'osservazione fatta in precedenza: nell'esempio i lati del quadrato sono posti su direzioni principali e non variano d'orientazione; altri segmenti posti su direzioni non principali (es. diagonale) invece variano anche di orientazione.

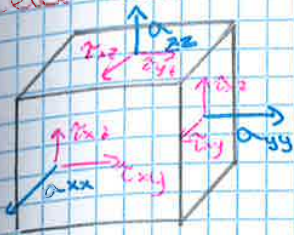
Nel riferimento principale p_1, p_2, p_3

$$[E] = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix}$$

- senso fisico: segmenti allineati con le direzioni principali sono soggetti a sole dilatazioni e non a scorrimenti, non cambiano quindi di orientazione
- ordiniamo le deformazioni principali in senso decrescente $E_1 \geq E_2 \geq E_3$

In questa sede ci si limita a considerare il caso del comportamento elastico lineare

Proprietà elastiche del materiale



Obiettivo: caratterizzare dal punto di vista elastico il materiale, indipendentemente dalle caratteristiche geometriche della struttura

Approccio: Se ne studia il comportamento in termini di tensioni e deformazioni

Si immagina di operare su un blocchetto infinitesimo materiale:

- si applicano (prima una alla volta, poi contemp.) le componenti di tensione (σ, τ)
- si osservano (misurato) le componenti di deformazione che nascono ($\epsilon_{ii}, \gamma_{ij}$)

Effetto delle tensioni σ, τ sulle dilatazioni ϵ

- Applicando la componente normale σ_{xx} si osserva la nascita della dilatazione ϵ_{xx}

$$\text{Misura } \epsilon_{xx} \propto \sigma_{xx} \rightarrow \epsilon_{xx} = \frac{1}{E} \sigma_{xx}$$

- costante E :

- modulo elastico normale o modulo di Young
- ha le stesse dimensioni fisiche di una tensione (MPa, N/mm²)
- è una misura della rigidità del materiale a trazione/compressione.

- Applicando la componente normale σ_{yy} si osserva che la dilatazione ϵ_{xx} è proporzionale anche a questo:

$$\epsilon_{xx} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{yy}$$

- coefficiente di contrazione trasversale (di Poisson) ν
- adimensionale
- preceduta dal segno "-" perché contrattiva
- $\nu < 0,5$ metalli $\approx 0,33$

MATERIALE ISOTROPO: le proprietà sono identiche qualunque direzione le si valuti

OMOGENEITÀ: le proprietà sono identiche in tutti i punti del materiale

- Considera il materiale isotropo. Applicando la componente normale σ_{zz} si osserva che la dilatazione ϵ_{xx} è proporzionale anche a questo:

$$\epsilon_{xx} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{zz}$$

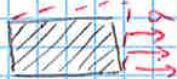
- Applicando le componenti tangenziali $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ (una alla volta o insieme) si osserva che esse non causano dilatazione ϵ_{xx}

• Poiché le α e E sono disaccoppiate dalle z e y , un riferimento principale per le tensioni ed è anche per le deformazioni (tutte le $\epsilon_{ij} = 0$)

$$\begin{cases} \epsilon_1 = 1/E \sigma_1 - \nu/E \sigma_2 - \nu/E \sigma_3 + \alpha \Delta T \\ \epsilon_2 = -\nu/E \sigma_1 + 1/E \sigma_2 - \nu/E \sigma_3 + \alpha \Delta T \\ \epsilon_3 = -\nu/E \sigma_1 - \nu/E \sigma_2 + 1/E \sigma_3 + \alpha \Delta T \end{cases}$$

↳ grazie all'isotropia

es. composito



α causa anche ϵ

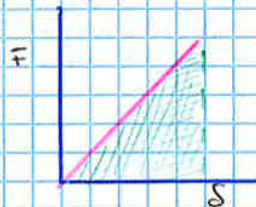
Energia di deformazione

Componente elastico (es. molla)

Un elemento in materiale elastico che si deforma accumula energia, ad esempio nel caso di una molla

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} F S$$

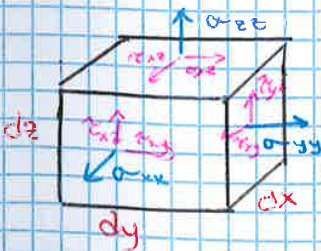
\mathcal{E} = energia (J)
 F = forza (N)
 S = allungamento (m)



Nel diagramma forze-allungamento, l'energia è visualizzata come area sottesa dalla caratteristica (triangolo tratteggiato)

Naturalmente si tratta di un'energia reversibile: rimuovendo la forza si annulla l'allungamento - e viceversa - e l'energia si annulla

Materiale elastico

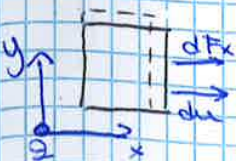


Per trattare il caso di un materiale elastico indipendente dalla forma del componente, si considera anzitutto un elemento infinitesimo $dx \, dy \, dz$

due tipi di lavoro: $\left\{ \begin{array}{l} \text{davuto a } \sigma \\ \text{davuto a } \tau \end{array} \right.$

effetto della tensione normale

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$



Agisce la sola componente σ_{xx}

La forza elementare associata è $dF_x = \sigma_{xx} \, dy \, dz$

Lo spostamento elementare per cui essa compie lavoro è

$$du = \epsilon_{xx} \, dx$$

$$\{du\} = [\epsilon] \{dx\} = \begin{Bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix}$$

quindi l'energia è: $d\mathcal{E} = \frac{1}{2} dF_x \, du = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \, \epsilon_{xx} \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \, \epsilon_{xx} \, dV$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dV} = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \, \epsilon_{xx}$$

Analoghe relazioni: per $\sigma_{yy} \, \epsilon_{yy}$, $\sigma_{zz} \, \epsilon_{zz}$

$$\frac{d\epsilon}{dV} = \frac{1}{2} (\alpha_{xx} \epsilon_{xx} + \alpha_{yy} \epsilon_{yy} + \alpha_{zz} \epsilon_{zz} + \alpha_{xy} \gamma_{xy} + \alpha_{xz} \gamma_{xz} + \alpha_{yz} \gamma_{yz})$$

Stati particolari di tensione-deformazione

- In generale i problemi di elasticità sono tridimensionali (tutte le componenti di tensione / deformazione sono coinvolte e non nulle)
- esistono due casi bidimensionali notevoli:
 - stato di tensione piana
 - stato di deformazione piana

Stato di tensione piana

"spessore sottile" → piana



Sulla superficie (libera!) che contorna un elemento strutturale possiamo notare che:

- le componenti di ~~tensione tangenziale~~ ~~sono nulle~~
- la componente di ~~tensione normale~~ è pari alla ~~pressione~~ dell'ambiente in cui l'elemento si trova, spesso trascurabile rispetto alle tensioni strutturali.

Quindi, detto z l'asse normale al piano della superficie (localmente se esso è curvo) si ha che

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\sigma_{zz} \approx 0$$

- possono essere non nulle le componenti nel piano xy
- per spessori sottili anche all'interno

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [E] = \begin{bmatrix} E_{xx} & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & E_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & E_{zz} \end{bmatrix}$$

Sotto queste ipotesi, la legge elastica si riduce a: (Ezz valutata da parte solo se serve)

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu \frac{\sigma_{yy}}{E} + \alpha(T - T_0) \\ \epsilon_{yy} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} + \frac{\sigma_{yy}}{E} + \alpha(T - T_0) \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \end{cases}$$

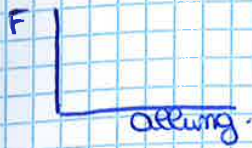
per il caso più generale possibile descrivere le relazioni tra le componenti nel piano xy nella forma inversa:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy}) - \frac{E\alpha}{1-\nu} (T - T_0) \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{yy} + \nu \epsilon_{xx}) - \frac{E\alpha}{1-\nu} (T - T_0) \\ \tau_{xy} = G \gamma_{xy} \end{cases}$$

CEDIMENTO STATICO DEI MATERIALI METALLICI

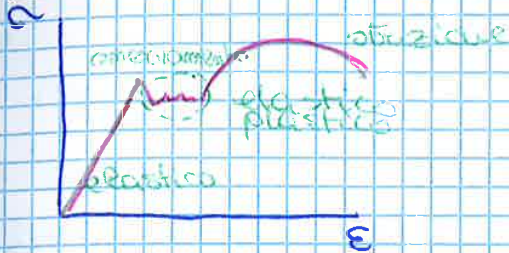
Prova di trazione

Metodo usuale per determinare le proprietà meccaniche del materiale



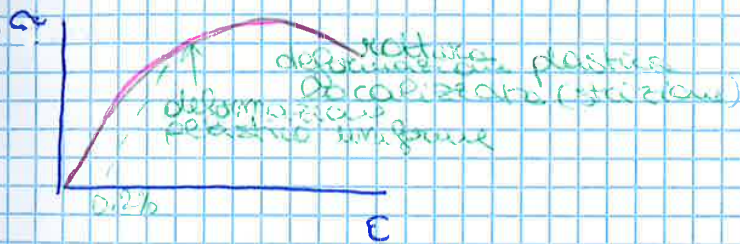
- forza - allungamento
- prove di solito in controllo di spostamento

MATERIALE DUTTILE - caso con snervamento



- Tratto elastico
- snervamento: superiore F_{eH} (R_{eH}), inferiore F_{eL} (R_{eL})
- plasticizzazione uniforme: inquadramento, picco F_m (R_m)
- Strizione, rottura

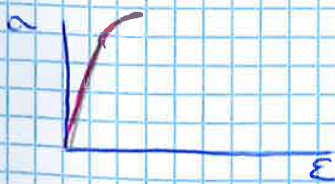
- caso senza snervamento



- Se il carico viene rilasciato durante la fase plastica
 - storico lineare e // alla retta elastica iniziale
 - allungamento residuo
- se il carico viene riapplicato
 - stesso tratto lineare fino al livello massimo di carico raggiunto
 - ripres. precedente della curva elastica post-plastica

- Tratto elastico
- plasticizzazione assente o molto limitata, immediata rottura F_m (R_m)
- assenza di strizione

MATERIALE FRAGILE



Valori notevoli:

Forza (carico)

F_m
 F_{eH}
 F_{eL}

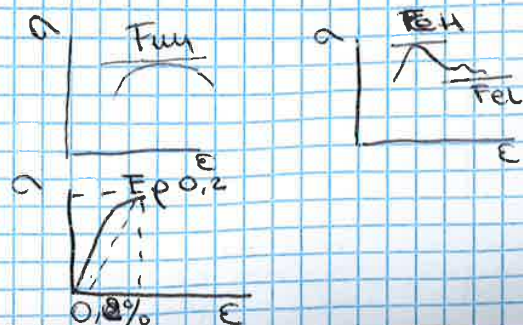
Tensione (carico unitario)

- diviso per S_0
- tensione convenzionale

Rotture:

R_m
snervamento superiore (R_{eH})
snervamento inferiore (R_{eL})

