



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1847A -

ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Aimar Mauro

MATERIA: Scienza delle costruzioni II (Teoria + esercizi) prof.
Chiaia, Saporà

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

TELAI

1 Telaio: è una struttura a MOLTI GRADI DI IPERSTATICITÀ.

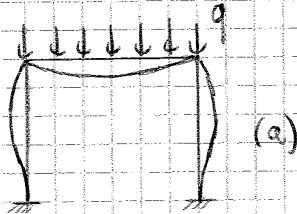
2 In questo ambito, si trattano i telai piani, cioè telai dove tutti gli elementi strutturali che giacciono nello stesso piano e il carico è applicato in tale piano.

In tal modo nascono solo taglio, momento flettente e sforzo normale.

↳ questo x semplicità, mentre in realtà il carico è quasi sempre fuori piano e nascono altre sollecitazioni come il momento torcente.

I telai si dividono in 2 gruppi

→ telai a nodi fissi (t.a.n.f.)

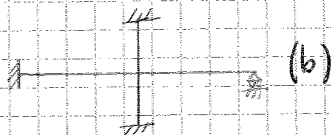


In essi i NODI DI TELAI (cioè i punti di convergenza delle aste) NON SUBISCONO SPOSTAMENTI NEL PIANO. Questa definizione si basa sull'ipotesi di NON DEFORMABILITÀ ASSIALE DELLE ASTE (ipotesi base). cioè significa che qui si ragiona con strutture snelle e nell' deformazione domina il momento.

↳ infatti si parla di studio dei telai inflessi.

La struttura (a) è un t.a.n.f. In realtà, se si applica un carico orizzontale, il telaio non è più a nodi fissi x via della configurazione di carico (i nodi si spostano).

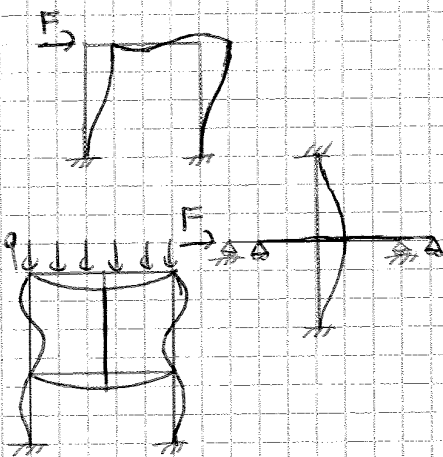
⇒ esistono situazioni in cui un telaio è a nodi fissi per via della configurazione di carico.



Quella struttura in particolare è t.a.n.f. se si è in condizioni di simmetria di carico.

La struttura (b) è t.a.n.f. in ogni caso.

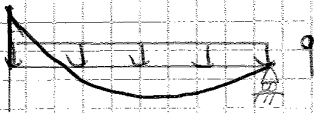
→ telai a nodi spostabili (t.a.n.s.)



In (a) i nodi del traverso si spostano verso destra.

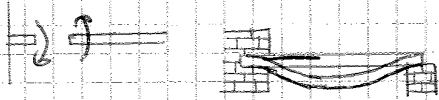
In (b), con una forza orizzontale, l'asta orizzontale si sposta.

In (c), anche se le colonne non si schiacciano (i nodi sono alla stessa posizione), i nodi centrali della colonna manca si spostano.



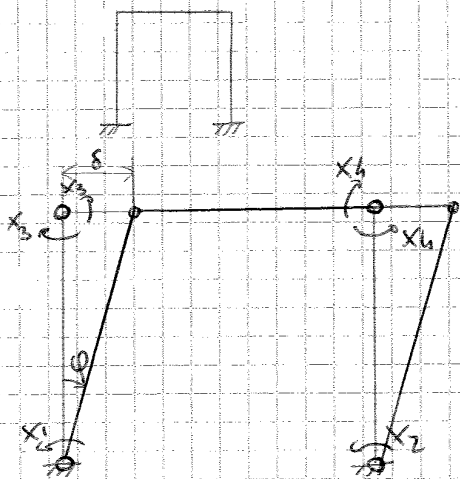
Molte si sa che il nodo è un'astrazione (mentre la trave esiste) ma esistono norme sui nodi. Ad es. in una mensola si può avere

→ momento orario di nodo



→ momento antiorario nella trave e dunque le fibre tese sono sopra.

4 RICONOSCIMENTO DI UN TELAIO



① Si inserisce una CERNIERA IN OGNI INCASTRO ESTERNO E NODO TRA LE ASTE e si ottiene la struttura principale

② Si esegue uno STUDIO DEL GRADO DI STATICITÀ della struttura ottenuta

→ se la struttura principale è ipostatica, allora il telaio è a nodi fissi

→ se la struttura principale è labile, allora il telaio è a nodi spostabili

In questo caso, si hanno 3 aste nel piano (→ 9 g.l.) e 4 vincoli doppi (→ 8 g.v.). Dunque è una volta labile e si ha una f. d. n. s.

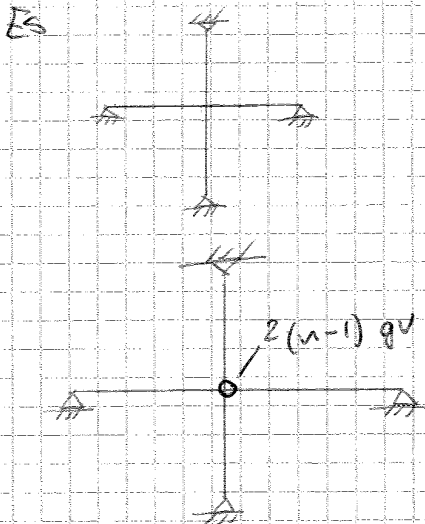


risolvere δ , oltre alle incognite iperstatiche X_i , c'è un'incognita cinematica, che può essere φ o δ . La scelta è indifferente perché la struttura è 1 volta labile, dunque se in genere si lavora con φ perché nelle equazioni lo si fa lavorare con il momento. Le quantità sono legate dalla relazione

$$\delta = h \tan \varphi$$

Perché si lavora con strutture massicce e rigide, anche se ci sono spostamenti δ e un'angolazione, questi sono piccoli e quella verticale è del 1° ordine, a cui si può confondere l'arco con la tangente

$$\delta = h \varphi$$



Si consideri un telaio a 8 gradi di vincolo e 3 gradi di libertà (struttura 1 volta labile nel piano), a cui è 5 volte iperstatico.

Inserendo una cerniera in ogni nodo di incastro si nota che ci sono 12 g.l. e 16 g.v. Così è 2 volte iperstatico (ha infatti due iperstaticità assiali) e si parla di f. d. n. f.

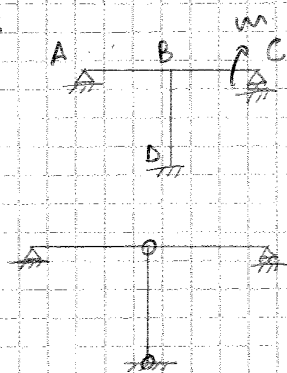
Telai a nodi fissi

ISTUDIO DEL T. A. N. F.

- I) VERIFICA DEL T. A. N. F. : si degrada il telaio ponendo una cerniera sui nodi interni e sugli incastri esterni
- II) Si pongono le INCOGNITE IPERSTATICHE
- III) Si introducono le EQUAZIONI DI CONGRUENZA, applicate sui nodi degradati

Come in cognita iperstatica conviene scegliere le coppie perché con esse innanzitutto è immediato tracciare il diagramma di momenti (dominate nelle strutture in acciaio, un po' meno nel legno a via dell'instabilità delle fibre, nelle strutture massicce in cemento armato conta anche il taglio).
 Inoltre, con strutture complesse conviene scegliere incognite omogenee e scegliendo delle forze, si dovrebbero sopprimere dei vincoli e dare spostamenti più complessi.
 Trovato poi il momento agli estremi, negli altri punti lo si trova graficamente.

Es



Si consideri una struttura 3 volte iperstatica soggetta a una coppia oraria nel nodo C.

- I) Si degradano gli incastri esterni, se ci sono, e si trasformano in cerniere. I nodi x i nodi interni. Si studia poi il grado di vincolo complessivo della struttura (degradata)

$$\left. \begin{matrix} 4 q_e \\ 4 q_v \end{matrix} \right\} \rightarrow \begin{matrix} \text{i vincoli sono bene disposti,} \\ \text{x cui si ha un t. a. n. f.} \end{matrix}$$

- II) Si pongono sui vincoli degradati le incognite iperstatiche

- III) Si scrivono le equazioni di congruenza

Nodo B)

In questo nodo d'incastro, cinematicamente si sa che, se il nodo ruota, tutte le aste convergenti ruotano allo stesso modo e rimangono perpendicolari tra di loro. Ponendola a cerniera, si ha una struttura sum calata e con l'equazione di congruenza si stabilisce la situazione iniziale, cioè che l'asta ① ruota allo stesso modo dell'asta ②.



