NUMERO: 1857A - ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Sagone Matteo

MATERIA: Dinamica dei sistemi meccanici - prof. Fasana

DINAMICA DEI SISTEMI MECCANICI

03/10/2013 ①

alessandro.fasana@polito.it , IV piano , 011 0903397

- Fasana, Marchesiello, "Meccanica delle vibrazioni", CLUT
- Vigliani, "Lectures on rotordynamics", CLUT

Stampare i Testi delle esercitazioni

ESAME

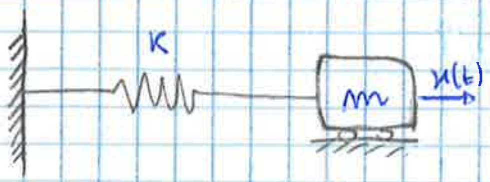
3 quesiti

1,30 h

(pratica & teoria)

SISTEMI AD UN GRADO DI LIBERTA'

È un oggetto la cui posizione nello spazio può essere descritta da un'unica variabile dipendente dal tempo.

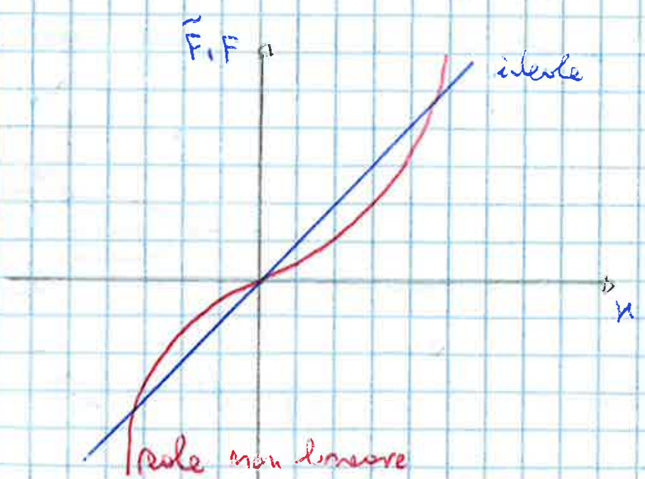


- sist. a "parametri concentrati": tutte le proprietà inerziali sono concentrate in m.
- l'elasticità è concentrata in —/\/\/\/—, elemento molla, che NON ha massa.

L'elemento molla può immagazzinare energia potenziale e restituirla, SENZA disperderla.

$$\boxed{F_{MOLLA} = K x}$$ caratteristica idealmente lineare

Ci importa di quanto si deforma RISPETTO ALLA POSIZIONE INIZIALE!



$$\boxed{\tilde{F}_{MOLLA} = K x^3}$$ caratteristica realmente non lineare

astrarremo dei modelli per approssimare la realtà, ma difficile da riscontrare.

Studiamo l'omogenea associata:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$$

la soluzione sarà sempre di questo tipo: $u(t) = Ae^{st}$

$$(ms^2 + cs + k)\, A\cancel{e^{st}} = 0$$ { derivando e sostituendo — $e^{st} \neq 0$ sempre

$A = 0 \rightarrow$ soluzione banale (trivial) (zero oscillazioni); per evitarla si pone:

$ms^2 + cs + k = 0 \Rightarrow$ polinomio caratteristico (2 soluzioni)

$$\boxed{s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}}$$ { dati m, c, k ho s_1 ed s_2

$\Rightarrow$ scrivo la soluzione come c.l.: $u(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$

C.I. $\begin{cases} u(t=0) = u_0 \\ \dot{u}(t=0) = V_0 \end{cases}$ ⟵ COND. INIZIALI $\Big\} \Rightarrow A_1, A_2$

abbiamo finito, ma la forma non evidenzia importanti caratteristiche.

Introduciamo allora alcune grandezze:

$$\boxed{\omega_n^2 \doteq \frac{k}{m}}$$ PULSAZIONE NATURALE $\left[\frac{1}{s}\right] = [Hz]$

$$\boxed{\zeta \doteq \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2m\omega_n}}$$ FATTORE DI SMORZAMENTO [ ]

↳ quanto smorzamento ha il sistema
quanta energia può dissipare il sistema!

$$\Rightarrow \boxed{s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$ → vi sono vari casi:

$\boxed{1)\ \zeta > 1}$, $s_1, s_2 \in \mathbb{R}(<0) \rightarrow$ SISTEMA SOVRASMORZATO (molto raro)

$\Rightarrow$ con il passare del tempo, l'ampiezza del moto si riduce (dunque infatti) le 2 soluzioni sono entrambe negative.

Es. → autobus che a causa di una buca comincia ad oscillare ↕; se è vuoto (m piccolo) e gli ammortizzatori sono carichi (c) allora torna rapidamente alla normalità. Se c è basso (amm. scarichi) e l'autobus è pieno, il sistema oscilla.

04/10/2023 ②

· SOLUZIONI

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$

se il sistema è SOTTOSMORZATO $(0 \le \xi < 1)$ avremo tale soluzione:

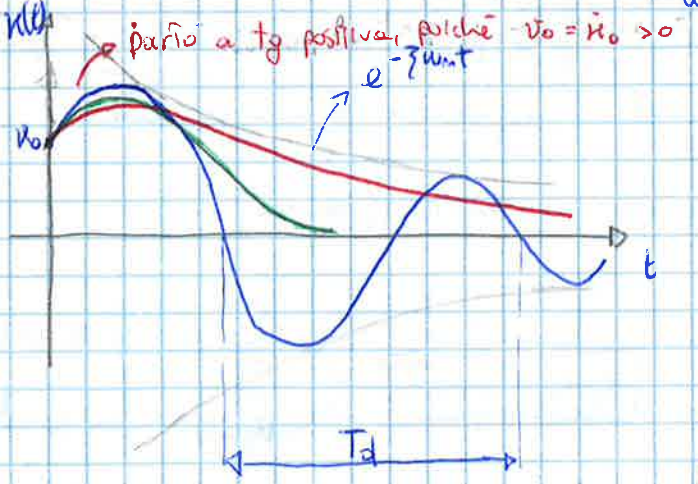
$x(t) = e^{-\xi \omega_n t}(a\cos\omega_d t + b\sin\omega_d t)$ le cui cost. d'integrazione dipendono dalle condizioni iniziali: $\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ \dot{x}(t=0) = v_0 \end{cases}$

$\Rightarrow \dot{x}(t) = -\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t}(a\cos\omega_d t + b\sin\omega_d t) + e^{-\xi\omega_n t}(-a\sin\omega_d t + b\cos\omega_d t)\omega_d$

e adesso impongo le condizioni: $(t=0, x_0, v_0)$

$\begin{cases} x_0 = a \quad (t=0!) \\ v_0 = -\xi\omega_n a + b\omega_d \end{cases}$ $\begin{cases} a = x_0 \quad \text{valore iniziale della posizione} \\ b = \dfrac{v_0 + \xi\omega_n x_0}{\omega_d} \end{cases}$

$\begin{cases} x_0 > 0 \\ v_0 > 0 \end{cases} \neq 0!$



$T_d = \dfrac{2\pi}{\omega_d}$

$\Rightarrow$ maggiore è il valore di $\xi\omega_n$, più velocemente l'esponente va a zero.

Il modello è abbastanza corretto, ma matematicamente non va mai a zero, mentre in realtà sì.

- In rosso si ha il caso di SOVRASMORZAMENTO $(\xi > 1)$ → effetto benefico, l'ampiezza di oscillazione è ridotta, ma si va a zero più lentamente.
- In verde si ha lo SMORZAMENTO CRITICO $(\xi = 1)$, si va a zero velocemente.

$\Rightarrow$ Per $\xi \geq 1$ dunque non c'è oscillazione!

La $\underbrace{\text{soluzione}}_{\text{int. generale}}$ dell'omogenea associata si chiama $\underbrace{\text{RISPOSTA LIBERA}}$.

ciò che succede all'inizio del moto } TRANSITORIO

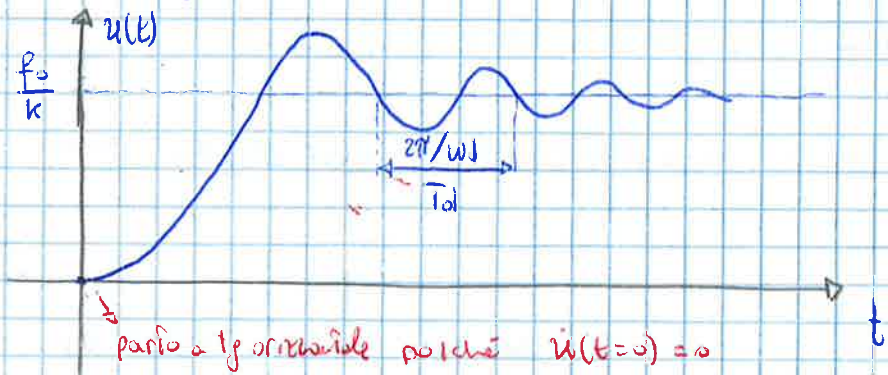
Studiamo adesso l'integrale particolare della equazione completa:

Determiniamo A e B tramite le condizioni iniziali:

$x_0=0)\quad 0 = \frac{f_0}{k} + A$

$v_0=0)\quad 0 = -\xi\omega_n \cdot A + B\omega_d$

ho determinato A e B, costanti di integrazione



La presenza di ξ fa sì che ω_d ed ω_n siano diversi $\Rightarrow$ $\boxed{\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$

Tuttavia ξ ha valori piuttosto piccoli: es.: $\left.\begin{array}{l}\omega_n = 20 \text{ rad/s}\\ \xi = \frac{4}{100}\end{array}\right\}$ $\underbrace{\omega_d \simeq 19{,}98 \text{ rad/s}}_{\text{differenza } 1\text{‰}}$

$\Rightarrow$ non vi è una grande differenza tra ω_n e ω_d, almeno numericamente.
Però anche in quantità limitate, la presenza di smorzamento (ξ) fa decrescere anche dopo poche oscillazioni. $t = 3{,}74$ s, 12 cicli $\Rightarrow$ Ampiezza è 5% della max.

2) PERIODICA - FOURIER - FORZANTE ARMONICA

[possiamo considerare periodiche anche forze che non lo sono, ponendo $T \to \infty$]

abbiamo una periodica: $f(t) = f(t+T_0)$, $T_0 \to$ - PERIODO DELLA FORZA
- INPUT
- ECCITAZIONE

- mediante le serie di Fourier, qualunque ~~forma~~ funzione periodica si può scrivere come somma di armoniche, purché sia continua:

$$\boxed{f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\omega_0 kt + b_k \sin\omega_0 kt\right)}\ ,\quad \boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}}$$ PULSAZIONE FONDAMENTALE

$\boxed{k\omega_0} \to$ k-esima armonica $\left[\begin{array}{l}\text{se } \omega_0 = 5 \text{ rad/s}\\ \text{avrò}\\ 5, 10, 15, 20, \ldots\\ \text{mai } 17 \text{ o } 6!\end{array}\right.$ $\leftarrow$ le frequenze sono un multiplo intero della pulsazione fondamentale!!

$k \in \mathbb{N}$

Se $f(t) = f_0 \cos \Omega t = \mathrm{Re}[f_0 e^{i\Omega t}] \Rightarrow$ soluzione $= \mathrm{Re}[x(t)]$ ←

studio come f complessa, poi vedo se l'ingresso è Re o Imm e prendo l'uscita relativa. La complessa è una funzione armonica generica, nel piano

SOLUZIONE A REGIME

Ovvero l'integrale particolare; l'uscita a regime avrà la stessa forma dell'ingresso.

$$\left.\begin{aligned} &\boxed{x(t) = X e^{i\Omega t}}, \text{ dove } X \in \mathbb{C} \\ &\dot{x} = i\Omega X e^{i\Omega t} \\ &\ddot{x} = -\Omega^2 X e^{i\Omega t} \end{aligned}\right\} (k - m\Omega^2 + i\Omega c) X \cancel{e^{i\Omega t}} = f_0 \cancel{e^{i\Omega t}}$$

RISPOSTA ALLA
(INGRESSO) ← FORZANTE ARMONICA → (USCITA COMPLESSA) $\Rightarrow$

$$\boxed{X = \frac{f_0}{k - m\Omega^2 + i\Omega c}}$$

- complessa
- dipende da f_0
- dipende dai parametri del sistema m, c, k

- ma soprattutto $X = X(\Omega)$, ovvero dipende dalla FREQUENZA della forzante esterna, poiché $\boxed{\Omega = 2\pi f_{est}}$

- chiamo il modulo di X AMPIEZZA DI OSCILLAZIONE: $\boxed{|X| = A = \dfrac{f_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}}}$

- chiamo FASE φ la quantità $\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\mathrm{Im}[X]}{\mathrm{Re}[X]} = \dfrac{-\Omega c}{k - m\Omega^2}}$

allora avrò: $x = X e^{i\Omega t} = A e^{i\varphi} e^{i\Omega t}$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = A e^{i(\Omega t + \varphi)}}$$

Se $f(t) = f_0 \cos \Omega t = \mathrm{Re}[f_0 e^{i\Omega t}]$ allora $x(t) = A \cos(\Omega t + \varphi)$ (Re)

Se $f(t) = f_0 \sin \Omega t = \mathrm{Im}[f_0 e^{i\Omega t}]$ allora $x(t) = A \sin(\Omega t + \varphi)$ (Im)

} SOLUZIONI A REGIME

φ dipende da c, m, k, Ω

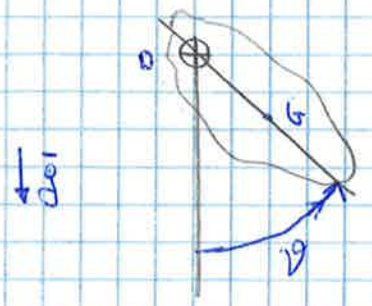
A dipende da c, m, k, Ω, f_0

} [ma NON dipendono dalle condizioni iniziali]

$\circlearrowleft O \quad T \cdot \cancel{r} - (m\ddot{x} + mg)\cancel{r} = 0 \Rightarrow T = m\ddot{x} + mg$

[NB → nel DCL bisogna sempre mettere la reazione vincolare R!!]

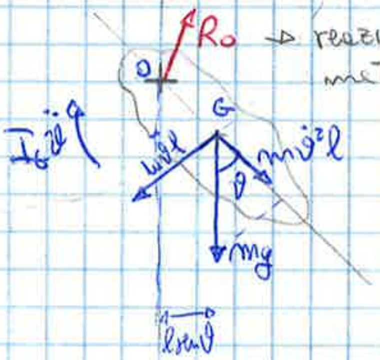
ESERCIZIO 8 - PENDOLO COMPOSTO - SDOF 1/8



dati $\begin{cases} \overline{OG} = l \\ m \\ I_G \rightarrow \text{momento d'inerzia rispetto l'asse baricentrico} \end{cases}$

la coordinata del moto è ϑ, misurata fra una retta fissa ed una mobile solidale al corpo

1) disegnare il DCL del pendolo:



R_O → reazione vincolare, non importa la direzione iniziale, basta metterla!!

- la massa non è puntiforme ⇒ oltre le forze di inerzia ci saranno le COPPIE D'INERZIA

$m\ddot{\vartheta}l$ → acc. tangenziale, opposta a $\circlearrowleft\ddot{\vartheta}$

$m\dot{\vartheta}^2 l$ → acc. centrifuga, opposta alla centripeta.

