NUMERO: 1859A - ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Venezia Angela

MATERIA: Analisi II - prof. Nicola

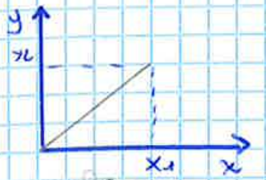
Analisi II

Richiami

Poca Teoria, no dimostrazioni

In $\mathbb{R}^n$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ → norma di un vettore

Gli elementi sono ennuple: $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$



Intorno sferico

$x \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$, $B(x,R) = \{ y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < R \}$

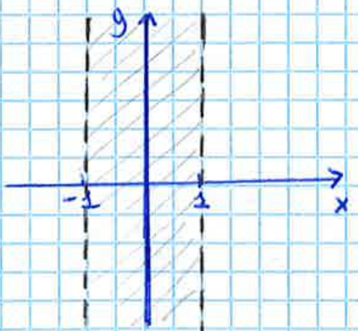
i punti compresi tra y e x minore di R

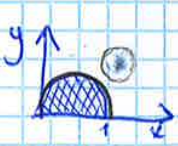
$A \subset \mathbb{R}^n$ si dice

- Aperto se $\forall x \in A \ \exists R > 0 : B(x,R) \subset A$

A si dice aperto se $A = A_0$
A_0 = insieme dei punti interni di A
x si dice interno di A se $\exists R > 0$: $B(x,R) \subset A$

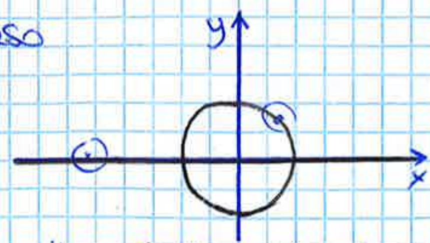
es: $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1 \}$





- Chiuso se $\mathbb{R}^n \setminus A$ è aperto es. $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le -x^2 + x \}$

es. di insieme né aperto né chiuso
$\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \ \vee \ y = 0 \}$



- A si dice limitato se esiste una "palla" abbastanza grande che lo contiene
cioè se $\exists R > 0 : A \subset B(0,R)$
- Compatto: chiuso e limitato

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice limitato se $\exists R > 0, x \in \mathbb{R}^n$ tale che $A \subseteq B(x,R)$

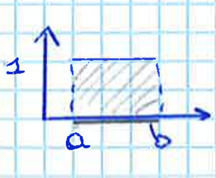
Proprietà degli integrali (come analisi I)

- **Linearità** $f, g : D \to \mathbb{R}$ cont. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
  $\int_D \alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\, dx\,dy = \alpha \int f(x,y)\, dx\,dy + \beta \int_D g(x,y)\, dx\,dy$
- **Monotonia** $f \geq 0 \quad \int_D f(x,y)\, dx\,dy \geq 0 \quad (\Longrightarrow f \leq g$ su D allora $\int_D f(x,y)\, dx\,dy \leq \int_D g(x,y)\, dx\,dy)$
- $\left| \int_D f(x,y)\, dx\,dy \right| \leq \iint_D |f(x,y)|\, dx\,dy$

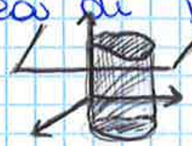
Attenzione: l'analogia c'è solo se si ha $\int_a^b$ con $a < b$
es. in analisi II non c'è un analogo dell'integrale orientato

$$\int_1^0 \underbrace{x^2}_{\geq 0}\, dx = -\frac{1}{3}$$

Ricorda

$\int_a^b 1\, dx = b - a$  significato non anche area

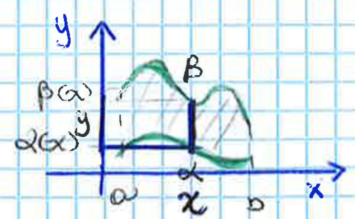
Se $f(x,y) = 1 \quad \forall (x,y) \in D$
l'integrale doppio si interpreta come volume ma se c'è 1 (uno) - coincide con l'area di base

$\int_D 1\, dx\,dy = \text{area}(D)$ 

Riduzione ad integrali iterati

- **Dominio D verticalmente convesso**

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ dove $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue $(\alpha(x) \leq \beta(x))$



sotto c'è $\alpha(x)$ sopra $\beta(x)$

$$\int_D f(x,y)\, dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\, dy \right) dx$$

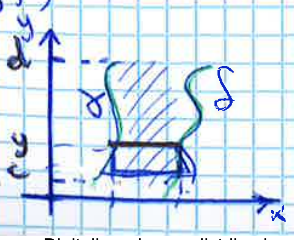
Somma prima in una direzione e poi nell'altra.

integriamo in y come estremi limitiamo le y

- **Domini orizzontalmente convessi**

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d,\ \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}$ dove $\gamma, \delta : [c,d] \to \mathbb{R}$ continue $(\gamma(y) \leq \delta(y))$

Prima fisso x e calcolo l'integrale, poi fisso y
come estremi prima limito le x poi le y

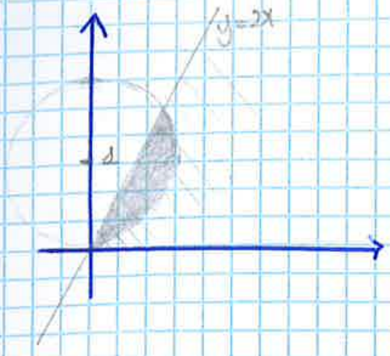


$$\int_D f(x,y)\, dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\, dx \right) dy$$

esercizio

$$\int_D \underbrace{x}_{f(x,y)}\, dx\, dy$$

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le y \le 2x \ , \ x^2 + (y-1)^2 \le 1 \right\}$$



$y = 2x$

$x^2 + (2x-1)^2 \le 1$

$x^2 + 4x^2 - 4x + 1 - 1 = 0$

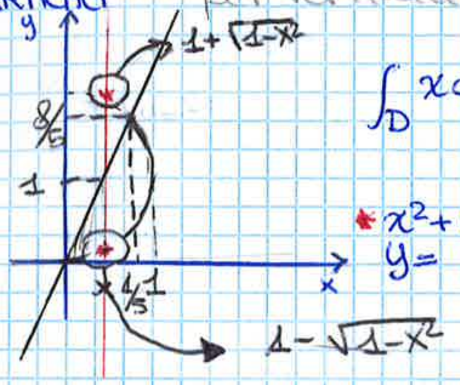
$5x^2 - 4x = 0$

$x(5x-4) = 0$

$x = 0$

$x = 4/5$ $\qquad y = 2 \cdot 4/5 = 8/5$

• PER VERTICALI $\qquad$ per verticali è + complicato

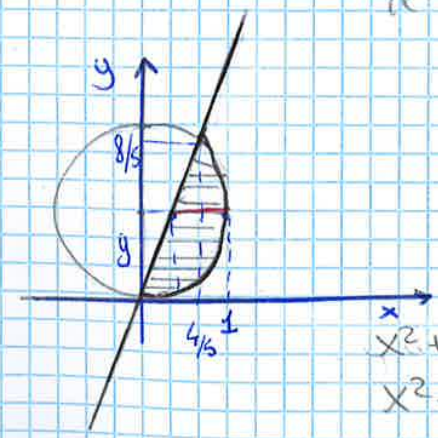


$$\int_D x\,dx\,dy = \int_0^{4/5} \left(\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{2x} x \, dy \right) dx + \int_{4/5}^{1} \left(\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} x \, dy \right) dx$$

$* \ x^2 + (y-1)^2 = 1$

$y = 1 \pm \sqrt{1-x^2}$ $\qquad$ prendo il meno, ci interessa quella + piccola

PER ORIZZONTALI $\qquad$ il primo estremo è sempre la retta, il secondo sempre quella circonferenza



$$\int_D x\,dx\,dy = \int_0^{8/5} \int_{y/2}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} x \, dx\, dy =$$

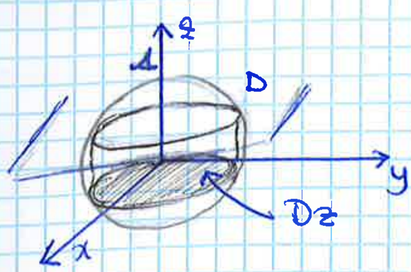
$$= \int_0^{8/5} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=y/2}^{x=\sqrt{1-(y-1)^2}} dy = \int_0^{8/5} \frac{1-(y-1)^2}{2} - \frac{y^2}{8} \, dy = \ldots = \frac{32}{75}$$

$x^2 + (y-1)^2 = 1$

$x^2 = 1 - (y-1)^2$

$x = \pm \sqrt{1-(y-1)^2} \longrightarrow$ ovvio che prendi il +, il meno è dall'altra parte

PER STRATI

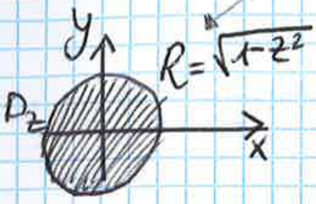


$$\int_D z^2\,dxdy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{D_z} z^2\,dxdy\right)dz$$

$x^2+y^2+z^2 \le 1 \to D$

non è lo stesso caso di quello di prima, qui z è fissato

$$D_z = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \underbrace{\boxed{x^2+y^2}}_{\text{cerchio}} \le \underbrace{\boxed{1-z^2}}_{\text{raggio al quadrato}}\}$$



$$\int_D z^2\,dxdy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{D_z} z^2\,dxdy\right)dz = \int_{-1}^{1} z^2 \left(\underbrace{\int_{D_z} dxdy}_{\text{area}(D_z) = \pi(1-z^2)}\right)dz$$

$$= \int_{-1}^{1} \pi z^2(1-z^2)\,dz = \frac{4}{15}\pi$$

Interpretazione integrale triplo

- Se $f(x,y,z)$ è la densità di massa di un solido D, allora $\int_D f(x,y,z)\,dxdydz =$ massa totale di D
- Se D è un solido in $\mathbb{R}^3$ il suo baricentro ha coordinate (x_G, y_G, z_G)

$$x_G = \frac{\int_D x\,dxdydz}{\underbrace{\int_D dxdydz}_{Vol(D)}} \quad y_G = \frac{\int_D y\,dxdydz}{\int_D dxdydz} \quad z_G = \frac{\int_D z\,dxdydz}{\int_D dxdydz}$$

con densità costante

- Se D è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ (lamina) con densità costante: BARICENTRO (x_G, y_G):

$$x_G = \frac{\int_D x\,dxdy}{\text{area}(D)} \qquad \left(x_G = \frac{\int_D x\,dxdy}{\int_D dxdy}\right)$$

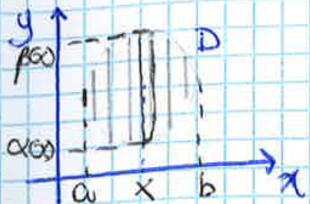
$$y_G = \frac{\int_D y\,dxdy}{\text{area}(D)}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 155

Riassunto per gli integrali doppi

$\int_D f(x,y)\,dxdy$ $\quad D\subset\mathbb{R}^2$ (D sottoinsieme del piano)

INTEGRAZIONI PER VERTICALI



$\int_D f\,dxdy$

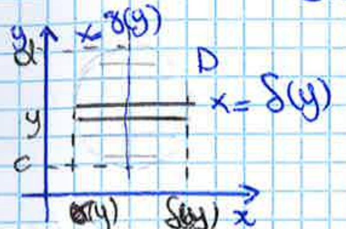
fisso x e calcolo $\int$ su uno dei segmenti (faccio $\int$ rispetto a y) poi dopo fisso la y (faccio $\int$ rispetto a x)

$$\int_D f\,dxdy = \int\left(\int f\,dy\right)dx$$

Poi devo trovare gli estremi $\rightarrow \int\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f\,dy\right)dx$

e gli estremi di quello grande $\int_a^b\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f\,dy\right)dx$

INTEGRAZIONI PER ORIZZONTALI



$\int_D f\,dxdy$

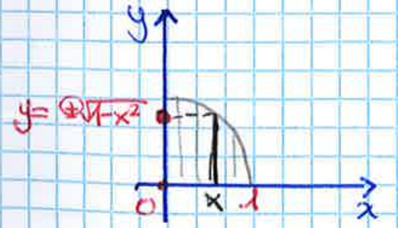
prima fisso la y

la guardo al contrario come fosse una funzione

$$\int_D f\,dxdy = \int_c^d\left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f\,dx\right)dy$$

es. $\int_D \overbrace{x}^{f(x,y)}\,dxdy$

$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\leq 1\}$



PER VERTICALI

$$\int_D x\,dxdy = \int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x\,dy\right)dx =$$

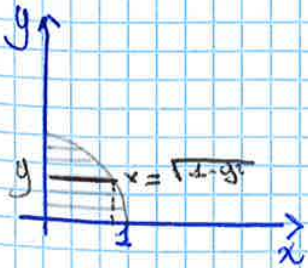
$$= \int_0^1 [xy]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} =$$

$1-x^2=t$

$-2x\,dx=dt$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \underbrace{-2x\sqrt{1-x^2}\,dx}_{dt} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[(1-x^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

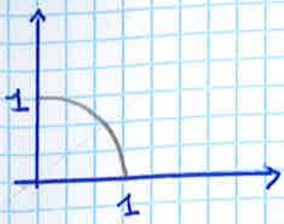


PER ORIZZONTALI

$$\int_D x\,dxdy = \int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} x\,dx\right)dy =$$

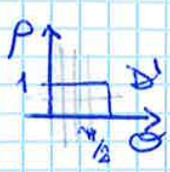
$$= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-y^2\,dy) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

es.