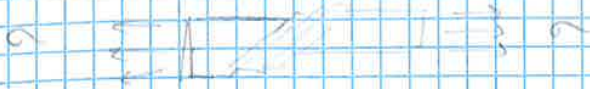
Limite di proporzionalità (0,2%)



Ipotesi di cedimento per materiali duttili:

Modalità di cedimento (accrescimento plastico)

- si manifesta come accrescimento dei piani cristallini, per effetto di tensioni di tipo tangenziale (τ)
- ciò è evidenziato sperimentalmente dal fatto che le superfici di rottura a trazione (almeno nella zona esterna del provino) sono inclinate di circa 45° rispetto alle direzioni del carico



- la tensione tangenziale massima è il raggio del cerchio di Mohr maggiore

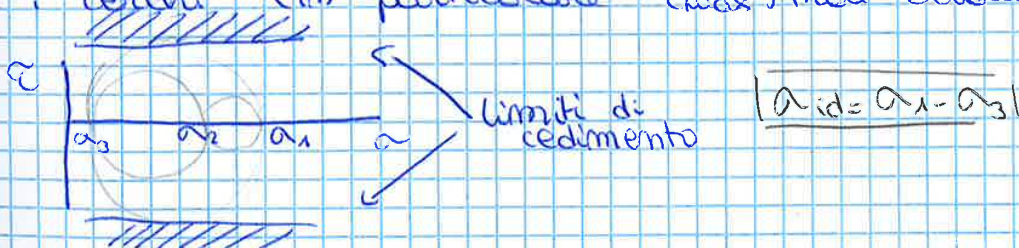
$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

- in stato di tensione monoassiale (tensione ideale)

$$\tau_{max, mono} = \frac{\sigma_{id}}{2}$$

- confrontando il caso generico e quello ideale (σ_2 pari a τ_{max}) si ottiene la formula: $\sigma_{id} = \sigma_1 - \sigma_3$

- Mediante i cerchi di Mohr, la condizione limite si mostra come una coppia di rette orizzontali che i cerchi (in particolare τ_{max}) non devono raggiungere



Osservazione: il criterio non considera l'effetto di σ_2 e non è sensibile alla sollecitazione idrostatica

Approccio alternativo basato sull'energia elastica:

- si considera l'energia di deformazione corrispondenti al solo lavoro di tensione e deformazione deviatoriche (energia di distorsione (variazione forma))

con alcuni passaggi, qui omissi, si scrive la formula:

$$\sigma_{id} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}$$

Nota che di ciascuna parentesi sotto radice è il diametro di uno dei cerchi di Mohr

Ipotesi di cedimento per materiali duttili:

Modalità di cedimento (scorrimento plastico)

- si manifesta come scorrimento dei piani cristallini, per effetto di tensioni di tipo tangenziale (τ)
- ciò è evidenziato sperimentalmente dal fatto che le superfici di rottura a trazione (almeno nella zona esterna del provino) sono inclinate di circa 45° rispetto alle direzioni del carico



- la tensione tangenziale massima è il raggio del cerchio di Mohr maggiore

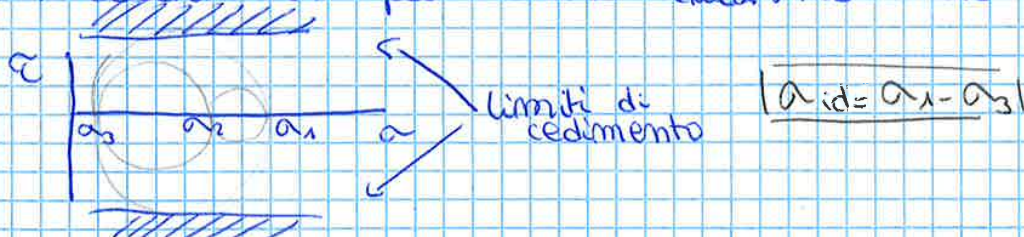
$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

- in stato di tensione monoassiale (tensione ideale)

$$\tau_{max, mono} = \frac{\sigma_{id}}{2}$$

- confrontando il caso generico e quello ideale (σ_2 pari a τ_{max}) si ottiene la formula: $\sigma_{id} = \sigma_1 - \sigma_3$

- Mediante i cerchi di Mohr, la condizione limite si mostra come una coppia di rette orizzontali che i cerchi (in particolare τ_{max}) non devono raggiungere



Osservazione: il criterio non considera l'effetto di σ_2 e non è sensibile alla sollecitazione idrostatica.

Approccio alternativo basato sull'energia elastica:

- si considera l'energia di deformazione corrispondenti al solo lavoro di tensione e deformazioni deviatoriche (lungo di distorsione (variazione forma))

con alcuni passaggi, qui omissi, si scrive la formula:

$$\sigma_{id} = \frac{1}{\sqrt{8}} \sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}$$

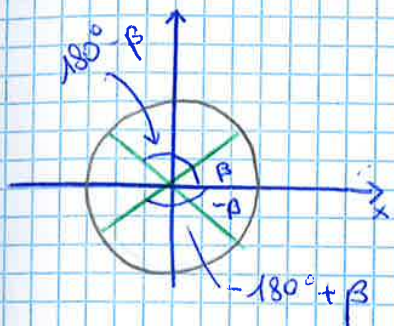
Nota che ciascuna parentesi sotto radice è il diametro di uno dei cerchi di Mohr

$$\epsilon_{a,b} = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{zz}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{zz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xz}}{2}\right)^2} = \begin{cases} 8,98 \cdot 10^{-4} & \epsilon_1 \\ -5,00 \cdot 10^{-4} & \epsilon_3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -180^\circ \leq 2\alpha &\leq -90^\circ \\ -90^\circ \leq \alpha &\leq -45^\circ \\ \alpha &= -58,3^\circ \end{aligned}$$

arctg(|y/x|) → β

$$0 \leq \beta \leq 90^\circ$$



- a) 2β
- b) -2β
- c) 180° - 2β
- d) -180° + 2β

$$\begin{aligned} & \beta \\ & \beta \\ & -90^\circ + 2\beta \\ & -90^\circ + 2\beta \end{aligned}$$

Tensione piana → σ_{zz} = τ_{xz} = τ_{yz} = 0



$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= -2,99 \cdot 10^{-3} \\ \epsilon_{yy} &= 2,59 \cdot 10^{-3} \\ \gamma_{xy} &= 2,28 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$



$$E = 6,90 \cdot 10^4 \quad \nu = 0,31$$

[σ]?
σ₁, σ₂, σ₃? α?

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -110 & 60 & 0 \\ 60 & 140 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

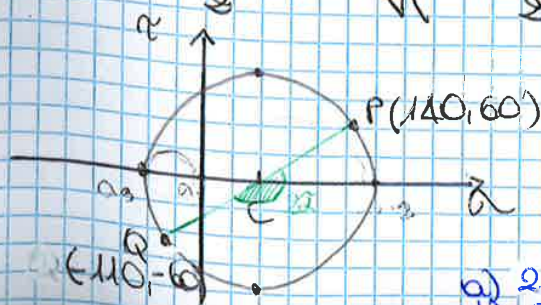
$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy}) = -110 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{yy} + \nu \epsilon_{xx}) = 140 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = 60 \text{ MPa}$$

$$\sigma_c = \sigma_{zz} = 0 \text{ MPa} \quad \sigma_2$$

$$\sigma_{a,b} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \begin{cases} 156 \text{ MPa} & \sigma_1 \\ -124 \text{ MPa} & \sigma_3 \end{cases}$$



$$-180^\circ \leq 2\alpha \leq -90^\circ$$

$$|\tan 2\alpha| = \left| \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right| = 0,481 \quad 2\alpha = -25,7^\circ$$

$$a) 2\beta \quad 25,7^\circ$$

$$b) -2\beta \quad -25,7^\circ$$

$$c) 180 - 2\beta \quad 154,3^\circ$$

$$d) -180 + 2\beta$$

$$\boxed{-156,3^\circ}$$

$$\rightarrow \alpha = -77,2^\circ$$

$\sigma_c = 0 \text{ MPa}$ σ_2

$$\sigma_{a,b} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}$$

417 MPa σ_1
-37 MPa σ_3

$\sigma_H \rightarrow 437 \text{ MPa}$ $C_s = \frac{800}{437} = 1,83$

$\sigma_T \rightarrow 454 \text{ MPa}$ $C_s = \frac{800}{454} = 1,76$

$[a] = \begin{bmatrix} 120 & -150 & 0 \\ -150 & 240 & 0 \\ 0 & 0 & 408 \end{bmatrix}$

Duttile

$C_s = 1,3$

$C_s \frac{R_{p02}}{\sigma_{id}} = \frac{R_{p02}}{\sigma_{id}}$

$R_{p02}?$

$[a] \xrightarrow{\text{Mohr}} \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{matrix} \xrightarrow{\text{TRESCA}} \sigma_{id} \rightarrow R_{p02} = C_s \cdot \sigma_{id} = 585 \text{ MPa}$

$\frac{120+120}{408} = 301$ $\sigma_{id} = 108 \cdot 19 = 389$ $R_{p02} = 1,5 \cdot 389 = 584 \text{ MPa}$

Confronto ipotesi di cedimento per materiali duttili:

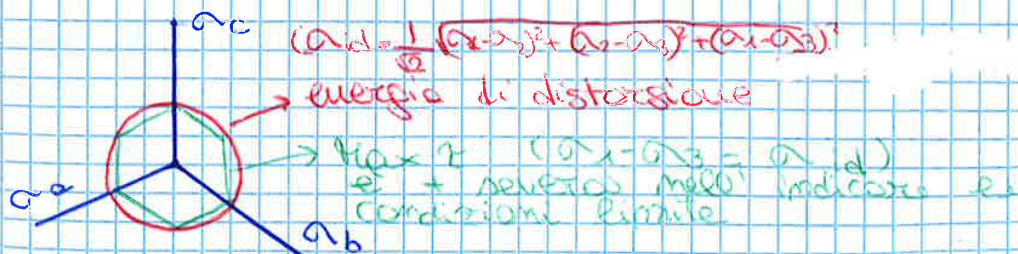
Poiché entrambe le ipotesi viste sono formulate per prevedere il cedimento dei materiali duttili, si pone il problema di:

- valutare di quanto differiscano
- stabilire se una delle due sia più adeguata e rappresentativa per condizioni limite

Confronto in forma grafica

- spazio cartesiano in cui le coordinate sono le tensioni principali
- a ogni ipotesi corrisponde una superficie limite:
 - energia di distorsione \rightarrow cilindro a sezione circolare
 - massima tensione tangenziale \rightarrow pirama a sezione esagonale
 - eutambi i solidi hanno per asse il trisetto

Viste nella direzione del trisetto, le superfici si presentano come un esagono regolare (e max) inscritto nel cerchio (energia di distorsione)



- il pirama (esagono) è tutto contenuto nel r(cerchio) quindi l'ipotesi della massima tensione tangenziale è più conservativa
- la differenza tra le ipotesi è comunque modesta

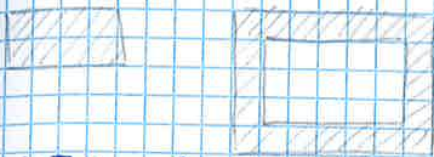
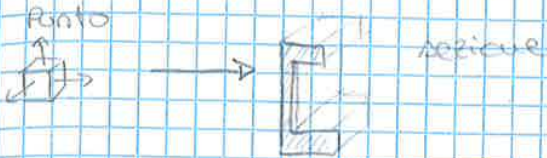
Proprietà geometriche della sezione

Aree e loro proprietà

Nelle applicazioni pratiche, gli elementi strutturali hanno delle sezioni caratteristiche, che dipendono dalle applicazioni e dai procedimenti di fabbricazione.