$I_G\ddot{\vartheta}$ → coppia d'inerzia, opposta a $\circlearrowleft\ddot{\vartheta}$

2) ricavare l'equazione del moto nella coordinata ϑ:

- posso scegliere il polo rispetto al quale calcolare l'eq. dei momenti:

$\circlearrowleft O \quad I_G\ddot{\vartheta} + m\ddot{\vartheta}l^2 + mgl\sin\vartheta = 0$ ($m\dot{\vartheta}^2 l$ non produce momento risp. ad O)

[NB → le azioni di inerzia si riducono sempre al baricentro: forze e I_G]

chiamo $I_G + ml^2 = I_O$ per Huygens-Steiner

allora ottengo l'eq. diff. del moto ⇒ $\boxed{I_O\ddot{\vartheta} + mgl\sin\vartheta = 0}$ { mancano le derivate prime ⇒ non ci sono effetti dissipativi

c'è un $\sin\vartheta$ → l'equazione è NON lineare ed è l'unica che vedremo in questo corso.

Ty: $f(\vartheta, \dot{\vartheta}) = f(\vartheta_{eq}, 0) + \left.\frac{\partial f(\vartheta,\dot{\vartheta})}{\partial \vartheta}\right|_{eq} (\vartheta - \vartheta_{eq}) + \left.\frac{\partial f(\vartheta,\dot{\vartheta})}{\partial \dot{\vartheta}}\right|_{eq} \dot{\vartheta}$

questa è l'espressione di Taylor troncata al primo termine (lineare).
Arriviamo al caso del pendolo:

per definizione eq. — non ho dipendenza da $\dot{\vartheta}$

$$f(\vartheta, \dot{\vartheta}) = 0 - \frac{mgl}{I_0} \cos \vartheta_{eq} (\vartheta - \vartheta_{eq}) + 0$$

=> l'equazione del moto linearizzata nell'intorno della posiz. di equilibrio diventa:

$$\ddot{\vartheta} + \frac{mgl}{I_0} \cos \vartheta_{eq} (\vartheta - \vartheta_{eq}) = 0$$

- Studio la stabilità negli intorni dei punti di eq:

① $\underline{\vartheta_{eq_1} = 0}$ => $\ddot{\vartheta} + \frac{mgl}{I_0} \vartheta = 0$ { equazione di un sistema ad 1 grado di libertà non smorzato

=> $\omega_n = \sqrt{\frac{mgl}{I_0}}$ è la pulsazione naturale del sistema! (una delle domande del testo)

la soluzione sarà del tipo $\underbrace{\vartheta(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t}$ (non smorzato, $\cancel{\zeta}$)

abbiamo studiato l'andamento della risposta — caso ② oscilla senza smorzarsi => $\boxed{\vartheta_{eq_1} \text{ è STABILE}}$

c'è un segno meno, è instabile! DISCORDANZA

② $\underline{\vartheta_{eq_2} = \pi}$ => $\ddot{\vartheta} - \frac{mgl}{I_0} (\vartheta - \pi) = 0$

chiamiamo $y = \vartheta - \pi$ => $\dot{y} = \dot{\vartheta}$, $\ddot{y} = \ddot{\vartheta}$

=> $\ddot{y} - \frac{mgl}{I_0} y = 0$ adesso è lineare e la risolviamo.

la soluzione è del tipo $y = A e^{st}$ → $\left(s^2 - \frac{mgl}{I_0}\right) A e^{st} = 0$

$A = 0$ soluzione banale => $y = 0$ => $\vartheta = \pi$ sempre → ma è instabile, appena riceve una piccola perturbazione "cade".

RIEPILOGO

10/10/2013 (3)

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_0 e^{i\Omega t}$$

$$x(t) = X e^{i\Omega t} \quad , \quad X = \frac{f_0}{k - m\Omega^2 + i\Omega c} \quad , \quad |X| = A = \frac{f_0}{\sqrt{(k-m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-c\Omega}{k - m\Omega^2} \Rightarrow$$

RISP. A REGIME

$$\boxed{\begin{cases} f(t) = f_0 \sin\Omega t \Rightarrow x(t) = A\sin(\Omega t + \varphi) \\ f(t) = f_0 \cos\Omega t \Rightarrow x(t) = A\cos(\Omega t + \varphi) \end{cases}}$$

INPUT OUTPUT

SOLUZIONE COMPLETA

$$\xi < 1 \Rightarrow \boxed{x(t) = A\cos(\Omega t + \varphi) + e^{-\xi\omega_n t}(a\cos\omega_d t + b\sin\omega_d t)}$$

SOL DELL'OMOGENEA ASSOCIATA c'è sempre!

dove al solito a e b si determinano con le c.i.

Studiamo l'andamento al variare di Ω; inoltre è utile esprimere $|X| = A$ e $\operatorname{tg}\varphi$ in una forma che includa ω_n e ξ:

$$\boxed{A = \frac{f_0/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}}}$$

A
- metto in evidenza k al denominatore
- scrivo $\frac{c}{k} = 2\xi\frac{1}{\omega_n}$, poiché $\xi = \frac{c}{2m\omega_n}$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{2\xi\,\Omega/\omega_n}{1 - \Omega^2/\omega_n^2}$$

- sostituisco c/k
- metto le in evidenza al denom.

Introduco $\boxed{r = \frac{\Omega}{\omega_n}} \Rightarrow \boxed{A = \frac{f_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}} \quad , \quad \boxed{\operatorname{tg}\varphi = -\frac{2\xi r}{1 - r^2}}$

abbiamo che $\frac{f_0}{k} = \delta_{STATICO}$ { deformazione statica della molla

l'insieme di A e $\operatorname{tg}\varphi$ è la FUNZIONE DI RISPOSTA IN FREQUENZA - $\boxed{\text{FRF}}$ o funzione di trasferimento

come al variare di Ω, il sistema risponde: $X(\Omega)$, $(A, \operatorname{tg}\varphi)$

eccitazione esterna

una delle tante FRF

ω_n → gestisce le risposte libere in assenza di forzanti esterne

Ω_R → è legato alla presenza dell'eccitazione esterna.

$\boxed{\text{In } \Omega_R \Rightarrow A_{MAX}}$:

NB → Ω_R esiste finintantoché $1-2\xi^2 \geq 0 \Rightarrow \Rightarrow \xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ (vedi grafico)

Quanto vale A_{RIS}? ⇒ $A_{RIS} = \frac{f_0/k}{\sqrt{(1-1+2\xi^2)^2 + 4\xi^2(1-2\xi^2)}} =$ ← $\frac{\Omega_R}{\omega_n} = \sqrt{1-2\xi^2} = r$

$$= \frac{f_0/k}{\sqrt{4\xi^4 + 4\xi^2 - 8\xi^4}} = \boxed{\frac{f_0/k}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = A_{RIS}}$$

l'ampiezza della risposta in risonanza è controllata unicamente dallo smorzamento

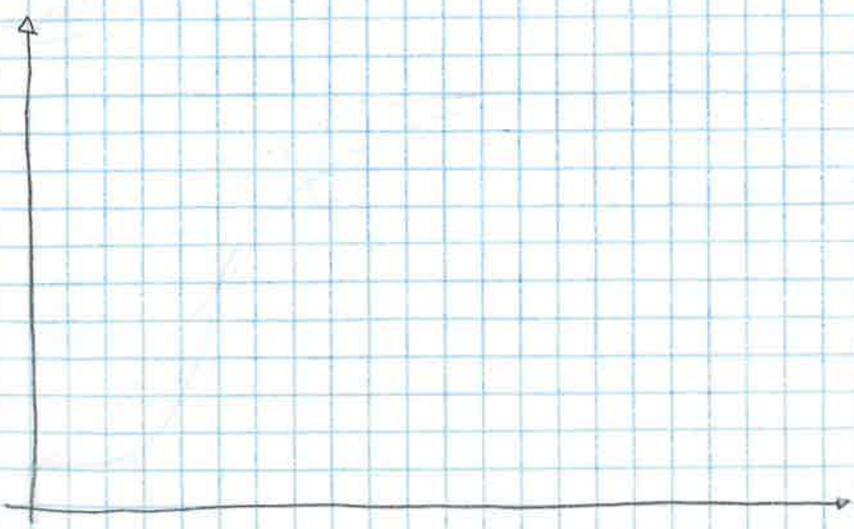
⇒ $\boxed{\text{se } \xi = 0, \quad A_{RIS} \to \infty}$

⇒ se $\xi = 1$, inammissibile, non c'è A_{MAX} $\left(\xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7 \text{ !!}\right)$

Curve di FRF "panciute" indicano alti ξ, mentre curve ispide indicano piccoli ξ; i piccoli ξ non ci piacciono, poiché se $\Omega \to \Omega_R$ l'ampiezza della risposta diventa molto grande.

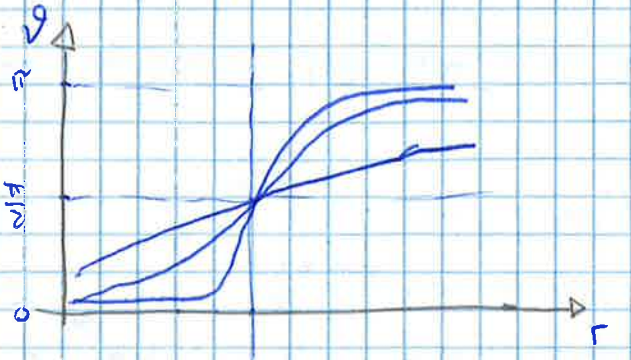
Non sempre è così: negli strumenti a corde ξ non è gradito! Ma è solo un caso, di solito è gradito.

GRAFICO DELLA FASE



Trovando $x(t) = A\cos(\Omega t + \varphi)$ o $x(t) = A\cos(\Omega t - \vartheta)$ con $\vartheta = -\varphi$

posso trovare il grafico $\varphi - r$ ribaltato:



In ogni caso la risposta $x(t)$ è in RITARDO rispetto alla forzante in ingresso, di un angolo φ o $\vartheta = -\varphi$ (convenzione)

Guardando il grafico $A - r$, lontano dalla risonanza, le curve sono piuttosto simili.

ζ	r	$A/(f_0/k)$	
0.0	0.5	1.317	→ smorzamento nullo, poco distanti dalla ris. ⇒ A non è così distante dalla def. statica
0.1	0.5	1.305	→ lontano dalla risonanza, ζ non ha alcun effetto su questa risposta $(r=0.5)$
0.0	0.95	10.26	→ $\zeta=0$, al 95% della risonanza, avrò un'A 10 volte maggiore
0.1	0.95	4.68	→ con ζ, A cresce, ma soltanto di 4 volte

⇒ lo smorzamento si nota solo in presenza della risonanza, fa diventare le curve più pendenti.

La rappresentazione $A - r$ e $\varphi - r$ è una delle tante rappresentazioni della FRF.

È comodo rappresentare A in confronto ad un valore di riferimento, in questo caso la deformazione statica ⇒ $\boxed{A/(f_0/k)}$ GUADAGNO o FATTORE DI AMPLIFICAZIONE

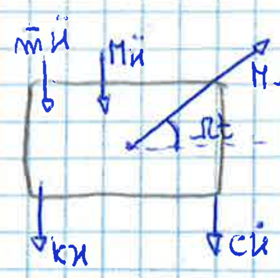
f_0/k

$$\boxed{Q(\Omega) = \frac{A}{f_0/k}}$$ adimensionale

Si rappresenta in scala logaritmica.

DCL

$\Rightarrow$



$\Omega = cost. \Rightarrow \dot{\Omega} = 0$

M è soggetta a: moto di trascinamento $\ddot{x}$

- forza centrifuga, moto relativo $\Omega^2 \varepsilon$
- coriolis: $\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \wedge \bar{v}_R = 0$

poiché $\bar{\omega} = 0 \Rightarrow$ "se non mi muovo non c'è coriolis"

11/10/2013 ④

Dunque ε è lo SQUILIBRIO STATICO con il quale i panni si dispongono rispetto l'asse di rotazione.

Scriviamo l'equazione di equilibrio:

$$\downarrow) \underbrace{(\bar{m} + M)}_{m}\ddot{x} + c\dot{x} + kx - M\varepsilon\Omega^2 \sin\Omega t = 0$$

nel nostro modello, ad 1 gdl, è impedito il moto orizzontale $\Rightarrow$ la componente orizzontale è scaricata nel vincolo, delle forze di inerzia

$\Rightarrow$ non ci importa l'equilibrio alla trasl. ~~verticale~~ orizzontale;

$$\rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \underbrace{M\varepsilon\Omega^2 \sin\Omega t}$$

forzante periodica con ampiezza $\varepsilon\Omega^2$;

"f_0" $= M\varepsilon\Omega^2 \rightarrow$ costante nel tempo, ma dipende dalla Ω

la soluzione sarà $x(t) = Xe^{i\Omega t}$, con $X = \dfrac{M\varepsilon\Omega^2}{k - m\Omega^2 + i\Omega c}$;

invece di studiare l'espressione della risposta, studiamo cosa succede alla forza che scarica a terra

$\Rightarrow$ cosa trasmettono le "molle" della lavatrice al telaio, ovvero al pavimento.

Dunque calcoliamo la REAZIONE VINCOLARE:

$\boxed{f_v(t) = kx + c\dot{x}}$ { poiché i collegamenti sono le molle e lo smorzatore.

$\Rightarrow$ la rappresenteremo rapportata ad un valore di riferimento

$\boxed{T(\Omega) = \dfrac{Y(\Omega)}{Y_{RIF}(\Omega)}}$ TRASMISSIBILITÀ $\left\{ \dfrac{\text{qualsiasi grandezza}}{\text{grandezza di rif.}} \right.$ $\rightarrow$

più grande è ξ maggiore è la forza che trasmettiamo a Terra, e ciò non è buono.

=> lavorare ~~nel~~ IDEALE quadrante 1-1, dunque pensare di lavorare con $\Omega \ll \omega_n$, ma ciò non si fa => bisognerebbe avere ω_n grandi e poiché $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$, avere delle molle molto rigide e grandi; ciò non è possibile perché dovrebbero aversi molle grandi e costose.

=> si fa il contrario => la lavatrice lavora nella parte opposta, vengono messi blocchi di cemento, per aumentare m e abbassare ω_n!

$$\begin{cases} \omega_n = 100 \text{ giri/min} \rightarrow \text{PROPRIA} \\ \Omega = 800 \text{ giri/min} \rightarrow \text{CENTRIFUGA} \end{cases} \rightarrow \text{si fa così}$$

→ ma ξ non deve essere troppo grande, altrimenti trasmettiamo a Terra troppa forza.