$\int_D x\,dx\,dy \qquad D:\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\leq 1$

$$\boxed{\begin{cases} x=\rho\cos\theta & 0\leq\rho\leq 1 \\ y=\rho\sin\theta & 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\end{cases}}$$



$$\int_D x\,dx\,dy = \int_D \rho\cos\theta\,\underbrace{\boxed{\rho}}_{\boxed{|\det Jf|}}\,d\rho\,d\theta = \int_D \rho^2\cos\theta\,d\theta\,d\rho$$ → non importa ordine

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \rho^2\cos\theta\,d\rho\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\left[\frac{\rho^3}{3}\cos\theta\right]_{\rho=0}^{\rho=1} d\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{\cos\theta}{3}\,d\theta =$$

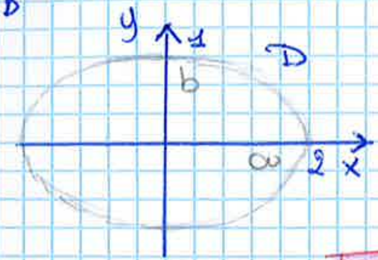
importa l'ordine

$$= \frac{1}{3}\left[+\sin\theta\right]_0^{\pi/2} = 1/3$$

es. coordinate ellittiche

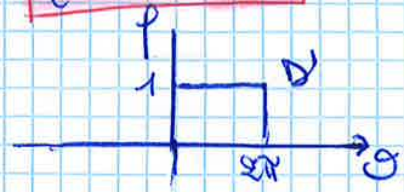
$\int_D dx\,dy \qquad D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ \frac{x^2}{4}+y^2\leq 1\right\}$

Visto che c'è 1 sarà uguale all'area dell'ellisse



$$\begin{cases} x = x_0 + a\rho\cos\theta \\ y = y_0 + \rho b\cos\theta\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta\end{cases}} \qquad \boxed{|\det J| = ab\rho}$$



$$\frac{x^2}{4}+y^2\leq 1$$

$$\frac{(2\rho\cos\theta)^2}{4} + (\rho\sin\theta)^2 \leq 1$$

$$\rho^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\leq 1 \qquad \rho\leq 1$$

$$\begin{cases} x=2\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$$

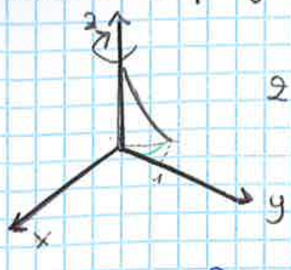
$$\int_D dx\,dy = \int_{D'} 2\cdot 1\cdot\rho\,d\theta\,d\rho = 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho\,d\rho\,d\theta = 2\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\,d\theta = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi = 2\pi$$

In generale area ellisse → πab

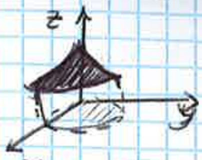
invertite pag 11-12

Richiami superfici di rotazione



$z = e^{-y}$

ho una funzione in z, la faccio ruotare e ottengo

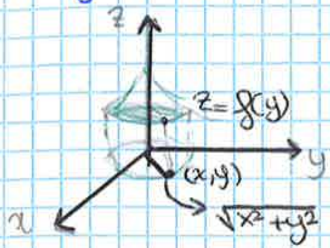


$z = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$

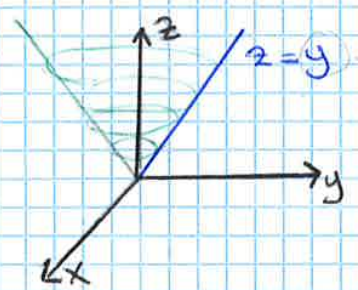
$z = f(y)$ def su $[a,b]$, $a \geq 0$

ruotando intorno all'asse z ottengo una superficie di equazione
$z = f(\sqrt{x^2+y^2})$

c semipiano yz con $y \geq 0$



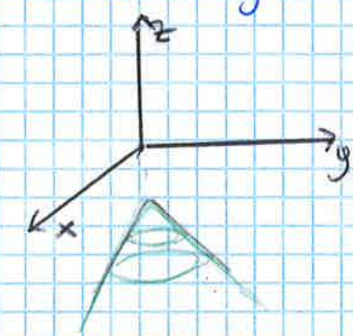
(raggio, distanza di (x,y) dal centro)

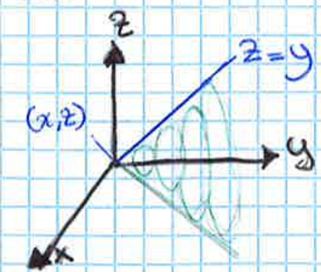


$(y \geq 0)$

cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$

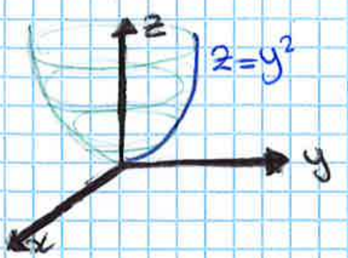
$z = -2\sqrt{x^2+y^2}$





y in funzione di z

$y = \sqrt{x^2+z^2}$



PARABOLOIDE

$z = (\sqrt{x^2+y^2})^2$

$z = x^2 + y^2$

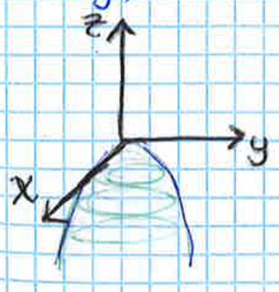
$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = \delta$
- $\alpha, \beta, \gamma > 0$ ellissoide
- $\alpha, \beta > 0$ $\gamma < 0$ / $\alpha > 0$ $\beta, \gamma < 0$ } paraboloide

$\beta y^2 + \gamma z^2 = 2\delta x$ paraboloide

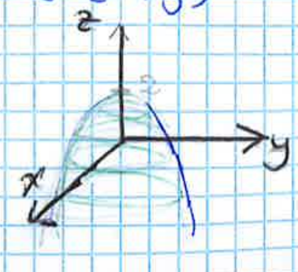
$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 0$ cono

$\beta y^2 + \gamma z^2 = \delta$ / $\gamma z^2 = 2\delta x$ } cilindro

$z = -(x^2+y^2)$



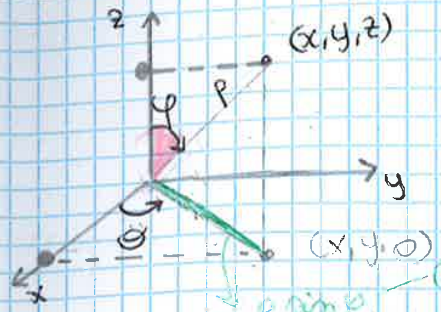
$z = 2-(x^2+y^2)$



es. $-1 \leq z \leq 1$
$x^2 + y^2 \leq 1$

$0 \leq \rho \leq 1 \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \quad -1 \leq t \leq 1$

Coordinate sferiche



$$\begin{cases} x = \rho \cos\vartheta \sin\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \sin\vartheta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$
$|\det J\varphi| = \rho^2 \sin\varphi$

importante la costruzione, negli esercizi ruotano gli assi

$\boxed{\rho \geq 0 \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \quad 0 \leq \varphi \leq \pi}$

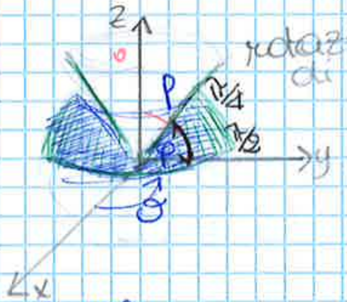
es.

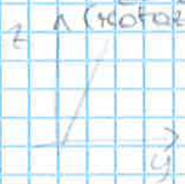
$$\int_D x^2+y^2+z^2 \, dx\,dy\,dz$$

$D = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1 \,;\, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2} \}$

rotazione di $z = y$

se fosse stato $0 \leq z \leq 2\sqrt{x^2+y^2}$
$z = 2y$ (rotazione di)





$\rho^2\cos^2\vartheta \sin^2\varphi + \rho^2 \sin^2\varphi \sin^2\vartheta + \rho^2\cos^2\varphi$
$\rho^2 (\cos^2\vartheta \sin^2\varphi + \sin^2\varphi \sin^2\vartheta + \cos^2\varphi)$
$\rho^2 (\sin^2\varphi(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) + \cos^2\varphi)$
$\rho^2 \to$ oppure $x^2+y^2+z^2 = \rho^2$

Coordinate sferiche

$$\begin{cases} 0 \leq \rho^2 \leq 1 \longrightarrow \text{dal grafico se no sostituisci} \\ \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \to \varphi \text{ parte dall'alto} \\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \end{cases}$$

in qualsiasi ordine in questo caso

$$\int_{D'} \rho^2 \, \rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\vartheta\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^1 \rho^4 \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\vartheta =$$

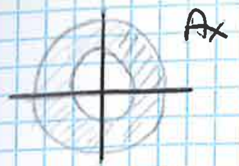
$$= \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\varphi \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_0^1 d\varphi\, d\vartheta = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{\cos\varphi}{5} \right]_{\pi/4}^{\pi/2} d\vartheta = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 5} d\vartheta =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 5} [\vartheta]_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{2}}{5}\pi$$

$$V = \int_{solido} 1 \, dxdydz = \int_0^1 \left(\int_{A_x} 1 \, dydz \right) dx \Rightarrow \int 1 \rightarrow \text{area}$$

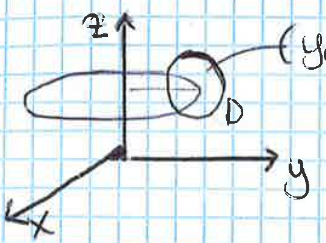
$$A_x = \{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 : (x^2)^2 \leq y^2 + z^2 \leq x^2 \}$$

Ax in funzione di y,z ma area in x



$\text{area} = \pi x^2 - \pi x^4$

Riformulazione dell' $\int$ di volume



(y_G, z_G) baricentro

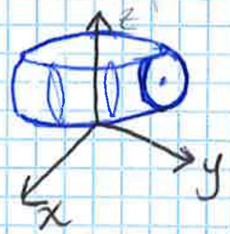
$$y_G = \frac{\int y \, dydz}{\text{area}(D)}$$

$$z_G = \frac{\int z \, dydz}{\text{area}(D)}$$

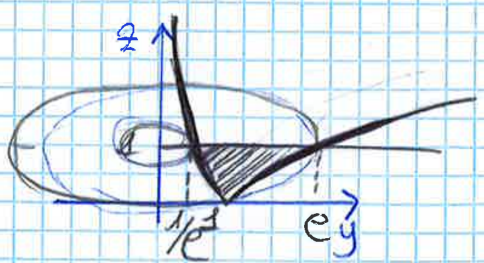
~~Teorema di Guldino~~: volume del solido generato dalla rotazione di D è = area (D) x lunghezza della circonf. generata dalla rotazione del baricentro di D

$$\boxed{V = 2\pi \int_D y \, dydz = 2\pi y_G \, \text{area}(D)}$$

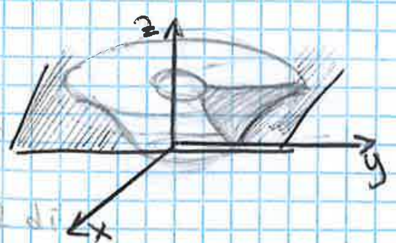
Solo in casi particolari è + utile questo teorema



es. $\int_\Omega e^{2z} \, dxdydz$ dove Ω è ottenuto dalla rotazione attorno all'asse z della regione $D = \{ (0,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y > 0 \ |\log y| \leq z \leq 1 \}$



$z = |\log y|$



ottengo sempre una corona circolare

$$\int_\Omega e^{2z} \, dxdydz = \int_0^1 \left(\int_{A_z} e^{2z} \, dxdy \right) dz =$$

$$= \int_0^1 e^{2z} \int_{A_z} dxdy \, dz$$

$\rightarrow$ area corona circolare

Az funz di x,y ma area z

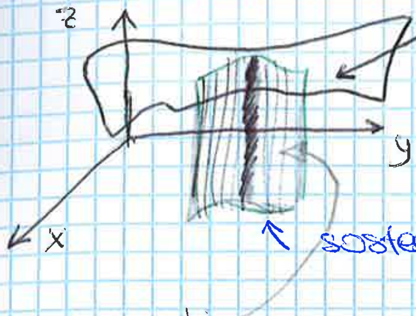
Integrale di curva di prima specie (int curvilineo; int di una funzione lungo una curva)

Sia $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva C^1 e sia $f(x_1, x_2 \dots x_n)$ una funz. continua sul sostegno di γ

Si definisce

$$\int_\gamma f\,ds = \int_a^b f(x_1(t), \dots, x_n(t)) \underbrace{\|\gamma'(t)\|dt}_{ds}$$

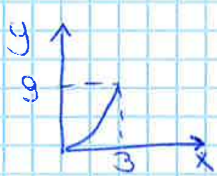
Interpretazione geometrica $(n=2)$, $z = (f\,x,y)$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$



$\int_\gamma f\,ds$ area di

esempio $\int_\gamma \underbrace{\sqrt{1+x^2+3y}}_{f(x,y)}\,ds$

$\gamma: y = x^2$ $\quad 0 \leq x \leq 3$



$\gamma(t) = (t, t^2)$

$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in [0,3]$

$\gamma'(t) = (1, 2t)$

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1^2+(2t)^2} = \sqrt{1+4t^2}$

$f(x(t), y(t)) = \sqrt{1+t^2+3t^2} = \sqrt{1+4t^2}$

$\int_\gamma f\,ds = \int_0^3 \sqrt{1+4t^2} \cdot \sqrt{1+4t^2}\,dt = \int_0^3 (1+4t^2)\,dt = 39$

Integrale di curva di seconda specie (int. di linea, int. di un campo vettoriale lungo una curva)

$\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ curva C^1
e F un campo vettoriale continuo sul sostegno di γ curva
$\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$
$F(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$
Si definisce

$$\int_\gamma F \cdot \tau\,ds = \int_a^b \overset{\text{campo curva}}{F(\gamma(t))} \cdot \gamma'(t)\,dt$$

PRODOTTO SCALARE (1ª componente per 1ª componente)

τ versore tg a γ: $\tau = \dfrac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$

$\int_\gamma F \cdot \tau$

$\int_\gamma F \cdot dP$

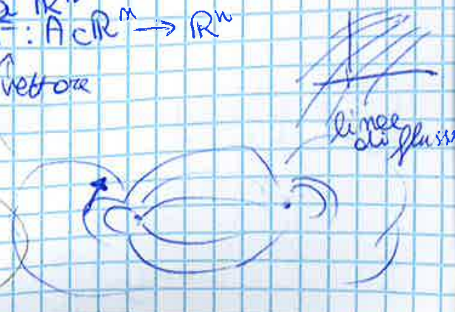
$$\int_\gamma F \cdot \tau \cdot ds = \int_a^b F \cdot \gamma'(t) \cdot \frac{1}{\cancel{\|\gamma'(t)\|}} \underbrace{\cancel{\|\gamma'(t)\|}\,dt}_{ds}$$

Un campo vettoriale in $\mathbb{R}^n$ è una funz. di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$