Esse sono caratterizzate

- dalle estensioni (area)
- da come l'area è distribuita ("forma")



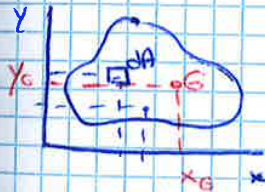
La forma è importante!

Le proprietà legate alla forma dell'area vengono espresse mediante appositi parametri matematici:

- momenti di primo ordine
- momenti di secondo ordine

Aree, momenti del primo ordine

Per una forma qualsiasi, assunto un sistema di riferimento Oxy , definiamo (mediante integrali in 2D)



- area (momento di "ordine zero")

$$A = \int_A dA$$

- momenti statici (o di primo ordine)

$$S_x = \int_A y dA$$

$$S_y = \int_A x dA$$

rispetto asse x

rispetto asse y

$\begin{cases} S_x \\ S_y \end{cases} \rightarrow$ servono per calcolare il baricentro

Baricentro:

- punto dove, idealmente, possiamo immaginare concentrata tutta l'area A della sezione

$$x_G = \frac{S_y}{A}$$

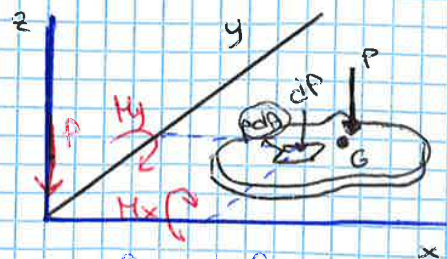
$$y_G = \frac{S_x}{A}$$

Spiegazione

Si consideri una lastra omogenea di peso all'unità di superficie p agente trasversalmente al piano della lastra (asse z)

p : peso proprio N/mm^2

Si vuole sostituire il peso distribuito con la forza risultante



- Se i valori fuori diagonale sono nulli si parla di riferimento (assi) principale di inerzia

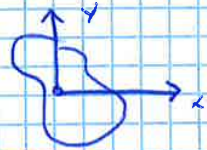
$$J_{xy} = \int_A xy dA = 0$$

- Il riferimento e i momenti d'inerzia principali vengono trovati con procedimento analogo a quello per tensione e deformazioni.

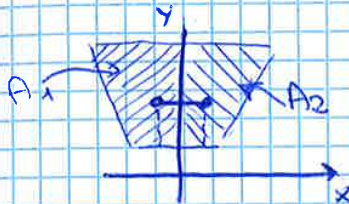
Sistemi di riferimento Origine / Rotazione / Traslazione (assi)

- Origine nel baricentro → ref. baricentrico

$$\rightarrow G = (0,0) \quad S_x = 0 \quad S_y = 0$$



- Se una figura ammette un asse di simmetria, allora il baricentro si trova su tale asse: infatti il momento statico di metà figura ha lo stesso modulo e segno opposto di quello dell'altra metà



$$S_x = \int_A x dA = \int_{A_1} x dA + \int_{A_2} x dA = 0$$

- Se gli assi di simmetria sono due, G sta sull'intersezione (es. rettangolo)

Per il momento centrifugo (II ordine)

$$J_{xy} = \int_A xy dA = \int_{A_1} xy dA + \int_{A_2} xy dA = 0$$

Un asse principale d'inerzia è quello di simmetria

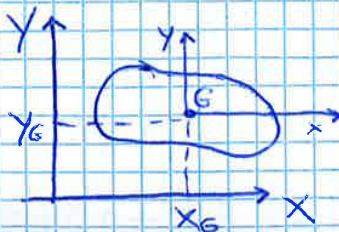
- Se l'origine è nel baricentro e gli assi sono principali d'inerzia il ref. è detto **centrale principale** (o talvolta per brevità soltanto **centrale**)

Traslazione degli assi

- Vogliamo stabilire le relazioni fra i momenti (di I e II ordine) espressi secondo due sistemi di riferimento traslati l'uno rispetto all'altro, siano:

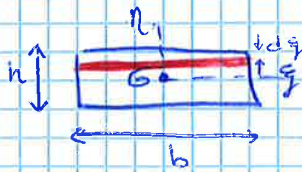
- OXY riferimento non baricentrico
- Gxy riferimento baricentrico
- X_G, Y_G coordinate di G secondo OXY

$$\begin{cases} X = X_G + x \\ Y = Y_G + y \end{cases}$$



Dispensa → tabella con i valori dei momenti d'inerzia per alcune figure elementari

es. momento d'inerzia rettangolo



$$J_{\xi\xi} = \int_A \eta^2 dA$$

$$= b \int_{-h/2}^{+h/2} \eta^2 d\eta = b \left[\frac{\eta^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12}$$

Analogamente $J_{\eta\eta} = \frac{hb^3}{12}$ $J_{\xi\eta} = 0$

Rotazione degli assi

Premessa: i momenti del II ordine

$$J_{xx} = \int_A y^2 dA \quad J_{yy} = \int_A x^2 dA \quad J_{xy} = \int_A xy dA$$

sono componenti di un tensore (2x2)

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} \\ -J_{xy} & J_{yy} \end{bmatrix}$$

nel riferimento generico

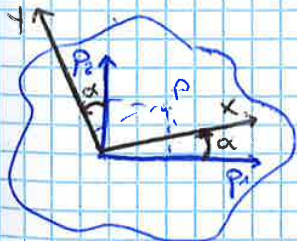
esiste un sistema privilegiato che lo rende diagonale

$$[J] = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}$$

riferimento $p_1 p_2$ principale d'inerzia

$J_1 \geq J_2$ momenti d'inerzia principali

Relazione tra le coordinate x, y e p_1, p_2



Nota: α da p_1 a x

$$\begin{cases} x = p_1 \cos \alpha + p_2 \sin \alpha \\ y = -p_1 \sin \alpha + p_2 \cos \alpha \end{cases}$$

Sostituendo nella definizione di J_{xx}

$$J_{xx} = \int_A (-p_1 \sin \alpha + p_2 \cos \alpha)^2 dA = \sin^2 \alpha \int_A p_1^2 dA + \cos^2 \alpha \int_A p_2^2 dA +$$

$$- 2 \cos \alpha \sin \alpha \int_A p_1 p_2 dA$$

= 0 (mom. centrifugo nel rif. principale)

$$J_{xx} = \sin^2 \alpha J_2 + \cos^2 \alpha J_1$$

$$J_{yy} = \int_A (p_2 \cos \alpha + p_1 \sin \alpha)^2 dA = \cos^2 \alpha \int_A p_1^2 dA + \sin^2 \alpha \int_A p_2^2 dA +$$

$$+ 2 \cos \alpha \sin \alpha \int_A p_1 p_2 dA$$

= 0

$$J_{yy} = \cos^2 \alpha J_1 + \sin^2 \alpha J_2$$

$$J_{xy} = \int_A (p_1 \cos \alpha + p_2 \sin \alpha) (-p_1 \sin \alpha + p_2 \cos \alpha) dA = -\cos \alpha \sin \alpha \int_A p_1^2 dA + \cos \alpha \sin \alpha \int_A p_2^2 dA +$$

$$+ \cos^2 \alpha \int_A p_1 p_2 dA - \sin^2 \alpha \int_A p_1 p_2 dA$$

$J_{xy} < 0$



$-45^\circ < \alpha < 0$

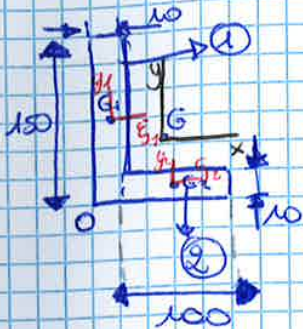
$J_{yy} > J_{xx}$



$-90^\circ < \alpha < -45^\circ$

esercizio

Determinare riferimento centrale principale e J_1, J_2



OXY riferimento di partenza

$X_1 = 5 \text{ mm} \quad Y_1 = 75 \text{ mm}$

$X_2 = 60 \text{ mm} \quad Y_2 = 5 \text{ mm}$

$A_1 = 150 \cdot 10 = 1500 \text{ mm}^2$

$A_2 = 100 \cdot 10 = 1000 \text{ mm}^2$

perché noi partiamo da O $\rightarrow 50 + 10$

$A = 2500 \text{ mm}^2$

Momenti statici secondo OXY

$S_x = A_1 Y_1 + A_2 Y_2 = 1500 \cdot 75 + 1000 \cdot 5 = 1,175 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$

$S_y = A_1 X_1 + A_2 X_2 = 1500 \cdot 5 + 1000 \cdot 60 = 6,75 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$

$X_G = \frac{S_y}{A} = \frac{6,75 \cdot 10^4}{2,5 \cdot 10^3} = 27,0 \text{ mm}$

$Y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{1,175 \cdot 10^5}{2,5 \cdot 10^3} = 47,0 \text{ mm}$

$X = X_G + x$

$Y = Y_G + y$

G_{xy} riferimento baricentrico

$x_1 = X_1 - X_G = 5 - 27 = -22 \text{ mm}$

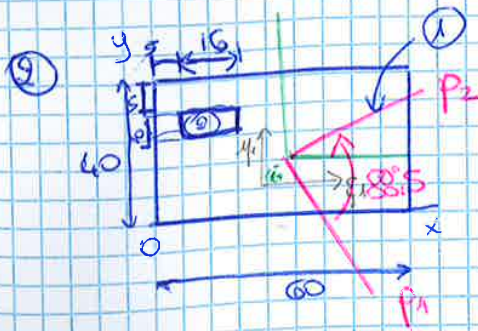
$y_1 = Y_1 - Y_G = 75 - 47 = 28 \text{ mm}$

$x_2 = X_2 - X_G = 60 - 27 = 33 \text{ mm}$

$y_2 = Y_2 - Y_G = 5 - 47 = -42 \text{ mm}$

I, J nel riferimento G_{xy}

$J_{xx} = J_{G_{xy}} + A_1 y_1^2 + J_{G_{xy}} + A_2 y_2^2$



pieno-vuoto
 ① → pieno
 ② → vuoto

$X_1 = 30 \text{ mm}$ $Y_1 = 20 \text{ mm}$
 $X_2 = 13 \text{ mm}$ $Y_2 = 30 \text{ mm}$
 $A_1 = 2400 \text{ mm}^2$
 $A_2 = 160 \text{ mm}^2$
 $A = A_1 - A_2 = 2240 \text{ mm}^2$