Dunque si deve passare velocemente da 0 a regime: la lavatrice fa il "saltello" quando passa dalla zona di risonanza $r \approx 1$

→ Non sempre dunque la ξ è utile ←

RISPOSTA DI UN SISTEMA A REGIME NEL CASO DI FORZANTE QUALSIASI

La forzante non è armonica o periodica, ma qualsiasi; c'è un po' di lavoro per ottenere la risposta; partiamo da

IMPULSO - δ DI DIRAC (definizione non perfetta ma utile!)

$$\begin{cases} \delta(t-t_0) = 0 \quad \forall t \neq t_0 & ① \\ \delta(t-t_0) \rightarrow \infty \quad t = t_0 & ② \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\, dt = 1 & ③ \end{cases}$$

INTENSITÀ DELL'IMPULSO

→ non è adimensionale ma $[\delta] \cdot s$

3 BIS $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) \cdot f(t)\, dt = f(t_0)$$ $\begin{cases} \text{ottengo molti zeri tranne in } t_0\text{, dove} \\ \text{ottengo } f(t_0) \text{ che è costante e va fuori } \int = 1 \text{ !} \end{cases}$

② $-\frac{\varepsilon}{2} < t < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_0$ (durante l'impulso, se $0^- = -\frac{\varepsilon}{2}$ e $0^+ = \frac{\varepsilon}{2}$)

Integro l'equazione nel tempo tra $-\frac{\varepsilon}{2}$ e τ, con $-\frac{\varepsilon}{2} < \tau < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\tau} \left(m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_0\right) dt$$ allora avremo:

$\dot{x}(t=0^-)=0$ $\quad$ $x(t=0^-)=0$ $\quad$ $\tau-(-\frac{\varepsilon}{2})$

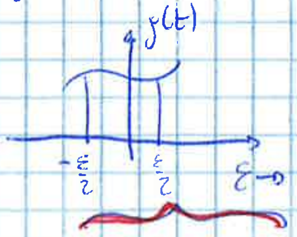
$$m\underbrace{\left[\dot{x}(\tau) - \cancel{\dot{x}\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right]}_{\text{integro } \ddot{x} \text{ ottengo } \dot{x}!!} + c\underbrace{\left[x(t) - \cancel{x\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right]}_{\text{integro } \dot{x} \text{ ottengo } x!!} + k\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\tau} x(t)\,dt = f_0\left(\tau + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

adesso integro nuovamente tra $-\frac{\varepsilon}{2}$ ed $\frac{\varepsilon}{2}$ e ne faccio il $\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ f_0\to\infty}}$ $\Rightarrow$

$x(t=0^-)=0$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ f_0\to\infty}} \left[\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} (\dots)\, d\tau\right] = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ f_0\to\infty}} \Bigg[m\left[x\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) - \cancel{x\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right] + c\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} x(t)\,dt +$$

$$+ k\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} \left(\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\tau} x(t)\,dt\right) d\tau = f_0 \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} \left(\tau + \frac{\varepsilon}{2}\right) d\tau \Bigg]$$



Poiché $\varepsilon \to 0$, l'area delimitata dall'integrale a secondo membro è nulla!

$\Rightarrow$ anche il primo membro è nullo! Dunque x è una quantità limitata

$\Rightarrow$ il suo integrale per una durata limitata è zero.

$\to x(\frac{\varepsilon}{2}) = 0$

$$\Rightarrow m\,x(0^+) = 0 \Rightarrow \boxed{x(0^+) = 0}$$

quando termina l'impulso la massa non si è spostata!! Se ε è breve non è per nulla intuitivo, ma è così.

Per quanto riguarda la velocità si integra una sola volta tra $-\frac{\varepsilon}{2}$ e $\frac{\varepsilon}{2}$:

$$\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} (m\ddot{x} + c\dot{x} + kx)\,dt = \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} f_0\,dt \;;$$

appena trovato

$=0$ p.i. $\quad$ $x(0^+)=0$ $\quad$ $=0$ $\quad$ $f_0 \cdot \varepsilon = 1$

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ f_0\to\infty}} \left[m\left[\dot{x}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) - \cancel{\dot{x}\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right] + c\left[\cancel{x\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} - \cancel{x\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right] + k\cancel{\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} x(t)\,dt} \right] = 1 \quad \Rightarrow$$

p.i.

x limitata su area infinitesima $= 0$

⇒ l'unico effetto della forza mg è soltanto una traslazione, uno spostamento.
Ma noi vogliamo una regola generale! Nel pendolo, abbiamo visto che ω_n DIPENDE dalla forza peso.

⇒ [Se g è presente nel coefficiente della derivata di ordine zero (y o x) allora lo devo mettere. Altrimenti lo ometto.]

Nel pendolo è importante, poiché avremo un $mgl \cdot \sin\vartheta$ o $mgl \cdot \vartheta$ per piccoli spostamenti; essendo ϑ la variabile del moto ⇒ influenza

BATTIMENTO & RISONANZA INFINITA

Quando calcolavo la risposta alla forzante armonica prendevo solo l'integrale particolare. In alcuni casi però è sbagliato omettere l'integrale generale dell'om. ass.

[$\omega = \Omega$ PARTICOLARE]

in questo caso: $\boxed{m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t}$ sarebbe sbagliato scrivere solo $x_p(t)$; $x(t) = x_g(t) + x_p(t)$

$$\Rightarrow x(t) = \underbrace{\frac{F_0}{k - m\Omega^2} \cos \Omega t}_{x_p(t)} + \underbrace{a \cos \omega_n t + b \sin \omega_n t}_{x_g(t)}$$

{ soluzione completa per $\boxed{\zeta = 0}$

Impongo c.i. nulle $\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$; derivo (rispetto a t) e sostituisco in x e $\dot{x}$:

$$\dot{x} = -\Omega \frac{F_0}{k - m\Omega^2} \sin \Omega t + \omega_n (-a \sin \omega_n t + b \cos \omega_n t)$$

$$\left.\begin{aligned} x(0) &= \frac{F_0}{k - m\Omega^2} + a = 0 \\ \dot{x}(0) &= b\,\omega_n = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{F_0}{k - m\Omega^2} (\cos \Omega t - \cos \omega_n t)}$$

{ risposta completa che racchiude tutto

↓ in generale avrò una cosa del genere. non posso trascurare $\cos \omega_n t$.

$\Omega \to \omega_n$

$\lim_{\omega \to \omega_n} x(t) = \frac{0}{0}$ ottengo una forma indeterminata; uso De l'Hôpital;

ATTENZIONE → derivo rispetto ad Ω non t!!!

TACOMA BRIDGE → NO RISONANZA MA INSTABILITÀ.

L'instabilità è associata all'omogenea associata.

BATTIMENTO

Cosa succede se $\Omega \simeq \omega_n$? Usiamo una formula esatta, prostaferesi:

$$\boxed{\cos \Omega t - \cos \omega_n t = 2 \sin\left(\frac{\omega_n+\Omega}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_n-\Omega}{2} t\right)}$$, dove

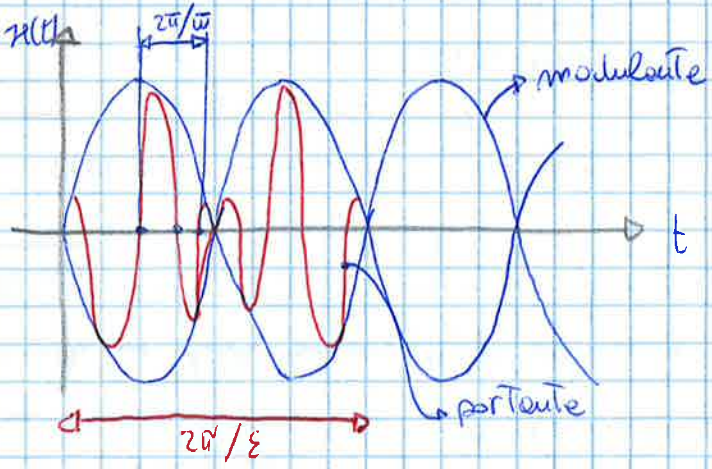
$$\begin{cases} \dfrac{\omega_n+\Omega}{2} = \bar{\omega} \to \text{semisomma o valor medio} \\ \dfrac{\omega_n-\Omega}{2} = \varepsilon \to \text{qualcosa che voglio portare a zero, piccola differenza} \end{cases}$$

trasformo il denominatore della precedente $x(t)$:

$$K - m\Omega^2 = m\left(\frac{k}{m} - \Omega^2\right) = m\left(\omega_n^2 - \Omega^2\right) = m\left(\omega_n+\Omega\right)\left(\omega_n-\Omega\right) = m\, 2\bar{\omega} \cdot 2\varepsilon$$

$$x(t) = \frac{F_0}{4m\varepsilon\bar{\omega}}\, 2 \sin(\bar{\omega} t) \sin(\varepsilon t) = \boxed{\frac{F_0}{2m\varepsilon\bar{\omega}} \sin(\bar{\omega} t) \sin(\varepsilon t) = x(t)}$$ → se $\Omega \to \omega_n$ rivedo la RIS ∞

è una sinusoide modulata in ampiezza da un'altra sinusoide → BATTIMENTO



[Fenomeno che si ottiene tutte le volte che il segnale contiene due componenti armoniche a frequenza prossime e con ampiezza paragonabile]

- 2 armoniche: $\cos\Omega t$, $\cos\omega_n$
- freq. vicine: $\omega_n \simeq \Omega$

- ottengo il battimento qui dall'interferenza tra integrale particolare e generale.
- posso ottenerlo anche ~~con~~ da due forzanti armoniche (numerico)
- " " nelle eliche degli aerei (wah - wah) (acustica)

$\boxed{\zeta < 1}$ $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \Rightarrow x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(a\cos\omega_d t + b\sin\omega_d t)$

applicando le c.i. (derivata e sost. per le x) avremo:

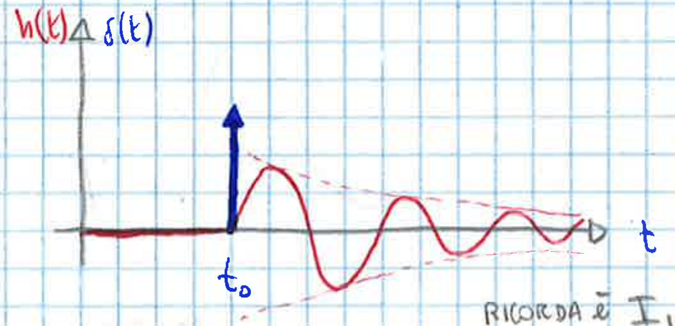
$0 = a$

$\frac{1}{m} = -\zeta\omega_n a + b\omega_d \cdot 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{m\omega_d} \end{cases}$

$h(t) \Rightarrow$ $\boxed{x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\frac{1 \to I}{m\omega_d}\sin\omega_d t}$ → valida per SISTEMA SOTTOSMORZATO (caso più frequente!!) con m, k, c

↳ [FUNZIONE DI RISPOSTA ALL'IMPULSO = $h(t)$] {armonica con ampiezza decrescente!

IMPULSO NON NELL'ORIGINE



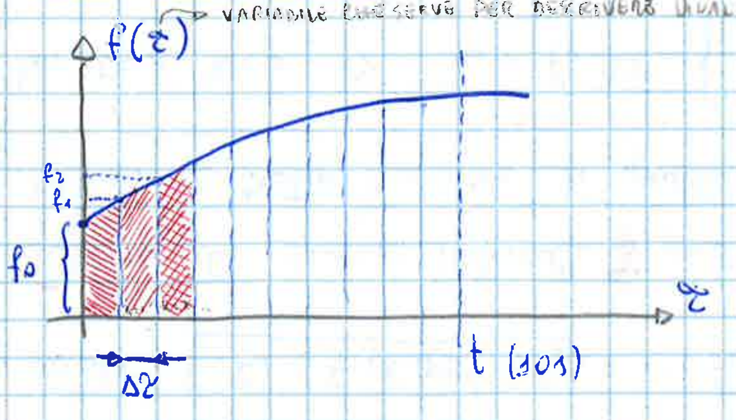
- come risponde il sistema se l'impulso non lo do in $t=0$ ma in $t = t_0$?
⇒ la risposta è sempre quella e comincia dal termine dell'impulso

RICORDA È I, INTENSITÀ!!

$\Rightarrow h(t) = 0$ per $t \le t_0$ ⇒ SISTEMA CAUSALE {risposta NULLA prima che l'impulso arrivi

per $t > t_0$ $\left[h(t) = \frac{1}{m\omega_d}\sin\omega_d(t-t_0)\, e^{-\zeta\omega_n(t-t_0)} \right]$ ↳ uguale, con una traslazione sull'asse dei tempi!!

FORZANTE GENERICA → SE FOSSE PERIODICA USEREMMO FOURIER, MA NON LO È



$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$ → NOSTRO SISTEMA

→ come calcolo $x(t)$ dopo che la forza ha agito per un certo t (101...)?

⇒ SFRUTTO $h(t)$, funzione risp. all'impulso

- suddivido l'asse τ in tante porzioni, ciascuna con uguale ampiezza $\Delta\tau$

⇒ CAMPIONAMENTO

andando avanti con i $\Delta\tau$, $2\Delta\tau$, $3\Delta\tau$, ..., $k\Delta\tau$ fino al tempo t, oltre il quale la forza $f(\tau)$ presente per $\tau > t$ NON PRODUCE EFFETTI NEL PASSATO

$\Rightarrow$ la sequenze di I_k, f_k ecc, ... si interromperà a $k\Delta\tau = t$

$\Rightarrow$ la RISPOSTA GLOBALE sarà la somma delle $x_k(t)$ per il p.s. effetti.

$$x(t) = x_0 + x_1 + \dots + x_N \quad , \quad N\Delta\tau = t$$

$$\Rightarrow x(t) = \sum_{k=0}^{N} I_k\, h(t - k\Delta\tau) = \sum_{k=0}^{N} f_k\, \Delta\tau\, h(t - k\Delta\tau) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \overbrace{f(k\Delta\tau)}^{f_k = f(k\Delta\tau)} \cdot \Delta\tau\, h(t - k\Delta\tau)$$

adesso facciamo tendere a zero $\Delta\tau$ $\Rightarrow$ $\Delta\tau \to d\tau$, trasformando la successione di impulsi da FINITA ad INFINITA:

dunque $\Delta\tau \to d\tau$ e $k\Delta\tau \to \tau$ generico tempo in cui leggo la forza e la sommatoria diventerà un INTEGRALE:

$$\boxed{x(t) = \int_0^t f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau}$$

INTEGRALE DI CONVOLUZIONE

1) conosco la $f(\tau)$ qualunque che ecciti il sistema

2) conosco la risposta all'impulso $h(t)$, qualunque essa sia

permette per qualunque sistema di determinare la risposta in qualsiasi istante t.

Ip:

* supponiamo che la forza si conosca dall'istante in cui agisce, ovvero:

$$f(\tau) = 0 \quad \text{per} \quad t < 0$$

se ci fosse forza prima $\Rightarrow$ SPOSTO L'ORIGINE DELL'ASSE t !!

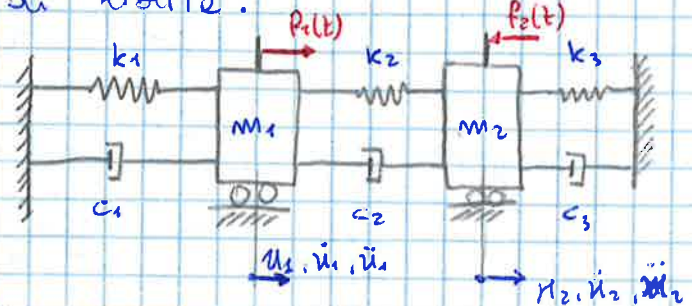
* $x(t=0) = 0 \quad , \quad \dot{x}(t=0) = 0$

posizioni implicite nell'espressione di $I_0 = f_0 \Delta\tau \Rightarrow x_0(t) = I_0\, h(t)$

$\to$ prima di $-\frac{\varepsilon}{2}$ $x = \dot{x} = 0$, le c.i. dell'impulso !!