$F: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

vettore

Rappr. grafica di un campo F



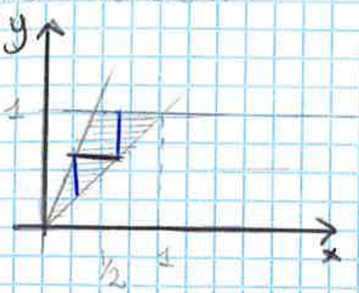
$= 8\cdot(2\sqrt{2}) - 2(2\sqrt{2})^3 + \frac{1}{40}\cdot(2\sqrt{2})^5 = 16\sqrt{2} - 32\sqrt{2} + \frac{16}{5}\sqrt{2} = -16\sqrt{2} + \frac{16}{5}\sqrt{2}$ $\Big\} -6 + \frac{-16\cdot 15 + 16\cdot 3 + 16\cdot 8\sqrt{2}}{15}$

(2) $\int_0^2 \left(\frac{x^3}{3} - 4xy\right)\Big|_{\sqrt{y}}^{3} dy = \int_0^2 9 - 12y - \frac{8}{3}y\sqrt{y} + 8y\sqrt{y}\, dy = 18 - 24 + \frac{128}{15}\sqrt{2}$

$\frac{16}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot 8\sqrt{2}\quad \sqrt{y^5}$ $\qquad -6 + 16(-15+3+8)$

- $\int_A (\sin(y^2) + x)\, dx\, dy$ $\quad A$ è delimitato dalle rette di equazione $y = 1$ $y = x$ $y = 2x$

Disegnare insieme



Conviene iniziare da y

Se decido di fare in contrario

$\int_0^{1/2}\left(\int_x^{2x} \sin(y^2) + x)\, dy\right) dx$

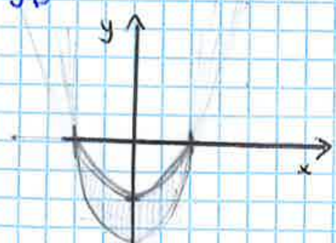
$\int \sin(y^2)\, dy \rightarrow$ la primitiva esiste ma non è esprimibile elementarmente

$\int_0^1 \left(\int_{y/2}^{y} (\sin(y^2) + x)\, dx\right) dy = \int_0^1 x \sin(y^2) + \frac{x^2}{2}\Big|_{y/2}^{y} dy = \int_0^1 \Big(y\sin(y^2) + \frac{y^2}{2} +$

$-\frac{y}{2}\sin(y^2) - \frac{y^2}{8}\Big) dy = \int_0^1 \left(\frac{y}{2}\sin(y^2) + \frac{3}{8}y^2\right) dy = -\frac{\cos(y^2)}{4} + \frac{y^3}{8}\Big|_0^1 =$

$= \frac{3}{8} - \frac{\cos 1}{4}$ $\quad \left(\frac{1}{8} + \frac{\cos 1}{4}\right)$

- $\int_D y x^2\, dx\, dy$ $\quad D = \{(x,y) : 2(x^2-1) \le y \le x^2 - 1\}$ $\quad -8/35$



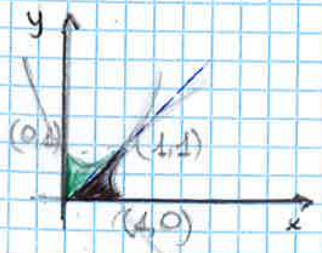
$2\int_0^1 \int_{2(x^2-1)}^{x^2-1} y x^2\, dy\, dx$

$2\int_0^1 \frac{y^2 x^2}{2}\Big|_{2(x^2-1)}^{x^2-1} dx = \int_0^1 (x^2-1)^2 x^2 - 4(x^2-1)^2 x^2\, dx$

$2\quad x^6 - 2x^4 + x^2 - 4(x^6 - 2x^4 + x^2)$

$\int_0^1 -3x^6 + 6x^4 - 3x^2\, dx = -\left(\frac{3}{7} - \frac{6}{5} + 1\right) = \frac{15 - 42 + 35}{105}$

- $\int_D x\, dx\, dy$ $\quad D = \left\{(x,y) : \begin{array}{l} 0 \le x \le \min\{1, y^2 - y + 1\} \\ 0 \le y \le \min\{1, x^2 - x + 1\}\end{array}\right\}$ $\quad 4/15$



$2\int_0^1 \int_y^{y^2-y+1} x\, dx\, dy$

$2\int_0^1 \frac{x^2}{2}\Big|_y^{y^2-y+1} dy = \frac{2}{2}\int_0^1 (y^2-y+1)^2 - y^2\, dy$

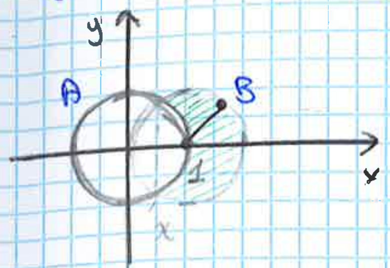
$\int_0^1 y^4 + \cancel{y^2} + 1 - 2y^3 + 2y^2 - 2y - \cancel{y^2} = \frac{y^5}{5} + y - \frac{2y^4}{4} + \frac{2y^3}{3} - \frac{2y^2}{2}\Big|_0^1$

$\frac{1}{5} + \cancel{1} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \cancel{1} = \frac{6 - 15 + 10}{30} = \frac{1}{30}$

- Area insieme $B - A$

$A = \{ x^2+y^2 \geq 1 \}$ $\quad B = \{ x^2-2x+y^2 \leq 0 \}$

$\hookrightarrow x^2-2x+1+y^2 \leq 1$
$(x-1)^2+y^2 \leq 1$



$$\iint_{B \setminus A} 1 \, dx dy \qquad \rho = 1 \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi$$

$$\rho = 2\cos\vartheta \qquad 1 \leq \rho \leq 2\cos\vartheta$$

$F(x,y,z) = \underbrace{(X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z))}_{\text{da' un vettore come risultato}}$

prodotto scalare

$$\int_\gamma F \cdot \tau \, ds = \int_a^b \Big(X(x(t), y(t), z(t)), Y(x(t), y(t), z(t)), Z(x(t), y(t), z(t)) \Big) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) dt$$

$$= \int_a^b \Big[X(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + Y(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + Z(x(t), y(t), z(t)) z'(t) \Big] dt$$

$$= \int_\gamma \underline{X dx + Y dy + Z dz} \longrightarrow \text{è detto 1-forma differenziale}$$

si utilizza anche questa notazione

$$\gamma: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad \begin{aligned} dx &= x'(t) dt \\ dy &= y'(t) dt \\ dz &= z'(t) dt \end{aligned}$$

<u>esercizio</u>: calcolare il lavoro di $F(x,y,z) = (x, xy, xyz)$ lungo $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [0,1]$

$$\int_\gamma F \cdot \tau \, ds = \int_\gamma F \tau = \int_\gamma F dP$$

$F(x,y,z) = (x, \; xy, \; xyz)$ $\qquad \gamma'(t) = (1, 2t, 3t^2)$, $t \in [0,1]$

$\qquad X(x,y,z) \quad Y(x,y,z) \quad Z(x,y,z)$ $\qquad x(t) = t \quad y(t) = t^2 \quad z(t) = t^3$

$$\int_\gamma F \tau ds = \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^1 (t, t^3, t^6)(1, 2t, 3t^2) dt =$$

$$= \int_0^1 (t + 2t^4 + 3t^8) dt = \frac{31}{30}$$

Alternativa

$$\int_\gamma x \, dx + xy \, dy + xyz \, dz$$

$dx = x'(t) dt \longrightarrow dt$
$dy = y'(t) dt \longrightarrow 2t \, dt$
$dz = z'(t) dt \longrightarrow 3t^3 dt$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 155

Superfici parametriche (in $\mathbb{R}^3$)

descrivo con due parametri u, v

curva eq. parametrica ⊛

(SOSTEGNO: immagine di Σ ?)

$\sigma: \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$ fisso v cambio u

$\sigma: D \to \mathbb{R}^3$

$\sigma(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

$\sigma(D) = \underset{\mathbb{R}^3}{\underset{\cap}{\Sigma}}$ sostegno della superficie σ

curva ⊛ $\begin{cases} x = x(u, v_0) \\ y = y(u, v_0) \\ z = z(u, v_0) \end{cases}$ v_0 è fissato ~~parametro~~ u: vettore tangente $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0) \end{pmatrix} = \frac{\partial\sigma}{\partial u}$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Si richiede

- σ è di classe C^1 (cioè lo sono $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ su un aperto contenente D)
- σ è regolare $\frac{\partial\sigma}{\partial u}$ e $\frac{\partial\sigma}{\partial v}$ sono lin. indip. nei punti interni a D, ossia

$$J\sigma = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \text{ ha rango 2}$$

Determinare area di una superficie

$\sigma: \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dominio di integration}}}{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

si definisce l'area di Σ come

$$\text{area } \Sigma = \int_D \underbrace{\|N(u,v)\| \, du\,dv}_{d\sigma} \qquad N(u,v) = \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)$$

- σ si dice semplice se è iniettiva sull'interno di D

$\sqrt{\sin^2\varphi(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)} = \sin\varphi$

$\text{area} = \int_D \|N(u,v)\|\,du\,dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi\, d\vartheta = \int_0^{2\pi}[-\cos\varphi]_0^{\pi} d\vartheta =$

$= 2\cdot 2\pi = 4\pi$

Integrali di superficie di prima specie (int di una funzione lungo una superficie)

$\alpha: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

dominio di integrazione

$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$

$f(x,y,z)$ continua nel sostegno di α $(\Sigma = \alpha(D))$

si definisce

$$\int_{\Sigma \text{ oppure } \alpha} f\, d\sigma = \int_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \underbrace{\|N(u,v)\|\,du\,dv}_{d\sigma}$$

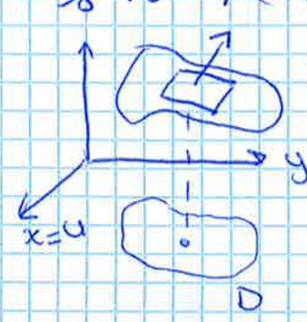
OSS: se $f \equiv 1$ $\int_\Sigma d\sigma = \text{area } \Sigma$

se Σ è una lamina metallica con densità di massa superficiale f $\int_\Sigma f d\sigma$ è la massa totale

densità di carica $\longrightarrow$ carica totale

caso particolare importante (forma cartesiana)

$z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$



$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) \end{cases}$

$\frac{\partial\alpha}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u} \end{pmatrix}$ $\frac{\partial\alpha}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix}$

$N = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial u} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial v} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1\right)$

punta verso l'alto (componente positiva rispetto a z)

$\|N(u,v)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + 1}$

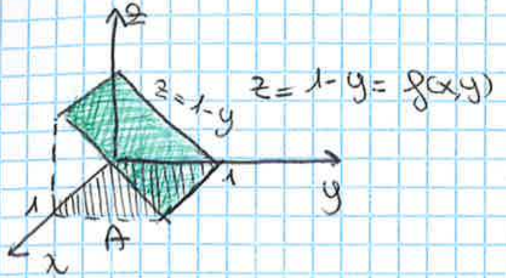
$\text{area } \Sigma = \int_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\; dx\,dy$

Se Σ: $z = f(x,y)$ prendo $u = x$, $v = y$..

$N(x,y) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) \longrightarrow$ non faccio altri calcoli

esercizio: calcolare il flusso del campo vettoriale $F(x,y,z) = (\cos(xz), xy, z)$ attraverso la superficie Σ data dalla porzione di piano di equazione $z = 1-y$ con $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ e con normale soddisfacente $n \cdot k > 0$

↑ prodotto scalare

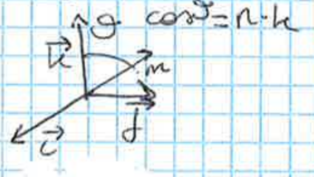


Bisogna parametrizzare. n a seconda della parametrizzazione può cambiare segno

$n \cdot \vec{k} > 0$ → seleziono l'ultima componente che deve essere > 0

è la stessa cosa dire che n e $\vec{k}$ formano un angolo acuto

(n_1, n_2, n_3) | Oppure n punta verso l'alto



$N(x,y) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) = (0, 1, 1)$

→ se chiede < 0 deve essere tutto cambiato di segno $(0,-1,-1)$ oppure cambiare segno al risultato

$\int_\Sigma F \cdot n \, d\sigma = \int_A (\cos(x(1-y)), xy, 1-y) \cdot (0,1,1) \, dx\, dy$

sulla superficie devo cambiare sostituire $z = 1-y$ alle altre componenti

$= \int_D [xy \cdot 1 + (1-y) \cdot 1] \, dx\, dy =$

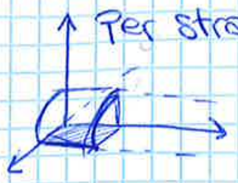
$\int_0^1 \int_0^1 (xy + 1 - y) \, dx\, dy = \frac{3}{4}$

$$\int_C 1 \, dx\,dy\,dz = \text{Volume di } C \overset{\substack{\text{per fili} \\ \text{"} \text{ all'asse } z}}{=} \iint_Q \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} 1 \, dz \right) dx\,dy =$$

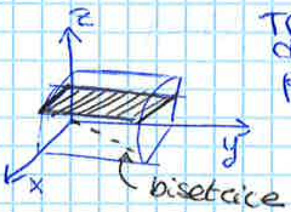
$$= \iint_Q \sqrt{1-x^2} \, dx\,dy$$

sostituzione trigonometriche $x = \sin t$

Per strati

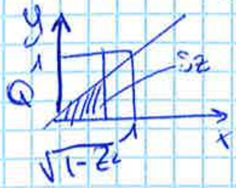


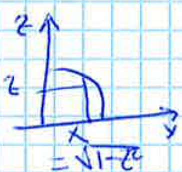
punto ②



Trovare i volumi tagliati dalla bisettrice per strati / fisso z

Proiezione piano xy





Area di $S_z = \frac{(\sqrt{1-z^2})^2}{2} = \frac{1-z^2}{2}$ con S_z = metà di un quadrato di lato $\sqrt{1-z^2}$

$$\int_0^1 \frac{1-z^2}{2} dz = \frac{z}{2} - \frac{z^3}{6} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

Volume della parte piccola $= \frac{1}{3} = 0,33$

Volume della parte grande $= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} = 0,452$

- Coordinate cilindriche → corrispondono all'integrale per fili seguito da un integrale doppio con coord. polari