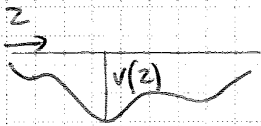
In teoria, si dovrebbero scrivere 3 equazioni di congruenza, ma la III è combinazione lineare delle altre 2.

$$\begin{aligned} \varphi_{BA} &= \varphi_{BC} \\ \varphi_{BA} &= \varphi_{BD} \end{aligned}$$

→ I indice x il modo in cui si legge la rotazione e il II x la trave

Nodo D) Ci c'è un incastro e dunque

$$\varphi_{DB} = 0$$

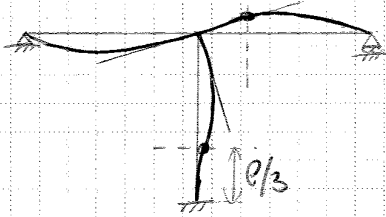


A questo punto, si può disegnare la deformata usando l'equazione della linea elastica. Detta $v(z)$ la deformata della trave perpendicolare al suo asse, si ha

$$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M(z)}{EI} \rightarrow \text{equazione base x le travi inflesse}$$

Per disegnare la, la prima informazione importante è sapere se i nodi si spostano.

Serve poi il diagramma di momento che indica dove le fibre sono tese e i punti di flesso ($M=0$) dove la curvatura cambia di segno.



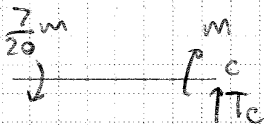
In B arriva ruotato perché non c'è un incastrato perfetto (non è libera la rotazione ma non si arriva perfettamente dritti).

In AB le fibre tese sono tutte sotto e in A c'è rotazione (la derivata seconda è nulla ma non la prima).

In B si manda la tangente, x via della perpendicolare al nodo.

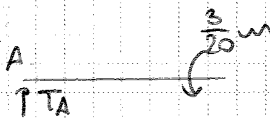
A questo punto si può fare il diagramma di taglio, che è costante (è la derivata del momento).

Il valore si ottiene ragionando in termini di equilibrio



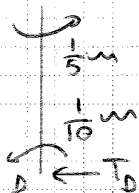
→ asta BC

$$T_c = \frac{27}{20} \frac{m}{l}$$



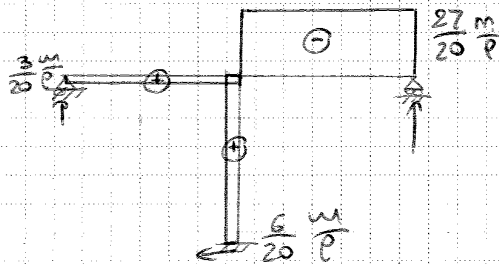
→ asta AB

$$T_A = \frac{3}{20} \frac{m}{l}$$



→ asta BD

$$T_D = \frac{3}{10} \frac{m}{l}$$



→ anche il taglio è più forte dove ci sono i carichi (si estingue altrove)

→ si aggiungono anche le azioni ai vincoli (x le fondazioni)

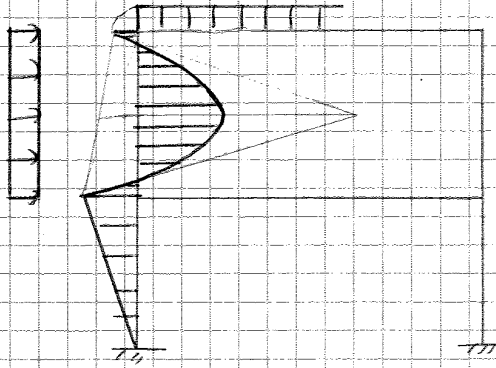
Si ottiene così

$$-\frac{X_1 P}{3EI} - \frac{X_2 P^2}{16EI} + \frac{9 P^3}{384 EI} = \frac{X_1 P}{3EI} + \frac{X_1 P}{6EI}$$

$$\frac{X_1 P^2}{16EI} + \frac{X_2 P^3}{48EI} - \frac{5 P^4}{384 2EI} = 0$$

Da qui si ottiene il diagramma di momento

→ qui è costante × simmetria

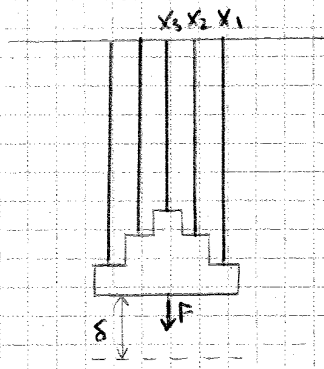


OSSERVAZIONE: se la biella ha rigidità EA/l , questa non è inestensibile ma si può comprimere o allungare e si direbbe

$$u_F = \frac{X_2 P}{EA} \cdot \frac{l}{2} \rightarrow \text{lo spostamento è metà dell'accorciamento/allungamento dell'asta}$$

3 CASI DI APPLICAZIONE

I) SISTEMA DI BIELLE TESI



Si consideri un sistema di 5 aste incernierate (a cui sono soggette a solo sforzo normale) vincolate in modo rigido alla testa e al piede.
In questo modo, applicando una forza verso il basso, tutte si spostano ugualmente.
Poiché la lunghezza è diversa, la rigidezza estensionale è diversa poiché vale

$$\frac{EA}{l} \rightarrow \text{se } l \text{ è minore, è più rigida}$$

Inoltre la struttura è simmetrica e caricata simmetricamente (simmetria a 2 a 2)

Si come gli spostamenti sono rigidi (tutto si sposta di δ), lo spostamento δ_i dell' i -esima asta vale δ e si scrive l'equazione di congruenza attraverso la relazione di De Saint Venant

$$\delta_i = \frac{X_i l_i}{E_i A_i} = \delta$$

All'equazione di congruenza si associa l'equazione di equilibrio, che dice che la forza è uguale alle reazioni

$$F = \sum X_i$$

Ora si ricava la reazione X_i nell'equazione di congruenza

$$X_i = \frac{E_i A_i}{l_i} \delta$$

Così si scrivono le forze in funzione degli spostamenti. Il metodo però vuole l'equazione di equilibrio e dunque il passo chiave è SCRIVERE L'EQUAZIONE DI EQUILIBRIO IN TERMINI DI SPOSTAMENTI. Qui c'è solo un'incognita.

$$F = \sum \frac{E_i A_i}{l_i} \delta$$

Da qui si ricava δ

$$\delta = \frac{F}{\sum \frac{E_i A_i}{l_i}} = \frac{F}{K}$$

Con K si indica la rigidezza totale del sistema e si nota che in sistemi in parallelo la rigidezza totale è somma delle singole rigidezze (in questo caso, estensionali).

Questa è l'equazione risolutiva.

In realtà, interessa vedere se le aste reggono lo sforzo. Allora si sostituisce nell'equazione di congruenza e si ottiene

$$\begin{aligned} X_i &= \frac{E_i A_i}{l_i} \delta = \\ &= k_i \delta = \frac{k_i}{K} F \end{aligned}$$

Il sistema risolvibile ha 2 equazioni e 2 incognite e la matrice dei coefficienti 2×2 si dice matrice di rigidezza

$$\begin{bmatrix} \sum \frac{E_i A_i}{P_i} & \sum \frac{E_i A_i}{P_i} x_i \\ \sum \frac{E_i A_i}{P_i} x_i & \sum \frac{E_i A_i}{P_i} x_i^2 \end{bmatrix}$$

PROPRIETÀ: la matrice di rigidezza è simmetrica nei sistemi elastici (si dimostra con il teorema di Betti)

Risolvendo il sistema, si trova la coppia (δ, φ) delle incognite e si ricavano gli sforzi X_i con le equazioni di congruenza.

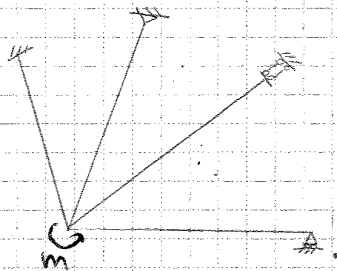
OSSERVAZIONE (I): lo stesso ragionamento vale anche a aste compresse

OSSERVAZIONE (II): i sistemi tesi, in ambito civile, sono tipicamente sistemi sospesi (funi di ponte ad arco). I sistemi compressi sono colonne.



(III) SISTEMA DI TRAVI CONVERGENTI IN UN NODO INCASTRO

→ nei telai è importante il momento flettente, dove le aste sono costrette a ruotare



Si consideri un sistema di n aste convergenti in un nodo soggetto a momento M e aventi diversi vincoli esterni, cioè un incastro, una cerniera, un doppio pendolo con asse efficace parallelo all'asse e carrello con asse efficace parallelo alla coppia.

In questo caso, intervengono le equazioni di congruenza con rigidezza flessionale, cioè conosciuta il momento d'inerzia.

In particolare, la rotazione φ_i della generica asta è uguale all'angolo χ_i del momento scaricato sull'asta diviso la rigidezza flessionale e un coefficiente c_i dipendente dalla RIGIDEZZA DEI VINCOLI

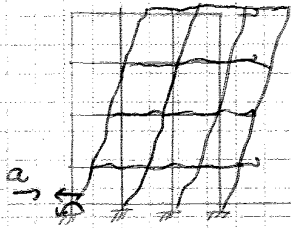
↓
la rigidezza a flessione dipende anche dal vincolo opposto, e la diversa opposizione alla rotazione dell'asta (è libera o non). Ad es, con un doppio pendolo, ci si può deformare una biacca arrivare orizzontale e nasce una reazione incognita iperstatica



$$\varphi_i = \frac{\chi_i P_i}{c_i E_i I_i} = \varphi$$

Si nota che il più rigido è l'incastro (ha c maggiore) e il più morbido è il doppio pendolo.

Es



In presenza di azioni sismiche, c'è un'accelerazione, le masse si eccitano e si mettono in movimento, generando un'azione schematizzabile con una forza orizzontale. Così, al fondo, arrivano un taglio e momento molto forti (dipendenti dallo spostamento). Pertanto si mettono degli isolatori che trasformano gli incastri in doppio pendolo con una riduzione di c di 4 a 1.