SISTEMI AD N GRADI DI LIBERTÀ

Con pochi passaggi si può ridurre ad un insieme di sistemi ad un grado di libertà.



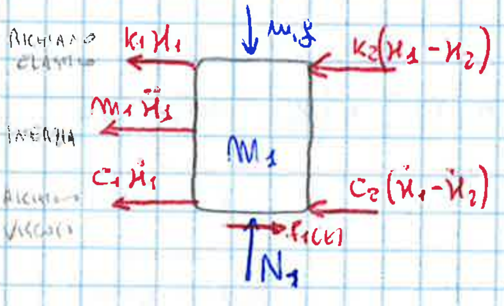
→ sistema a 2 gradi di libertà, con 3 rigidezze e 3 smorzamenti. Le forze $f_1(t)$, $f_2(t)$ agiscono sulle masse.

Anche questo sistema è lineare ⇒ $F = kx$, $F_c = c\dot{x}$ $x_1 \neq x_2$!!

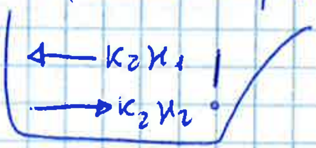
Indico con x_1 lo spostamento della prima massa, con x_2 quello della seconda, del tutto generico (ma si mettono concordi per convenzione, ma non è necessario! Basta mantenerlo per tutti i passaggi).

EQUAZIONI DEL MOTO

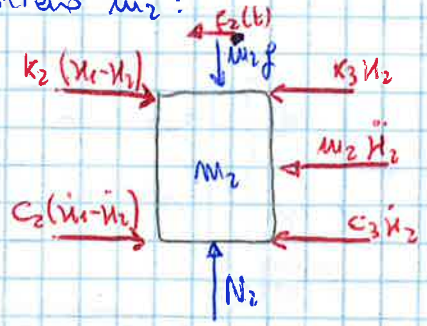
Isoliamo m_1 e scriviamo le forze che il mondo trasmette: (DCL)



→ essendo $x_2 \neq 0$ richiama la molla verso destra, il − è per questo



Isoliamo m_2:



- reazioni vincolari fornite alle masse; i versi dipendono da x_1 ed x_2, dai loro versi
- non importa che $f_2(t)$ sia verso sinistra e x_2 verso destra: ciò poiché x_2 dipende dai numerosi fattori esterni e non solo da $f_2(t)$

scriviamo le equazioni di equilibrio:

$$\leftarrow)\quad m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2) - f_1(t) = 0$$

$$\leftarrow)\quad m_2 \ddot{x}_2 + c_3 \dot{x}_2 - c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_3(x_2) - k_2(x_1 - x_2) + f_2(t) = 0$$

poiché in entrambe compaiono x_1 ed x_2 (incognite) si dicono accoppiate → non possiamo risolvere una indipendentemente dall'altra.
↓
e.i.

dunque:

$\Rightarrow$ reali, quadrate, simmetriche, DEFINITE POSITIVE;

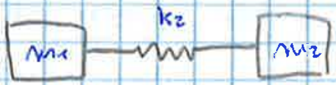
moltiplicate a destra (post) per un $\{v\}$ e a sinistra (pre) per un $\{v\}^T$ si avrà:

$$\rightarrow \underset{1\times n}{\{v\}^T}\ \underset{n\times n}{[m]}\ \underset{n\times 1}{\{v\}} \underset{1\times 1}{> 0}$$ $\rightarrow$ uno scalare maggiore di zero

le matrici smorzamenti e rigidezze hanno meno restrizioni:

$$\left.\begin{aligned} &\rightarrow \{v\}^T [k] \{v\} \geq 0 \\ &\rightarrow \{v\}^T [c] \{v\} \geq 0 \end{aligned}\right\}$$ sono SEMIDEFINITE POSITIVE

ciò equivale ad ammettere fisicamente il MOTO RIGIDO



masse non vincolate

RENDERE SIMMETRICHE [m], [c], [k]:

poniamoci nel caso particolare in cui:

- $m_1 = m_2 = m$
- $k_1 = k_2 = k_3 = k$
- $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ $\rightarrow$ senza smorzatori; $\leftarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2k x_1 - k x_2 = f_1(t) \\ m\ddot{x}_2 - k x_1 + 2k x_2 = -f_2(t) \end{cases}$$

rimangono accoppiate

Sommo le 2 eq.:
sottraggo le eq.:
$$\begin{cases} m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + k x_1 + k x_2 = f_1 - f_2 \\ m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + 3k x_1 - 3k x_2 = f_1 + f_2 \end{cases}$$

sono c.l. delle 2 !!

$1 \cdot eq + 1 \cdot eq$ / $1 \cdot eq + (-1)\, eq$

$$\Rightarrow \begin{cases} m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + k(x_1 + x_2) = f_1 - f_2 \\ m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + 3k(x_1 - x_2) = f_1 + f_2 \end{cases}$$

pongo $\begin{cases} x_1 + x_2 = \eta_1 \\ f_1 - f_2 = p_1 \end{cases}$ e $\begin{cases} x_1 - x_2 = \eta_2 \\ f_1 + f_2 = p_2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{\eta}_1 + k\eta_1 = p_1(t) \\ m\ddot{\eta}_2 + 3k\eta_2 = p_2(t) \end{cases}$$

sono equivalenti alle iniziali perché loro c.l. quindi posso utilizzarle al posto delle prime di partenza $\rightarrow$

$\Rightarrow \quad \bar{m}\ddot{g} + \bar{k}g = 0$ ottengo scalari, numeri $(\bar{m}, \bar{k}, 0)$

essendo $[m]$ definita positiva $\Rightarrow \bar{m} > 0$

" $[k]$ semidefinita " $\Rightarrow \bar{k} \geq 0$

allora scriverò che $\rightarrow \dfrac{\ddot{g}}{g} = -\dfrac{\bar{k}}{\bar{m}} = -\omega^2 \rightarrow$ è una quantità sicuramente + col − davanti.

Allora esiste la funzione g, ed è un'armonica!

$$\boxed{\begin{gathered}\ddot{g} + \omega^2 g = 0 \\ g(t) = g_0 \sin(\omega t + \varphi)\end{gathered}}$$

la soluzione SINCRONA esiste ed è un'armonica (massa senza smorzatore)

Riutilizzando la nostra definizione $\rightarrow \boxed{\{x(t)\} = \{A\} g_0 \sin(\omega t + \varphi)}$ (sostituendo)

SOLUZIONE SINCRONA

$\{\ddot{x}\} = -\omega^2 \{A\} g_0 \sin(\omega t + \varphi)$; sostituendo avrò:

$$[m]\{A\} g_0 (-\omega^2) \sin(\omega t + \varphi) + [k]\{A\} g_0 \sin(\omega t + \varphi) = \{0\}$$

metto in evidenza i termini comuni:

$$\underset{\text{VETTORE}}{\left([k] - \omega^2[m]\right)} \underset{\text{VETT.}}{\{A\}} \underset{\text{COST.}}{g_0} \underset{\text{ARMONICA}}{\sin(\omega t + \varphi)} = \{0\}$$

soluzioni:

1) $g_0 = 0 \rightarrow$ TRIVIAL

2) $\{A\} = \{0\} \rightarrow$ TRIVIAL

in realtà ne ho una soltanto, inglobando la costante g_0 in $\{A\}$ così: $g_0\{A\} = \{B\} = \{0\} \rightarrow$ TRIVIAL

3) $\sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow$ come se non ci fosse, poiché deve valere per ogni t

$\Rightarrow \boxed{\left([k] - \omega^2[m]\right)\{A\} = \{0\}}$ questa sarà la ~~soluzione non banale~~ equazione 1.

siamo passati da un sistema di n eq. diff. tutte accoppiate ad un sistema di n eq. algebriche, ancora accoppiate, ma almeno algebriche.

ESERCITAZIONE 18/10/2013

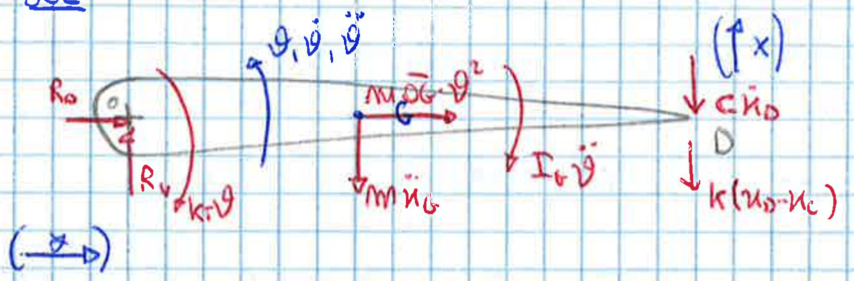
Dati: $\overline{OD} = L$, k, ξ, ϑ_{max}, μ_0, $R = \overline{AB}$

$\mu = \mu_0 (1 - y/L)$

Det: ω_m, ω_{ris}, k_T, φ, F_0

lo spostamento verticale del punto C è di tipo armonico $\Rightarrow x_c = R \sin \omega t$

DCL



è opportuno scegliere come coordinata del moto la rotazione ϑ; definiamo i versi positivi di x (non è una coordinata del moto)

- il peso dà soltanto un precarico alla molla e la porta alla cond. di equilibrio $\Rightarrow$ non lo metto
- "taglio" la cerniera O e metto le reazioni R_o, R_v, $k_T\vartheta$ (torsione)
- inerzie: supponendo la posizione di G, avrò una traiettoria circolare $\Rightarrow$ avrò una componente tangenziale $m\ddot{x}_G$ verso il basso (poiché la forza è verso l'alto) e una centrifuga $m\overline{OG}\cdot\dot\vartheta^2$ (poiché è centripeta)
- momento d'inerzia $I_G\ddot\vartheta$
- la velocità di D è verso l'alto $\Rightarrow$ c richiama verso il basso con $c\dot{x}_D \downarrow$!!!
- ipotizzo che $x_D > x_c \Rightarrow$ la "molla" si allunga, dunque la forza è di richiamo $k(x_D - x_c) \downarrow$!! Anche quando $x_D < x_c$ la quantità $k(x_D - x_c)$ è negativa e il vettore gira !!
- 3 eq. cardinali della dinamica:

$\rightarrow$) non mi serve per ricavare le eq. del moto

$\uparrow$) stessa cosa

$O\circlearrowright$) mi serve !

ho tutto, manca k_{eq}:

$$k_{eq} = \frac{kLR}{2\xi \vartheta_{max}\sqrt{1-\xi^2}} = \qquad ; \quad \underline{\vartheta_{max} \text{ VA ESPRESSO IN RADIANTI}}\ !!!!$$

$= 117.100$ Nm/rad (rigidezza torsionale)

ma $k_{eq} = k_T + kL^2 \Rightarrow k_T = 19.000$ Nm/rad

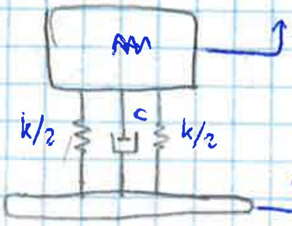
k_T ↑ rigidezza dei comandi

$W_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{I_0}} = \rightarrow$ pulsazione propria! $= 335,2$ rad/s

$\Rightarrow W_{ris} = W_n\sqrt{1-2\xi^2} = 177,4$ rad/s

la fase alla risonanza: $tg\,\varphi = \frac{2\xi r}{1-r^2} \Rightarrow \varphi = 41,4°$ angolo di ritardo di fase

ESERCIZIO - SPOSTAMENTO ARMONICO DEL VINCOLO



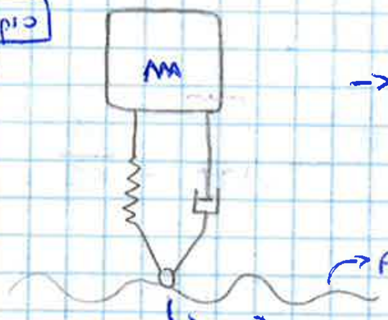
$x(t)$ -> spost. massa

$y(t)$ -> spost. vincolo

- è una massa PUNTIFORME collegata tramite una sospensione ad un telaio MOBILE ($y(t)$)

|| -> modelli equivalenti

Esempio

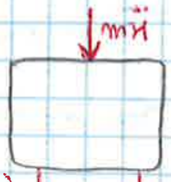


-> modello "ad un quarto di vettura" o monosospensione automobilistica

-> profilo accidentato (armonico)

-> ruota

Scriviamo l'equazione del moto - DCL



↓) $m\ddot{x} + c(\dot{x}-\dot{y}) + k(x-y) = 0$ -> eq. del moto

$y(t)$ -> spostamento del vincolo -> È LA FORZANTE SE VOGLIAMO

introduco SPOSTAMENTO RELATIVO: $z = x - y$

→

RIEPILOGO

$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\}$ $\Rightarrow$ $\{x(t)\} = \{A\}\sin(\omega t + \varphi)$ $\Rightarrow$ $\boxed{([k] - \omega^2[m])\{A\} = \{0\}}$

AUTOPROBLEMA

EVP

se il $\det([k] - \omega^2[m]) = 0$

$\Rightarrow$ $\omega_i^2 =$ AUTOVALORE, EIGEN VALUE

$\Rightarrow$ $\{\psi_i\} =$ AUTOVETTORE, EIGENVECTOR

$([k] - \omega_r^2[m])\{A\} = \{0\}$

$\Downarrow$

$\{\psi_r\}$

Sono n, dove n è il n° gdl del sistema.

Queste soluzione è ottenute numericamente.

AUTOVALORI

La radice positiva di ogni autovalore corrisponde ad una pulsazione naturale del sistema

ω_r (>0) $\rightarrow$ PULSAZIONE NATURALE PROPRIA DEL SISTEMA

come $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\rightarrow$ frequenze con le quale l'oggetto 1 gdl oscilla in assenza di forzanti,

onde per n gdl le $\omega_r\,(>0)$ dipenderà soltanto da $[m]$, $[k]$; nel nostro caso (2 gdl) avremo 2 pulsazioni naturali $\rightarrow$ NON HA SENSO DIRE CHE UN OGGETTO HA UNA FREQUENZA PROPRIA DI VIBRARE. $\rightarrow$ NO

Solitamente sono in ordine crescente: $0 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3 \leq \ldots \leq \omega_n$

- ad ogni pulsazione naturale ω_r corrisponde un AUTOVETTORE

AUTOVETTORI

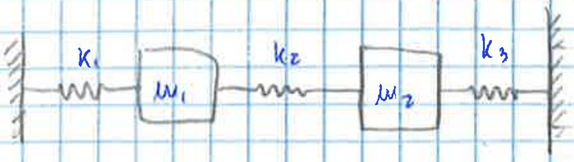
~~___~~ esprimono il vettore $\{A\}$, dove ci sono gli spostamenti delle varie masse; ad una certa ω_r corrisponde una certa "forma"

$\Rightarrow$ $\{\psi_r\}$ è FORMA MODALE $(n\times1)$ $\left\{\boxed{\text{posizioni delle masse in relazione a } \omega_r \text{ (ogni)}}\right.$

l'insieme di $\boxed{(\omega_r^2, \{\psi_r\}) \rightarrow \text{MODO PROPRIO}}$

il primo modo DEL SISTEMA è quello a frequenza più bassa (ω_1), e cui corrisponde una certa posizione delle masse, e così via;

ma cosa vuol dire $\omega_1 = 0$?



ma se fosse $\Rightarrow$ 

, risolvendo l'autoproblema scopriremmo che $\omega_1^2 = 0$ $\Rightarrow$ le due masse possono traslare senza oscillare $\Rightarrow$ l'oggetto è dotato di MOTO RIGIDO e le masse si spostano della stessa quantità, dello stesso verso, con frequenza $= 0$ $\Rightarrow$ TRASLANO

↳ $\omega_1 = 0$ è ammissibile, c'è un MOTO RIGIDO $\Rightarrow$ $\{\psi_1\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ [Al massimo possono essere 6 $\omega_r = 0$! 7 è errore! (3 rotazioni e 3 traslazioni RIGIDE)]

ORTOGONALITÀ

Gli autovettori $\{\psi_r\}$ sono ortogonali rispetto alle $[m]$, $[k]$, ma NON tra loro

- dall'espr. dell'autoproblema, sostituendo $\{A\}$ con $\{\psi_r\}$ ottengo l'identità:

$$[k]\{\psi_r\} = \omega_r^2 [m]\{\psi_r\}$$ → identità, vera! Non più equazione in $\{A\}$.