Posizione baricentro G

$S_x = A_1 Y_1 - A_2 Y_2 = 2400 \cdot 20 - 160 \cdot 30 = 4,320 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$
 $S_y = A_1 X_1 - A_2 X_2 = 2400 \cdot 30 - 160 \cdot 13 = 6,992 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$
 $X_G = \frac{S_y}{A} = \frac{6,992 \cdot 10^4}{2,24 \cdot 10^3} = 31,21 \text{ mm}$
 $Y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{4,320 \cdot 10^4}{2,24 \cdot 10^3} = 19,29 \text{ mm}$

$x_1 = X_1 - X_G = 30 - 31,21 = -1,21$
 $y_1 = Y_1 - Y_G = 20 - 19,29 = 0,71$
 $x_2 = X_2 - X_G = 13 - 31,21 = -18,21$
 $y_2 = Y_2 - Y_G = 30 - 19,29 = 10,71$

Momenti II ordine

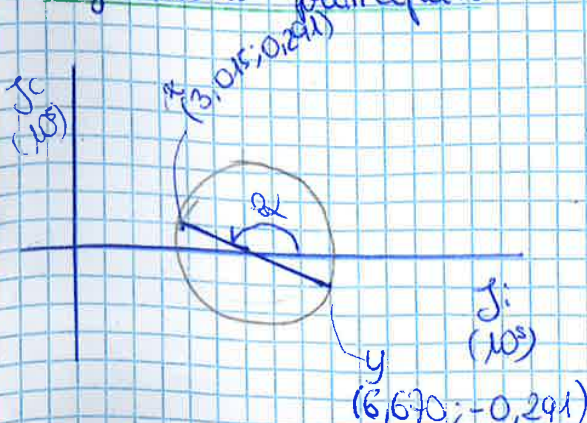
$J_{xx} = A_1 y_1^2 + J_{G1} - A_2 y_2^2 - J_{G2} =$
 $2400 \cdot 0,71^2 + \frac{60 \cdot 40^3}{12} - 160 \cdot 10,71^2 - \frac{16 \cdot 10^3}{12}$
 $J_{xx} = 3,015 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$

$J_{yy} = A_1 x_1^2 + J_{G1} - A_2 x_2^2 - J_{G2} =$
 $2400 \cdot (-1,21)^2 + \frac{40 \cdot 60^3}{12} - 160 \cdot (-18,21)^2 - \frac{10 \cdot 16^3}{12}$
 $J_{yy} = 6,670 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$

$J_{xy} = A_1 x_1 y_1 + J_{G1} - A_2 x_2 y_2 - J_{G2}$
 $= 2400 \cdot (-1,21) \cdot 0,71 - 160 \cdot (-18,21) \cdot 10,71$

$J_{xy} = 2,914 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$

Riferimento principale



$J_{1,2} = \left[\frac{3,015 + 6,670}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3,015 - 6,670}{2} \right)^2 + 0,291^2} \right] \cdot 10^5$

$J_1 = 6,694 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$

$J_2 = 2,992 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$

$\tan 2\alpha = \frac{2 J_{xy}}{J_x - J_y} = \frac{2 \cdot 0,2914}{3,015 - 6,670} = 0,159$

$J_{xy} > 0 \quad J_{xx} < J_{yy} \quad \left[45^\circ < \alpha < 90^\circ \right]$

$\alpha = 88,5^\circ$

Solilo di Saint Venant

è il modello di calcolo che serve per trovare tensioni, deformazioni... in elementi allungati (travi)

- ipotesi per la formulazione
- caratteristiche di sollecitazione
- procedura per ottenere le formule di calcolo delle tensioni

Formulazione del problema

elementi strutturali

Soluzione analitica (formule) per tensioni, deformazioni, spostamenti

Monodimensionali:

due dimensioni \ll delle rimanenti (travi da telaio, alberi delle macchine...)

Bidimensionali:

una dimensione \ll delle rimanenti due (piastre (piane), gusci (curvi))

→ Solilo di ~~Saint Venant~~

Impostazione e soluzione rigorosa del problema del solido prismatico sotto diversi stati di sollecitazione (trazione, flessione, torsione, taglio)

Ipotesi di partenza

1 - Geometria

a) Cilindro ottenuto per traslazione di una figura piana in direzione della propria normale

b) l'estensione in tale direzione è molto maggiore delle dimensioni nel piano della figura generatrice



2 - Carichi e vincoli

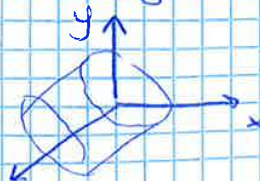
Applicato solo in corrispondenza delle basi

3 - Materiali

elastico lineare, omogeneo, isotropo

conseguenze delle assunzioni

Riferimento cartesiano x, y, z avente assi xy contenuti nel piano della figura generatrice e origine nel baricentro di quest'ultima



- Assi z traiettoria del baricentro durante il moto di generazione: linea dell'asse del solido

• Tutte le sezioni normali a z sono sezioni rette del solido, identiche alla figura generatrice

- assenza di carichi sulle superficie laterali, dimensioni trasversali piccole $\rightarrow \sigma_x = 0$, $\sigma_{xy} = 0$, $\tau_{xy} = 0$

$$T_x = \int_A \tau_{xz} dA$$

$$T_y = \int_A \tau_{yz} dA$$

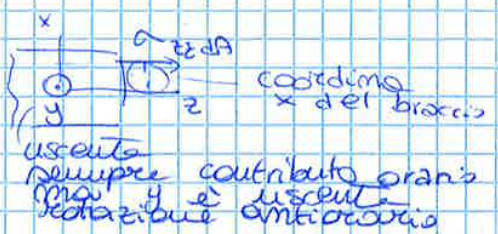
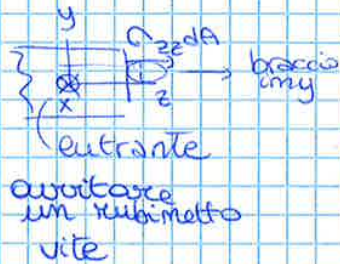


• Momenti flettenti (nello spazio)

- componenti intorno a x e y
- tendono a curvare (flettere) l'asse del solido → es. spugna

$$M_x = \int_A \sigma_{zz} y dA$$

$$M_y = - \int_A \sigma_{zz} x dA$$



• Momento torcente

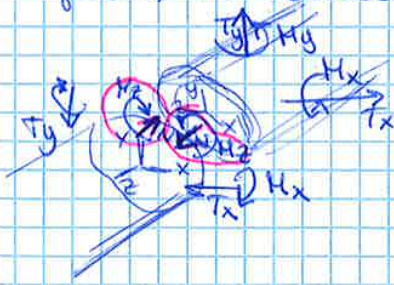
- componente intorno a z
- tende ad attorcigliare (torcere) l'asse del solido

$$M_z = \int_A (\tau_{yz} x - \tau_{xz} y) dA$$



Versi convenzionali delle caratteristiche di sollecitazione

Interpretazione generica del solido: si mettono in evidenza, sulle due facce, le caratteristiche agenti



⊖ faccia negativa: versi delle caratteristiche opposti a quelli degli assi

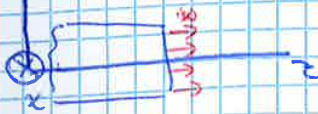
⊕ faccia positiva: versi delle caratteristiche concordi a quelli degli assi

Principio di Saint Venant

- il modo in cui i carichi sono effettivamente applicati sulle sezioni di estremità del solido dipende dal pratico considerato
- la distribuzione delle tensioni localmente prodotta dal carico esterno può essere diversa da quella prevista dalle soluzioni di Saint Venant
- a distanza dalla sezione di applicazione del carico, circa pari alle dimensioni trasversali il modo in cui il carico è applicato non influenza più

Comportamento estensionale (trazione - compressione)

Caso in cui il moto di deformazione elastico del solido di Saint Venant fa traslare tutti i punti di una sezione in direzione dell'asse d'asse



1) Spostamento

$$w = k_0 z$$

2) Deformazione

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = k_0$$

3) Elasticità

$$\epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} \sigma_{yy} + \frac{1}{E} \sigma_{zz} + \alpha(T - T_0) \rightarrow \text{in generale}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E} \sigma_{zz} \rightarrow \text{nel nostro caso non consideriamo } T \text{ + ipotesi di Saint Venant}$$

$$\sigma_{zz} = E \epsilon_{zz}$$

$$\sigma_{zz} = E \cdot k_0$$

4) Equivalenti statici

si calcolano le caratteristiche di sollecitazione agenti sulle sezioni corrispondenti alla tensione costante ($\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz} = 0$ perché non agano σ_{zz})
 $k_0 = \text{cost}$
 $E = \text{cost}$ se il materiale è omogeneo

$$N = \int_A \sigma_{zz} dA = \int_A E k_0 dA \Rightarrow$$

$$= E k_0 \int_A dA = E k_0 A$$

$$M_x = \int_A y \sigma_{zz} dA = E k_0 \int_A y dA = 0$$

momento statico rispetto a x

(S_x)

ma il sistema è baricentrico $\rightarrow S_x = 0$ assi baricentrici

$$M_y = - \int_A x \sigma_{zz} dA = - E k_0 \int_A x dA = 0$$

" $S_y = 0$ assi baricentrici

$$k_0 = \frac{N}{EA} \rightarrow \sigma_{zz} = \frac{N}{A}$$

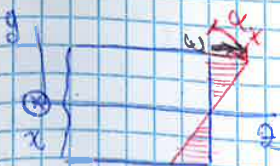
Risultante applicata su asse centrale



Comportamento flessionale

in generale nel moto elastico di flessione la sezione ruota attorno ad un asse qualsiasi. \rightarrow mai studiamo i casi separatamente per sovrapposizione effetti

Piano xy



1) Spostamento: la sezione ruota di un angolo α_x intorno all'asse baricentrico (x)

α_x piccolo \rightarrow archi & corde

$$w = y \alpha_x$$

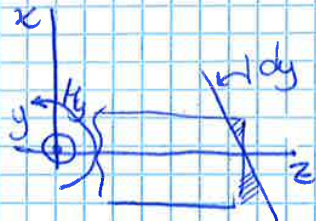
2) Deformazione

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = y \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial z} \right) = y k_x$$

indico con

\rightarrow curvatura dell'asse

Piano zx



il segno '-' indica che per una rotazione x y positivo punti con y positivo \rightarrow w negativo y negativo \rightarrow w positivo

1) spostamento rotazione intorno a y $w = -x\alpha y$

2) Deformazione curvatura

$$E\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = -x \frac{\partial \alpha y}{\partial z} = -x k y$$