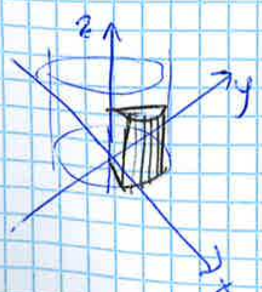
$$T: \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \\ z = t \end{cases}$$

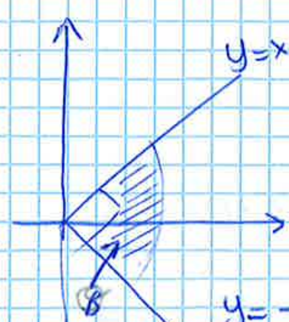
$(x,y,z) \to (\rho,\vartheta,t)$ $\quad 0 \le \rho$ $\quad \det|J_T| = \rho$

$0 \le \vartheta \le 2\pi$

$t \in \mathbb{R}$

$$V = \{ (x,y,z) \quad -x \le y \le x \;, x \ge 0 \;, 0 \le z \le 1 \;, x^2+y^2 \le 4 \}$$





$$\int_V (x+y+z^2) \, dx\,dy\,dz$$

$0 < \rho \le 2 \qquad -\frac{\pi}{4} \le \vartheta \le \frac{\pi}{4}$

$$\iint_B \left(\int_0^1 (x+y+z^2) dz \right) dx\,dy =$$

$$\iint_B \left(xz + yz + \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^1 dx\,dy =$$

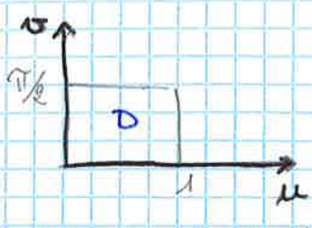
$$= \iint_B \left(x+y+\frac{1}{3}\right) dx\,dy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 \left(\rho\cos\vartheta + \rho\sin\vartheta + \frac{1}{3} \right) \rho \, d\rho \, d\vartheta = \frac{\pi + 8\sqrt{2}}{3}$$

di flusso

Flusso di $F(x,y,z) = (y, -x, z)$ attraverso Σ $\begin{cases} x(u,v) = u \sin v \\ y(u,v) = u \cos v \\ z(u,v) = u^2 \end{cases}$

$0 \le v \le \pi/2$

$0 \le u \le 1$



$$\int_\Sigma F \cdot n \, d\sigma = \int_D F(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot N(u,v) \, du\, dv$$

$$N(u,v) = \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}$$

$\frac{\partial \sigma}{\partial u} (\sin v, \cos v, 2u)$ $\qquad \frac{\partial \sigma}{\partial v} = (u \cos v, -u \sin v, 0)$

$$N(u,v) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sin v & \cos v & 2u \\ u\cos v & -u \sin v & 0 \end{vmatrix} = (2u^2 \sin v, 2u^2 \cos v, -u)$$

$$\int_\Sigma F \cdot n \, d\sigma = \int_D (u \cos v, -u \sin v, u^2)(2u^2 \sin v, 2u^2 \cos v, -u)\, du\, dv$$

$$= \int_D -u^3 \, du\, dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 -u^3 \, du \, dv = \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{u^4}{4} \right]_0^1 dv = -\frac{\pi}{8}$$

Se mi accordo che è un paraboloide

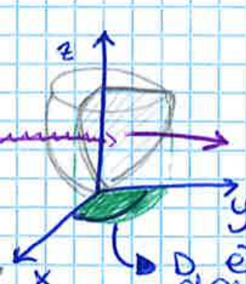
$\begin{cases} x(u,v) = u \sin v \\ y(u,v) = u \cos v \\ z(u,v) = u^2 \end{cases}$ $\qquad z = x^2 + y^2$

$0 \le v \le \pi/2$

$0 \le u \le 1$

con versore normale $\vec{n} : \vec{n} \cdot \vec{k} < 0$ perché?

testo esercizio punta verso il basso quindi ⊖



$\boxed{\text{con } x, y \ge 0 \quad x^2 + y^2 \le 1}$

D è definito da

$$\int_\Sigma F \cdot n \, d\sigma = \int_D F(x, y, f(x,y)) \cdot N(x,y) \, dx\, dy$$

$$N(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, + \frac{\partial f}{\partial y}, \bullet \right)$$ punta basso

$$= \int_D (y, -x, x^2+y^2)(2x, 2y, -1)\, dx\, dy = \int_D -(x^2+y^2)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 -\rho^2 \rho \, d\rho\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 -\rho^3 \, d\rho\, d\theta = -\pi/8$$

Quella $\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right)$ punta verso l'alto

Richiamo (Teorema fondamentale del calcolo integrale)

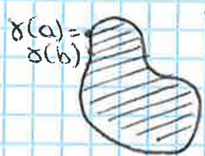
Sia F funzione di classe C^1 su $[a,b]$ allora $\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Si dice **curva di Jordan** una curva **piana** $(n=2)$ **semplice e chiusa**

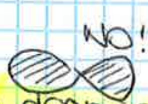
Una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ si dice semplice e chiusa se

$$\begin{cases} \gamma(t_1) = \gamma(t_2) \\ t_1 \neq t_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} t_1 = a,\ t_2 = b \\ \text{oppure} \\ t_1 = b,\ t_2 = a \end{cases}$$

e se è chiusa, ossia $\gamma(a) = \gamma(b)$



Regione di Jordan: regione racchiusa da una curva di Jordan



Teorema di Green stabilisce un'uguaglianza fra un integrale di linea e un integrale doppio

Sia D un dominio di integrazione piano costituito da una regione di Jordan e dal suo bordo (= frontiera) γ che sappiamo di classe C^1 a tratti.

Sia $F(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ un campo vettoriale di classe C^1 su un aperto contenente D

Allora

$$\int_\gamma F \cdot \tau\, ds = \int_D \left[\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \right] dx\,dy$$

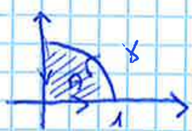
dove γ è percorso in verso **antiorario.**

OSS. $\int_\gamma f_1(x,y)\,dx + f_2(x,y)\,dy$

es. $\int_\gamma F \cdot \tau\, ds \qquad F(x,y) = (x^2+y,\ e^y - x)$

$\left[\int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt \to \text{calcolo diretto} \right]$

$\gamma = \partial A$



Applico Teorema di Green)

$$\int_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx\,dy = \int_A (-1-1)\,dx\,dy = \int_A -2\,dx\,dy = -2\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

OSSERVAZIONE

Se $F(x,y) = (0,x)$

Se $F(x,y) = (-y,0)$

$$\underset{//}{\frac{\partial f_2}{\partial x}} - \underset{//}{\frac{\partial f_1}{\partial y}} = 1$$

In questi casi $\int_\gamma F \cdot \tau\, ds = \int_D 1\,dx\,dy = \text{area}(D)$

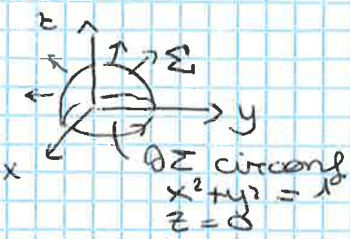
$\int_\gamma x\,dy = \text{area}(D)$

$-\int_\gamma y\,dx = \text{area}(D)$

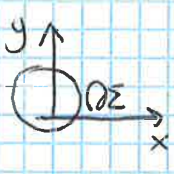
$\frac{1}{2}\int_\gamma x\,dy - y\,dx = \text{area}(D)$

es. calcolare il flusso del rotore del campo
$F(x,y,z) = (2x-y, -yz^2, -y^2z)$ attraverso l'emisfero superiore della sfera $x^2+y^2+z^2=1$ con normale che punta verso l'alto.

$\partial\Sigma$ circonf γ $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 0 \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$



$\int_\Sigma \text{rot}\, F \cdot n \, d\sigma$



$\int_{\partial\Sigma} F \cdot \tau \, ds$

$\partial\Sigma$ $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ $t \in [0, 2\pi]$

$\int_\gamma F \cdot \tau \, ds = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} (2\cos t - \sin t, -\sin t \cdot 0^2, +$
$-\sin^2 t \cdot 0)(-\sin t, \cos t, 0)\, dt = \int_0^{2\pi} (-2\cos t \sin t + \sin^2 t)\, dt$
$= -2\int_0^{2\pi} \sin t \cos t \, dt + \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = -2\left[\frac{1}{2}\sin^2 t\right]_0^{2\pi} + \pi = 0 + \pi = \pi$

Definizione di divergenza di un campo vettoriale

Sia $F(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z))$ un campo vettoriale di classe C^1 su un aperto di $\mathbb{R}^3$. Si dice divergenza di F e si denota con div F la funzione scalare
$$\text{div}\, F(x,y,z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z)$$

Teorema di Gauss (o della divergenza) uguaglianza tra un int. di flusso e un int. triplo

OSSERVAZIONE: qui ∂D è una superficie chiusa (senza bordo)

Sia D un dominio di integrazione in $\mathbb{R}^3$ il cui bordo ∂D è supposto costituito da un numero finito di superfici semplici. Sia $F(x,y,z)$ un campo vettoriale di classe C^1 su un aperto contenente D. Allora
$$\int_{\partial D} F \cdot n \, d\sigma = \int_D \text{div}\, F \, dx\,dy\,dz$$
dove n è il versore normale uscente da D

Esercitazione

V è formato da un # limitato di punti: P_i m_i: vettore scalare

Massa totale $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ scalare

Baricentro $G = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i P_i\right)/M$

V continuo

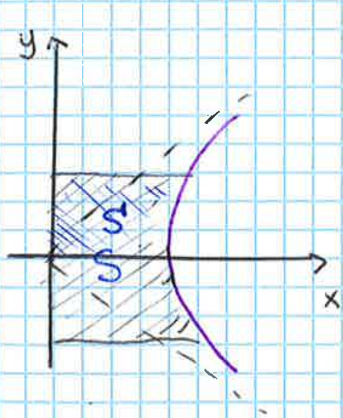
$\mu(x)$ densità di massa $\qquad \mu(x) = 1$

$M = \int_V \mu(x)\, dx \quad = m(H)$

$dx_1, dx_2 \qquad dx_1, dx_2, dx_3$

$G = \dfrac{\int_V x\,\mu(x)\, dx}{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{M}\int_V x\, dx\, dy \\ \vdots \end{pmatrix}$

coordinate del baricentro (x,y) della figura piana delimitata dalle rette di eq. $y=-1$, $y=1$, $(x \geq 0)$ iperbole di eq. $x^2-y^2=1$



$G = (g_1, g_2)$

$g_2 = 0$ (simmetria)

integro in x deve comparire nei limitazione per la x

$x^2 = 1+y^2 \qquad x = \pm\sqrt{1+y^2}$

- $\int_S x\, dx\, dy = 2\int_{S'} x\, dx\, dy = 2\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1+y^2}} x\, dx\right) dy = \int_0^1 x^2 \Big|_0^{\sqrt{1+y^2}} dy =$

$\int_0^1 (1+y^2)\, dy = \frac{4}{3}$

- $\int_S dx\, dy = 2\int_{S'} dx\, dy = 2\int_0^1\int_0^{\sqrt{1+y^2}} dx\, dy = 2\int_0^1 \sqrt{1+y^2}\, dy$

$2\int \sqrt{1+\sinh^2 t}\cdot \cosh t\, dt \qquad y = \sinh t, \quad dy = \cosh t\, dt$

$= 2\int \cosh^2 t\, dt = \qquad \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$

$= \cancel{2}\int \dfrac{1+\cosh 2t}{\cancel{2}} = t + \dfrac{\sinh 2t}{2} = t + \sinh t \cdot \cosh t = \text{sett}\sinh y + y\sqrt{1+y^2} =$

$t \to \text{sett}\sinh y, \quad \sinh t \to y, \quad \cosh t \to \sqrt{1+y^2}$

$= \log\left(y + \sqrt{1+y^2}\right) + y\sqrt{1+y^2}$

$\to 2\left(\log\left(y+\sqrt{1+y^2}\right) + y\sqrt{1+y^2}\right)\Big|_0^1 = \sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2})$

$g_1 = \dfrac{4}{3}\,\dfrac{1}{\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})}$

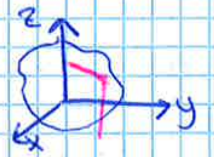
Rotazione attorno all' origine

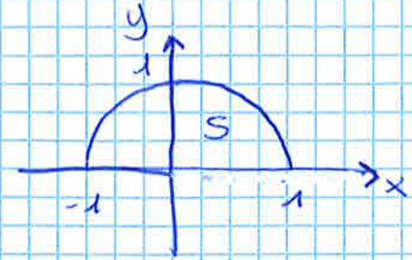
$x \in V \qquad \|X\| = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} \\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{cases}$

$I_0 = \int_V \|X\|^2 \underbrace{\mu(x)}_{1} \, dx$ se la massa è uniforme

Attorno a un asse

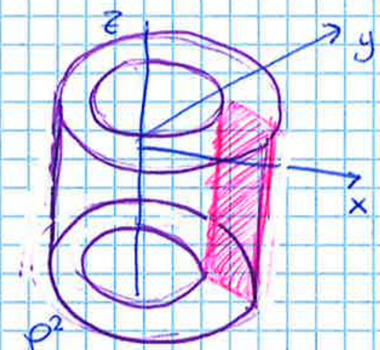
$I_z = \int_V (x^2+y^2)\, \mu(x)\, dx$

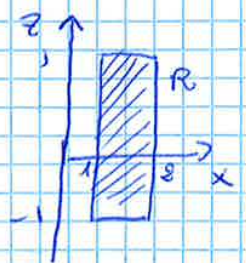




$I_0 = \int_S (x^2+y^2)\, dx\, dy = \int_0^{\pi} \int_0^1 \rho^2 \cdot \rho \, d\rho \, d\vartheta = \pi/4$

- $R\{(x,z) : 1 \leq x \leq 2,\ -1 \leq z \leq 1\}$ ruotiamo attorno a z





$\int_V \overbrace{(x^2+y^2)}^{\rho^2} \, dx\, dy\, dz \qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2}$

coordinate cilindriche

$\int_0^{2\pi} \int_1^2 \left(\int_{-1}^1 \rho^3 \, dz \right) d\rho \, d\vartheta$

$2 \int_0^{2\pi} \int_1^2 \rho^3 \, d\rho \, d\vartheta = 2 \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_1^2 \cdot 2\pi = 15\pi$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 155