⇒ si accetta uno spostamento maggiore ma si nota che le forze al piede diminuiscono di 4 volte.

L'equazione risolutiva è quella di equilibrio

$$m = \sum X_i$$

Si può notare che c'è solo 1 nodo e dunque una sola incognita spostamento (anziché 3 incognite di forza), poiché il nodo resta rigidamente, si esprime dunque l'equazione di equilibrio in termini dell'incognita φ .

$$X_i = \frac{c_i E_i I_i}{p_i} \varphi \quad \Rightarrow \quad m = \sum \frac{c_i E_i I_i}{p_i} \varphi = \varphi \sum \frac{c_i E_i I_i}{p_i}$$

Si ricava ora l'incognita cinematica

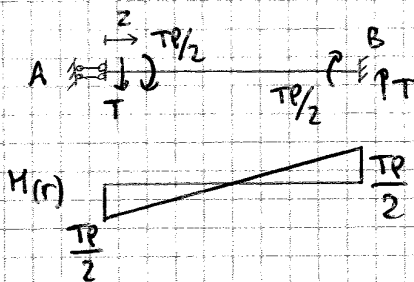
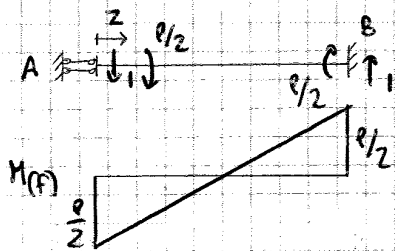
$$\varphi = \frac{m}{\sum \frac{c_i E_i I_i}{p_i}} = \frac{m}{\sum k_i}$$

↓
somma delle rigidità flessionali (data non solo dalla trave ma anche dal grado di vincolo dell'altro estremo)

Da qui si ricavano le aliquote di coppia

$$X_i = m \frac{\frac{c_i E_i I_i}{p_i}}{\sum \frac{c_i E_i I_i}{p_i}} = m \frac{k_i}{K} \quad \rightarrow \text{L'aliquota è proporzionale alla rigidità dell'asta e qui soffre di più l'asta incastata (v. esempio)}$$

$$X_i = m \frac{k_i}{K}$$



Per calcolare l'abbassamento in A, si applica il PLV adottando

→ come sistema staticamente ammissibile, la struttura soggetta a carico unitario verticale in A, diretto verso il basso

→ come sistema cinematicamente ammissibile, la struttura soggetta ai carichi reali

I lavori virtuali valgono così

$$\delta_{ve} = F_e \cdot \delta_e + R_v \cdot \delta_v = 1 \cdot \delta_A = \delta_A$$

$$\begin{aligned} \delta_{vi} &= \int_s M(r) \cdot \chi(r) ds = \\ &= \int_s M(r) \cdot \frac{M(r)}{EI} ds = \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^l \left(\frac{l}{2} - z\right) \cdot \left(\frac{TP}{2} - Tz\right) dz = \\ &= \frac{T}{EI} \int_0^l \left(\frac{l}{2} - z\right)^2 dz = \frac{TP^3}{12EI} \end{aligned}$$

Uguagliando i due lavori, si ottiene l'abbassamento

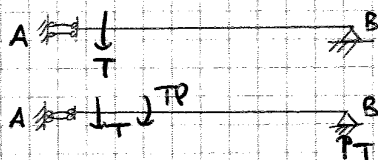
$$\delta_A = \frac{TP^3}{12EI}$$

Dal confronto tra δ_A e l'espressione generale dell'abbassamento, si ottiene c.

$$c(\text{incastro}) = 12$$

© SCHEMA APPOGGIO

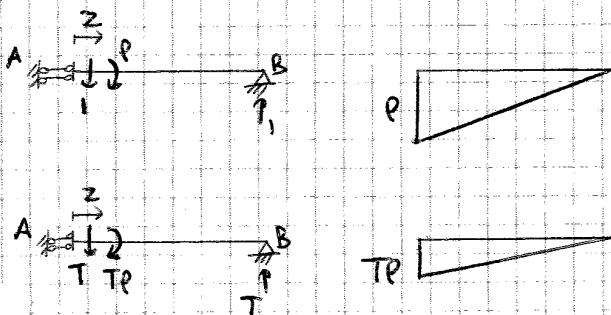
Lo schema con la cerniera e quello con il carrello sono equivalenti.



Focalizzandosi sullo schema con la cerniera, una volta risolta la struttura, si calcola l'abbassamento in A esattamente alla stessa modo di prima. Si valutano dunque i lavori virtuali

$$\delta_{ve} = 1 \cdot \delta_A = \delta_A$$

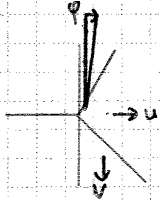
$$\begin{aligned} \delta_{vi} &= \int_s M(r) \chi(r) ds = \\ &= \int_s M(r) \cdot \frac{M(r)}{EI} ds = \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^l (l-z)(TP-Tz) dz = \frac{TP^3}{3EI} \end{aligned}$$



Calcolo automatico dei telai

1 Questa è una formulazione matriciale x il calcolo di telai, impostata nello spirito del metodo degli spostamenti.

Quando il grado di iperstaticità è alto, infatti, conviene il metodo degli spostamenti in cui si scrivono le equazioni di equilibrio con incognite di spostamento.



Es in un nodo a 5 aste, compaiono 3 incognite, cioè

2 traslazioni u, v 1 rotazione φ

Se il nodo è incernierato, date n aste convergenti, il vantaggio del metodo degli spostamenti è minore perché ci sono

2 traslazioni u, v n rotazioni indipendenti

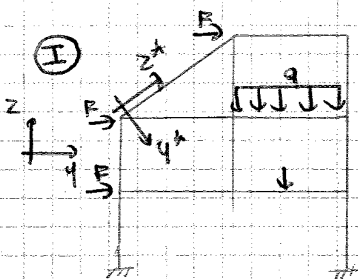
⇒ in strutture incernierate il vantaggio computazionale del metodo degli spostamenti diminuisce

Una situazione mista prevede un'asta incastrata e n aste libere (cine' possono ruotare liberamente) e si hanno

$3 + n$ incognite di spostamento

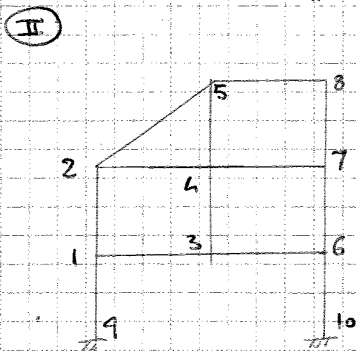
In genere, nell'ingegneria civile si hanno quasi sempre strutture con nodi incastrati (cemento armato, acciaio - eccetto travi reticulari che sono incernierate e c'è solo sforzo normale).

2 METODO DI CALCOLO



Dato la struttura, si sceglie un SISTEMA DI RIFERIMENTO GENERALE zy , rispetto al quale ogni asta ha un SISTEMA DI RIFERIMENTO LOCALE z^*y^* (così il taglio è parallelo a y^* e il momento è parallelo a z^*).

Tutte le grandezze ottenute saranno trasformate al sistema di riferimento zy , quando si assembleranno le diverse componenti.

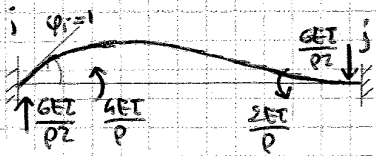


Dopo che, occorre NUMERARE I NODI (fatto automaticamente).

Per la velocità della soluzione, quando ci sono molti nodi, bisogna numerarli opportunamente in modo da costruire una matrice di rigidezza il più possibile addensata attorno alla diagonale principale. Così bisogna memorizzare meno numeri e i conti sono più rapidi (convenienza computazionale).

Il criterio di base è il criterio di minima distanza numerica tra nodi vicini:

i nodi geometricamente vicini devono avere la numerazione più possibile vicina

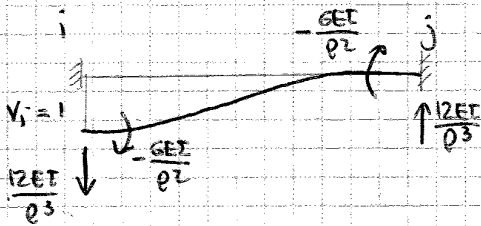


Per valutare un'altra colonna, si scanette a sinistra e si controlla cosa succede applicando uno spostamento

$$\varphi_i = 1$$

Si ruota dunque l'asta di una grandezza unitaria all'estremo i e si studia la reazione che nasce in i e j e effetto di tale rotazione. Si ottiene un insieme di momenti e tagli (dove interviene il parametro c). La colonna corrispondente è così fatta da

$$\begin{pmatrix} \frac{4EI}{p} \\ -\frac{4EI}{p^2} \\ 0 \\ \frac{2EI}{p} \\ \frac{6EI}{p^2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \varphi_i \\ v_i \\ w_i \\ \varphi_j \\ v_j \\ w_j \end{matrix}$$



Si considera poi lo spostamento verticale unitario (positivo se verso il basso)

$$v_i = 1$$

Si genera sempre un ~~matr~~ coppia accompagnata da momento, dove però forma del tipo $1/p^2$ perché compare in essa uno spostamento verticale e bisogna ottenere sempre una coppia come risultato.