- Se ciò è verificato per un modo r, lo sarà per un modo s:

$$[k]\{\psi_s\} = \omega_s^2 [m]\{\psi_s\}$$

- ora moltiplico a sinistra in questo modo (premoltiplico entrambe):

$$\begin{cases} \{\psi_s\}^T[k]\{\psi_r\} = \omega_r^2 \{\psi_s\}^T[m]\{\psi_r\} & \text{per } \{\psi_s\}^T \\ \{\psi_r\}^T[k]\{\psi_s\} = \omega_s^2 \{\psi_r\}^T[m]\{\psi_s\} & \text{per } \{\psi_r\}^T \end{cases}$$

- ora traspongo in blocco la seconda:

$$\begin{cases} \text{---} \\ \{\psi_s\}^T[k]^T\{\psi_r\} = \omega_s^2 \{\psi_s\}^T[m]^T\{\psi_r\} \end{cases}$$

ricorda la trasp. di un prodotto tra matrici

[per DEF le $[m]$ e $[k]$ sono simmetriche! $\Rightarrow$ $[m] = [m]^T$ e $[k] = [k]^T$]

=> servono $[m]$ e $[k]$, che scrivo con le m e k iniziali - ok

- risolvo l'autoproblema ottenendo ω_r^2 e $\{\psi_r\}$ (parte più laboriosa) - ok
- calcolo i prodotti m_r prodotti tra matrici (n valori su masse modali)
- note m_r le moltiplico per le rispettive ω_r^2 già calcolate, ottenendo k_r

PROCEDURA

DOMANDE -> dimensioni (fisiche) di m_r? $\{\psi_r\}$ sono vettori spostamento -> LUNGHEZZE

$$\Rightarrow [kg \cdot \ell^2]$$

↳ ma non si può dire se è m, mm, μm, ...

$\{\psi_r\}$ sono definite a meno di una costante (alle m, μm) -> ALEATORIO

-> stesse cose per k_r;

=> comunque otteremo ω_r dove vanno via le ℓ^2 e resta

Il principio di ortogonalità si può esprimere con la MATRICE MODALE $[\psi]$:

se opero in questo modo: $[\psi]^T [m] [\psi] =$

$$\begin{array}{ccc} n\times n & n \times n & n \times n \end{array}$$

masse modali $\uparrow$ — indici diversi = 0 !

$$[\psi]^T[m][\psi] = \begin{bmatrix} \{\psi_1\}^T \\ \vdots \\ \{\psi_n\}^T \end{bmatrix} [m] \begin{bmatrix} \{\psi_1\} & \cdots & \{\psi_n\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & m_n \end{bmatrix}$$

ottengo una matrice DIAGONALE:

$$\boxed{[\psi]^T [m] [\psi] = diag(m_r)}$$

MATRICE DELLE MASSE MODALI

analogamente si avrà:

$$\boxed{[\psi]^T [k] [\psi] = diag(k_r)}$$

MATRICE DELLE RIGIDEZZE MODALI

allora tornando al sistema: $([k]-\omega^2[m])\{A\}=\{0\}$

$$[m]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}=\{0\} \qquad \omega_r^2,\ \{\psi_r\}$$

$\{x(t)\}=\{A\}\sin(\omega t+\varphi)$ di ω ce ne sono n, con $\{\psi_n\}$ possibili

↳ potrò scriverla come c.l. degli autovettori ψ_r !!

$$\boxed{\{x(t)\}=\sum_{r=1}^{n} C_r\{\psi_r\}\sin(\omega_r t+\varphi_r)}$$

⇒ [qualunque $x(t)$ potrà essere scritta come c.l. di autovettori $\{\psi_r\}$ calcolati a partire da m e k, associato ad una certa ω_r]

ω_r^2 e $\{\psi_r\}$ sono i "vettori" delle soluzioni.

NOTE A MARGINE

25/10/2013 (8)

gli autovettori $\{\psi_r\}$ sono definiti a meno di una COSTANTE;

come viene determinata; ci sono tre possibilità:

$$\{\psi_r\}=\begin{bmatrix}\psi_{1r}\\ \psi_{2r}\\ \vdots\\ \psi_{nr}\end{bmatrix}$$

costituzione degli elementi del vettore

ψ_{ij} → riferito all'elemento j-esimo

a) $\psi_{1r}=1$ → tutti gli altri li scalo di conseguenza

b) $\max(\psi_{kr}=1)$

c) $m_r=1$ → massa modale di un certo elemento sia pari ad 1

⇒ gli autovettori li normalizzo così; la costante viene determinata così.

CRITERIO DI SYLVESTER (~)

Se il determinante di tutti i minori è positivo, la matrice è definita positiva.

- Se alcuni autovalori sono ripetuti:

$$(\omega_r^2-\omega_s^2)\{\psi_r\}^T[m]\{\psi_s\}=0$$

$r\neq s \Rightarrow \omega_r\neq\omega_s$ ovviamente.

Ma quando $r\neq s$ e $\omega_r\equiv\omega_s$? →

- le costanti α, β di proporzionalità NON sono adimensionali!!

Secondo passaggio: 2 scrivo l'autoproblema in assenza di smorzamento e lo risolvo, calcolando ω_r^2, $\{\psi_r\}$, che diagonalizzano $[m]$ e $[k]$

$$\Rightarrow \boxed{[\psi]^T [c] [\psi] = \alpha \, \mathrm{diag}(m_r) + \beta \, \mathrm{diag}(k_r) = \mathrm{diag}(c_r)}$$

MATRICE DEGLI SMORZAMENTI MODALI

dunque ciascun coefficiente sarà $c_r = \alpha m_r + \beta k_r$

$\Rightarrow$ scelgo proporzionalità di c poiché gli $\{\psi_r\}$ dell'autoproblema, oltre a diagonalizzare $[m]$ e $[k]$, diagonalizzano anche $[c]$!!

$$\Rightarrow \quad \{\psi_s\}^T [c] \{\psi_r\} = \begin{cases} 0 & r \neq s \\ c_r & r = s \end{cases}$$

$$\boxed{\xi_r = \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\omega_r} + \frac{\beta}{2} \omega_r}$$

vedi libro!

TRASFORMAZIONE MODALE

Abbiamo visto che $\{x(t)\} = \sum_{r=1}^{m} \{\psi_r\} \eta_r(t) = \underset{m \times m}{[\psi]} \underset{m \times 1}{\{\eta(t)\}}$ → COSTANTI $\in \mathbb{R}^{m \times 1}$

- dove $\eta_r(t)$ è il coefficiente che indica l'importanza del generico autovettore, il suo peso nelle c.i. (il c_r del teorema di espansione)

- dove $\{\eta(t)\}^T = \{\eta_1(t), \eta_2(t) \, \dots \, \eta_m(t)\}$ → COORDINATE MODALI

- si chiama trasformazione modale perché è un passaggio di coordinate ⇒ passo dalle coordinate reali, le $x(t)$ alle coordinate $\eta(t)$ fittizie;

RISPOSTA LIBERA

Riscriviamo la equazione con le nuove coordinate:

$$[m][\psi]\{\ddot{\eta}\} + [c][\psi]\{\dot{\eta}\} + [k][\psi]\{\eta\} = \{0\}$$

- sfrutto adesso il principio di ortogonalità, premoltiplicando per $[\psi]^T$;

$[\Psi]^{-1}$ è invertibile poiché $\{\Psi_r\}$ sono lin. indipendenti.

L'inversa di una matrice è molto laboriosa ... ci sono varie tecniche che permettono di evitare i ma con 100'000 gdl è comunque scomodo!! Cosa faccio?

Sfrutto ancora una volta l'ortogonalità:

$$\{x(t)\} = \sum_{r=1}^{n} \{\Psi_r\} \eta_r(t) = \sum_{r=1}^{n} \{\Psi_r\} e^{-\xi_r \omega_r t} (a_r \cos \omega_{dr} t + b_r \sin \omega_{dr} t)$$

• premoltiplico per $\{\Psi_s\}^T [m]$:

$$\{\Psi_s\}^T [m] \{x\} = \{\Psi_s\}^T [m] \sum_{r=1}^{n} \{\Psi_r\} e^{-\xi_r \omega_r t} (a_r \cos \omega_{dr} t + b_r \sin \omega_{dr} t)$$

al secondo membro è tutto zero tranne quando $\underline{r \equiv s}$!!

$$\Rightarrow \{\Psi_r\}^T [m] \{x\} = m_r \cdot \eta_r(t) \quad ; \quad ①$$

↳ $s \equiv r$ ...

derivando avrò:

$$\{\Psi_r\}^T [m] \{\dot{x}\} = m_r \dot{\eta}_r(t) \quad ②$$

① in $t=0$ → $\{\Psi_r\}^T [m] \{x_0\} = m_r \cdot \overset{\text{incognita}}{\boxed{a_r}}$ -> calcolo a_r senza invertire nulla

② in $t=0$ → $\{\Psi_r\}^T [m] \{v_0\} = m_r [-\xi_r \omega_r \underset{\text{NON PIÙ INCOGNITA}}{a_r} + \omega_{dr} \overset{\text{incognita}}{\boxed{b_r}}]$ -> calcolo b_r " " "

RIASSUNTO

$([k] - \omega^2 [m]) \{A\} = \{0\} \Rightarrow \omega_r^2, \{\Psi_r\}$ ① risolvo autoproblema ← UNICA COSA LABORIOSA

→ $\text{diag}(m_r)$, $\text{diag}(k_r)$, $\text{diag}(c_r)$ ② calcolo m, c, k modali → m_r, c_r, k_r

③ calcolo ξ_r e ω_{dr}

④ note le C.I. calcolo a_r e b_r

⑤ calcolo $\eta_r(t)$ per $r = 1, ..., n$

⑥ calcolo $\{x(t)\} = [\Psi] \{\eta(t)\}$ per ogni $r = 1, ..., n$

ESERCIZIO SDOF1/6

$f(t) = F_0 \sin \omega_n t \cdot u(t)$

1) $f(t) = 0$ se $t<0$ perché $u(t)$ è un gradino unitario

2) c.i. NULLE → se non sono nulle aggiungo la risp. libera all'integrale di convoluzione

$$\Rightarrow x(t) = \int_0^t f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau + \underbrace{R.C.I.}_{\text{risp. condizioni iniziali}}$$

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_n} \sin(\omega_n t) \rightarrow \text{considerando } \xi = 0$$

risposta all'impulso unitario affetto di smorzamento

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n} \underbrace{\int_0^t \sin \omega_n \tau \sin[\omega_n(t-\tau)]\, d\tau}_{I(t)}$$ voglio calcolare questo integrale

$$I(t) = \int_0^t \sin \omega_n \tau \left[\sin \omega_n t \cos \omega_n \tau - \sin \omega_n \tau \cos \omega_n t \right] d\tau =$$

è costante, visto che è τ la variabile di integrazione

$$= \sin \omega_n t \left[\frac{\sin^2 \omega_n \tau}{2\omega_n} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} - \cos \omega_n t \int_0^t \frac{1-\cos 2\omega_n \tau}{2}\, d\tau =$$

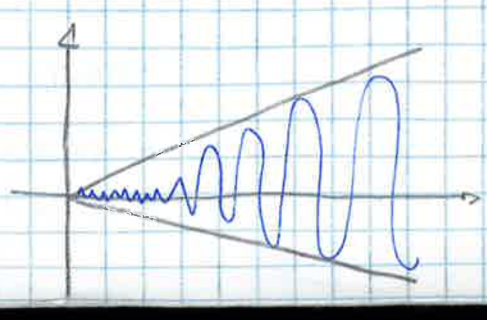
$$= \frac{\sin^3 \omega_n t}{2\omega_n} - \cos \omega_n t \left[\frac{1}{2}\tau - \frac{\sin 2\omega_n \tau}{2 \cdot 2\omega_n} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{\sin^3 \omega_n t}{2\omega_n} - \frac{1}{2} t \cos \omega_n t + \frac{\cos \omega_n t \,\cancel{2}\, \sin \omega_n t \cos \omega_n t}{\cancel{2} \cdot 2\omega_n} =$$

$$= \frac{\sin \omega_n t}{2\omega_n} \cdot 1 - \frac{1}{2} t \cos \omega_n t \;;$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n} \left[\underbrace{\frac{\sin \omega_n t}{2\omega_n}}_{\text{LIMITATO}} - \underbrace{\frac{1}{2} t \cos \omega_n t}_{\text{ILLIMITATO}} \right] \cdot u(t)}$$

LIMITATO ↓ è un disturbo iniziale

→ per $t \to \infty$ ⇒ l'ampiezza va ad ∞ ⇒ RISONANZA INFINITA



RIEPILOGO

$$\{x(t)\} = \sum_{r=1}^{n} \{\psi_r\}\, \eta_r(t) = \underbrace{[\psi]}_{\text{MATRICE MODALE}} \{\eta(t)\}$$

mediante la trasformazione modale si passa da x a η con un cambio di coordinate => le coord. MODALI. Abbiamo determinato la risposta libera.