Richiamo

Green

$F(x,y) = (f_1(x,y) + f_2(x,y))$

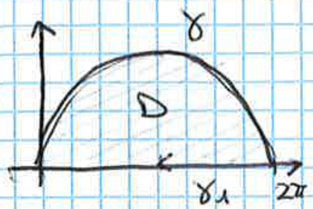
$$\int_{\partial D} F \cdot \tau \, ds = \int_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx\,dy$$

$F(x,y) = (-y, 0)$ $\quad \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1$

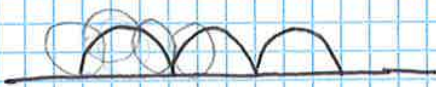
$\int_{\partial D} F \cdot \tau \, ds =$ area D

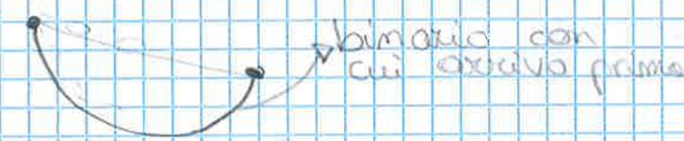
$(F(x,y) = (0,x), \dots)$

esercizio: calcolare l'area limitata dalla curva $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ $t \in [0, 2\pi]$ e dall'asse x



$t \in [0, 2\pi]$
cicloide





È un problema con gli integrali doppi, dovrei scrivere $y = y(x)$ o $x = x(y)$ formule molto complicate $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$

$$\text{area}(D) = \int_{\partial D} (-y, 0) \cdot \tau \, ds = -\int_{-\partial D} (-y,0) \tau \, ds =$$

$-\partial D$ → bordo percorso in senso orario

$$= -\int_\gamma (+y, 0) \tau \, ds - \underbrace{\int_{\gamma_1} (-y, 0) \tau \, ds}$$

$\gamma_1(t) = (t, 0)$ → da sinistra a destra
$\gamma_1(t) = (2\pi - t, 0)$
$\gamma_1'(t) = (-1, 0)$
devo fare il prodotto scalare
al posto di y metto 0
quindi viene tutto zero

$$= \int_\gamma (y, 0) \tau \, ds = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t, 0)(1 - \cos t, \sin t) \, dt$$

$\gamma'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$

$$\int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 t - 2\cos t) dt = 2\pi + \pi + 0 = 3\pi$$

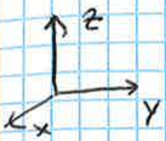
$z = f(x,y)$

$N(x,y) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$

$y = f(x,z)$

α acuto cioè ⊥ tra componenti

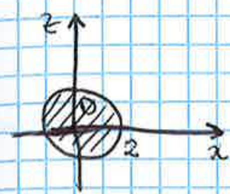
$N(x,z) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, 1, -\frac{\partial f}{\partial z}\right)$



$y = -2(x^2+z^2)$

$N(x,z) = (+4x, 1, +4z)$

$$\int_\Sigma \text{rot} \cdot n \, d\sigma = \int \text{rot}\, F(x, -2(x^2+z^2), z) \cdot N(x,z) \, dx\,dz$$



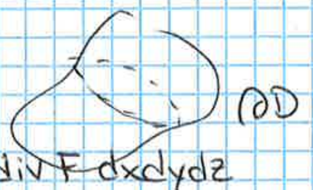
$$= \int_D \left(\frac{x}{\sqrt{2(x^2+z^2)}}, 4\sqrt{2(x^2+z^2)}, \frac{z}{\sqrt{2(x^2+z^2)}}\right)(+4x, 1, +4z)\, dx\,dz$$

$$= \int_D \left(\frac{4}{\sqrt{2}} + 4\sqrt{2}\right) \underbrace{\sqrt{x^2+z^2}}_{\rho} \, dx\,dz = 32\sqrt{2}\,\pi$$

<u>Richiamo</u>

GAUSS $D \subset \mathbb{R}^3$

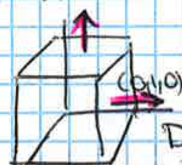
$F(x,y,z)$



$$\underbrace{\int_{\partial D} F \cdot n \, d\sigma}_{\text{flusso uscente}} = \int_D \text{div} F \, dx\,dy\,dz$$

<u>esercizio</u> Calcolare il flusso di $F(x,y,z) = (4xz, -y^2, yz)$ <u>uscente</u> dal cubo $|x| \le 1$ $|y| \le 1$ $|z| \le 1$

$$\int_\Sigma F \cdot n \, d\sigma = \int_D \text{div} F \, dx\,dy\,dz$$



$\Sigma = \partial D$ (bordo)

$(0,1,0)$

D cubo

$$= \int_D (4z - y)\, dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (4z-y)\, dx\,dy\,dz = 0$$

$$\text{div} F = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 4z - 2y + y = 4z - y$$

ANALISI I

$\int_{-a}^{a} \underbrace{f(x)}_{\text{dispari}} \, dx = 0$

Se nel nostro esempio scambio ognuno con il suo opposto $(x \to -x\,;\, y \to -y)$ il meno passa fuori

- $F(x,y) = (2x+y, x)$ è conservativo in $\mathbb{R}^2$?
($\omega = (2x+y)dx + x\,dy$ è esatto in $\mathbb{R}^2$?)

$\exists\, g(x,y) : F(x,y) = \nabla g(x,y) \;\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = 2x+y \\ \frac{\partial g}{\partial y} = x \end{cases} \longrightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = 2x+y \longrightarrow g(x,y) = x^2 + xy + \varphi(y)$$

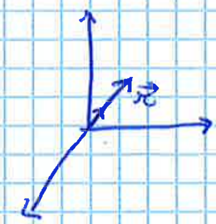
(sostituisco nella 2ª equazione)
↳ la derivo rispetto a y

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \cancel{x} + \varphi'(y) = \cancel{x}$$
$$\varphi'(y) = 0$$
$$\varphi(y) = c \quad \text{(costante)}$$

ritorno nella 1ª $\longrightarrow g(x,y) = x^2 + xy + c$ tutti i potenziali di F
↳ tutte le primitive di ω sono date da $g(x,y) = x^2+xy+c$

$\longrightarrow$ F è conservativo in $\mathbb{R}^2$

esempio F def. su $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$



- $F(\vec{r}) = \frac{k}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$ $\quad k \in \mathbb{R}$

$\frac{\vec{r}}{r}$ → versore radiale

$\vec{r}\,(x,y,z)$
$r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
$r^2 = x^2+y^2+z^2$

F è conservativo in Ω $\xrightarrow{\text{infatti}}$ $\exists g : F = \nabla g$

campo elettrico generato da una carica puntiforme posta in $(0,0,0)$

potenziale
$$g(\vec{r}) = -\frac{k}{r} = -\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
$(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$

controllo

$$\frac{\partial g}{\partial x} = +\frac{kx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{kx}{r^3}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{ky}{r^3} \qquad F(\vec{r}) = \frac{k}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{k\vec{r}}{r^3}$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{kz}{r^3}$$

energia potenziale U

$F = -\nabla U \leftarrow$ fisica $\qquad F = \nabla U \leftarrow$ matematica

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 155

Dim Fisso un punto A
siano g_1 e g_2 due potenziali di F

$$g_1(x) = \int_\gamma F\cdot\tau\, ds + g_1(A)$$
$$g_2(x) = \int_\gamma F\cdot\tau\, ds + g_2(A)$$

$$g_1(x) - g_2(x) = \underbrace{g_1(A) - g_2(A)}_{\text{costante}} \quad \forall x \in \Omega$$

Teorema (caratterizzazione dei campi conservativi)

F conserv. è come dire che

Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$. Sia F un campo vettoriale continuo in Ω. Le seguenti affermazioni sono equivalenti

a) F è conservativo in Ω

b) comunque prese due curve γ_1, γ_2 di classe C^1 a tratti e con sostegno in Ω con lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale risulta

$$\int_{\gamma_1} F\cdot\tau\, ds = \int_{\gamma_2} F\cdot\tau\, ds$$

non dipendono dalla curva se è connesso

se vale $\forall$ coppia di curve è conservativo

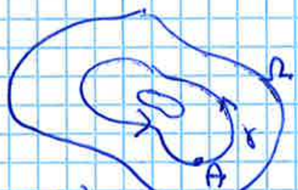
c) comunque presa una curva chiusa di classe C^1 a tratti con sostegno in Ω, risulta

$$\int_\gamma F\cdot\tau\, ds = 0$$

viceversa se questo vale per ogni curva chiusa sarà conservativo

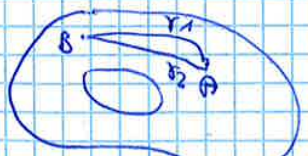
Dim

a) $\int_\gamma F\cdot\tau\, ds$



$F = \nabla g \qquad A = \gamma(a)$
$\qquad\qquad\quad B = \gamma(b)$

$$\int_\gamma F\cdot\tau\, ds = g(A) - g(A) = 0$$



b) $$\int_{\gamma_1} F\cdot\tau\, ds = \int_{\gamma_2} F\cdot\tau\, ds$$

$g(B) - g(A) \qquad g(B) - g(A)$

Questo teorema è utile per dimostrare che il campo non è conservativo. Se ho un campo conservativo dovrei fare integrali su tutte le curve. Se ho un campo non conservativo potrei dimostrare che $\int_\gamma F\cdot\tau\, ds \neq 0$

4. γ F $\int_\gamma F \cdot \tau \, ds = \int_\gamma \omega = P$

$F = (f_1, f_2, f_3) = f_1 i + f_2 j + f_3 k$ $\qquad \omega = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$

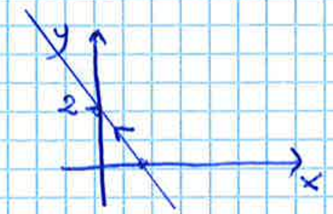
$= \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt$

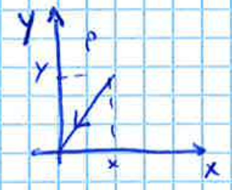
In $\mathbb{R}^2$ il campo vettoriale $F(x,y) = (-x, -y)$ forza di richiamo elastico

$\gamma \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2t \end{cases} \quad t \in [0,1]$

$t = 1-x$

$y = -2x+2$



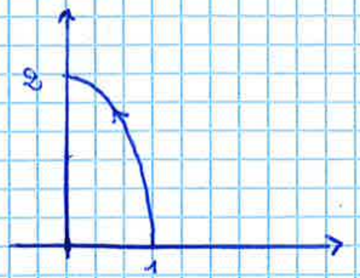


$\int_\gamma F \cdot \tau \, ds = \qquad \gamma' \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$

$\int_0^1 \begin{pmatrix} -1+t \\ -2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\int_0^1 (1-t-4t) \, dt = \int_0^1 (1-5t) \, dt = -3/2$

5. $\gamma \begin{cases} x = \cos t \\ y = 2 \operatorname{sen} t \end{cases} \quad t \in [0, \pi/2] \qquad F = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$



$\gamma' \begin{cases} -\operatorname{sen} t \\ 2\cos t \end{cases}$

$\int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} -\cos t \\ -2\operatorname{sen} t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ 2\cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} t \cos t - 4 \operatorname{sen} t \cos t) \, dt =$

$= \int_0^{\pi/2} -3 \operatorname{sen} t \cos t \, dt = -\frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 t \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{3}{2}$

Stesso risultato 4-5 perché ho il campo conservativo

$g(x,y) = -\frac{x^2+y^2}{2}$

$I_1 = -2u$

$I_2 = -2v$ $\qquad N = (-2u, -2v, 1)$

$I_3 = 1$

$I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 = 1 + 4(u^2+v^2)$ $\qquad \|N\| = \sqrt{1+4(u^2+v^2)}$

$\iint_C \sqrt{1+4(u^2+v^2)}\, du\, dv$ $\qquad$ area Σ $\int_C \|N\|\, du\, dv$

$C = \{(u,v) : u^2+v^2 \leq 1\}$

Passando a coordinate polari $\longrightarrow \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$

esercizio

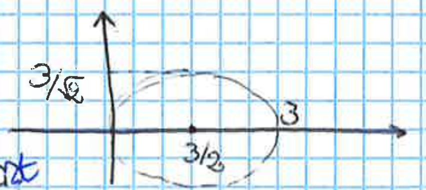
Sia γ la curva intersezione del cilindro $2x^2+y^2-6x=0$ con il piano $x+z=3$ orientata in modo che la sua proiezione sul piano xy sia percorsa in verso antiorario.
Calcolare $\int (x,y,z) \cdot \tau\, ds$

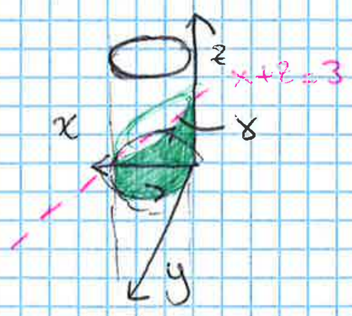
calcolo diretto $\int (z,x,y) \cdot \tau\, ds$

$2x^2+y^2-6x=0$

$2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = 9/2$

$\frac{(x-3/2)^2}{\frac{9}{4}} + \frac{y^2}{\frac{9}{2}} = 1$ ellisse $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ $a = \frac{3}{2}$ $b = \frac{3}{\sqrt{2}}$





$\gamma \begin{cases} x = x_0 + a\cos t \\ y = y_0 + b\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}$

$\gamma \begin{cases} x = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cos t \\ y = 0 + \frac{3}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}\,t \\ z = 3 - x = +\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$

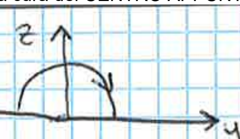
$\gamma(t) = \left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\cos t, \frac{3}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}\,t, \frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cos t\right)$

$\gamma'(t) = \left(-\frac{3}{2}\,\mathrm{sen}\,t, \frac{3}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{3}{2}\,\mathrm{sen}\,t\right)$

$\int_\gamma (z,x,y) \cdot \tau\, ds = \int_0^{2\pi} \Big(\underbrace{\tfrac{3}{2} - \tfrac{3}{2}\cos t}_{z}, \underbrace{\tfrac{3}{2} + \tfrac{3}{2}\cos t}_{x}, \underbrace{\tfrac{3}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}\,t}_{y}\Big)\left(-\frac{3}{2}\,\mathrm{sen}\,t, \frac{3}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{3}{2}\,\mathrm{sen}\,t\right) dt$