3) Elasticità ($\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$)
 $\sigma_{zz} = E\epsilon_{zz} = -Exky$ variabile con x

4) Equivalenza statica

$$N = \int_A \sigma_{zz} dA = -Exky \int_A x dA = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} S_y = 0 \\ S_{xy} = 0 \end{array} \right.$$

$$M_x = \int_A y \sigma_{zz} dA = -Exk \int_A xy dA = 0$$

assi principali:

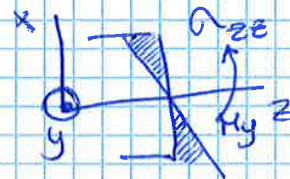
$$M_y = - \int x \sigma_{zz} dA = Exk \int_A x^2 dA = Exk J_{yy}$$

$$k_y = \frac{M_y}{E J_{yy}} \rightarrow \sigma_{zz} = - \frac{M_y x}{J_{yy}}$$

Rotaz. intorno a y

Momento flettente M_y

Asse neutro y ($\sigma_{zz} = 0$)



Flessione combinata nei due piani (zx, zy)

Sovrapposizione degli effetti

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x y}{J_{xx}} - \frac{M_y x}{J_{yy}}$$

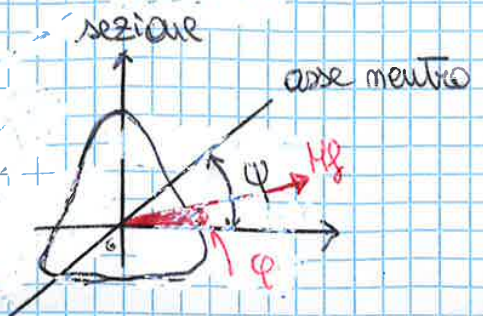
in questo caso l'asse neutro non coincide più con uno degli assi coordinati

Asse neutro? $\rightarrow \sigma_{zz} = 0$

$$\frac{M_x y}{J_{xx}} - \frac{M_y x}{J_{yy}} = 0 \quad \text{retta per l'origine}$$

forma esplicita

$$y = \frac{M_y}{M_x} \frac{J_{xx}}{J_{yy}} x \quad \text{asse neutro}$$



$$A = \pi \frac{D^2 - d^2}{4}$$

$$J_{xx} = \pi \frac{D^4 - d^4}{64}$$

$$\sigma_{zz}^p = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_{xx}} y_p = 26 + 52 = 78 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{zz}^a = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_{xx}} y_a = 26 - 52 = -26 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_{xx}} y = 0 \quad y = -\frac{N}{A} \frac{J_{xx}}{M_x} = -14,8 \text{ mm}$$

(sopra questo valore σ_+ sotto σ_-)

→ S. venant dice che sono gli altri due che sono da considerare

$$[a] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad [a]_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 78 \end{bmatrix} \quad [a]_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -26 \end{bmatrix}$$

Quale dei due è più sollecitato?

→ materiale
 la σ_{max} dipende se è fragile o duttile
 in questo caso $\sigma_{id} = \sigma_1$

$$\sigma_p \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 78 \end{bmatrix}$$

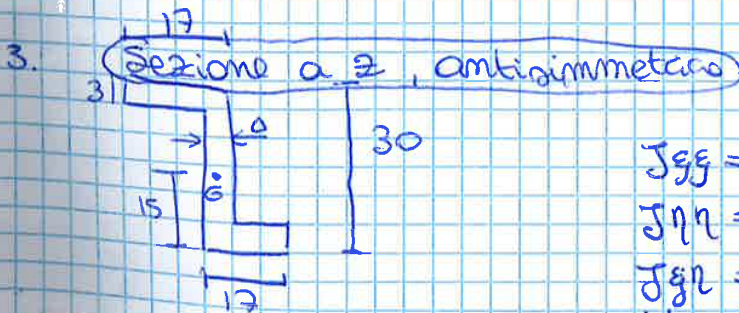
$$\sigma_1 = 78 \text{ MPa}$$

$$[a]_a \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -26 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 = \emptyset$$

Per un fragile non è pericoloso compressione ma trazione

$$C_s = \frac{300}{78} = 3,8$$



$$J_{yy} = 2,327 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$J_{zz} = 6,89 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

$$J_{yz} = -8,95 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

$$M_y = M_z = 200 \text{ Nm}$$

→ bisogna calcolare il sistema di riferimento principale

(Fig. 2 → cubito + R)

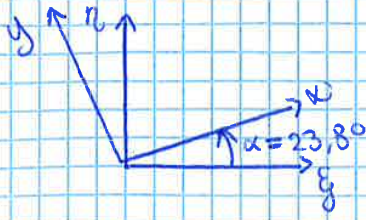
$$J_x = J_{xx} = 2,72 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$J_y = J_{yy} = 2,95 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$\alpha = -23,8^\circ$$

$$\left(\frac{J_x - J_y}{2 J_{yz}} \right) \rightarrow \tan^{-1} \rightarrow \alpha = -23,8$$

$$\left(\alpha = \tan^{-1} \frac{J_{yz}}{J_x - J_y} \right)$$



$$\begin{cases} x_p = \xi_p \cos \alpha + \eta_p \sin \alpha \\ y_p = -\xi_p \sin \alpha + \eta_p \cos \alpha \end{cases}$$

$$P = (7,88; 12,91)$$

$$Q = (-7,88; -12,91)$$

$$\sigma_{zz}^P = 303 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{zz}^Q = -303 \text{ MPa}$$

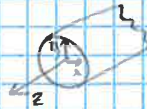
Solido di St. Venant

Comportamento torsionale → deformazione in cui la sezione ruota attorno all'asse z o un asse // a z
 → elementi di trasmissione nel vuoto

Nella torsione la forma è importante.

Due casi

- sezione retta circolare soluzione in forma chiusa esatta



- sezione retta non circolare soluzione non in forma chiusa



es. pareti sottili



soluzione approssimata

SEZIONE CIRCOLARE

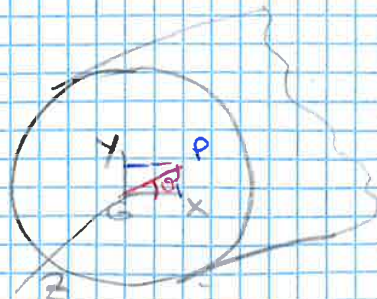
Procedimento in 4 passi

- 1) spostamenti
- 2) deformazioni
- 3) tensioni
- 4) equivalenti statici

1) Spostamenti

- rotazione intorno a z (θ) di un angolo θ = θ(z)
- la sezione resta piana

angolo di rotazione intorno a z



systemi di riferimento cartesiano xy e polare r,φ

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases}$$

↓
riferito a polari

Si assume che la sezione ruoti di un angolo θ (piccolo) intorno all'asse z rimanendo piana e indeformata; un generico punto di essa compie uno spostamento θr in direzione circonferenziale

$M_z = G \theta' J_p$

J_p è il doppio del momento di inerzia

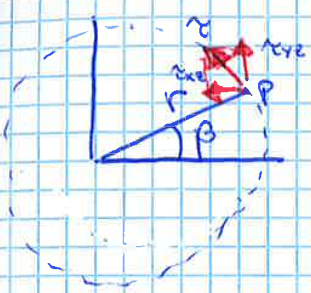
$\theta' = \frac{M_z}{G J_p}$

in S. Venant i carichi sono applicati alle estremità $\rightarrow M_z$ costante $\rightarrow \theta'$ costante $\rightarrow \theta$ (rotazione) cresce e l'incrinamento

$$\begin{cases} \tau_{xz} = -G y \frac{M_z}{J_p} \\ \tau_{yz} = +G x \frac{M_z}{J_p} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_{xz} = \frac{M_z}{J_p} y \\ \tau_{yz} = \frac{M_z}{J_p} x \end{cases}$$

Composizione di τ_{xz} τ_{yz}



Risultante della τ_{xz} τ_{yz} orientata circonferenzialmente "c"

$$\tau_{cz} = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = \frac{M_z}{J_p} \sqrt{y^2 + x^2}$$

$$\tau_{cz} = \frac{M_z}{J_p} \cdot r$$

Distribuzione della τ_{cz}

sezione piena

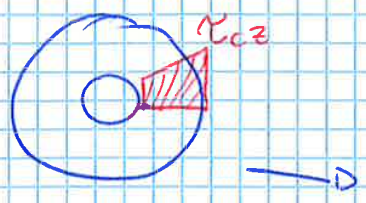


pico due finisce r, sul bordo esterno

$$J_p = \frac{\pi}{32} D^4$$

doppio di J_{yy} e J_{zz} nel sommo 2, uno su x e uno su y

sezione cava



è "storta", non c'è una direzione privilegiata di tensioni crescono dal centro alla periferia

$$J_p = \frac{\pi}{32} (D_o^4 - D_i^4)$$

Interpretazione di $\theta' = \frac{d\theta}{dz}$

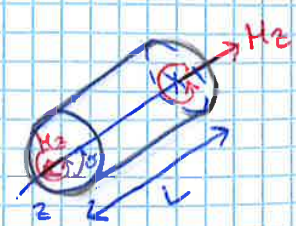
$\theta' = \frac{M_z}{G J_p}$ st. Venant carichi sulle basi

θ' costante $\leftarrow M_z$ costante

$$\theta' L = \frac{M_z L}{G J_p} = \Delta \theta$$

rotazione relativa tra le due sezioni distanti L

θ' gradiente di torsione





distribuzione
mollo spessore

Per rispettare la condizione di
tensione tangenziale nulla sulla
superficie laterale (scorico, S. Verrault)
le tensioni tangenziali in corrispondenza
dei bordi devono essere // ai bordi stessi.