Procedendo in questo modo, si costruisce v colonne la matrice di rigidezza, in cui

→ la III colonna corrisponde allo spostamento assiale

→ la I colonna corrisponde alla rotazione

→ la II colonna corrisponde allo spostamento verticale

→ la II parte si lega all'imporre gli spostamenti in j

Le colonne indicano quali sono le risposte strutturali agli spostamenti imposti e dunque le reazioni agli incastri, ossia da il comportamento della struttura AGLI INCASTRI.

A questo punto, conviene scrivere la matrice raggruppando i termini del nodo i e j . Indicando con Q le sollecitazioni, con δ gli spostamenti ai nodi e F le reazioni vincolari dovute al carico, si può scrivere

$$\begin{pmatrix} Q_i^* \\ Q_j^* \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta_i^* \\ \delta_j^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} F_i^* \\ F_j^* \end{pmatrix}$$

→ apice "*" perché queste quantità sono lette nel sistema di riferimento locale

Si evidenziano i termini noti e si scrive in forma più compatta

$$[k_e] \{ \delta_e^* \} = \{ Q_e^* \} + \{ F_e^* \}$$

→ pedice "e" perché riguarda la trave e

Questa è l'equazione risolvente del metodo degli spostamenti x una trave, scritta nel sistema di riferimento locale.
Il software si calcola queste relazioni x ciascuna trave.

IV) Assemblaggio:

dopo aver calcolato le relazioni, bisogna metterle tutte insieme. Ciò avviene in 3 passaggi

- 1) Rotazione del sistema di riferimento, x passare da quello locale al globale. Dunque si riporta tutte le quantità nelle equazioni nel sistema di riferimento globale, in modo che tutte le travi abbiano matrice e vettori scritti in un unico riferimento.

Esso è un problema puramente geometrico, in cui interviene la matrice di rotazione $\theta \times \theta$

$$[N] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

il I e IV elemento sono pari a 1 perché le quantità rotazionali non sono affette dalla rotazione del sistema

In questo modo, i vettori si possono scrivere come

$$\{ \delta_e^* \} = [N] \{ \delta_e \}$$

$$\{ Q_e^* \} = [N] \{ Q_e \}$$

$$\{ F_e^* \} = [N] \{ F_e \}$$

→ la matrice fornisce le quantità locali come ruotare rispetto a quelle globali

Sostituendo nell'equazione, si ottiene

$$[k_e][N] \{ \delta_e \} = [N] (\{ Q_e \} + \{ F_e \})$$

Si premoltiplica x ${}^+ [N]$

$$({}^+ [N][k_e][N]) \{ \delta_e \} = \{ Q_e \} + \{ F_e \}$$

→ ${}^+ [N][N] = [I]$

Si sostituiscono i termini nell'equazione

$$({}^+ [N] [k_e] [N]) [A_e] \{\delta^e\} = [A_e] (\{Q^e\} + \{F^e\})$$

Si pre-moltiplica $\times {}^+ [A_e]$

$$({}^+ [A_e] {}^+ [N] [k_e] [N] [A_e]) \{\delta^e\} = \{Q^e\} + \{F^e\}$$

Questa è l'equazione relativa a una trave ma ora è quadrata (dimensioni $n \times n$). Si nota che la forma è identica all'equazione ottenuta prima e cambia solo il termine tra parentesi. Questo rappresenta la matrice di rigidità $[k^e]$ scritta nel sistema di riferimento globale, espansa a dimensione n e sempre riferita all' i -esima trave.

$$[k^e] \{\delta^e\} = \{Q^e\} + \{F^e\}$$

© Somma delle relazioni

Visto che ogni trave ha un'espressione nello stesso sistema di riferimento e di dimensioni $n \times n$, si possono sommare le relazioni e arrivare a una matrice globale di rigidità.

Prima di procedere alla somma, si ingloba nel vettore $\{\delta\}$ $n \times 1$ tutte le incognite del problema. Si nota che la relazione non cambia perché in ogni $\{\delta^e\}$ si aveva tutto zero tranne nei 6 spostamenti di competenza.

$$[k^e] \{\delta\} = \{Q^e\} + \{F^e\}$$

Si sommano le equazioni

$$\left(\sum_e [k^e] \right) \{\delta\} = \sum_e (\{Q^e\} + \{F^e\})$$

Quando si sommano le travi, le caratteristiche della sollecitazione in ogni nodo si elidono poiché, a l'equilibrio del nodo, in ogni nodo vale che

$$\sum_e \{Q^e\} + \{F\} = 0$$

Sostituendo questa espressione, si ottiene

$$\left(\sum_e [k^e] \right) \{\delta\} = \{F\} + \{F_{eq}\}$$

I termini a II membro sono vettori di forze nodali

$\rightarrow \{F\} = \text{FORZE REALMENTE APPLICATE SUI NODI (forze concentrate)}$

Sum nodo, infatti, ci sono caratteristiche della sollecitazione che, in assenza di forze concentrate, si annullano a equilibrio.

Se però sul nodo agisce una forza o una coppia concentrata, la somma delle sollecitazioni deve dare quella quantità, che è proprio nel vettore $\{F\}$.

RISOLUZIONE DEL SISTEMA:

si è notato che anche se l'incognita sono gli spostamenti, alcuni sono noti perché i punti sono vincolati.

⇒ si può fare una PARTIZIONE DEL SISTEMA, evidenziando gli spostamenti veramente incogniti.

si nota però che la dimensione matematica è la stessa perché nei nodi di vincolo con spostamento noto, c'è come incognita la reazione vincolare.

Si divide dunque la matrice $[k]$ in 4 sottogruppi, poi che si divide $\{\delta\}$ in 2 gruppi

→ spostamenti liberi δ_L (vere incognite)

→ spostamenti ~~tra~~ dei punti vincolati δ_V (noti)

$$\begin{bmatrix} k_{LL} & k_{LV} \\ k_{VL} & k_{VV} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta_L \\ \delta_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_L \\ F_V \end{pmatrix}$$

Anche i termini noti si sono divisi in 2, con F_L noto e F_V non noto.

In tal modo, il prodotto algebrico si riduce (le vere incognite che interessano sono δ_L) e si può scrivere il prodotto righe \times colonne \times la I riga

$$[k_{LL}]\{\delta_L\} = \{F_L\} - [k_{LV}]\{\delta_V\}$$

Si ricavano dunque gli spostamenti liberi

$$\{\delta_L\} = [k_{LL}]^{-1} (\{F_L\} - [k_{LV}]\{\delta_V\})$$

$$\{\delta_L\} = [k_{LL}]^{-1} (\{F_L\} - [k_{LV}]\{\delta_V\})$$

Si nota che, se gli incastri sono perfetti, $\{\delta_V\} = 0$ e si ottiene

$$\text{Incastri perfetti: } \{\delta_L\} = [k_{LL}]^{-1} \{F_L\} \rightarrow \text{il problema numerico matriciale è ridotto (dimensione minore) e si ottiene } \delta_L$$

In realtà, il dato che interessa quelle strutture è F_V e dunque si applica l'equazione della II riga

$$\{F_V\} = [k_{VL}]\{\delta_L\} + [k_{VV}]\{\delta_V\}$$

$$\downarrow \\ \text{se } \{\delta_V\} = 0, \text{ si ha } \{F_V\} = [k_{VL}]\{\delta_L\}$$

Nell'espressione di F_V occorre poi dividere la parte equivalente al carico esterno e la parte effettiva sui nodi vincolati. Si deve cioè sottrarre dalla soluzione il carico equivalente

$$\{Q_V\} = \{F_V\} - \{F_V^0\}$$

$$\begin{pmatrix} N_i \\ N_j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{P} & -\frac{EA}{P} \\ -\frac{EA}{P} & \frac{EA}{P} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_i \\ w_j \end{pmatrix}$$

→ è come se nell'equazione generale si fossero evidenziati i termini corrispondenti a N e w

↓
dalla relazione di De Saint Venant

Scritta l'equazione fondamentale, si fa in modo di poter sommare le equazioni relative alle singole travi e giungere al sistema risolvibile.

Si ruota dunque la matrice, attraverso la matrice di rotazione 2×4 (perché quando si proietta non c'è il termine l di φ).

$$[N] = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Si espande il sistema mediante premoltiplicazione x la matrice $[A]$

$$[k^e] \{\delta\} = \{0^e\} \quad \text{dove} \quad [k^e] = [A_e]^T [N] [k_e] [N] [A_e]$$

↓
si espande con il doppio prodotto

Si somma e si ottiene così il sistema risolvibile

$$[K] \{\delta\} = \{F\}$$

Da qui si ricava lo spostamento $\{\delta\}$, che è poi ricondotto al sistema di riferimento locale

$$\{\delta_e^*\} = [N] [A_e] \{\delta\}$$

Nel sistema di riferimento locale, infine, si ricava lo sforzo normale e fare la verifica strutturale di resistenza e di instabilità sui punti compressi

$$\begin{pmatrix} N_i \\ N_j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{P} & -\frac{EA}{P} \\ -\frac{EA}{P} & \frac{EA}{P} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_i \\ w_j \end{pmatrix}$$

OSSERVAZIONE: il software non controlla l'instabilità né fa le verifiche ai giunti ma solo alle aste.
In genere, però, i problemi x le travi reticolari sono sui nodi perché passano cedono i chiodi e collassano le connessioni.

III Grigliati piani (es. griglie del marciapiede)

In questo caso, si abbandona un'ipotesi fondamentale:

un sistema piano ha aste e carichi contenuti in un piano. Nei grigliati, invece, la struttura è contenuta nel piano ma ora il carico è ortogonale al piano.