$= \int_0^{2\pi} -\frac{9}{4}\,\mathrm{sen}\,t + \frac{9}{4}\cos t\,\mathrm{sen}\,t + \frac{9}{2\sqrt{2}}\cos t + \frac{9}{2\sqrt{2}}\underbrace{(\cos^2 t + \mathrm{sen}^2 t)}_{1}\, dt =$

$= \int_0^{2\pi} \frac{9}{2\sqrt{2}}\, dt = \frac{9}{\cancel{2}\sqrt{2}} \cdot \cancel{2}\pi = \frac{9}{\sqrt{2}}\pi$



$x=1$

$-\gamma_1(t) = (1, \cos t, \operatorname{sen} t)$

$F = (z e^{x^2}, 3(x-1), z(x-1))$

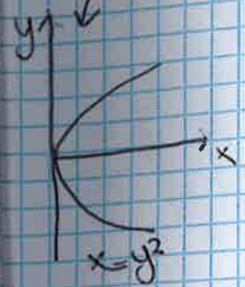
$\int_{\gamma_2} F\cdot\tau\, ds = -\int (\operatorname{sen} t\, e, 0, 0)\underbrace{(0, -\operatorname{sen} t, \cos t)}_{-\gamma_1'} dt = 0$

proiez. di γ_1 in yz semicirconferenza

$x = y^2 + z^2$, $x = 1$

$-\gamma_1 \begin{cases} y = \cos t \\ z = \operatorname{sen} t \end{cases}$ teniamo questa ricordando che è in senso antiorario quindi scarico $t \in [0,1]$

proiez. di γ_2 sul piano x-y



$x = t$

$x = \cancel{z^2} + y^2$

$-\gamma_2(t) = (t^2, t, 0)$

$t \in [-1, 1]$ quindi cresce
mi serve la parametrizz. opposta $(-)$

$\int_{\gamma_2} F = -\int_{-1}^{1} (0, 3(t^2-1), 0)(2t, 1, 0)\, dt = -\int_{-1}^{1} 3(t^2-1)\, dt$

funzione pari $= -2\int_0^1 3(t^2-1)\, dt = -6\left(\frac{1}{3} - 1\right) = -6\left(-\frac{2}{3}\right) = 4$

$\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} = 0 + 4 = 4$

$,z(x-1)$

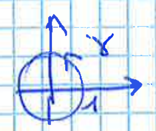
esempio di applicazione della caratterizzazione dei campi conservativi

Per mostrare che F non è conservativo in Ω basta mostrare una curva chiusa γ con sostegno in Ω: $\oint_\gamma F\cdot\tau\, ds \neq 0$

ad es. il campo

$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ non è conservativo

in $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ perché con γ si ha $\int_\gamma F\cdot\tau\, ds = 2\pi \neq 0$



Condizione necessaria

perché F sia conservativo. Se F è un campo di classe C^1 (con componenti di classe C^1) conservativo in un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$ allora, posto $F = (f_1 \ldots f_n)$ devono valere

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad \forall i,j = 1 \ldots n \text{ in } \Omega$$

derivate incrociate

es. se $n=2$ $F = (f_1, f_2)$: $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$

se $n=3$ $F = (f_1, f_2, f_3)$: $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1}$

Def: Sia $\omega = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$ una 1-forma differenziale di classe C^1 su Ω ($f_1, \dots, f_n \in C^1(\Omega)$)
ω si dice chiusa se $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in Ω $i, j = 1 \dots n$

CAMPI	FORME
$F = (f_1 \dots f_n)$ ($f_1 \dots f_n \in C^1(\Omega)$)	$\omega = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$

F conservativo $\longleftrightarrow$ ω esatta

(*) $\Uparrow$ $\Downarrow$ (*) $\uparrow$ $\downarrow$

$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ $\longleftrightarrow$ ω chiusa

(irrotaz., se $n = 3$)

(*) valgono se inoltre Ω è semplicemente connesso

Caratterizzazione delle forme esatte

ω esatta $\Leftrightarrow$ $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$ $\longleftrightarrow$ $\int_\gamma \omega = 0$

Def: un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$ si dice semplicemente connesso se è connesso e in aggiunta comunque preso una curva chiusa con sostegno in Ω essa si può deformare con continuità fino a ridursi ad un punto rimanendo sempre in Ω.

es. Ω quadrato sempl. connesso

es. buco — non è sempl. connesso

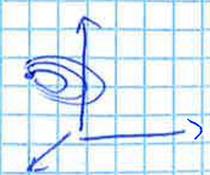
es. $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $(0,0) \notin \Omega$ — non è sempl. connesso

es. $\mathbb{R}^2$ un cerchio aperto, un quadrante ... sempl. connesso

Oss. un aperto del piano è sempl. connesso se e solo se è connesso e non ha buchi

es.

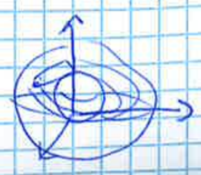
palla piena aperta sempl. connesso



tutto $\mathbb{R}^3$ sempl. connesso

es. $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

$(0,0,0) \notin \Omega$ è sempl. connesso



$1 < x^2+y^2+z^2 < 4$ è sempl. connesso

esercizio

$F(x,y) = (e^{-y^2}, 1 - 2xy\,e^{-y^2})$

$\exists\, g \in C^1(\mathbb{R}^2) : F(x,y) = \nabla g(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

potrebbe essere $\boxed{x e^{-y^2} + y} = g(x,y)$

Facciamolo con i Teoremi

$\Omega = \mathbb{R}^2$ è sempl. connesso (non ha buchi)

$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -2y e^{-y^2} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x} = -2y e^{-y^2}$

quindi F è irrotazionale in $\mathbb{R}^2$, ma $\mathbb{R}^2$ è sempl. connesso
quindi F è conservativo in tutto il piano $\mathbb{R}^2$

Determiniamo un potenziale $g(x,y)$

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = e^{-y^2} \longrightarrow g(x,y) = x e^{-y^2} + \varphi(y) \\ \frac{\partial g}{\partial y} = 1 - 2xy\,e^{-y^2} \end{cases}$$

$\varphi(y) \to$ costante rispetto a x

sostituisco $\frac{\partial g}{\partial y}$

$\cancel{-2xye^{-y^2}} + \varphi'(y) = 1 \cancel{-2xye^{-y^2}}$

$\varphi'(y) = 1$

$\varphi(y) = y + C \to$ costante $C \in \mathbb{R}$

$g(x,y) = x e^{-y^2} + y + C \qquad C \in \mathbb{R}$

sono $\boxed{\text{tutti}}$ i potenziali di F in $\mathbb{R}^2$

- $F(x,y,z) = \left(xy - \sin z, \frac{x^2}{2} - \frac{e^y}{z}, \frac{e^y}{z^2} - x\cos z\right)$ è conservativo in D

$D = \{(x,y,z) : z > 0\}$

D aperto e sempl. connesso

$\frac{\partial f_1}{\partial y} = x = \frac{\partial f_2}{\partial x}$

$\frac{\partial f_1}{\partial z} = -\cos z = \frac{\partial f_3}{\partial x}$

$\frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{e^y}{z^2} = \frac{\partial f_3}{\partial y} \qquad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ in $z \neq 0$

$\to F$ è irrotazionale in $\mathbb{R}^3 \setminus \{z=0\}$ e quindi anche in D
e siccome D è sempl. connesso, F è conservativo in D

Determiniamo $g(x,y,z) : F = \nabla g$ (in D)

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = xy - \sin z \longrightarrow g(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 y - x\sin z + \varphi(y,z) \\ \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{x^2}{2} - \frac{e^y}{z} \\ \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{e^y}{z^2} - x\cos z \end{cases}$$

$g_x = g_y = 0 \quad (x_G = y_G = 0)$

Massa unitaria e uniforme

$$z_G = g_z = \frac{\int_\gamma z\, d\sigma}{\int_\Omega 1\, d\sigma} =$$

$$\int_\gamma z\, d\sigma =$$

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial u}, \frac{\partial \Omega}{\partial v}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Omega}{\partial v} = \begin{pmatrix} -2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix} = N \qquad \|N\| = \sqrt{1+4u^2+4v^2}$$

$$\iint_D (u^2+v^2)\sqrt{1+4u^2+4v^2}\, du\, dv \qquad D = \{(u,v) : u^2+v^2 < 1\}$$

$\longrightarrow$ conviene passare a coordinate polari $\begin{cases} u = \rho\cos\theta & 0 \le \theta \le 2\pi \\ v = \rho\sin\theta & 0 \le \rho \le 1 \end{cases}$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^3 \sqrt{1+4\rho^2}\, d\rho\, d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^1 \rho^3\sqrt{1+4\rho^2}\, d\rho \xrightarrow{\text{integro per parti}} 2\pi \int_0^1 \rho^2 \cdot \rho\sqrt{1+4\rho^2}\, d\rho$$

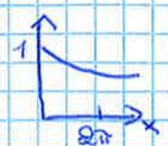
$$= 2\pi \left[\rho^2 \frac{(1+4\rho^2)^{3/2}}{12} - \frac{1}{12}\int 2\rho (1+4\rho^2)^{3/2} d\rho \right. = \ldots = \pi\left[\frac{1}{60} + \frac{5\sqrt{5}}{12}\right]$$

La coordinata z del baricentro $\frac{1}{10}\,\frac{1+25\sqrt{5}}{5\sqrt{5}-1} = 0{,}558\ldots$

- Superficie Ω di equazioni

$$\Omega \begin{cases} x = v\cos u & 0 \le u \le 2\pi \\ y = v \sin u & \\ z = u & 1 \le v \le 2 \end{cases} \longrightarrow \text{scala a chiocciola}$$

con densità di massa $\mu(x,y,z) = e^{-z}$



la massa distribuita decresce in questo modo

MASSA TOTALE

$$\int_\Omega \mu(x,y,z)\, dS$$

$$\int_\Sigma f\, d\sigma = \int_D f(x(u,v), \ldots)\, \|N(u,v)\|\, du\, dv$$

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial u}, \frac{\partial \Omega}{\partial v}\right) = \begin{pmatrix} -v\sin u & \cos u \\ v\cos u & \sin u \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Data la superficie di equazioni

$\sigma \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = v^2 \end{cases}$ grafico

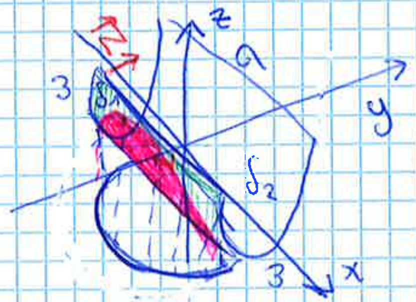
definito su $D = \{(u,v) : u^2+v^2 \leq 9,\ v \leq 0\}$
Indichiamo con $\partial\sigma$ il suo bordo, orientato concordemente con σ. Sia dato il campo vettoriale

$F = (-3y^2,\ 2z^2 + ze^y,\ -x^2 + e^y)$

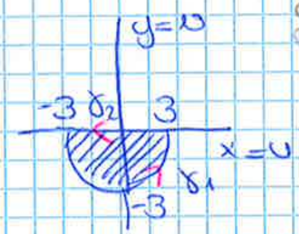
calcolare $\int_{\partial\sigma} F \cdot \tau \, ds$

grafico

$z = f(x,y) = y^2$ per $x = 0$ parabola



regola mano destra: nel piano antiorario



$\gamma_1 = \begin{cases} 3\cos t \\ 3\sin t \end{cases}$

$-\pi \leq t \leq 0$

$\gamma_2 = \begin{cases} u = -t \\ v = 0 \end{cases}$

$t \in [-3, 3]$

Nello spazio regola mano destra

$\int_{\partial\sigma} F \cdot \tau \, ds = \int_{\gamma_1} F \cdot t \, ds + \int_{\gamma_2} F \cdot t \, ds$

$\gamma_1 = \begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \\ z = 9\sin^2 t \end{cases}$ $\quad \gamma_2 = \begin{cases} -t = x \\ 0 = y \\ 0 = z \end{cases}$

Stokes

$\underbrace{\int_{\partial\sigma} F \cdot \tau \, ds}_{\text{se applico questo espressioni più complicate}} = \int_\sigma \operatorname{rot} F \cdot n$

$\operatorname{rot} F \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -3y^2 & 2z^2 + ze^y & -x + e^y \end{vmatrix} = (-4z)i + (2x)j + (6y)k$

$N = (0, -2v, 1)$

$\int_D (0 - 4uv + 6v) \, du\, dv \longrightarrow \int_D -4uv + 6v$

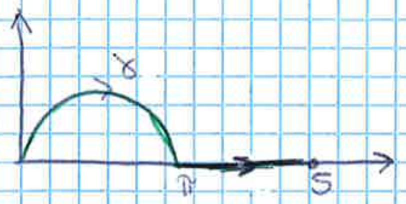
coordinate polari $\int_{-\pi}^{0} \int_0^3 -4\rho^3 \cos\vartheta \sin\vartheta + 6\rho^2 \sin\vartheta \, d\rho \, d\vartheta = -108$

$g(x,y) = xe^y - \log|y| + c$
$= xe^y - \log y + c \quad$ per $y>0$

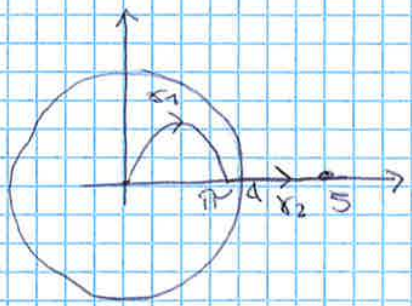
$\int_\gamma F\cdot\tau\, ds = g(e, \log 3) - g(0, \log 2) = +3e - \log(\log 3) + \log(\log 2)$

- calcolare $\int_\gamma F\cdot\tau\, ds$ dove $F(x,y) = (|x^2+y^2-16|, -2xy)$

$\gamma(t)$ è il grafico della funzione $f(x) = \begin{cases} \sin x & 0\le x\le \pi \\ 0 & \pi \le x \le 5 \end{cases}$



$$F(x,y) = \begin{cases} (16-x^2-y^2, -2xy) & \text{se } x^2+y^2 \le 16 \\ (x^2+y^2-16, -2xy) & \text{se } x^2+y^2 \ge 16 \end{cases}$$



se $x^2+y^2 \ge 16$ $\quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2y$, $\quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = -2y$ $\longrightarrow$ F non è conservativo fuori dal centro

$\begin{cases} y=0 \\ x=t \end{cases} \quad t\in[\pi, 5]$ sul pezzo dove non è conservativo (segmento)