RISPOSTA FORZATA

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{f(t)\} \longrightarrow \{x(t)\} = ?$$

come si spostano i vari elementi del sistema

=> passiamo dalle coordinate fisiche a quelle modali:

$$[m]\sum_r \{\psi_r\}\ddot{\eta}_r + [c]\sum_r \{\psi_r\}\dot{\eta}_r + [k]\sum_r \{\psi_r\}\eta_r = \{f(t)\}$$

- la trasf. è quella sopra

• sfrutto il principio di ortogonalità, premoltiplicando per $\{\psi_s\}^T$:

$$\underbrace{\{\psi_s\}^T [m] \sum_r \{\psi_r\}\ddot{\eta}_r}_{*} + \{\psi_s\}^T [c] \sum_r \{\psi_r\}\dot{\eta}_r + \{\psi_s\}^T [k] \sum_r \{\psi_r\}\eta_r = \{\psi_s\}^T \{f(t)\}$$

→ tutti i prodotti dovuti alle somme sono nulli tranne quando $r = s$!!

$$* \Rightarrow \sum_{r=1}^{n} \underbrace{\{\psi_s\}^T [m] \{\psi_r\}}_{0 \text{ se } r \neq s;\ m_r \text{ se } r = s} \ddot{\eta}_r$$

da ciò segue:

$$\Rightarrow m_r \ddot{\eta}_r + c_r \dot{\eta}_r + k_r \eta_r = \{\psi_r\}^T \{f(t)\}$$

($r = s$) -> prodotto tra vettore riga e vettore colonna => SCALARE

FORZA MODALE ← $\boxed{P_r(t)}$ -> vettore forze dipendente dal tempo e da $r = 1, \dots, n$

=> mi sono ricondotto al caso 1 gdl discreto; la SOLUZIONE si ottiene mediante l'integrale di convoluzione, poiché è una forza qualunque:

$$\boxed{\eta_r(t) = \int_0^t P_r(\tau) \cdot h_r(t-\tau)\, d\tau}$$

, dove h_r è ottenuta in coordinate modali

$$\text{se } \xi_r < 1 \Rightarrow \boxed{h_r(t) = \frac{1}{m_r \omega_{dr}} e^{-\xi_r \omega_r t} \sin \omega_{dr} t}$$

$$\omega_{dr} = \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2}$$

$$\omega_r = \sqrt{\frac{k_r}{m_r}} \quad \rightarrow$$

DINAMICA → poiché è presente il contributo variabile con la pulsazione Ω

Più cresce Ω, più cresce $[K_D]$ (c'è un termine al quadrato!!)

$$\Rightarrow \boxed{[K_D]\{X_0\} = \{F_0\}}$$

ha senso → $[K_D]$ cresce con Ω; se le $\{F_0\}$ sono costanti ⇒ $\{X_0\}$ piccoli

$$\Rightarrow \{X_0\} = [K_D]^{-1}\{F_0\} = $$
$$= [K_D(\Omega)]^{-1}\{F_0\}$$

→ ho ottenuto $\{X_0\}$, ma non è possibile, è lunghissimo e devo invertire la matrice e risolverla per tutte le $\Omega = 1, 2, 3, 4, \ldots$ ogni volta che cambio la pulsazione

IMPRATICABILE

DEF
l'inversa della $[K_D]$ ha un nome proprio:

$$[K_D]^{-1} = [\alpha(\Omega)] \rightarrow \text{MATRICE DI RECETTANZA}$$

Per un sistema ad 1 gdl la RECETTANZA è definita come:

$$f(t) = f_0 e^{i\Omega t} \longrightarrow \left[\text{RECETTANZA} = \frac{X_0}{f_0} = \text{FRF}\right]$$

{ per forzanti armoniche!!

↓ è una delle possibili FRF

Applicandola al nostro caso ad n GDL:

del vettore $\{X_0\}$ prendo l'ampiezza dello spostamento dell'elemento j-esimo → X_{0j} di quanto si sposta ciascuna delle masse

$$X_{0j} = \alpha_{j1} F_{01} + \alpha_{j2} F_{02} + \ldots + \alpha_{jk} F_{0k} + \ldots + \alpha_{jn} F_{0n}$$

ciascun $\left[\alpha_{jk}(\Omega) = \dfrac{X_{0j}}{F_{0k}}\right]$ per $\underbrace{F_{0\ell} = 0 \quad \forall \ell \neq k}$

"supponendo che tutte le altre non ci siano"

allora si dimostra che ciascuno di quegli elementi:

$$\boxed{\alpha_{jk}(\Omega) = \sum_{r=1}^{n} \frac{\psi_{jr}\,\psi_{kr}}{k_r - \Omega^2 m_r + i\Omega c_r}}$$

→ non c'è bisogno che inverta la matrice, posso calcolare ciascuno degli α_{jk} in questo modo!!

→ NON DEVO INVERTIRE NULLA

ANTIRISONANZE -> punti in cui l'ampiezza dello spostamento (risposta) è nulla;

$$|\alpha_{jk}| = 0$$

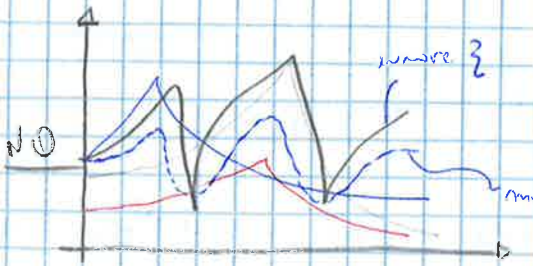
-> condizione verificata SOLO nel caso in cui $\xi = 0$!! <-

-> a parità di ampiezza della forzante!

Negli altri casi raggiunge un minimo non nullo.

Esempio

3 modi -> 3 gdl : si vede nel grafico le 3 differenti FRF, quella nera è la combinazione lineare delle 3!



aumentando lo smorzamento, la posizione di risonanza è circa la stessa (un po' verso sinistra) l'ampiezza invece si abbassa notevolmente

(nell'esempio l'ampiezza si riduce di 50 volte!!)

NB -> non è detto che se si forza un sistema in un punto, si muove solo quel punto!

TRANSITORIO

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{f(t)\}$$

$$\eta_r(t) = \int_0^t P_r(\tau) h_r(t-\tau)\, d\tau + \quad \text{se conosciamo le c.i.} \begin{cases} \{x(t=0)\} = \{x_0\} \\ \{\dot{x}(t=0)\} = \{v_0\} \end{cases}$$

$$+ \underbrace{e^{-\xi \omega_r t}\left(a_r \cos \omega_{dr} t + b_r \sin \omega_{dr} t\right)}_{\text{TRANSITORIO}}$$

, dove a_r & b_r li otteniamo sfruttando il principio di ortogonalità.

Fine della parte sulla soluzione.

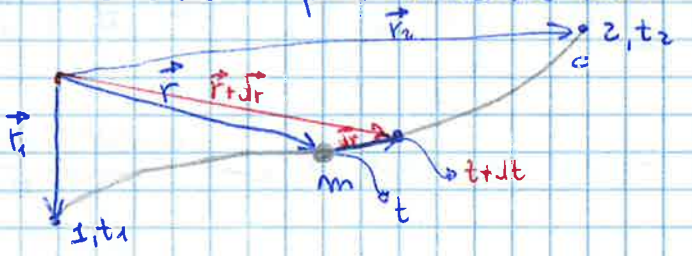
[⇒ A seconda delle coordinate indipendenti (LAGRANGIANE) otteniamo uguali autovalori ma diversi autovettori.]

Ma se le matrici NON sono simmetriche, NON SI PUÒ UTILIZZARE IL PRINCIPIO DI ORTOGONALITÀ ⇒ bisogna scegliere bene il sistema di coordinate ind.... No! Esiste un modo per ottenere $[\bar m]$ e $[\bar k]$ simmetriche, qualunque sist. di coordinate scelgo.

Tale metodo consiste nello scrivere le equazioni del moto NON con la meccanica classica, ma facendo riferimento a quella ANALITICA ⇒ fa ricorso ad equilibri di ENERGIA (LEIBNIZ) piuttosto che di FORZE (Newton). → DISPENSA SUL PORTALE

MECCANICA ANALITICA

Supponiamo di avere un punto materiale m:



m sta percorrendo una certa traiettoria (path) nello spazio. In un certo istante t si trova in una certa posizione che nel sistema di riferimento da me scelto, ~~[illegible]~~ individuata da un vettore $\vec r$, sottoposto ad una certa forza $\vec F$ qualunque. Il punto va da 1 (t_1) a 2 (t_2). Passato un certo tempo infinitesimo dt, il m sarà in una nuova posizione;

LAVORO → $\boxed{\overline{dW} = \vec F \cdot d\vec r}$ (il segnetto indica che NON è variazione, ma solo una quantità infinitesima)

PROD. SCALARE

- ricorrendo a Newton $(F = m \cdot a)$ possiamo scrivere:

$$\overline{dW} = \vec F \cdot d\vec r = m\ddot{\vec r}\cdot d\vec r = m\frac{d\dot{\vec r}}{dt}\cdot d\vec r = m\frac{d\dot{\vec r}}{dt}\cdot\frac{d\vec r}{dt}\,dt =$$

$$= m\frac{d\dot{\vec r}}{dt}\cdot\dot{\vec r}\,dt = m\dot{\vec r}\cdot d\dot{\vec r} =$$ (inverto l'ordine del prod. scalare)

Calcolando $d(\dot{\vec r}\cdot\dot{\vec r}) = d\dot{\vec r}\cdot\dot{\vec r} + \dot{\vec r}\cdot d\dot{\vec r} = 2\dot{\vec r}\cdot d\dot{\vec r}$; dunque scriverò:

Avendo a che fare con FORZE CONSERVATIVE, posso "passare" dalla posizione di riferimento:

$$\int_{\vec r_1}^{\vec r_2} \vec F_c \cdot d\vec r = \int_{\vec r_1}^{\vec r_{RIF}} \vec F_c \cdot d\vec r + \int_{\vec r_{RIF}}^{\vec r_2} \vec F_c \cdot d\vec r = \int_{\vec r_1}^{\vec r_{RIF}} \vec F_c \cdot d\vec r - \int_{\vec r_2}^{\vec r_{RIF}} \vec F_c \cdot d\vec r =$$

[solo con le F.C. posso cambiare il percorso senza cambiare il risultato dell'integrale!]

$$= \underline{V_1 - V_2} = -\Delta V \quad (\Delta V = V_2 - V_1) \rightarrow \underline{V = \text{ENERGIA POTENZIALE}} \quad ②$$

lavoro di una forza conservativa

Dunque si otterrà, separando le due tipologie di forze:

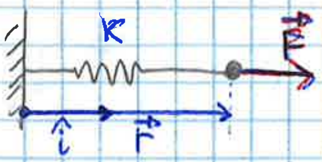
$$\int_{\vec r_1}^{\vec r_2} \vec F \cdot d\vec r = \int_{\vec r_1}^{\vec r_2} (\vec F_c + \vec F_{nc}) \cdot d\vec r = \int_{\vec r_1}^{\vec r_2} \vec F_c \cdot d\vec r + \int_{\vec r_1}^{\vec r_2} \vec F_{NC} \cdot d\vec r \quad , \text{ dunque} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta T = -\Delta V + \int_{\vec r_1}^{\vec r_2} \vec F_{NC} \cdot d\vec r \qquad \text{allora} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\vec r_1}^{\vec r_2} \vec F_{NC} \cdot d\vec r = \Delta (T+V) = \Delta E} \qquad \underline{E = T + V \rightarrow \text{ENERGIA TOTALE}} \quad ③$$

$\Rightarrow$ [se $\int \vec F_{NC} \cdot d\vec r = 0$ (nessuna dissipazione) $\Rightarrow$ $\underline{\Delta E = 0}$]

Esempio - MASSA/MOLLA



$$\vec F = F \hat i \quad \text{def. corrispondente a } \vec F$$

$$\vec r = (\underset{\text{inizio}}{l_0} + x)\hat i$$

$F_m = kx$; è conservativa? $\Rightarrow$ $\oint \vec F_m \cdot d\vec r = \oint -kx\hat i \cdot dx \hat i = \int_a^a -kx\,dx = 0$

$$\rightarrow \int_{\vec r_1}^{\vec r_2} \vec F_m \cdot d\vec r = \int_{x_1}^{\overset{RIF.}{0}} -kx\,dx - \int_{x_2}^{0} -kx\,dx = -\frac{1}{2}k(0 - x_1^2) + \frac{1}{2}k(0-x_2^2) = \underbrace{\frac{1}{2}kx_1^2}_{V_1} - \underbrace{\frac{1}{2}kx_2^2}_{V_2} \rightarrow$$

LAVORO VIRTUALE

Supponiamo di avere un certo numero di massettine m_i, $i = 1, 2, \dots, N$, sulle quali agiscono delle forze con risultante $\vec{R}_i = 0$ (STATICA)

↳ non ci sono accelerazioni, il sist. è in equilibrio

→ Facciamo lavorare ~~...~~ queste forze su uno spost. virtuale:

$$\vec{R}_1 \cdot \delta\vec{r}_1 + \vec{R}_2 \cdot \delta\vec{r}_2 + \dots + \vec{R}_N \cdot \delta\vec{r}_N = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \overline{\delta W_i} = \overline{\delta W} = 0 \quad \text{poiché } \vec{R}_i = 0$$

~~Le~~ queste $\vec{R}_i$ le suddividiamo in 2 componenti, attive e reazione vincolare:

$$\underset{\text{FORZA ATTIVA}}{\vec{R}_i = \vec{F}_i} + \underset{\text{REAZIONE VINCOLARE}}{\vec{f}_i} \qquad \Rightarrow \overline{\delta W} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{f}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

Può succedere che il δW delle forze vincolari sia nullo:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{f}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0} \quad \Rightarrow \quad \delta\vec{r}_i \text{ REVERSIBILI}$$

{ posso avere uno spostamento virtuale positivo e negativo ma con cambio nullo

è necessario che le $\vec{f}_i \perp \delta\vec{r}_i$; ma essendo compatibili con i vincoli i $\delta\vec{r}_i$

⇒ $\vec{f}_i \perp$ VINCOLI per dare lavoro nullo!!

↳ non si possono tenere in considerazione le forze di attrito (// vincolo)

In queste condizione sarà anche nullo il $\overline{\delta W}$ svolto dalle ATTIVE, che non dipendono dai vincoli:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0}$$

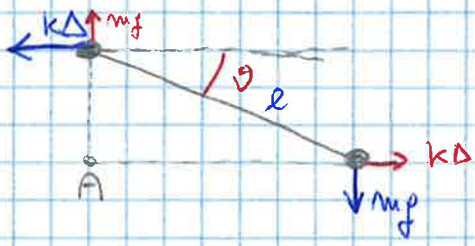
PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI (STATICA) → tutte le masse

↳ sostituisce $\vec{R}_i = 0$ purché $\delta\vec{r}_i$ siano reversibili e purché si trascurino le forze d'attrito

↳ forze che agiscono su una massa (risultante su ogni massetta i)

$\Rightarrow \quad kl(1-\cos\vartheta)\,tg\,\vartheta = mg$ $\quad \rightarrow$ nota la massa e la geometria posso calcolare ϑ.

Rifacciamo il procedimento col metodo classico:



qui devo mettere le reazioni vincolari !! (in rosso)

$\Rightarrow \quad A)\ \ kl(1-\cos\vartheta)\,l\sin\vartheta = mg\,l\cos\vartheta \Rightarrow kl(1-\cos\vartheta)\,tg\,\vartheta = mg \Rightarrow$ STESSO RISULTATO!

(le reazioni vincolari non danno momento rispetto ad A)

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

è una c.l. ma non vuol dire che ciascun termine sia uguale a zero $\Rightarrow$ non sono l. ind. !! Anche nell'esempio precedente δ_1 e δ_2 sono legati da ϑ.