Dunque un grigliato piano è un assemblaggio di aste nel piano caricate ortogonalmente al proprio piano.

In questo caso, nasce qualcosa di nuovo:

si considerino due travi i e j in un grigliato e si valuti il loro spostamento.

Assumendo l'ipotesi di INESTENSIBILITÀ DELLE ASTE (non hanno comportamento membranale - non si allungano), si ha che

→ i punti si abbassano, cioè c'è uno spostamento ortogonale al piano v_i e v_j

→ lo spostamento u_i e u_j è nullo

→ c'è una rotazione nel piano xy di tipo flessionale φ

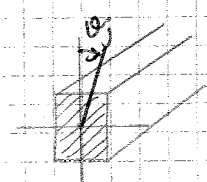
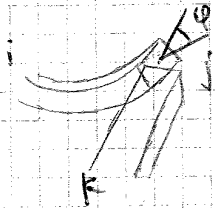
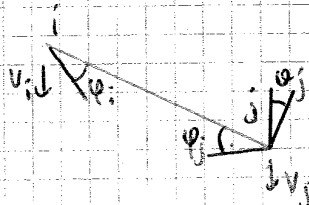
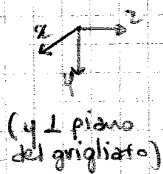
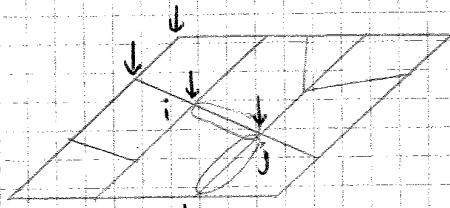
Dunque ci si aspetta che nel grigliato, in ogni sua asta, ci siano momento e taglio.

Pero, quando c'è una rotazione φ nell'asta ij , cosa succede all'asta perpendicolare ik ?

Se ij ruota con una deformazione flessionale, l'asta perpendicolare subisce una ROTAZIONE DI TIPO TORSIONALE.

Dunque la rotazione x i diventa torsione x ik e viceversa, e questo è l'ACCOPPIAMENTO TRA 2 ASTE PERPENDICOLARI.

⇒ dunque il III grado di libertà da considerare è la rotazione torsionale ϑ .



Ricapitolando, in un grigliato piano con aste inestensibili si ha per ogni trave:

→ spostamento v perpendicolare al piano di carico che dà taglio

→ rotazione φ che dà momento

→ torsione ϑ che dà momento torcente

→ 3 gradi di libertà nei grigliati piani

Applicando così il metodo degli spostamenti, ci si aspetterà una matrice di rigidità 6×6 (x ogni asta ci sono 6 incognite di spostamento cui corrispondono 6 sollecitazioni)

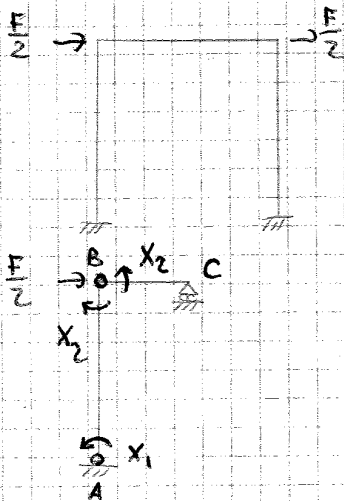
$$\begin{pmatrix} H_i \\ T_i \\ M_{z,i} \\ H_j \\ T_j \\ M_{z,j} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{p} & -\frac{6EI}{p^2} & 0 & \frac{2EI}{p} & \frac{6EI}{p^2} & 0 \\ \frac{6EI}{p^2} & \frac{12EI}{p^3} & 0 & -\frac{6EI}{p^2} & -\frac{12EI}{p^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{GI_t}{p} & 0 & 0 & -\frac{GI_t}{p} \\ \frac{2EI}{p} & -\frac{6EI}{p^2} & 0 & \frac{4EI}{p} & \frac{6EI}{p^2} & 0 \\ \frac{6EI}{p^2} & -\frac{12EI}{p^3} & 0 & -\frac{6EI}{p^2} & \frac{12EI}{p^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{GI_t}{p} & 0 & 0 & \frac{GI_t}{p} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_i \\ v_i \\ \vartheta_i \\ \varphi_j \\ v_j \\ \vartheta_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_i^0 \\ T_i^0 \\ M_{z,i}^0 \\ H_j^0 \\ T_j^0 \\ M_{z,j}^0 \end{pmatrix}$$

□ = termine flessionale

Inoltre, in teoria, si potrebbero sempre fare i conti nel caso spaziale (anche x telai piani), poiché il software è veloce. Dal punto di vista ingegneristico, però, bisogna controllare sempre i risultati, che qui sarebbero complicati inutilmente.

⇒ il ragionamento non serve a ridurre i tempi di calcolo ma a ottimizzare i risultati

OSSERVAZIONE: DIFFERENZA TRA TRAVI SHEAR TYPE E NON



Si consideri un telaio costituito da 3 aste tutte uguali in e incastrato ai piedi. Poiché la struttura è SSCA, si può studiare metà struttura e si ottiene una struttura 1 volta iperstatica.

Si risolve ora tale struttura applicando il metodo delle forze e dunque si scrivono le equazioni di congruenza sui nodi svincolati e l'equazione di spostamento con il PLV.

$$\varphi_{AB} = \varphi_{AB}(X_1; X_2; \varphi) = \frac{X_1 \rho}{3E, I_1} + \frac{X_2 \rho}{6E, I_1} - \varphi = 0$$

$$\varphi_{BC}(X_2; X_2; \varphi) = -\frac{X_1 \rho}{6E, I_1} - \frac{X_2 \rho}{3E, I_1} - \varphi = -\frac{X_2 \rho}{6E, I_2} = \varphi_{BC}(X_2)$$

$$PLV \quad -X_1 \varphi + X_2 \varphi + \frac{F}{2} \varphi \rho = 0$$

Nella soluzione, si assume che il traverso abbia rigidità $E_2 I_2$ e le colonne abbiano rigidità $E_1 I_1$ (diversi materiali o sezioni).

Risolvendo il sistema, si ottiene

$$X_1 = \frac{3 \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} + 1}{12 \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} + 2} FP \quad X_2 = -\frac{3 \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1}}{12 \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} + 2} FP$$

$$\varphi = \frac{1}{12} \frac{1}{E_1 I_1} \left(\frac{3 \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} + 2}{12 \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} + 2} \right) FP$$

Si nota che la soluzione è funzione del rapporto $E_1 I_1 / E_2 I_2$

CASI TIPICI

→ $\frac{E_1 I_1}{E_2 I_2} = 1$ Trave e colonna sono uguali.

$$X_1 = \frac{2}{7} FP$$

$$X_2 = -\frac{3}{14} FP$$

In questo caso, si ottengono certi valori di taglio e momento.

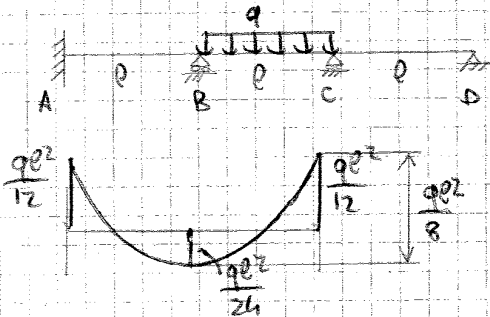
Si nota che il momento al piede è circa il 25% maggiore rispetto al momento in testa.

Questo è un aspetto importante perché nella sismica ci si focalizza sulle colonne.

Infatti, se si rompe una trave, il danno è locale; se si rompe una colonna, la struttura collassa.

Studio qualitativo dei telai piani

Es



Si consideri una trave continua a 3 campate soggetta a un carico distribuito q .

Si vuole tracciare il diagramma qualitativo del momento.

Per il tracciamento, si parte dalla campata caricata che, in uno schema incastra-incastro, ha un certo diagramma di momento.

Si nota che se la campata appartenesse a uno schema appoggio-appoggio, il momento massimo sarebbe

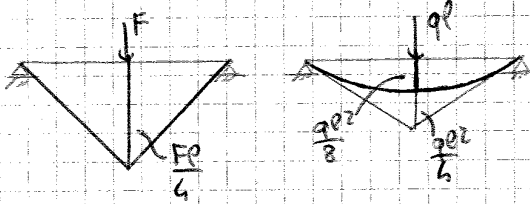
$$\frac{q l^2}{8}$$



Nello schema dell'incastro però, sommando i due estremi si ottiene proprio $q l^2/8$.

⇒ l'estensione del diagramma del momento parabolico è sempre $q l^2/8$.
 Se il vincolo è perfetto, si sale a $1/2 q l^2$.
 Se il vincolo non è perfetto, si sale in una situazione intermedia tra 0 e $1/2 q l^2$.

In base a questo, si può dire che in B e C c'è un momento negativo, avente valore compreso tra 0 e $1/2 q l^2$ poiché questi sono incastri elastici.



Inoltre, in presenza di carichi concentrati si ha un momento (nello schema appoggio-appoggio) $F l/4$.

Considerando dunque una forza concentrata $q l$, il momento massimo vale $q l^2/4$.

Da questa considerazione è possibile costruire la parabola, che passa x il punto medio del segmento AB ed è tangente alle rette in A e B.