In $x^2+y^2 < 16$

$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -2y = \frac{\partial f_2}{\partial x} \longrightarrow$ F è irrotazionale nel cerchio $\rightarrow$ cerchio semplic. connesso

F è conservativo nel cerchio

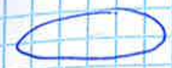
$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = -x^2-y^2+16 \\ \frac{\partial g}{\partial y} = -2xy \end{cases}$

$g(x,y) = -\frac{x^3}{3} - xy^2 + 16x + \varphi(y)$
$-2xy + \varphi'(y) = -2xy \quad \varphi(y) = c$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 155

Serie numeriche

Supponiamo di avere una membrana circolare, il bordo è una circonferenza. Membrana oscilla



in ogni istante ho una funzione $u(t,x,y)$ che cambia con il tempo e la posizione. soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ che si chiama equazione delle onde

per risolverla si possono separare le variabili

viene bene quando è $\square$, qui $\bigcirc$ conviene passare a coordinate polari

$$u(t,x,y) = \varphi(t)\,\psi(\theta)\,J(\rho)$$

$$J''(\rho) + \frac{1}{\rho}J'(\rho) + \left(1 - \frac{m^2}{\rho^2}\right)J\rho = 0 \qquad \rho > 0,\ m \in \mathbb{N}$$

equazione del II ordine a coeff. non costanti, non c'è una formula risolutiva

in questo caso si può esprimere la soluzione con una serie

serie: somma di infiniti termini

$$J(\rho) = \left(\frac{\rho}{2}\right)^m \left[\frac{1}{m!} - \frac{\rho^2}{2^2(m+1)!} + \frac{\rho^4}{2^4 2!(m+2)!} + \dots\right]$$

$$\overset{def}{=} \lim_{n\to+\infty} [\underbrace{\dots + \dots + \dots}_{n \text{ termini}}]$$

la soluzione esatta è la somma di tutti, ne sommo n e faccio il limite

se so che il limite esiste finito, so già in partenza che prendendo n termini trovo qualcosa che si stabilizza, converge, non qualcosa a caso

$u(t,x,y) = \varphi(t)\psi(\theta)J(\rho)$

serie di potenze, incognite tot funzioni

$\rightarrow$ verificare che converge $\rightarrow J(\rho)$

serie di Fourier $\rightarrow$ termine $\psi(\theta)$

variazione angolare

Fourier $\rightarrow$ ogni funzione si può scrivere così se la tronco ho Taylor, per avere uguale devo fare ∞ somme

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 155

FORMULA PROGRESSIONE GEOMETRICA

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n = \begin{cases} \frac{1-r^{n+1}}{1-r}, & r \neq 1 \\ n+1, & r = 1 \end{cases}$$

vero perché $(1-r)(1+r+r^2+\dots+r^n) = 1 - r^{n+1}$

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n$$
$$-r - r^2 - r^3 - \dots - r^n - r^{n+1}$$

es.
$$1 - r^3 = (1-r)(1+r+r^2)$$
$$1 - r^4 = (1-r)(1+r+r^2+r^3)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-0}{1-1/2} = 2$$ la serie data è convergente e $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$

$\boxed{\text{esempio}}$ (serie geometrica)

$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$ dove $r \in \mathbb{R}$ (ragione della serie)

$S_0 = 1$
$S_1 = 1 + r$

$$S_n = 1 + r + \dots + r^n = \begin{cases} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} & \text{se } r \neq 1 \\ n+1 & \text{se } r = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n \begin{cases} \frac{1}{1-r} & \text{se } |r| < 1 \\ +\infty & \text{se } r \geq 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } r \leq -1 \end{cases}$$

$r \geq 1$ ∞
$-1 < r < 1$ $1/1-r$
$r \leq -1$ $\nexists$

$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge per $|r| < 1$ e $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$
" diverge positivamente se $r \geq 1$
" è indeterminata se $r \leq -1$

Ripassare serie e convergenza integrale

esempio

Comma: sempre + geom

$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n = +\infty$ serie geom. di ragione $r = 3$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4}$ serie geom di ragione $r = -1/3$

$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27}$

esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} - 1 = \frac{1}{1-1/4} - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

$\rightarrow$ rimbalzo avanti-indietro

esempio (SERIE TELESCOPICA)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log 2 + \log\frac{3}{2} + \log\frac{4}{3} + \log\frac{5}{4} + \dots$$

$S_1 = \log 2$
$S_2 = \log 2 + \log 3 - \log 2 = \log 3$
$S_3 = \log 2 + \log 3/2 + \log 4/3 = \log 4$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 155

Moltiplicazione per $\lambda \in \mathbb{R}$

- se $\sum a_n$ è convergente e ha somma S allora $\sum \lambda a_n$ è convergente e ha somma λS

es. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} 3 \cdot \frac{1}{2^n} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 6$

- se $\lambda \neq 0$, $\sum a_n$ e $\sum \lambda a_n$ hanno lo stesso carattere (eccetto il caso in cui $\lambda < 0$, se uno è pos. div. l'altro è neg. div.)

OSSERVAZIONE

se si altera un numero finito di termini di una serie, il suo carattere non cambia (se la serie è convergente la sua somma però può cambiare).

es. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 2$

$2 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \dots$

la sua somma è

$2 - 1 - \frac{1}{2} + 2 + 1 = \frac{7}{2}$

serie a termini positivi: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, con $a_n \geq 0 \ \forall n$

Teorema una serie a termini positivi converge oppure diverge positivamente (non può accadere che diverga negativamente o sia indeterminata).

$S_n = a_0 + a_1 \dots + a_n$

$S_{n+1} = a_0 + a_1 + \dots + a_n + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$

(S_n è crescente e ha limite per $n \to \infty$ limite finito oppure $+\infty$

Teorema se $\sum a_n$ converge allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Questo teorema non serve per verificare che la serie converge, non vale il viceversa

IPOTESI $\sum a_n$ conv $\longrightarrow$ TESI $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

teorema necessario ma non suff. di convergenza

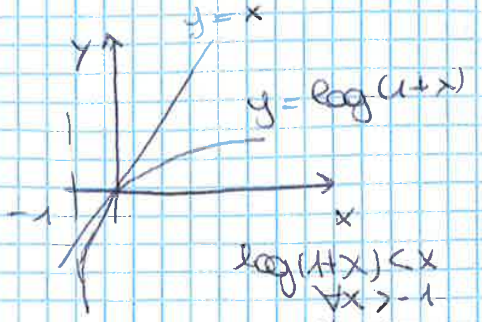
Però posso verificare il contrario: se il limite è diverso da zero posso dire che la serie non converge

Applico Teorema confronto

$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1$

So che $\sum \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ div. pos.

quindi per il criterio del confronto anche $\sum \frac{1}{n}$ div. pos.



$\log(1+x) < x$
$\forall x > -1$
$x \neq 0$

analogia confronto

$\int_1^{+\infty} \log\left(1+\frac{1}{x}\right) dx \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$

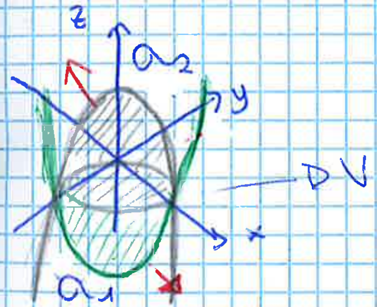
Esercitazione

1. Dato il campo vettoriale $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{pmatrix}$ calcolare il flusso di F uscente dalla regione di $\mathbb{R}^3$ delimitata nel modo seguente

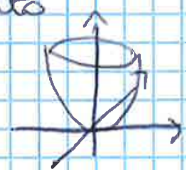
$$1 - x^2 - y^2 \geq z \geq x^2 + y^2 - 1$$

dom $\mathbb{R}^3$

$z = 1 - x^2 - y^2$

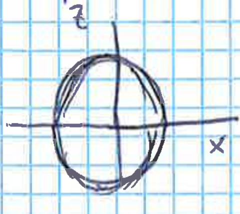


Se fosse $z = x^2 + y^2 = f(x,y)$ ha vedere una parabola se sezionato



l'abbiamo "rovesciato" e aggiunto 1

è chiusa? Possiamo certo dire che è una regione limitata non regolare perché ci sono punti angolosi su xz



uscente: ha senso perché ho una regione limitata, orientamento verso esterno

se ho superficie si dice orientata verso una parte o verso un'altra

$= \int_D (x+y)\,(1-x^2-y^2+1-x^2-y^2)\,dx\,dy$

$= 2\int_D (x+y)(1-x^2-y^2)\,dx\,dy$

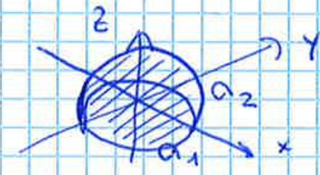
coord. polari $\to$ $2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^2(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)(1-\rho^2)\,d\rho\,d\theta = 0$

② $F(x,y,z) = (0, 0, 1+z)$

Calcolare il flusso di F attraverso

① la semisfera di raggio 1 e centro l'origine, contenuta nel semipiano $z \geq 0$

② il disco $x^2+y^2 \leq 1$ contenuto nel piano $z=0$



con il senso di attraversamento positivo quello dell'asse z

$\sigma_2 = \begin{cases} x = \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \\ y = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z = \cos\varphi \end{cases}$ $\underbrace{\begin{matrix} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/2 \end{matrix}}_{D}$

$\left(\frac{\partial\sigma_2}{\partial\theta}, \frac{\partial\sigma_1}{\partial\varphi}\right) = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\operatorname{sen}\varphi & \operatorname{sen}\theta\cos\varphi \\ 0 & -\operatorname{sen}\varphi \end{pmatrix}$

$N = (-\cos\theta\operatorname{sen}^2\varphi, -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\varphi, -\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi)$

$\to$ se $\varphi = 0$ si annulla tutto, solo in un punto

per θ piccoli $\varphi < 0$ $\to$ vettore normale verso l'interno
cambio segno al risultato

$-\int_{\sigma_2} F\cdot n = (+)\int_D (1+\cos\varphi)(\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi)\,d\varphi\,d\theta = -\frac{5}{3}\pi$

div $F = 1$

GAUSS $\iiint_V 1\,dx\,dy\,dz =$ misura Volume

volume lavorando sul frontiera

esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n^2+2n+e^{-\sqrt{n}}}{\log n + n^3 + 5}}_{a_n}$$

$\log n = o(n^3)$ per $n \to +\infty$

2) $a_n \sim \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$

$\sum a_n$ ha lo stesso carattere di $\sum \frac{1}{n}$ che è pos. divergente (per criterio confr. asintotico)

esempio

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

$\sin x = x + o(x) \quad x \to 0$

$\sin x \sim x \quad (x \to 0)$

$\frac{1}{n} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}_{\sim \frac{1}{n}} \sim \frac{1}{n^2}$

$x = 1/n$ qui per $n \to \infty$ $\frac{1}{n} \to 0$ e va bene perché $x \to 0$

$\to \frac{1}{n} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$

quindi $\sin\left(\frac{1}{n}\right) > 0 \ \forall n$

$\to$ serie a termini positivi

$\sum \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ ha lo stesso carattere di $\sum \frac{1}{n^2}$ quindi converge

RICHIAMO

- $(1+x)^\alpha - 1 \sim x$ per $x \to 0$
- $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ per $x \to 0$
- $e^x - 1 \sim x$ per $x \to 0$
- $\log(1+x) \sim x$ per $x \to 0$
- $\arcsin x \sim x$ per $x \to 0$
- $\arctan x \sim x$ per $x \to 0$

esercizio

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{1/n}-1\right)^2$$

$(e^{1/n}-1)^2 \to 0$ per $n \to \infty$

$(e^{1/n}-1)^2 \sim \left(\frac{1}{n}\right)^2 \quad (n \to +\infty)$

$\sum (e^{1/n}-1)^2$ stesso carattere di $\sum 1/n^2$ che converge

Criterio del rapporto

$\sum a_n$ con $a_n > 0$ $\forall n$

Supponiamo esista (finito o $+\infty$) il limite $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$

1) se $l < 1$ la serie converge
2) se $l > 1$ la serie diverge positivamente

se $l = 1$ → altro metodo non ci aiuta il criterio

esempio

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$ ← a_n

$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ ⟨ $l < 1$ serie converge; $l > 1$ diverge

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{n!}{\underbrace{(n+1)!}_{n!(n+1)}} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\to 0} \longrightarrow 0$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$ converge ($l = 0$ $\quad 0 < 1$)

Si usa il criterio del rapporto quando ci sono dei prodotti perché è probabile la semplificazione

esempio (con $l = 1$ non si sa)

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ div. ma $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$

$\sum \frac{1}{n^2}$ conv ma $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1$

Criterio della radice

Serie geometrica

$\sum r^n = 1 + r + r^2 + \dots$ conv $|r| < 1$ (r^n ← a_n)

$r > 0$

$\sqrt[n]{a_n} = r$

Data $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ $\forall n$, supponiamo esista (finito o $+\infty$) il limite $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$

Allora
1) se $l < 1$ la serie converge
2) se $l > 1$ diverge positivamente

se $l = 1$ altri criteri

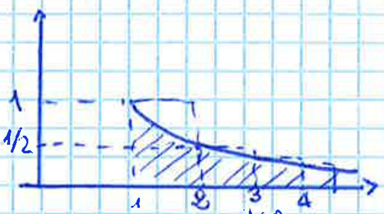
Criterio di Mac Laurin o integrale

Sia f una funzione positiva, decrescente e continua su $[1,+\infty)$. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ e l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ hanno lo stesso carattere.

esempio

$f(x)=\frac{1}{x}$

$f(n)=\frac{1}{n}$



$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

serie → somma rettangoli

integrale → area sottesa

la somma di quelli iscritti è uguale tranne il 1° numero e diverge lo stesso

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ha lo stesso carattere di $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty$

$\left(\int_1^{M} \frac{1}{x}\,dx = [\log x]_1^M = \log M \xrightarrow[\text{se } M\to+\infty]{} +\infty\right)$

esempio

$f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}, \alpha>0$ su $[1,+\infty)$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ ha lo stesso carattere di $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\,dx$

quindi converge se $\alpha>1$, diverge positivamente se $\alpha\le 1$

esempio

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n} = f(n)$ $\qquad f(x)=\frac{1}{x\log x}$

senza log diverge ma il log aiuta la convergenza a denom.