DINAMICA

[D'Alembert] $\rightarrow$ Quando un oggetto sta accelerando la risultante delle forze è:

$$\vec{R}_i = m_i \vec{a}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i$$

; D'Alembert ha portato a primo membro:

$$\vec{R}_i - m\ddot{\vec{r}}_i = 0$$

$$\vec{R}_i + \vec{F}_i{}' = 0$$

$\hookrightarrow$ FORZA D'INERZIA $\quad$ { non è reazione vincolare, dunque si comporta come le forze attive

$\Rightarrow$ così <u>un riporto alla statica</u>, ma considerando anche le forze d'inerzia; valgono tutti i passaggi e si arriva a

$$\boxed{\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i + \vec{F}_i{}'\right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \\ &\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i\right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \end{aligned}}$$

PRINCIPIO GENERALIZZATO DI D'ALEMBERT

(DINAMICA)

ESERCITAZIONE 8/11/2013 – MDOF 1/1

Continuiamo; bisogna fare l'analisi modale, ovvero calcolare ω_r e $\{\Psi_r\}$

$$\left([k] - \omega^2 [m]\right) \begin{Bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \{x(t)\} = \{X_0\} e^{i\omega t}$$

AUTOPROBLEMA

Svolgiamolo in forma numerica, poiché ci sono tante lettere...

AUTOVALORI

$$\begin{vmatrix} 4-5\omega^2 & -2 \\ -2 & 6-10\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$ per escludere la soluzione banale

IN DINAMICA

$\boxed{\text{il valore più piccolo è il primo valore!!}}$

$$(4-5\omega^2)(6-10\omega^2) - 4 = 0$$

$$5\omega^4 - 7\omega^2 + 2 = 0; \quad \Rightarrow \quad \omega^2_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{10} = \begin{cases} \omega_1^2 = \frac{2}{5} \left(\frac{rad}{s}\right)^2 \\ \omega_2^2 = 1 \left(\frac{rad}{s}\right)^2 \end{cases}$$

le pulsazioni proprie $\omega_1 = \sqrt{\frac{2}{5}}$ rad/s e $\omega_2 = 1$ rad/s.

AUTOVETTORI

Gestisco i 2 modi separatamente:

① $\omega_1^2 = \frac{2}{5}$

$$\begin{cases} \left(4 - 5\frac{2}{5}\right) x_{10} - 2 x_{20} = 0 \\ \left(6 - 10\frac{2}{5}\right) x_{20} - 2 x_{10} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_{10} - 2x_{20} = 0 \\ -2x_{10} + 2x_{20} = 0 \end{cases}$$

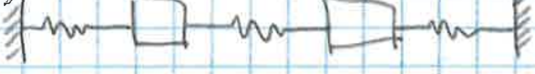
perché ho imposto che il det = 0
=> soluzioni ∞^1

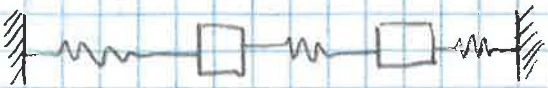
una eq. è c.l. dell'altra

$\Rightarrow x_{10} = x_{20} = 1 \rightarrow$ ma voglio un vettore colonna

allore $\{\Psi_1\} = [1 \quad 1]^T$ → I AUTOVETTORE . I FORMA MODALE DI VIBRARE

Come si rappresenta il modo di vibrare 1?

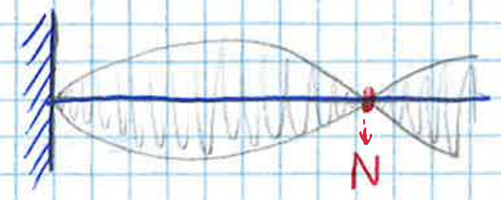
INIZIO 

$\{\Psi_1\}$ 

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

↳ rappresento le masse spostate della STESSA quantità

Ad esempio, su una trave che vibra si ha un NODO, dove se si appoggia qualcosa, o si mette un filo, non succede niente:



Dunque, calcolati gli autovettori avrò: $\{\psi_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ & $\{\psi_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{Bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad [\psi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Calcoliamo la <u>matrice delle masse modali</u>: (FARE ESATTAMENTE **SOLO** QUELLO CHE CHIEDE IL TESTO)
NIENTE PUNTI IN PIÙ

$$[M_r] = [\psi]^T [m] [\psi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} =$$

M grande per non confondersi

$$= \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & \frac{15}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} M_1 = 15 \text{ kg} \\ M_2 = \frac{15}{2} \text{ kg} \end{matrix}$$

Calcoliamo adesso la <u>risposta libera del sistema</u>; ci sono **2 STRADE**:

1° $\rightarrow [\psi]^{-1}$

$\{x\} = [\psi]\{\eta\}$ TMD (trasformazione modale diretta)

$\{\eta\} = [\psi]^{-1}\{x\}$ TMI (" " inversa)

$$\boxed{[\psi]^{-1} = \frac{Adj[\psi]}{det[\psi]}} \rightarrow \frac{\text{matrice aggiunta}}{\text{determinante}}$$

nel nostro caso $[\psi]^{-1} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

<u>Caso 1</u> $\left.\begin{matrix} \{x_0\} = [0 \quad 0]^T \\ \{v_0\} = [2 \quad 2]^T \end{matrix}\right\}$ c.i.

↳ dal punto di vista pratico sono "due martellate" uguali

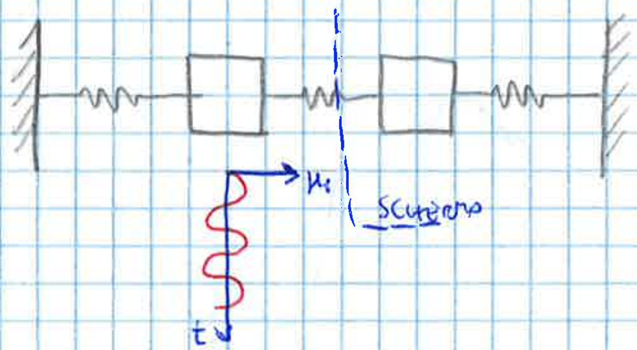
$$\boxed{\begin{aligned} \eta_1(t) &= \sqrt{10}\,\sin\omega_1 t \\ \eta_2(t) &= 0 \quad \forall t \end{aligned}}$$

dalla $\eta_2(t)$ capiamo che il secondo modo non è presente nella risposta, non è eccitato

Il problema vuole la risposta NON in termini modali, ma in termini di spostamento:

$$\{x(t)\} = [\Psi]\{\eta(t)\} \Rightarrow \{x(t)\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sqrt{10}\,\sin\omega_1 t \\ 0 \end{Bmatrix} = \sqrt{10} \begin{Bmatrix} \sin\omega_1 t \\ \sin\omega_1 t \end{Bmatrix} \quad \text{ok}$$

cosa vuol dire fisicamente:



dando queste due martellate uguali produco spostamenti delle 2 masse.
Questo spostamento = al primo modo

mettendo uno "schermo", un accelerometro, mi dà solo 1 frequenza ⇒ sembra un sistema ad 1 gdl ma non è così!!

2 -> contributi modali

$$\boxed{A_r = \frac{\{\psi_r\}^T [m] \{x_0\}}{M_r}} \qquad \boxed{B_r = \frac{\{\psi_r\}^T [m] \{v_0\}}{\omega_r M_r}}$$

$$\boxed{\underbrace{\{x\} = [\Psi]\{\eta\}}_{\text{TMD}} = \underbrace{\sum_{r=1}^{n} \{\psi_r\}\,\eta_r(t)}_{\text{teorema di espansione}}}$$

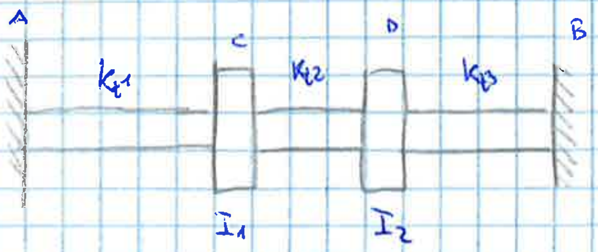
-> MOLTO IMPORTANTE, A MEMORIA!!
SI PARTE QUASI SEMPRE DA QUI PER LA TEORIA

il vantaggio di questa strada coinvolge un solo modo per volta (r!!)
così con 1.000.000 di modi (gdl) posso calcolare i primi 20 ad esempio, separati.
Altrimenti tutta la matrice modale!!

Applichiamo la strada 2 al caso 2:

$$\{x_0\} = [1 \;\; 0]^T$$
$$\{v_0\} = [0 \;\; 0]^T$$

ESERCITAZIONE 14/11/2013 - MDOF 1/4



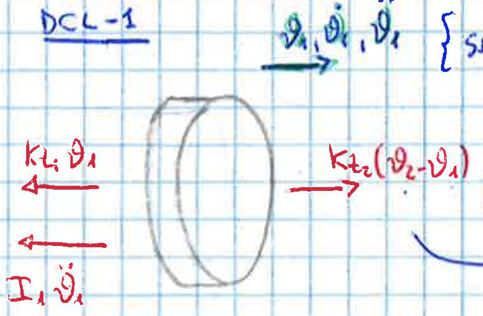
Tre volani collegati al telaio; abbiamo a che fare con ROTAZIONI & MOMENTI e non con SPOSTAM. & FORZE

$I_2 = 2I_1$

$k_1 = k_2 = k_3 = k_t$

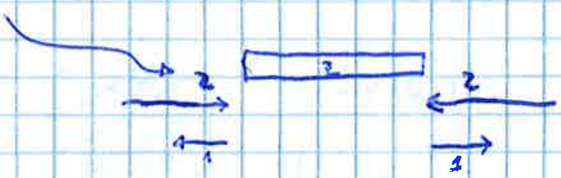
DCL-1

se il vettore rotazione è verso destra quello coppia elastica sarà verso sinistra



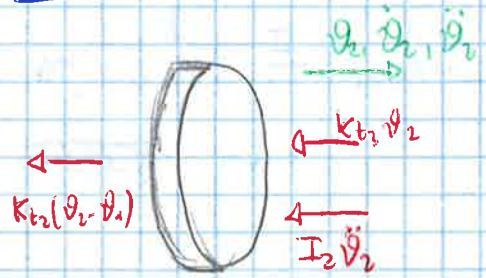
{ si usa la regola della mano destra ... (= $\circlearrowleft \vartheta$)

{ se $\vartheta_2 > \vartheta_1$ il disco 2 tende a "trascinare" l'1



$\leftarrow)$ $k_{t1}\vartheta_1 + I_1\ddot{\vartheta}_1 - k_{t2}(\vartheta_2 - \vartheta_1) = 0$

DCL-2



$\leftarrow)$ $k_{t2}(\vartheta_2 - \vartheta_1) + I_2\ddot{\vartheta}_2 + k_{t3}\vartheta_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\vartheta}_1 \\ \ddot{\vartheta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{t1}+k_{t2} & -k_{t2} \\ -k_{t2} & k_{t2}+k_{t3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

con $k_{t1} = \dots = k_t$, $I_2 = 2I_1$

autoproblema:

$$\begin{bmatrix} 2k_t - I\omega^2 & -k_t \\ -k_t & 2k_t - 2I\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vartheta_{10} \\ \vartheta_{20} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Eigen Value Problem

$\Rightarrow \det\left([k] - \omega^2[m]\right) = (2k_t - I\omega^2)(2k_t - 2I\omega^2) - k_t^2 = 0$

$\Rightarrow 2I^2\omega^4 - 6Ik_t\omega^2 + 3k_t^2 = 0 \rightarrow$ biquadratica o II grado in ω^2;

con 2 variazioni di segno abbiamo 2 radici positive $\rightarrow$ OK! (Cartesio)

② SI CALCOLI LA FREQUENZA DI ANTIRISONANZA APPLICANDO UNA COPPIA ARMONICA AL PRIMO DISCO

↳ lo zero delle FRF

→ basta modificare l'equazione del moto I :

$$[k]\{\vartheta\} + [m]\{\ddot{\vartheta}\} = \{C_0\}e^{i\Omega t} \quad \text{dove} \quad \{C_0\} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \to \text{DISCO 1} \\ \to \text{DISCO 2} = \text{ZERO} \end{matrix}$$

→ dobbiamo calcolare le FRF per trovare lo zero ; $(\xi = 0)$

essendo la forzante armonica, la risposta a regime sarà armonica :

$$\{\vartheta(t)\} = \{\vartheta_0\}e^{i\Omega t}$$

derivando e sostituendo → $\left([k] - \omega^2[m]\right)\{\vartheta_0\} = \{C_0\}$ $\forall \Omega$ (non viene dato infatti)

in assenza di ξ basta trovare gli zeri delle FRF :

$$\{\vartheta_0(\omega)\} = \begin{Bmatrix} \vartheta_{10}(\omega) \\ \vartheta_{20}(\omega) \end{Bmatrix}$$ ciascun valore avrà risposta diversa

CRAMER

al posto dell'i-esima colonna sostituisco la colonna del termine noto

$$\vartheta_{10} = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & -k_t \\ 0 & 2k_t - 2I\omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2k_t - I\omega^2 & -k_t \\ -k_t & 2k_t - 2I\omega^2 \end{vmatrix}} = \frac{C_1(2k_t - 2I\omega^2)}{\det}$$

$$\vartheta_{10}(\omega_{AR}) = \frac{C_1(2k_t - 2I\omega_{AR}^2)}{\det} = 0 \Rightarrow \omega_{AR} = \sqrt{\frac{k_t}{I}} \Rightarrow \boxed{f_{AR} = \frac{\omega_{AR}}{2\pi}}$$

RECETTANZA

$$\alpha_{11}(\omega) = \frac{\vartheta_{10}(\omega)}{C_1}$$ si può fare anche così

Applico nuovamente Cramer:

$$\vartheta_{20} = \frac{\begin{vmatrix} 2k_t - I\omega^2 & C_1 \\ -k_t & 0 \end{vmatrix}}{\det} = \frac{k_t C_1}{\det} \neq 0 \quad \forall \omega$$ → qui non ci sono zeri e dunque non ci sono ANTIRISONANZE !!

→ gli ZERI SI TROVANO ANNULLANDO IL NUM, NON IL DEN !!

dunque ciascun valore vede un contributo di due modi, più o meno mescolati

il coefficiente $-0{,}0503$ è piccolo rispetto agli altri → siamo quasi in presenza di un modo ⇒ il secondo volano si muove prevalentemente come gli dice il modo I.