Prima di tracciare la parabola nel caso di interesse, bisogna capire se in B e C il momento è lo stesso oppure no:

x fare ciò, bisogna tenere conto che il momento è maggiore dove c'è maggior rigidità e grado d'incastro.

In questo caso, il momento è maggiore in B perché è più vicino a un incastro e dunque il grado d'incastro è maggiore.

Viceversa, la lunghezza è la stessa e dunque la rigidità è uguale.

Una volta tracciata la parabola, si nota che il momento massimo è nel punto R (qui la tangente è orizzontale e il taglio si annulla) x la non simmetria.

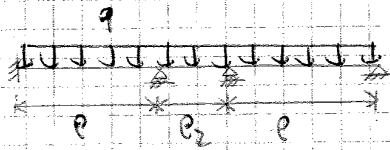
↓ IL MOMENTO MASSIMO È SEMPRE VERSO LE PARTI MENO RIGIDE

In fine, bisogna tracciare il momento sugli altri tratti:

→ AB: in una trave incastrata scadrà, il momento su un estremo è uguale all'altro e ha lo stesso segno. In particolare, in questo schema c'è sempre un flesso a $l/3$.

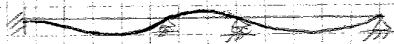
→ BC: è immediato

ES



Si consideri una trave continua avente una campata interna più corta di quelle esterne.

È chiaro che, caricando solo la campata interna, si ottiene un diagramma simile al primo con un momento maggiore.

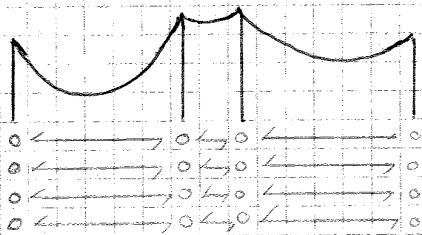


Se invece tutte e 3 le campate sono caricate, si può immaginare la deformata.

Infatti, le campate lunghe prevalgono come deformata e addirittura fanno sollevare la trave centrale, a cui il momento non riesce a diventare positivo.

La campata interna, qualora il carico sia spalmato su tutta la trave, si solleva (e $M < 0$) quando

$$l_2 < \frac{1}{3} l$$



Questo accade nelle strutture scolastiche in cui, tipicamente, la pianta vede delle colonne che formano un corridoio centrale cieco avente ai lati aule illuminate.

Così si crea un telaio avente una campata piccola rispetto a quella delle aule.

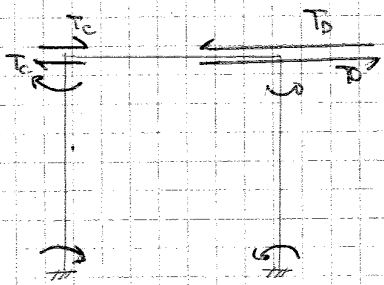
Di conseguenza, i solai che hanno delle pignate progettate a lavorare a $M > 0$, presentano pavimenti in trazione e laterizi in compressione che si instabilizzano.

⇒ fenomeno dello SFONDELLAMENTO DEI SOLAI

Il problema è tutto legato allo schema che inverte il momento nella campata corta.

Dunque in travi continue bisogna ragionare su

- schemi principali
- tracciamento della parabola
- rigidità



Per capire poi la reazione del carrello, è sufficiente valutare il disequilibrio dei tagli tra le due colonne:

sapendo che il taglio è la derivata del momento, lo si ricava dalla pendenza del diagramma. Si nota che nella colonna destra la pendenza è maggiore, a cui

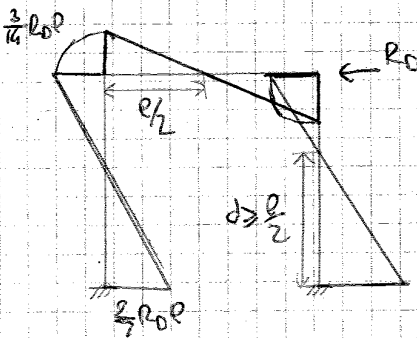
$$|T_b| > |T_c|$$

Il segno si deduce dal diagramma, come anche il verso.

Sul traverso poi i tagli diventano sforzi normali e si nota che, nel disequilibrio, il taglio T_b vince.

Per avere l'equilibrio del traverso (e questo si è messo il carrello), è necessario che questo dia una reazione R_0 verso destra.

↳ ciò garantisce che il telaio si sposta verso sinistra.



Si può così studiare la struttura sotto effetto dell'azione del carrello cambiata di segno e se ne calcola il diagramma qualitativo usando gli schemi notevoli.

Si nota che, nella colonna, il flesso è dalla metà in su.

Ora, come si può confrontare la reazione R_0 rispetto alla forza F ?

Bisogna vedere quando prevale lo schema a nodi fissi rispetto allo schema a nodi spostabili (in valore assoluto).

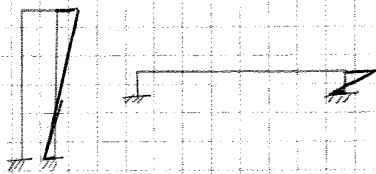
Si nota allora che, in genere, R_0 non è molto alta perché T_b prevale ma non di troppo (e la simmetria) e dunque il momento corrispondente non è troppo alto.

Per capire quanto prevale, bisogna ragionare sugli spostamenti.

si può avere una situazione con colonne snelle o traverso snello ma, comunque, il flesso si trova a $e/3$.

Pero, nello schema con trave rigida, e poter intercettare $e/3$, la pendenza del momento è maggiore e dunque si ottengono diversi schemi di tagli.

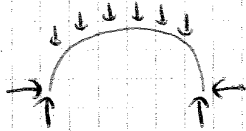
⇒ nelle colonne corte, l'effetto dello spostamento è maggiore e soffrono staticamente di più (si deformano poco ma soffrono di più come sollecitazioni).



~~31~~

ARCHI

l'Arco



L'arco è una struttura inventata dai Romani, a sostituire il sistema trilitico (colonne + trave), e basata sull'EQUILIBRIO DELLE FORZE:

per tenere in equilibrio l'arco, occorre l'equilibrio verticale (come nelle travi rettilinee) e la forza d'arco, cioè una forza orizzontale dovuta al fatto che si tende a schiacciare e le imposte tendono a spostarsi verso l'esterno.

Dunque una trave è una struttura che lavora a resistenza del materiale e controlla l'inerzia della sezione e la sezione stessa (il termine EI che si oppone alla flessione).

Invece l'arco resiste per forma, cioè la struttura non resiste a flessione e l'inerzia ma grazie alla forma dell'arco con un flusso di forze che descrive il più possibile la forma dell'arco.

FLUSSO FORZE INTERNE \equiv LINEA D'ARCO

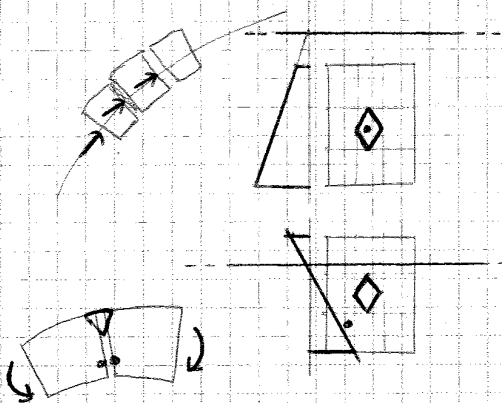
In fatti la progettazione di un arco non si basa sulla geometria differenziale ma sulla STATICA GRAFICA:

nella forma dell'arco si fa stare la curva delle pressioni ^(cdp), cioè si sceglie una forma tale che il poligono delle successive risultanti, sezione x sezione, sia all'interno della forma.

In caso di progettazione ideale, cioè la cdp coincide con l'asse, l'arco ha

$$M_z = 0$$

e dunque lavora a compressione semplice (in questo senso, una fune flessibile è l'esatto opposto).

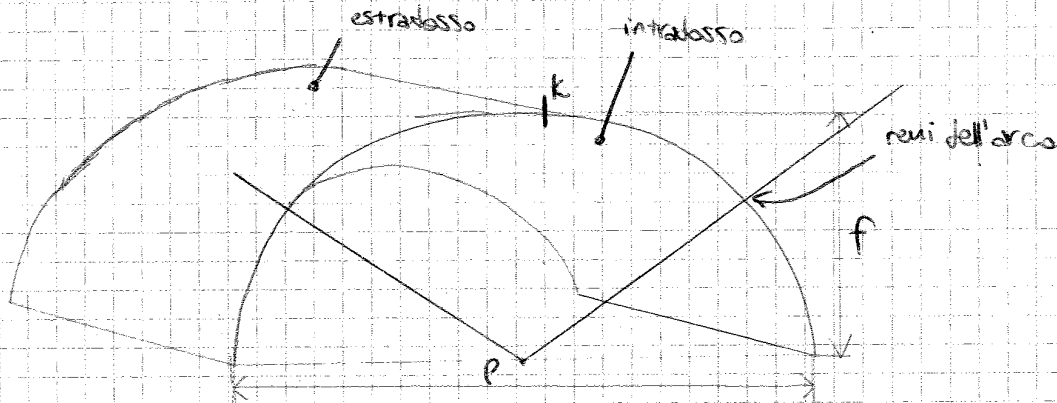


Più in generale, con un arco costituito da blocchi di pietra intervallati da malta, si fa in modo che LA RISULTANTE DELLE FORZE SIA SEZIONE X SEZIONE ALL'INTERNO DEL NOCCIULO CENTRALE D'INERZIA (nci). In tal modo, l'asse neutro di flessione è all'esterno della sezione e le tensioni sono tutte dello stesso segno e la sezione è tutta compressa. Viceversa, la sezione si parzializza e c'è una porzione in trazione.