$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\log x}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\int_2^M \frac{1}{x\log x}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\left[\log|\log x|\right]_2^M = +\infty$

la serie diverge positivamente per il criterio integrale

esercizio

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log^2 n}$ $\qquad \int_2^{\infty}\frac{1}{x\log^2 x}\,dx = \left[-\frac{1}{\log x}\right]_2^{+\infty} = \frac{1}{\log 2}$

↓

converge

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}$ $\qquad \sum\frac{1}{n}$

$\frac{1}{n}\le\frac{\log n}{n}$

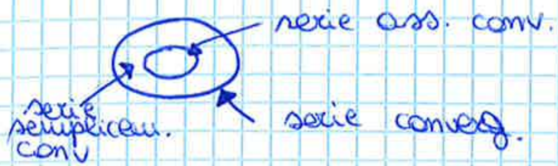
$\sum\frac{1}{n}$ div $\rightarrow \sum\frac{\log n}{n}$ div

$\int^{+\infty}\frac{1}{x\log x\log\log x}\,dx =$ SOSTITUZIONE $y=\log\log x$

se ho $\sum\frac{1}{n^\alpha}$ $\quad \alpha\neq 1$ il log sopra/sotto non influisce

Def

Una serie si dice semplicemente convergente se è convergente ma non assolutamente convergente



es. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots$

converge ma non assol. conv

↳ per il criterio di Leibniz

Criterio di Leibniz segni alterni

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ con $b_n > 0$ $\forall n$

Supponiamo che
$\begin{cases} b_{n+1} \le b_n \ \forall n \\ b_n \to 0 \text{ per } n \to \infty \end{cases}$ Allora la serie converge (e $\boxed{|S - S_n| < b_{n+1}}$)

infinitesimo e decrescente

errore che commettiamo

esempio

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

non converge assolutamente perché $\sum \left|\frac{(-1)}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$ non converge

$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ $\quad \frac{1}{n} = b_n$

$\begin{cases} b_n = \frac{1}{n} \to 0 \\ b_n \text{ decrescente } \left(\frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n}\right) \end{cases}$

Leibniz

la serie di partenza converge semplicemente

$S_{99} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots - \frac{1}{99}$

$S = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$

$|S_{99} - S| < \frac{1}{100} = b_{100}$ errore + piccolo di 0,01

- $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \underbrace{n^2 e^{-n}}_{b_n}$ (converge assolutamente, come esercizio)

$b_n \to 0$ ok → decresce?

$b_{n+1} \overset{?}{\le} b_n$ funzione ausiliaria $f(x) = x^2 e^{-x}$ $\quad f'(x) = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = x(2-x)e^{-x} \le 0$ se $x \ge 2$

vera per $n \ge 2$

→ la serie converge

2. $F = (5x + ky^4, 8xy^3 + 2)$ dove k è un parametro, $k \in \mathbb{R}$

Determinare k in modo da avere un campo conservativo e trovare il potenziale $g(x,y)$: $g(0,0) = 3$

dom $F = \mathbb{R}^2$ semplicemente connesso

$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$ $4ky^3 = 8y^3 \longrightarrow k = 2$

$F = (5x + 2y^4, 8xy^3 + 2)$

$g(x,y)$

$\int f_1(x,y)\,dx = 5\frac{x^2}{2} + 2xy^4 + \varphi(y)$

$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 8xy^3 + \varphi'(y)$

$\cancel{8xy^3} + \varphi'(y) = \cancel{8xy^3} + 2$ $\varphi'(y) = 2$ $\varphi(y) = 2y + c$

$g(x,y) = \frac{5}{2}x^2 + 2xy^4 + 2y + c$

$g(0,0) = 3 \longrightarrow c = 3$

3. $F = (y^2 + 2xy, 2xy + x^2 + 1)$

dom $F = \mathbb{R}^2$ semplicemente connesso

$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$

$2y + 2x = 2y + 2x$

$g(x,y) = xy^2 + x^2y + \varphi(y)$

$\cancel{2xy} + \cancel{x^2} + \varphi'(y) = \cancel{2xy} + \cancel{x^2} + 1$ $\varphi'(y) = 1$ $\varphi(y) = y + c$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 155

Trovare l'area della regione delimitata

$y = t\left(\frac{t^2}{3} - 1\right) = \pm\sqrt{x}\left(\frac{x}{3} - 1\right) \rightarrow$ potrei farlo con i doppi

$\int_\gamma F \cdot \tau \, ds = \int_A \underbrace{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)}\, dxdy = \text{misura}(A)$

$\rightarrow$ devo scegliere in modo che venga 1
si sceglie di solito $F = \begin{pmatrix} -y/2 \\ x/2 \end{pmatrix}$

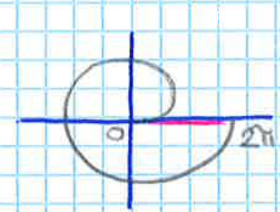
$\gamma' \begin{cases} 2t \\ t^2 - 1 \end{cases}$

$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3} - t\right), \frac{t^2}{2}\right)(2t, t^2 - 1)\, dt$

$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(-\frac{t^4}{3} + t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^2}{2}\right) dt = \frac{8}{5}\sqrt{3}$

6. $\gamma \begin{cases} x = t\cos t \\ y = t \,\text{sen}\, t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ $\left(\frac{4}{3}\pi^3\right)$

spirale di Archimede



$t = 0 \rightarrow (0, 0)$
$t = 2\pi \rightarrow (2\pi, 0)$
non è chiusa, devo aggiungere un segmento

$\gamma' \begin{cases} \cos t - t\,\text{sen}\, t \\ \text{sen}\, t + t\cos t \end{cases}$

$\int_0^{2\pi}$

esercizio

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{(n+1)(n+2)}$

$S_0 = a_0 = 1/2$
$S_1 = a_0 + a_1 = 1/2 - (1/6) = 1/3$
$S_2 = a_0 + a_1 + a_2 = 1/3 + 1/12 = 5/12$
etc...

- $\sum_{n=0}^{\infty} n^2\left(e^{1/n} - \cos\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)$ a_n

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$x \to 0$
$n \to \infty$

$\lim_{n\to\infty} n^2\left(e^{1/n} - \cos\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)$

$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\cancel{1} + \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \cancel{1} + \frac{1}{2n^2} - \cancel{\frac{1}{n}}\right)$

$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} 1 + o(1) = 1$

$\lim a_n \neq 0 \rightarrow \sum a_n$ non converge

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n + 5^n}{10^n} = \sum \left(\frac{4}{10}\right)^n + \left(\frac{5}{10}\right)^n = \sum \left(\frac{4}{10}\right)^n + \sum \left(\frac{5}{10}\right)^n$ $\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$ $|r|<1$

$= \frac{1}{1-4/10} + \frac{1}{1-5/10} = \frac{11}{3}$

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(0,3)^n + (-2)^n}{6^n}$

$\sum \left(\frac{0,3}{6}\right)^n + \left(-\frac{2}{6}\right)^n$

$\downarrow \frac{1}{20} \qquad \downarrow -\frac{1}{3}$

- $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

$S_n = (\cancel{\sqrt{2}} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \cancel{\sqrt{2}}) + \dots + (\sqrt{n+1} - \cancel{\sqrt{n}}) = -1 + \sqrt{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$

Diverge positivamente

- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n}}{n^3 - 3n}$ a_n

$a_n \sim b_n$
$\hookrightarrow \lim \frac{a_n}{b_n} = 1$

$a_n \sim \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ converge

$\rightarrow$ la serie data converge

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge se $\alpha > 1$; diverge se $\alpha \leq 1$

- $\sum_{n=0}^{\infty} (\log(n+3) - \log(n+1)) = a_n$

$\log(1+x) = x + o(x) \quad x \to 0$

$a_n = \log \frac{n+3}{n+1} = \log\left(1 + \frac{2}{n+1}\right) \sim \frac{2}{n+1} \rightarrow$ diverge

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 155

- $\sum_{n=1}^{\infty} (\cos n^3) \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2}$

$\sum \left| \cos n^3 \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2} \right|$

$\left| \cos(n^3) \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2} \right| = \underbrace{\left| \cos n^3 \right|}_{\leq 1} \underbrace{\left| \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2} \right|}_{\operatorname{arctg} 1/n^2} \leq \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$

$\operatorname{arctg} x \sim x$
$x \to 0$

$\boxed{\lim_{n \to \infty} n^{1/n} = 1}$

- $\sum_{n=10}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n^2-n+4}$ $\to b_n > 0$

$\sum \left| (-1)^n \frac{n+2}{n^2-n+4} \right| = \sum \frac{n+2}{n^2-n+4} \sim \frac{1}{n}$ diverge

non converge assolutamente

serie converge se $\begin{cases} b_n \to 0 \\ b_{n+1} \leq b_n \end{cases}$

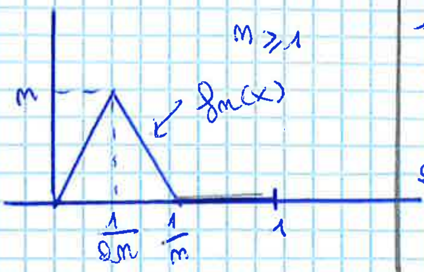
$f(x) = \frac{x+2}{x^2-x+4}$

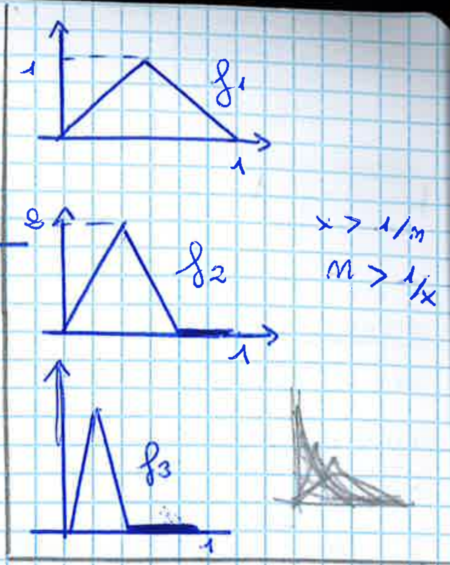
$f'(x) < 0$ per $x > R$

$\to b_{n+1} \leq b_n$ quindi converge

esempio su $[0,1]$

fissiamo $x \in [0,1]$





$x > 1/n$

$n > 1/x$

$f_n(x) = ????$ ooo

$n > \frac{1}{x}$

• se $x=0$

$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$

$\lim_{n\to\infty} f_n\left(\frac{1}{1000}\right) = 0$

• se $x>0$ per $n > 1/x$ ho

$f_n(x) = 0$ Quindi

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$

f_n tende puntualmente su $[0,1]$ a $f(x) = 0$ $\forall x \in [0,1]$

Osservazione: per le f_n dell'esempio precedente risulta

$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\forall n$

Ma $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$

$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \overset{?}{=} \int_0^1 \underbrace{\lim f_n(x)}_{f(x)}\,dx$ Non vale in generale

Def. Sia $f_n(x)$ una successione di funzioni definite su $A \subseteq \mathbb{R}$, e f una funzione definita su A. Diciamo che f_n converge a f UNIFORMEMENTE su A se
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \underbrace{\forall x \in A, \ \forall n > N}_{\text{dopo}},\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

un N che va bene per tutti, N non dipende da x
(per l'altra invece a ogni x corrisponde un N)

Osservazione: si può riscrivere come
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad \underbrace{\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|}_{a_n} \leq \varepsilon$

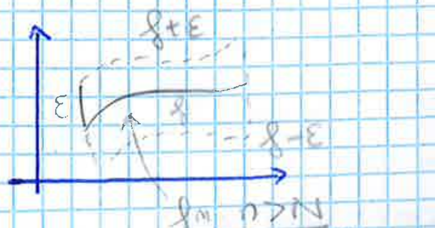
Ossia

$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$

a_n non dipende + da x è una successione

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA

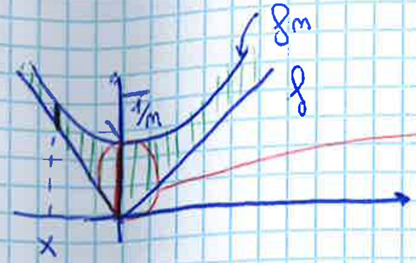
$(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \longleftrightarrow f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon)$



n abbastanza grande

sup del modulo

In generale se ho una funzione g e voglio $\sup|g|$



$y=\sqrt{x^2+a}$

$y^2-x^2=a$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|=\sqrt{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}}=0$$

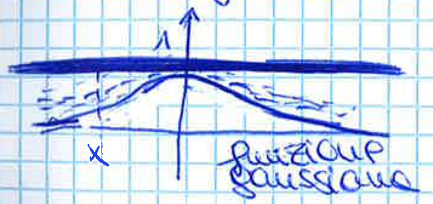
f uniforme su $\mathbb{R}$

<u>esempio</u> $f_n(x)=e^{-x^2/n^2}$ su $\mathbb{R}$; $n\geq 1$

- conv. puntuale $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

  f_n conv. puntual. su $\mathbb{R}$ a $f(x)\equiv 1$

- conv. uniforme su $\mathbb{R}$



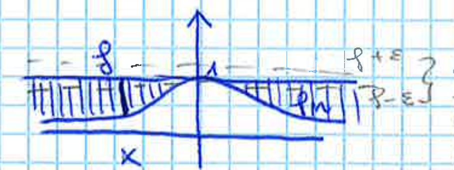
$e^{-x^2}=f_1(x)$

$e^{-\frac{x^2}{4}}=f_2(x)$

$e^{-\frac{x^2}{9}}=f_3(x)$

$$e^{-x^2/n^2}=e^{-\left(\frac{x}{n}\right)^2}$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|=1 \quad \forall n$$



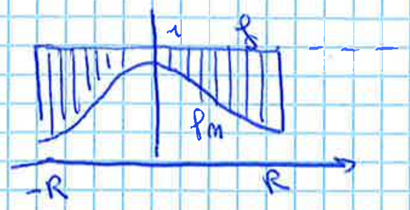
da un certo n in poi dovrebbe essere qua dentro prima o poi si abbasso sup limite a ∞ $e^{-\dots}$ 0

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|=$$

$$\lim_{n\to\infty}1=1\neq 0 \longrightarrow f_n \text{ non conv. unif. su } \mathbb{R}$$

Mostriamo che invece f_n conv. unif. sugli intervalli $[-R,R]$, con $R>0$

$$\sup_{x\in[-R,R]}|f_n(x)-f(x)|=1-e^{-R^2/n^2}$$



$$\lim_{n\to\infty}1-e^{-R^2/n^2}=0$$