(4) CALCOLARE VALORI NUMERICI DELLE ω_r SECONDO I SEGUENTI DATI:

$I_1 = 40{,}5\ kg \cdot m^2$ $\qquad G = 80'000\ N/mm^2 = 80'000\ MPa$

$d = 10\ mm$

$l = 900\ mm$

$$\boxed{k_t = \frac{G J_p}{l}}$$

$$\to J_p = \int_{\mathcal{D}} r^2 dA = 2\pi \int_0^{d/2} r^2 r\, dr = \frac{2\pi}{4}\left[r^4\right]_0^{d/2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$\Rightarrow k_t = 87{,}266\ Nm \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 1{,}17\ rad/s \\ \omega_2 = 2{,}26\ rad/s \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \delta T - \delta V + \delta W_{nc} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i\right)$$

troviamo spesso scritta la variazione $\boxed{\delta(T-V) = \delta L}$ $\Rightarrow$ $\boxed{L \doteq T - V}$ FUNZIONE LAGRANGIANA

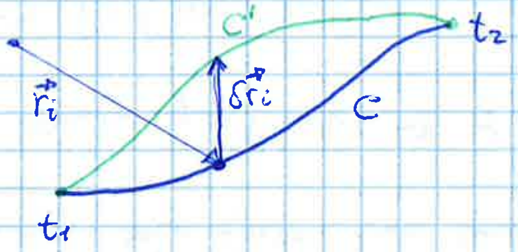
il secondo membro dipende dagli spostamenti virtuali $\delta\vec{r}_i$, che sono (ricorda):
- infinitesimi
- compatibili con le condizioni di vincolo
- indipendenti dal tempo ("istantanei")
- arbitrari, purché rispettino i vincoli

Adesso svolgo tale integrale:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta L + \delta W_{nc}\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i\right) dt$$

[scegliendo opportuni $\delta\vec{r}_i$: scelgo t_1 e t_2 in cui $\begin{cases} \delta\vec{r}_i(t=t_1) = 0 \\ \delta\vec{r}_i(t=t_2) = 0 \end{cases}$]

→ ovvero la curva c coincide in t_1 e t_2 con la traiettoria variata della massetta:



allora a secondo membro avrò $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i\right) dt = \sum_{i=1}^{N} \left[m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i\right]_{t_1}^{t_2} = 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta L + \delta W_{nc}\right) dt = 0}$$

PRINCIPIO DI HAMILTON (dopo Lagrange)

l'espressione dice che → • non dobbiamo preoccuparci di calcolare δW_c (molle e peso) → V
- non dobbiamo calcolare il lavoro virtuale delle f. inerzia → T
- dobbiamo calcolare solo δW_{nc}, ma in alcuni casi è semplice.

→ scrivere l'integrale serve solo a togliere il secondo membro, non dovremo svolgerlo.

lo risolvo per parti → funzione non derivata $\cdot \int$ funzione derivata − ecc...

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \cos^2\vartheta\,\dot\vartheta\,\delta\dot\vartheta\,dt = \underbrace{\cos^2\vartheta\,\dot\vartheta\,\delta\vartheta\Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\cos^2\vartheta\,\dot\vartheta\right)\delta\vartheta\,dt =$$

è lo spost. virtuale in t_1 e t_2 ⇒ 0

$$\left\{ \delta\vartheta(t_1) = \delta\vartheta(t_2) = 0 \right.$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} \left(-2\,\mathrm{sen}\vartheta\cos\vartheta\,\dot\vartheta^2 + \cos^2\vartheta\,\ddot\vartheta\right)\delta\vartheta\,dt\,;$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \Big\{ \Big[\cancel{-ml\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot\vartheta^2} - kl^2(1-\cos\vartheta)\sin\vartheta + mgl\cos\vartheta +$$

$$+ ml^2\,\cancel{2}\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot\vartheta^2 - ml^2\cos^2\vartheta\,\ddot\vartheta \Big]\delta\vartheta \Big\}\,dt = 0$$

questa funzione (integrale tra 2 t_1 e t_2 GENERICI) deve essere nulla affinché l'integrale sia nullo!!

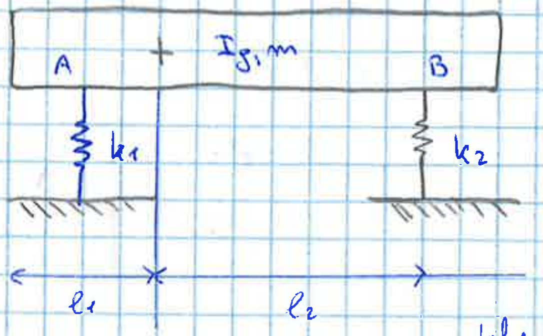
[La funzione integranda è proprio l'equazione del moto, il cui integrale è la soluzione nel tempo.]

Dividendo per $\cos\vartheta$

$$\left[ml\left(\sin\vartheta\,\dot\vartheta^2 - \cos\vartheta\,\ddot\vartheta\right) + mg - kl\,(1-\cos\vartheta)\,tg\vartheta = 0 \right] \quad \text{EQ. MOTO}$$

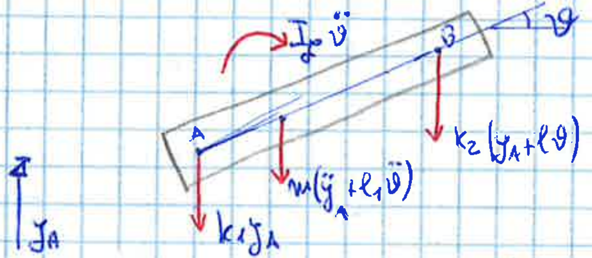
Nella variazione δL si trova sempre non solo la variazione di ϑ ma anche di $\dot\vartheta$!!

ESERCITAZIONE 15/11/2013 - MDOF2/1



sistema a 2 gdl, non c'è nessun vincolo geometrico tra A e B !!

① la prima scelta di coordinate del moto riguarda y_A e ϑ (DCL):



$\sin\vartheta \simeq \vartheta$
$\cos\vartheta \simeq 1$

$y_B \simeq y_A + l\vartheta$ (ipotesi PICCOLI SPOSTAMENTI)

$y_G \simeq y_A + l_1\vartheta$

$\downarrow)\ k_1 y_A + m(\ddot{y}_A + l_1\ddot{\vartheta}) + k_2(y_A + l\vartheta) = 0$

conviene scegliere un appropriato polo dei momenti

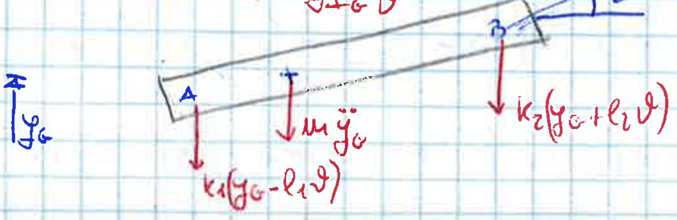
$A))\ I_g\ddot{\vartheta} + m(\ddot{y}_A + l_1\ddot{\vartheta})\,l_1 + k_2(y_A + l\vartheta)\,l = 0$ (PICCOLI SPOST. $\cos\vartheta \simeq 1$, $\sin\vartheta \simeq \vartheta$)

organizzando in forma matriciale avrò

$$\begin{bmatrix} m & ml_1 \\ ml_1 & I_G + ml_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_A \\ \ddot{\vartheta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & k_2 l \\ k_2 l & k_2 l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_A \\ \vartheta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

sono matrici simmetriche -> posso applicare l'analisi modale; tanto meglio se fossero diagonali, ne sarebbero 2 sistemi DISACCOPPIATI a 1 gdl.

② la seconda scelta riguarda y_G e ϑ (DCL):



$y_B \simeq y_G + l_2\vartheta$ PICCOLI SPOSTAMENTI

$y_A \simeq y_G - l_1\vartheta$

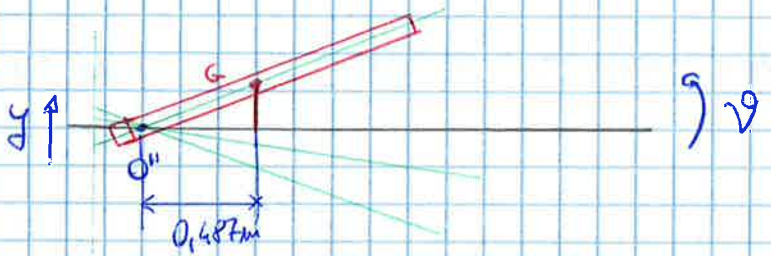
prendendo $\vartheta_0 = 2$ otterrò un'altra posizione, ma il rapporto è sempre 2,862 m

=> HO UNA FORMA MODALE -> relativa al modo I, è un'oscillazione, con modo O'!! O' sarà un CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE

$$\frac{y_G}{\vartheta_0} = \text{cost.} = 2{,}862\ m \quad \rightarrow \text{se } \vartheta_0 = 2 \Rightarrow \text{raddoppia } y_G \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{PICCOLI} \\ \text{SPOSTAMENTI} \end{array} \right.$$

=> il modo del primo modo è a 2,862 m a destra del baricentro

RAPPRESENTAZIONE MODO II



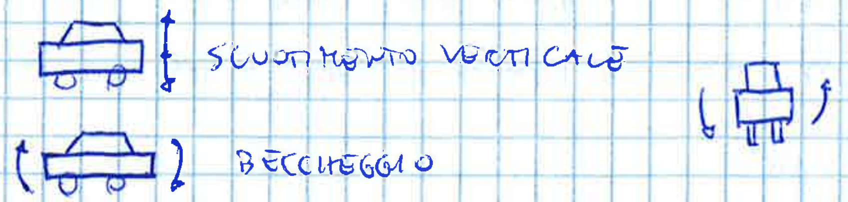
analogamente.

le forma modale stavolta è questa e il modo è O'', a 0,487 m a ~~destra~~ sinistra di G.

$$0{,}487 = y_0/\vartheta_0$$

In Dinamica dell'Autovettura si parla, per classificare i modi, di BECCHEGGIO e SCUOTIMENTO VERTICALE (anche se per essere tale O' dovrebbe andare all'infinito) e ROLLIO

=> ma in realtà è tutto mescolato.



- CALCOLARE SMORZ. VISCOSO PROPORZIONALE

$\alpha = \beta = 0{,}2$; $\quad [C] = \alpha[M] + \beta[K] \Rightarrow$

DOMANDA TEORIA

$$\boxed{\xi_r = \frac{\alpha}{2}\frac{1}{\omega_r} + \frac{\beta}{2}\omega_r} \quad \begin{array}{l} \nearrow \xi_1 = 62{,}83\% \\ \searrow \xi_2 = 95{,}26\% \end{array}$$

Vedi sul libro (no, su appunti)

$$\xi_r = \frac{c_r}{2m_r\omega_r} = \frac{\alpha m_r + \beta k_r}{2m_r\omega_r} = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\omega_r} + \frac{1}{2}\beta\omega_r$$

- RISPOSTA LIBERA

~~la~~ soli

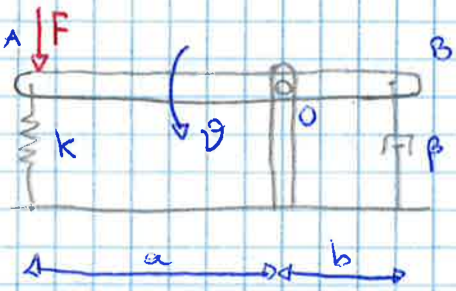
per linearizzare occorre Taylor (Mac-Laurin in questo caso)

$$\Rightarrow F_x(x,y) = F_x(0,0) + \frac{\partial F_x}{\partial x}(0,0)\,x + \frac{\partial F_x}{\partial y}(0,0)\,y \rightarrow \text{linearizzato} \quad ax+by$$

$$F_x(0,0) = 0$$

$F_x \simeq -k\cos^2\alpha\, x - k\sin\alpha\cos\alpha\, y$ espressione coerente

ESERCIZIO 4 - SDOF 1



DATI

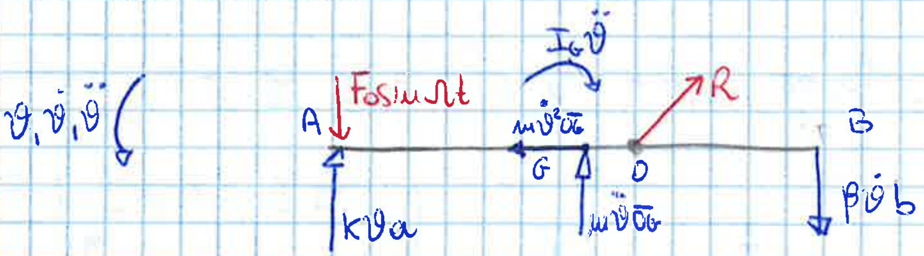
$a = 1{,}2\ m$ $\quad \beta = 2241\ Ns/m$

$b = 0{,}8\ m$ $\quad F_0 = 200\ N$

$m = 80\ kg$ $\quad f = 13\ Hz$

$k = 50\ kN/m$

1) Disegno il DCL dell'asta



essendo la m uniformemente distribuita, il G è al $\frac{\ell}{2}$ da A

le ~~forze~~ azioni d'inerzia vanno sempre ricondotte al baricentro; le azioni d'inerzia qui sono $\underline{I_G\ddot{\vartheta}}$, coppia d'inerzia al baricentro, e $\underline{m\ddot{\vartheta}\overline{OG}}$, componente tangenziale delle forze d'inerzia e $\underline{m\dot{\vartheta}^2\overline{OG}}$, componente ~~[illegible]~~ (centrifuga) delle forze d'inerzia.

2) Equazione del moto (piccole oscillazioni, $\sin\vartheta \simeq \vartheta$ e $\cos\vartheta \simeq 1$)

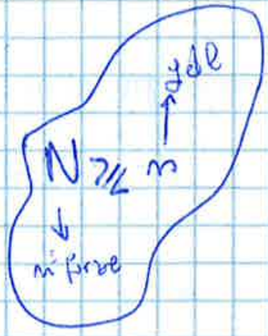
$$O) \quad I_G\ddot{\vartheta} + m\ddot{\vartheta}\overline{OG}^2 + k\vartheta a^2 + \beta\dot{\vartheta}b^2 = aF_0\sin\Omega t$$

$$I_O = I_G + m\overline{OG}^2 \quad \text{per Huygens - Steiner}$$

$$\Rightarrow \quad I_O\ddot{\vartheta} + k\vartheta a^2 + \beta\dot{\vartheta}b^2 = aF_0\sin\Omega t$$

RIEPILOGO 21/11/2013 13

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \delta W_{nc})\, dt = 0$$ PRINCIPIO DI HAMILTON $L = T - V$



ciascun $\vec r_i = \vec r_i (q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ dove $q_k = q_k(t)$

e lo spostamento virtuale assume questa forma $\delta \vec r_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec r_i}{\partial q_k}\delta q_k$

esprimo il lavoro delle forze n.c. in questa forma:

$$\delta W_{nc} = \sum_{i=1}^{N} \vec F_{i,nc} \cdot \delta \vec r_i = \sum_{i=1}^{N} \vec F_{i,nc} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec r_i}{\partial q_k} \delta q_k \right) =$$

inverto l'ordine di somma (posso)

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} \vec F_{i,nc} \cdot \frac{\partial \vec r_i}{\partial q_k} \right)}_{Q_k} \delta q_k$$

Q_k → FORZA GENERALIZZATA o

COMPONENTE LAGRANGIANA DELLE F NON CONSERVATIVE

$$\Rightarrow \boxed{\delta W_{nc} = \sum_{k=1}^{n} Q_k\, \delta q_k}$$ → all'interno di Hamilton ...

Q_k → qui ci sono tutte le forze (attive) interne ed esterne agenti sul sistema, purché siano non conservative. Prendo le forze attive n.c. e faccio un prod. scalare, ovvero una proiezione ⇒ le faccio diventare delle COMPONENTI

$F_{i,nc}$ → sono N

Q_k → sono n (n° gdl, ricorda)

DEF

$$\dot{\vec r}_i \doteq \frac{d\vec r_i}{dt} = \frac{\partial \vec r_i}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{\partial \vec r_i}{\partial q_n}\frac{dq_n}{dt} + \frac{\partial \vec r_i}{\partial t} =$$

→ $\vec r_i$ dipende dal tempo, non è uno spost. virtuale e devo metterla stavolta!

der. parziale perché ho tante q_k

der. totale perché le q_k dipendono solo dal tempo