Valore di picco sui bordi

$$\tau_{max} = \pm \frac{M_t}{J_t} s$$

M_t = momento torcente (e non τ perché la rotazione è
intorno a C , non σ)

J_t = coeff. della sezione $J_t = \frac{1}{3} l s^3$ sezione sottile

• Correzione per sezione non sottile

$$J_t = \frac{1}{3} (l - 2 \cdot 0,2s) s^3 \quad \uparrow \text{estremi}$$

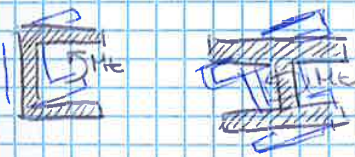
Gradiente di torsione

$$\theta' = \frac{M_t}{G J_t}$$

$$\Delta \theta = \theta' L = \frac{M_t L}{G J_t}$$

rotazione relativa tra sezioni a distanza L

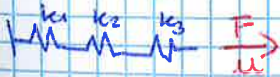
Sezione formata da rettangoli



meccanicamente in parallelo

- rotazione θ uguale per tutti
- M_t = somma dei momenti nei singoli rettangoli

Serie di molle



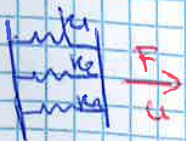
Stessa forza F
gli allungamenti si sommano

$$u = u_1 + u_2 + u_3$$

$$\mu = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} + \frac{F}{k_3} = \frac{F}{k_{eq}}$$

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \quad \text{si sommano le deformabilità}$$

Parallelo di molle



stesso allungamento u

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = k_1 u + k_2 u + k_3 u$$

$$k_{eq} \cdot u = k_1 u + k_2 u + k_3 u$$

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + k_3$$

$$M_t = \sum M_{t_i} = \sum \theta' G J_{t_i}$$

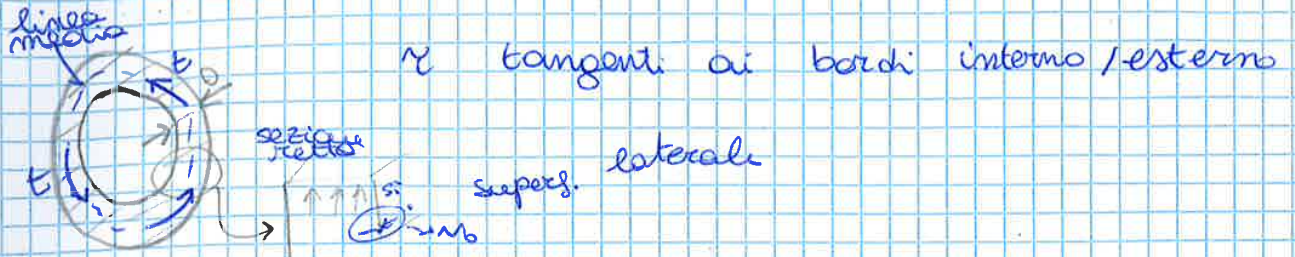
$L \theta'$ comune a tutti

$$M_t = G \theta' \sum J_{t_i} = G \theta' J_t$$

\sum complessivo

Nota: lo spessore δ è a numeratore, τ proporzionale a r
 Se $r_1 > r_2 \rightarrow \tau_1 > \tau_2$

Sezione parete sottile chiusa Due linee chiuse, una esterna e una interna



δ piccolo, τ \propto parallele
 τ orientate come la linea media

Analogia idrodinamica (liquido incompressibile)

Torsione

τ (tensione)

t (flusso di tensione)

Flusso in un circuito

v (velocità)

q (portata volumetrica)

Definizione del flusso t

$$t = \int_s \tau \, ds \approx \tau \delta$$

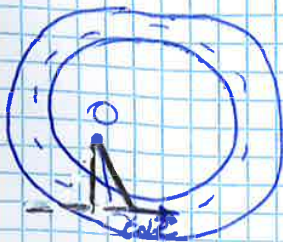
costante \rightarrow medio



Forza risultante

$$\oint_{\text{c.c.}} \tau \, ds = t \oint_{\text{c.c.}} ds = 0 \quad \text{Forza nulla}$$

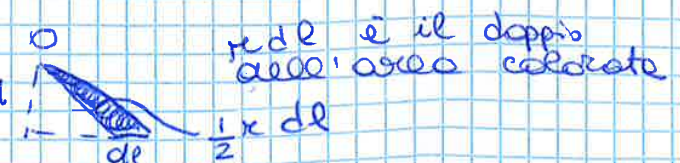
forza risultante in altri termini: poligono delle forze
 $T_x, T_y = 0$



polo O al caso
 Momento risultante
 $dM = r t \delta$

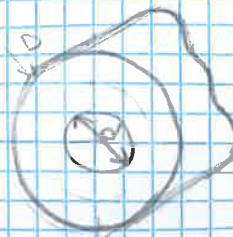
$$M = \int t \delta r \, ds = t \delta \int r \, ds = t \delta A$$

area racchiusa dalla linea media



Esempio: sezione circolare

Trazione + Flessione + Torsione



$D = 60 \text{ mm}$
 $d = 20 \text{ mm}$
 $N = 6,5 \cdot 10^4 \text{ N}$
 $M_g = 1,1 \cdot 10^5 \text{ Nmm}$
 $M_t = 8,4 \cdot 10^5 \text{ Nmm}$
 $R_m = 200 \text{ N/mm}^2$

Verificare la resistenza

$A = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4} (60^2 - 20^2) = 2,513 \cdot 10^3 \text{ mm}^2 \rightarrow$ ci serve per trazione

$J_g = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = \frac{\pi}{64} (60^4 - 20^4) = 6,283 \cdot 10^5 \text{ mm}^4 \rightarrow$ ci serve per flessione

$J_p = 2J_g = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) = \frac{\pi}{32} (60^4 - 20^4) = 1,257 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \rightarrow$ ci serve per torsione

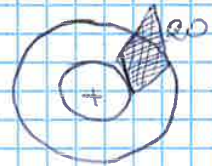
\rightarrow varia sull'area e' + alta,
 \downarrow prendo direttamente quella

Trazione + Flessione $\rightarrow \sigma_{zz}$
 $\sigma_{zz} = \frac{N}{A} + \frac{M_g}{J_g} \cdot \frac{D}{2} = \frac{6,5 \cdot 10^4}{2,513 \cdot 10^3} + \frac{1,1 \cdot 10^5}{6,283 \cdot 10^5} \cdot \frac{60}{2} = 25,9 + 52,5 = 78 \text{ N/mm}^2$
 valore max



Torsione $\rightarrow \tau_{\theta z}$

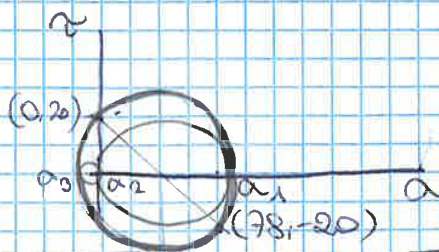
$\tau_{\theta z} = \frac{M_t}{J_p} \cdot \frac{D}{2} = \frac{8,4 \cdot 10^5}{1,257 \cdot 10^6} \cdot \frac{60}{2} = 20 \text{ N/mm}^2$
 valore max



Materiale fragile $\sigma_{id} = \sigma_{s1}$



tensione principale = 0 sulla faccia superiore
 solo nelle condizioni del cerchio di Mohr



$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{zz}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{zz}}{2}\right)^2 + \tau_{\theta z}^2} = \frac{78}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{78}{2}\right)^2 + 20^2} = 83 \text{ N/mm}^2 = \sigma_1$
 -5 N/mm^2

Vediamo quanto avanza al limite del materiale

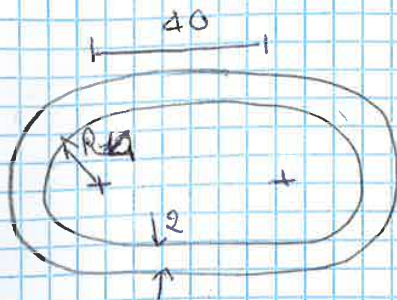
$CS = \frac{R_m}{\sigma_{id}} = \frac{200}{83} = 2,4$ (basso per un fragile perché si rompe a 2,4 anziché 3. Deve essere almeno 3)

Gradiente di torsione $\theta' = \frac{d\theta}{dt} = \frac{M_t}{G J_t} = \text{costante}$

$$\Delta\theta = \frac{M_t}{G J_t} \cdot L = \frac{90 \cdot 10^4 \cdot 600}{7,88 \cdot 10^4 \cdot 4,48 \cdot 10^3} = 0,153 \text{ rad} \approx 9^\circ$$

La forma è
Zeta ruota
di cerchio 9°

Esempio: tensione parete sottile chiusa



$$M_t = 4,0 \cdot 10^5 \text{ Nmm}$$

$$G = 3,1 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$$



Calcolare: tensioni, rotazione relativa

estrazione linea media



Ω : rettangolo + 2 mezzi cerchi

$$\Omega = 40 \cdot 30 + \pi \cdot 15^2 = 1,907 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

$$\tau = \frac{t \cdot \text{flusso}}{\Omega} = \frac{M_t}{2 \cdot \Omega} = \frac{4 \cdot 10^5}{2 \cdot 1,907 \cdot 10^3 \cdot 2} = 52 \text{ N/mm}^2$$

$$J_t = \frac{\Delta \Omega^2}{\oint \frac{ds}{\rho}} = \frac{4 \cdot (1,907 \cdot 10^3)^2}{\frac{1}{2} (2 \cdot 40 + 20 \cdot 15)} = 1,670 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

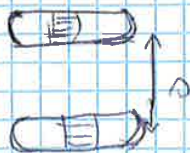
$$\Delta\theta = \frac{M_t}{G J_t} L = \frac{10 \cdot 10^5 \cdot 250}{3,1 \cdot 10^4 \cdot 1,670 \cdot 10^5} = 1,93 \cdot 10^2 \text{ rad} \approx 1,1$$

comparato: sez. aperta



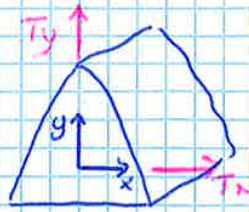
ci vuole braccio (s) + grande

sez. chiusa



tensioni // equiverse
in ogni parete
ma il braccio è
la dimensione d'ingombro
basta tensione + piccolo
quindi + favorevole
calcolare sezione
chiusa

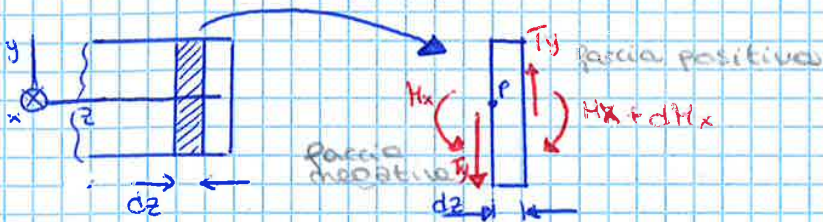
Tensioni causate dalle forze di taglio T_x, T_y



$$T_y = \int_A \tau_{yz} dA$$

$$T_x = \int_A \tau_{xz} dA$$

Si fa uno studio approssimato basato sull'equilibrio. Si studiano le tensioni tangenziali τ_{yz} e τ_{xz} sui piani xz e yz .
Piano zy , taglio T_y



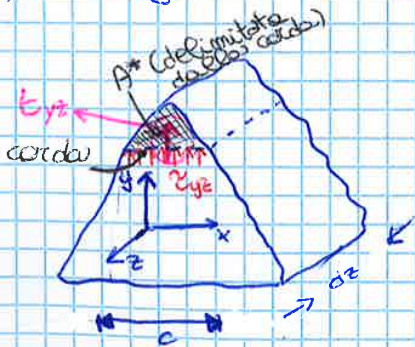
$T_y = \text{costante}$ (assenza carichi trasversali). Deve essere uguale sulle due sezioni per garantire l'equilibrio alla traslazione verticale. Invece il momento può subire una variazione infinitesima dH_x .