↓ se nel cemento armato non c'è problema perché si mette l'armatura dove $\sigma > 0$, in muratura, dove i collegamenti sono fatti mediante leuti di malta prive di resistenza a trazione, è come se si assoggettasse a flessione e nascono fessure.

⇒ l'idea del progetto per forma è che la linea d'asse sia tale che la risultante passi per il nocciolo centrale d'inerzia (il più possibile vicino al baricentro).

3 Nomenclatura



→ se nelle travi rettilinee c'è la campata, negli archi c'è la corda p , che è la distanza tra le imposte dell'arco

→ intradosso



È la superficie che limita inferiormente l'arco. Si ragiona così perché tipicamente si lavora su archi verticali ma ci sono ad es. dighe ad arco che sono soggette alla spinta del bacino e alla spinta delle rocce e la sezione si trova sul piano orizzontale.

→ estradosso; è la superficie che limita superiormente l'arco e, in genere, è quasi mai visibile perché coperto e dunque bisogna riuscire a leggere il suo stress dal solo intradosso.

→ piano d'imposta; superficie da cui inizia la costruzione dell'arco (terreno o colonna)

→ concio: unità costitutiva dell'arco. Può essere un blocco o un'unità minima costruttiva autosufficiente (insieme di mattoni)

→ chiave^c: punto più in alto della curva d'intradosso

→ freccia f : distanza tra chiave e corda

↓ con corda e freccia si descrive geometricamente l'ingombro dell'arco

→ piani alle reini: sono importanti x il meccanismo di collasso e sono i piani passanti x il centro geometrico della curva e inclinati di 30° . Questa è una posizione critica che può diagnosticare una certa sofferenza statica dell'arco.

PROPRIETÀ: chiave e reini, oltre agli appoggi, sono i punti dove è più difficile far coincidere la c.d.p. con la linea d'asse dell'arco. Se la risultante cade all'interno del n.c.i. in quelle 5 sezioni, sicuramente vale lo stesso in tutte le altre sezioni.

In base a questo, si definiscono delle condizioni

→ CONDIZIONE IDEALE: la cdp coincide con l'asse

→ CONDIZIONE BUONA: la cdp cade nel n.c.i.

Infatti, spesso nelle strutture storiche la cdp passa addirittura nella sezione e non nel n.c.i. Però l'asse neutro non è lontano dal baricentro e il 90% della struttura lavora in compressione e la poca trazione si trova in testa o in chiave, senza dare problemi.

↓ del resto, bisogna tenere conto che quelle sono condizioni teoriche x via dei carichi mobili

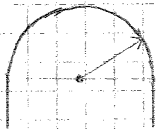
Anche nella costruzione, bisogna far sì che la cdp cada nel n.c.i., allargando il piano d'imposta, facendo contrafforti o mettendo la catena.

6 Fino a qualche tempo fa, nella scienza delle costruzioni si trattava il metodo di Mery: qui si costruisce la cdp con una costruzione grafica come poligono funicolare, realizzato concio x concio.

7 TIPOLOGIE D'ARCO

→ classificazione geometrica, basata sulla forma dell'intradosso

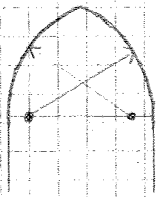
→ arco a tutto sesto:



è un arco monocentrico con profilo semicircolare. Se l'arco è realizzato x 180°, vale la relazione

$$\frac{f}{p} = \frac{1}{2}$$

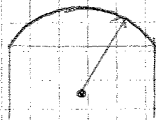
→ arco a sesto acuto:



ha un profilo discontinuo con cuspidi in chiave (lì ha 2 tangenti). In genere è realizzato policentrico, cioè con 2 porzioni aventi centro giacente sulla corda e vale

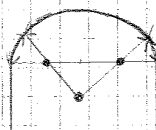
$$\frac{f}{p} > \frac{1}{2}$$

→ arco a sesto ribassato:



il centro di curvatura è posto a un livello più basso del piano d'imposta e può essere monocentrico (però non è realizzato x 180° di sviluppo) o policentrico. Qui vale

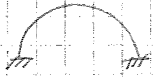
$$\frac{f}{p} < \frac{1}{2}$$



A parità di luce e di carico, l'arco a sesto ribassato ha una spinta alle imposte maggiore rispetto al sesto acuto (fino a un certo limite).

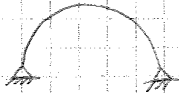
→ classificazione per vincoli → nelle strutture storiche, il vincolo dipende dal gioco delle rigidità, cioè dalla facilità di rotazione

→ archi incastrati:



Le imposte si considerano incastrate e dunque si ha una struttura 3 volte iperstatica (se il carico è simmetrico, è 2 volte iperstatica).
A seguito dell'elevata iperstaticità, non si usano strutture non troppo sensibili a variazioni termiche o cedimenti vincolari e occorrono fondazioni più grosse rispetto alla sezione della trave (così si può parlare di incastro)

→ archi a 2 cerniere:



Le imposte si considerano incernierate. Essi sono tipici degli archi in acciaio, in modo che soffrano meno le variazioni termiche

↓
l'acciaio è sensibile e, per le grandi luci, l'allungamento $\Delta T \epsilon$ è grande

→ archi a 3 cerniere:



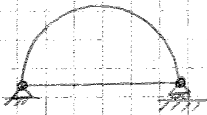
sono archi isostatici. Essi sono usati in grandi strutture a gestire le variazioni termiche e perché sono costruiti in 2 pezzi e poi, tramite funi, sono variati facendo coincidere le 2 porzioni e incernierandole. Inoltre, nei grandi ponti in cemento armato, c'è il problema del fluage, al quale il modulo elastico diminuisce nel tempo, cioè diminuisce la rigidità e il ponte si abbassa. Allora si lascia libera la zona chiave e, ogni 6 mesi, con un martinetto, si mettono in trazione le 2 porzioni, rialzandole

↓
si ha così un cuneo chiave che si allarga e compensa



quando non si può solidarizzare, si usano 3 cerniere

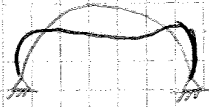
→ archi a spinta eliminata:



sono archi realizzati con una trave curva isostatica a cui si mette una catena

↓
se nell'arco a 2 cerniere la spinta è dovuta al vincolo, ora è dovuta alla catena

→ arco circolare a 2 cerniere



Il momento ora è positivo in chiave e dunque l'eventuale fessurazione si troverà nell'intradosso.

4 Archi Falsi: esistono strutture simili ad archi ma che strutturalmente non lo sono, cioè non lavorano a forma, con la spinta e la cdp non coincide con l'asse

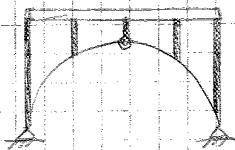
Ad es. nei trulli gli spicchi sono realizzati con archi falsi poiché le 2 metà possono essere automaticamente bilanciate e non serve il contrasto in chiave.

Questo è dovuto al gioco di spessori che fa sì che il baricentro delle parti superiori si trovi sempre sulle parti inferiori.

10 Sistemi arco-trave:

sono molto presenti nei ponti.

→ ponti ad arco con via superiore

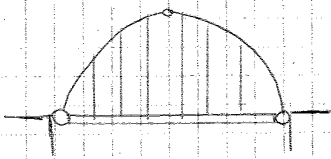


L'impalcato si trova sopra e bielle tutte compresse trasmettono il carico all'arco.

Si nota che l'arco presenta una struttura cava e snella, con piccoli carichi permanenti, a cui il passaggio di carichi mobili sposta la cdp.

A volte l'arco può essere realizzato con una poligonale e, nei ponti di Maillart, il ribassamento è spinto al massimo ($f/p = \min$)

→ ponti ad arco con via inferiore



L'arco è collegato mediante funi tese all'impalcato appeso ed è sollecitato verso il basso.

Dal punto di vista statico, è meglio questo schema se si cerca leggerezza:

nei ponti a via superiore sono compressi l'arco (a definizione), tutte le bielle e le fibre compresse dell'impalcato (a flessione), cioè l'80% della struttura è compressa.

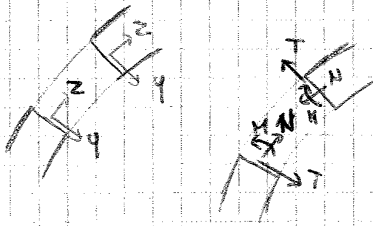
Ciò non va bene nell'acciaio a il rischio di instabilità e dunque si realizzano bielle più importanti.

Delle strutture in cemento armato invece, tale schema è migliore perché lavora bene a compressione e le sezioni sono sempre grandi.

→ una situazione intermedia è quando c'è una parte tesa e una parte compressa e lì si evidenzia il diverso spessore e il problema dell'instabilità.