Equilibrio rotazione

$$P2: H_x + dH_x - H_x - T_y dz = 0$$

$$T_y = \frac{dH_x}{dz}$$

il taglio è la derivata della funzione momento

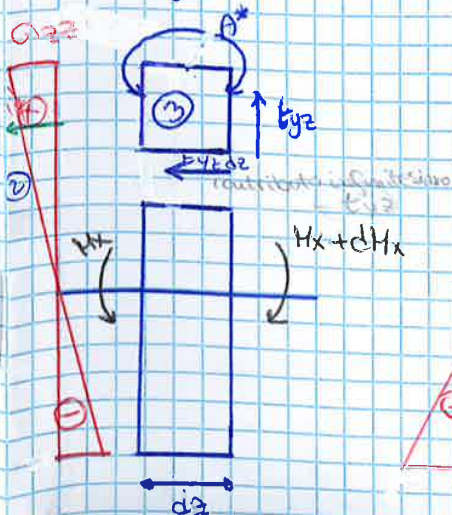


non conosco la distribuzione di τ_{yz} ; deginisco il flusso di τ_{yz} attraverso la corda c

$$\tau_{yz} = \int_c \tau_{yz} dx$$

Equilibrio assiale della zona sopra la corda

c lunghezza corda

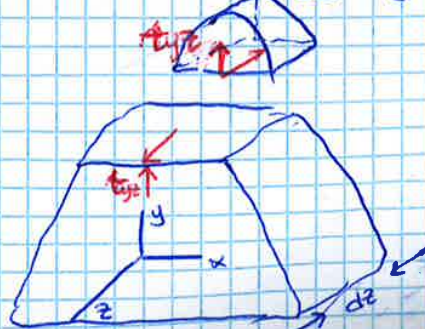


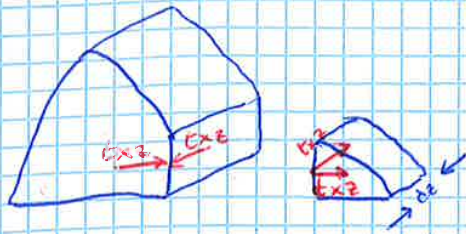
$$dz + dA \cdot dz$$

blocco in alto sottoposto a tensioni verso destra e verso sinistra

Come fa ad essere in equilibrio?

aggiungo τ_{yz} e \leftarrow





Equilibrio assiale

$$\rightarrow \int_{A^*} (\sigma_{zz} + d\sigma_{zz}) dA - \int_{A^*} \sigma_{zz} dA - t_{xz} dz = 0$$

$$\frac{I_x}{J_{yy}} \int_{A^*} x dA dz - t_{xz} dz = 0$$

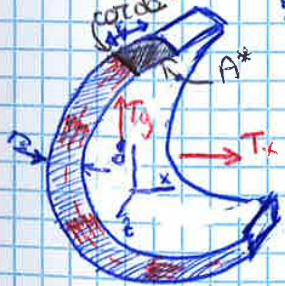
$\rightarrow S_y^*$ momento statico di A^*

$$t_{xz} = \frac{I_x}{J_{yy}} S_y^*$$

S_y^* variabile con la posizione della corda

All'orlo superiore diventa zero, il momento statico si annulla
 → contorno scarico

Parete sottile



$s \rightarrow$ lunghezza corda

Condizioni di contorno

τ non può attraversare i bordi

τ, t " alla tangente alla linea media

Non si utilizzano componenti xy

Flusso attraverso la corda

$$t = \frac{I_x}{J_{yy}} S_y^* + \frac{I_y}{J_{xx}} S_x^*$$

sono opposti due effetti

tensione

$$\tau = \frac{t}{s}$$

approssimazione per $\tau = \frac{I_x S_y^*}{s J_{yy}} + \frac{I_y S_x^*}{s J_{xx}}$
 parete sottile

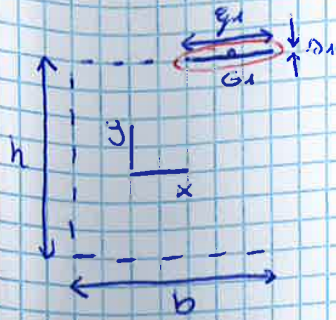
J_{xx} e J_{yy} si riferiscono all'intera sezione

Ma hanno che A^* cresce si sposta il baricentro

Bisogna esprimere S_x^* S_y^* in funzione di s
 (si riferiscono a A^*)

Per il calcolo del flusso t dovuto ai tagli si assume una coordinata locale s lungo la linea media del profilo
 → posizione della corda che stacca A^* (A^* concentrata nella linea media del profilo)

Effetto di T_y
Ala superiore



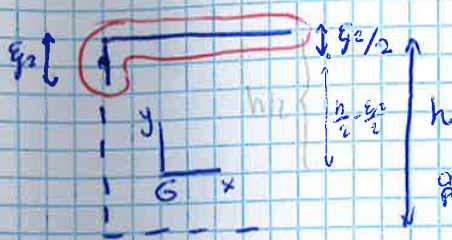
Per calcolare la tensione nella flangia superiore conviene adottare un coordinato locale ξ_1

$$S_x^* = \rho_1 \xi_1 \frac{h}{2}$$

- $\xi_1 = 0$ $S_x^* = 0$ $t = 0$ $\tau = 0$
- $\xi_1 = b$ $S_x^* = \rho_1 b \frac{h}{2}$ $t = \frac{T_y \rho_1 b h}{J_{xx}}$ $\tau = \frac{t}{\rho_1} = \frac{T_y b h}{2 J_{xx}}$

il flusso e τ si adeguano alla linea media

Ala coordinata locale ξ_2

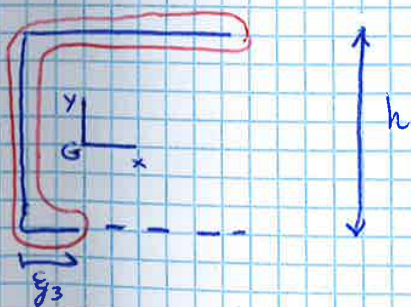


$$S_x^* = \rho_1 b \frac{h}{2} + \rho_2 \xi_2 \left(\frac{h}{2} - \frac{\xi_2}{2} \right) \quad \tau = \frac{t}{\rho_2}$$

- $\xi_2 = 0$ $S_x^* = \rho_1 b \frac{h}{2}$ $\tau = \frac{T_y \rho_1 b h}{2 J_{xx}}$
 - $\xi_2 = \frac{h}{2}$ $S_x^* = \rho_1 b \frac{h}{2} + \rho_2 \frac{h^2}{8}$ $\tau = \frac{T_y}{J_{xx} \rho_2} \left(\rho_1 b \frac{h}{2} + \rho_2 \frac{h^2}{8} \right)$
- miolo spessore

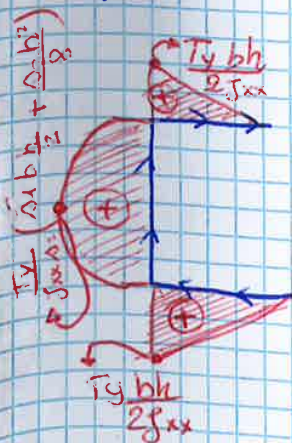
- $\xi_2 = h$ $S_x^* = \rho_1 b \frac{h}{2}$ $\tau = \frac{T_y}{J_{xx}} \frac{\rho_1 b h}{\rho_2 \cdot 2}$

Ala inferiore

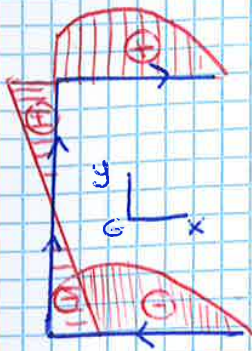


$$S_x^* = \rho_1 b \frac{h}{2} - \rho_1 \xi_3 \frac{h}{2}$$

- $\xi_3 = 0$ $S_x^* = \rho_1 b \frac{h}{2}$ $\tau = \frac{T_y}{J_{xx}} \frac{\rho_1 b h}{\rho_1 \cdot 2}$ *come ala superiore*
- $\xi_3 = b$ $S_x^* = 0$ $\tau = 0$



Azione di T_y

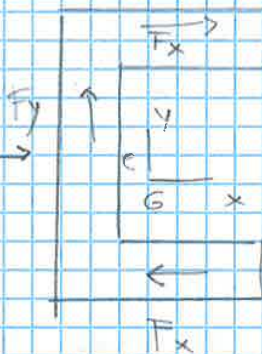
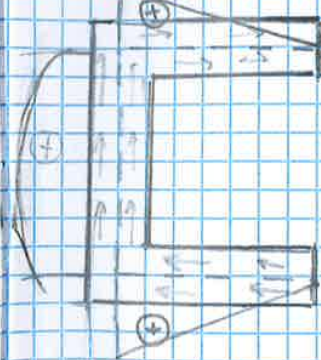


Azieme di T_x

distribuzione delle tensioni
specie per rispetto a x
senso delle forze
dove c'è meno vuol dire
tensioni nel verso opposto
e forze

Riduzione al caso della I perché non torni un
due ma solo perché $b/2$

Equivalenza statica: caso T_y
Centro di taglio e torsione



$$F_x = \frac{1}{2} T_y \frac{bh}{J_{xx}} b/2$$

$$F_y = T_y$$

Riduzione a G

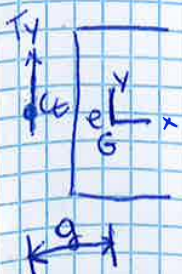
$$R_{Kg} = F_y e + F_x h \neq 0$$

non passa per G
la forza T_y

Da dove passa? Rapporto momento / forza

$$\frac{T_y e + \frac{1}{4} \frac{T_y b^2 h^2}{J_{xx}}}{T_y}$$

$$g = e + \frac{1}{4} \frac{b^2 h^2}{J_{xx}} = e + \frac{b}{2 + h^2/3b}$$



il taglio passa a distanza g da G

C_t = centro di taglio (ma anche centro di

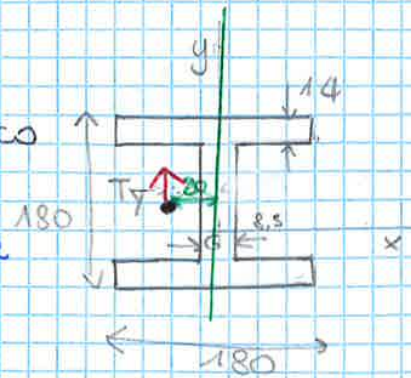
se punto intorno a cui la sezione ruota è lo stesso
di dove passa T_y
su alcuni casi C_t, G coincidono se no no

→ in caso di sezioni doppiamente simmetriche

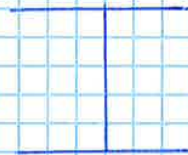
Esercitazione

Sezione a H soggetta a taglio eccentrico

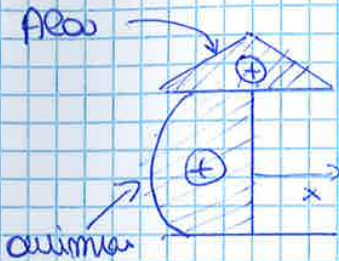
tensioni σ dovute a tagli e torsione



Effetto del taglio



$J_{xx} = 3,831 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$
 $T_y = 4 \cdot 10^4 \text{ N}$
 $b = 180 \text{ mm}$
 $h = 166 \text{ mm}$
 $\rho_1 = 14 \text{ mm}$
 $\rho_2 = 8,5 \text{ mm}$



Ala
 $S_x^* = \rho_1 \frac{b}{2} \frac{h}{2}$

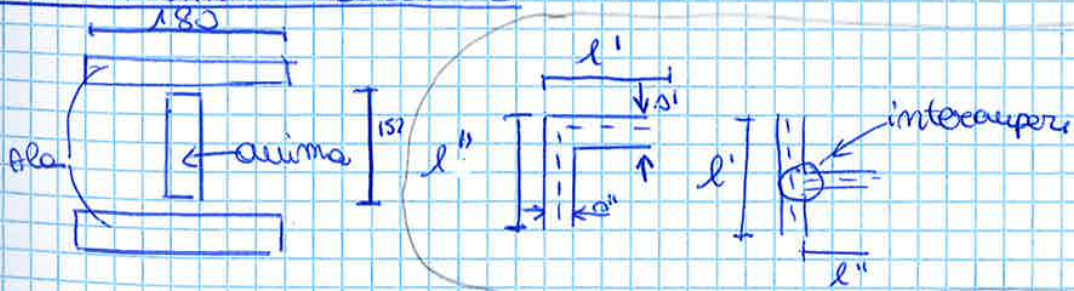
$\sigma_{\text{picco, Ala}} = \frac{T_y \rho_1 b h}{J_{xx} \rho_1 d} = \frac{4 \cdot 10^4 \cdot 180 \cdot 166}{3,831 \cdot 10^7 \cdot 4} = 7,8 \text{ MPa}$

Amima \rightarrow diversa b, diversa h, diversa ρ (considera il centro di gravità)

$S_x^* = \rho_1 b \frac{h}{2} + \rho_2 \frac{h}{2} \frac{b}{4}$
 $\rightarrow \frac{h}{2} : 3 \rightarrow \text{distanza } G^*$

$\sigma_{\text{picco, anima}} = \frac{T_y}{J_{xx} \rho_2} \left(\frac{\rho_1 b h}{2} + \frac{\rho_2 h^2}{8} \right) =$
 $= \frac{4 \cdot 10^4}{3,831 \cdot 10^7 \cdot 8,5} \left(\frac{14 \cdot 180 \cdot 166}{2} + \frac{8,5 \cdot 166^2}{8} \right) = 29,3 \text{ MPa}$

Effetto del momento torcente



$J_{t1} = \frac{1}{3} (l - m \cdot 0,3 \rho_2) \rho_2^3$

$J_{t1, \text{Ala}} = \frac{1}{3} (180 - 2 \cdot 0,3 \cdot 14) 14^3 = 1,570 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$

$J_{t1, \text{Anima}} = \frac{1}{3} 152 \cdot 8,5^3 = 0,311 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$

$J_t = \frac{1}{3} l \rho^3$

$J = 2 J_{t1, \text{Ala}} + J_{t1, \text{Anima}} = 3,451 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$

$\sigma_{\text{picco, i}} = \frac{M_t}{J_t} \rho_i$

$M_t = 4 \cdot 10^4 \cdot 20 = 8 \cdot 10^5 \text{ Nmm}$
 $M_t = \rho_c T$



Amma

$$\tau_{\text{picco, amma}} = \frac{T_v}{J_{xx} A_2} \left(\frac{b_0 h}{2} + \rho_2 \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} \right) = \frac{2,0 \cdot 10^4}{1,06 \cdot 10^6 \cdot 6} \left(\frac{12 \cdot 8 \cdot 72}{2} + \frac{6 \cdot 72^2}{8} \right) = 50 \text{ MPa}$$

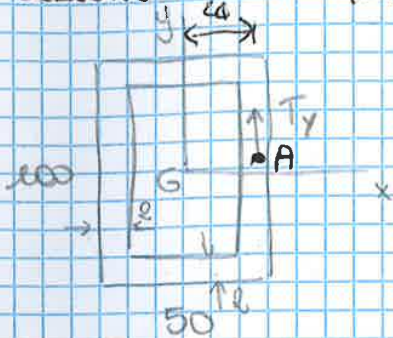
Punto + sollecitazioni materiale duttile \rightarrow ipotesi max τ

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_z^2 + \sigma_x^2}$$

$$A_{eq} \rightarrow \sqrt{9^2 + 1 \cdot 20^2} = 110 \text{ MPa}$$

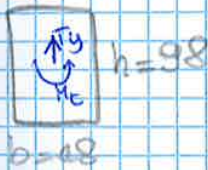
$$A_{\text{amma}} \rightarrow \sqrt{1 \cdot 5^2} = 100 \text{ MPa}$$

Sezione cava soggetta a taglio eccentrico



centro di taglio coincide con G
sezione simmetrica

tensioni di torsione e taglio



$$T_y = 45 \cdot 10^4 \text{ N}$$

$$J_{xx} = 7,752 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

2 sezioni a C

Torsione

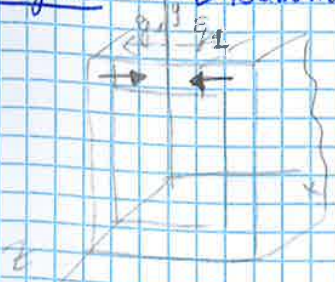
$$A = b \cdot h = 48 \cdot 98 = 4,704 \text{ mm}^2$$

$$\tau = \frac{M_t}{A \cdot r}$$

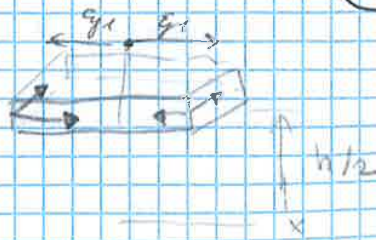
$$M_t = T_y \cdot \frac{b}{2} = 4,5 \cdot 10^4 \cdot \frac{48}{2} = 1,08 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

$$\tau = \frac{1,08 \cdot 10^6}{4,704 \cdot 2} = 57 \text{ MPa}$$

Taglio \rightarrow simmetria



$$S_x = 2 \cdot g_1 \cdot \frac{h}{2}$$



$M_t = e_c T$
 ↓
 distanza del
 Taglio dal
 baricentro
 Si ha quanto
 G e C non
 coincidono

sezione rettangolare

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$



Pensando di avere un conduttore sotto sollecitazioni monoassiali si ha comunque

la variazione di area $\frac{\Delta A}{A} = 2\varepsilon_t = -2\nu\varepsilon$ è pari al doppio di ε_t opposta a quella longitudinale ε .
 ↑ dilatazione trasversale
 ← coeff. di Poisson

Abbiamo collegato meccanica (dilatazione ε) o estensimetria e variazione di resistenza

Fattore di taratura

La variazione di resistenza si scrive quindi

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + (1 + 2\nu)\varepsilon \rightarrow \text{deve essere proporzionale alla deformazione}$$

da cui segue $\frac{\Delta R/R}{\varepsilon} = \frac{\Delta \rho/\rho}{\varepsilon} + 1 + 2\nu = k$

k è il fattore di taratura (deve estensimetro) che lega il fenomeno elettrico ($\Delta R/R$) a quello meccanico (ε). Nell'uso pratico:

- l'estensimetro è solidale alla superficie della struttura (incollaggio)
- si misura la variazione di resistenza da cui si ottiene ε deformazione

$$\varepsilon = \frac{\Delta R/R}{k}$$

Requisiti fondamentali:

l'estensimetro deve:

- presentare resistenza elettrica sufficientemente alta per non assorbire troppa potenza elettrica (riscaldamento) → richiede lunghezza elevata del conduttore
- avere estensione piccola per eseguire una misura puntuale

Soluzione pratica di compromesso → realizzazione a

- ~~filo~~ filo (obsoleto), disposto su supporto cartaceo
- ~~griglia~~ griglia (moderno), ricoperta per erosione da lamina metallica piazzata su supporto polimerico

Vantaggi:

- robustezza, precisione di costruzione
- minore sensibilità trasversale (curve di sezione >)

↳ danno meno contributo, il loro $\Delta <$ influenza meno la misura (sezione allungata nelle curve < contributo)

Per ottenere una formula più semplice

- si moltiplica e divide per k
- si aggiunge e sottrae $k(\alpha - \alpha_0)$ all'interno della []

$$E = \left\{ \frac{\Delta R/R}{k} - \frac{(\beta + k(\alpha - \alpha_0))(T - T_0)}{k} - \frac{(kT - k)(\alpha - \alpha_0)(T - T_0)}{k} \right\} \frac{k}{kT}$$

\uparrow misura "grotta" E' (senza considerare i problemi)
 \uparrow deformazione "apparente" E_a (errore dovuto a T)
 $\rightarrow \approx 0$ prodotto di quantità piccole

Estensimetri autocompensati:

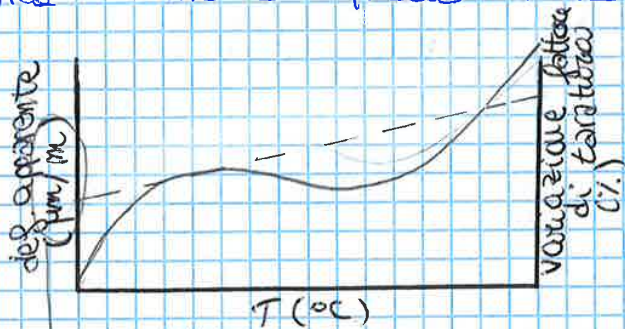
Un' formula sintetica si scrive $E = (E' - E_a) \frac{k}{kT}$

Problema pratico: conoscenza del valore di T per calcolare E_a e kT

usati \rightarrow estensimetri autocompensati, riducono gli errori di T

- coeff. di temperatura β , β piccoli (materiali opportuni)
- coeff. di dilataz. termica vicino a quello della struttura: $\alpha \approx \alpha_0$

es. di diagramma per E_a, kT di un estensimetro commerciale (applicato su acciaio)



\rightarrow moltiplico per un milione perché ho numeri piccoli \rightarrow comodità

Relazioni lineari: perché curva?

Le formule lineari sono approssimazioni: a T ambiente vanno bene, a T maggiori no perché ci sono effetti non lineari: non trascurabili e cancellabili della deformazione apparente kT invece da una variazione costante

Componenti degli estensimetri

Le caratteristiche e le prestazioni degli estensimetri dipendono dai componenti con cui sono realizzati:

- 1 Griglia (conduttrice)
- 2 Supporto (isolante)
- 3 Terminali: (connette la griglia al circuito elettrico)
- 4 Adesivo (permette di applicare l'estensimetro sulla superficie dell'elemento)
- 5 Protettivo (se necessario ricopre il tutto)