EQUAZIONI DELLE TRAVI CURVILINEE

1 Equazioni indefinite di equilibrio



Si consideri una trave piana, avente 3 caratteristiche della sollecitazione interna:

→ sforzo normale N

→ taglio T

→ momento M

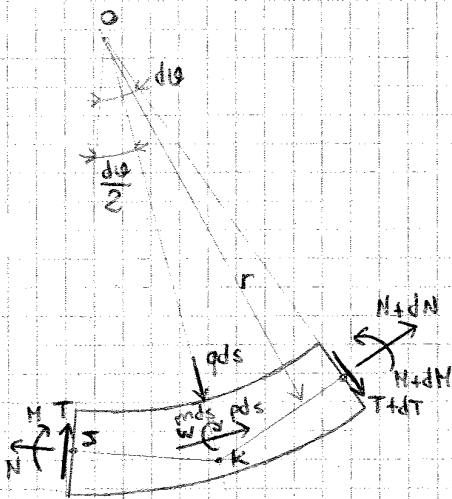
In una trave curvilinea l'ascissa z non è più la stessa ma c'è un sistema di riferimento viaggiante e locale (infatti si fa in genere un sistema di riferimento polare).

Ora si scrivano le equazioni differenziali delle travi curve:

Si consideri un cuneo infinitesimo, descritto non con dz , poiché la trave è curvilinea, ma con l'angolo al centro $d\theta$ (0 è il centro di curvatura). Il tratto è lungo ds e dunque, detto r il raggio di curvatura, si ha

$$ds = r d\theta$$

L'approccio è generale perché il centro O può variare e si può descrivere qualunque geometria.



Ora si valutano le forze agenti sul cuneo

→ sulle due facce si riferiscono le caratteristiche della sollecitazione interna

→ a sinistra agiscono N, M e T

→ a destra, al passaggio delle facce le caratteristiche della sollecitazione cambiano con un incremento infinitesimo (poiché il cuneo è infinitesimo)

$$N+dN \quad M+dM \quad T+dT$$

→ agiscono poi i carichi distribuiti

→ carico assiale (x unità di lunghezza)

$$pd s$$

→ carico ortogonale al cuneo

$$q ds$$

→ coppia

$$m ds$$

Prima di scrivere l'equilibrio, si nota che lo sforzo normale e il taglio sulle 2 facce non sono paralleli

⇒ una gran parte dello sforzo normale si equilibra, mentre la componente assiale non in equilibrio è presa da q

C'è così una grossa differenza dal caso rettilineo perché ora N si lega a q .

Si divide infine $\times ds$

$$\frac{dN}{ds} + \frac{T}{r} + p = 0$$

$$\frac{dT}{ds} - \frac{N}{r} + q = 0$$

$$\frac{dH}{ds} - T = 0$$

→ non ci sono in genere coppie distribuite

$$\begin{cases} \frac{dN}{ds} + \frac{T}{r} + p = 0 \\ \frac{dT}{ds} - \frac{N}{r} + q = 0 \\ \frac{dH}{ds} - T = 0 \end{cases}$$

Equazioni indefinite di equilibrio per una trave curvilinea, che governano le caratteristiche della sollecitazione interna a queste travi

Le travi ad asse rettilinea sono un caso particolare, dove $r \rightarrow \infty$ e $s = z$ (x descrive l'asse della trave).

In genere, dal punto di vista strutturale, è importante la II equazione in cui, a travi rettilinee, $N/r = 0$ e il carico distribuito è la derivata del taglio. Ora interviene lo sforzo normale e la sua importanza è maggiore se r è minore.

Analogo ragionamento vale a la I equazione dove, se nel rettilinea $T/r = 0$, ora anche nella trazione interviene il taglio.



Ad es in un gancio (r piccolo), l'accoppiamento statico tra N e T è importante in ogni sezione e il comportamento statico è più efficace rispetto a una barra tesa.

⇒ si ottimizza il materiale

Le equazioni si possono scrivere in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & -\frac{1}{r} & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{d}{ds} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{d}{ds} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ H \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q \\ p \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In forma sintetica, si ha

$$[S]^* \{Q\} + \{F\} = \{0\}$$

$[S]^*$ = matrice statica
 $\{Q\}$ = vettore delle caratteristiche della sollecitazione
 $\{F\}$ = vettore delle forze esterne

Si sostituiscono le equazioni statiche

$$\Delta_{ve} = [T_v + N_w + M_\varphi]_0^e - \int_0^e \left[\left(\frac{dT}{ds} - \frac{N}{r} \right) v + \left(\frac{T}{r} + \frac{dN}{ds} \right) w + \left(-T + \frac{dM}{ds} \right) \varphi \right] ds$$

Si integrano a parti i termini differenziali e, ad es. x il taglio, si ottiene

$$\begin{aligned} \Delta_{ve} &= [T_v]_0^e - \int_0^e \frac{dT}{ds} v = \\ &= [\cancel{T_v}]_0^e - [T_v]_0^e + \int_0^e T \frac{dv}{ds} = \int_0^e T \frac{dv}{ds} \end{aligned}$$

Ragionando allo stesso modo sulle altre componenti, si ha

$$\begin{aligned} \Delta_{ve} &= \int_0^e \left(T \frac{dv}{ds} + N \frac{dw}{ds} + M \frac{d\varphi}{ds} + N \frac{v}{r} - T \frac{w}{r} + T\varphi \right) ds = \\ &= \int_0^e \left[\left(\frac{dv}{ds} - \frac{w}{r} + \varphi \right) T + \left(\frac{dw}{ds} + \frac{v}{r} \right) N + \frac{d\varphi}{ds} M \right] ds \end{aligned}$$

Nel PLV, il lavoro interno ed esterno sono uguali

$$\int_0^e (T\gamma + N\varepsilon + M\chi) ds = \int_0^e \left[\left(\frac{dv}{ds} - \frac{w}{r} + \varphi \right) T + \left(\frac{dw}{ds} + \frac{v}{r} \right) N + \frac{d\varphi}{ds} M \right] ds$$

Dal confronto, si ricavano le equazioni

$$\begin{cases} \gamma = \frac{dv}{ds} - \frac{w}{r} + \varphi \\ \varepsilon = \frac{dw}{ds} + \frac{v}{r} \\ \chi = \frac{d\varphi}{ds} \end{cases}$$

Equazioni cinematiche per le travi curvilinee

Questi si possono scrivere in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \varepsilon \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & -\frac{1}{r} & 1 \\ \frac{1}{r} & \frac{d}{ds} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{ds} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \\ \varphi \end{pmatrix}$$

In forma più compatta, si ha

$$\{g\} = [d] \{g\}$$

Si nota che $[d]$ e $[d]^*$ sono legate tra di loro dalla trasposizione, anche se ora i termini finiti cambiano segno tra di loro

⇒ dualità statico-cinematica: la matrice statica è la trasposta della matrice cinematica con termini cambiati di segno, nel caso di travi curvilinee.

$$[L]\{\eta\} = \{F\}$$

dove

$$[L] = {}^+ [EN][E\delta]{}^* [H][E\delta][EN]$$

Questa è l'ODE che governa il problema in caso di travi ad asse curvilineo e a queste si associano le condizioni al contorno

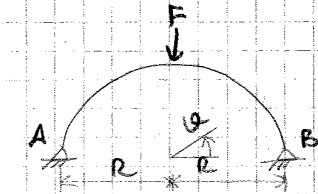
$$({}^+ [EN][E\delta][EN])\{\eta\} = \{Q_c\}, s=0; l$$

→ condizioni al contorno sulle derivate (condizione di Neumann)

$$\{\eta\} = \{\eta_0\}, s=0; l$$

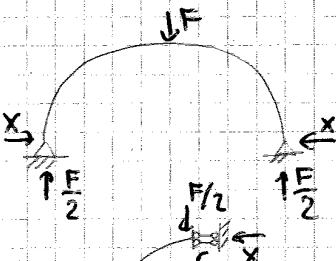
→ condizioni al contorno sulla funzione (condizione di Dirichlet)

Es



Si consideri un arco vincolato al terreno con 2 cerniere e caricato in chiave da una forza concentrata F. Ricavare l'abbassamento in chiave u_f .

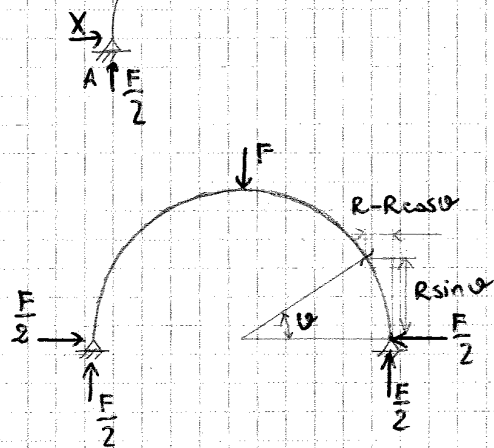
La struttura è iperstatica, a cui si usa il metodo delle forze dove si vincola la struttura.



In realtà, a la simmetria, le reazioni verticali sono uguali, come anche le reazioni orizzontali. Il valore delle reazioni orizzontali si può infatti ricavare sfruttando la simmetria e studiando metà struttura.

Dall'equilibrio alla rotazione attorno al nodo c, si ottiene

$$XR - \frac{F}{2}R = 0 \Rightarrow X = \frac{F}{2}$$



Da qui si può valutare l'aumento del momento flettente.

Facendo ricorso alle coordinate polari, si può valutare il momento attraverso il metodo diretto:

in una sezione individuata dall'angolo θ , il momento vale

$$M(\theta) = \frac{F}{2} (R - R \cos \theta) - \frac{F}{2} R \sin \theta = \frac{FR}{2} (1 - \cos \theta - \sin \theta), \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

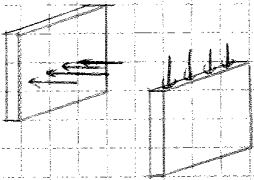
Per $0 < \theta < \pi$, il diagramma è simmetrico.

LASTRE PIANE INFLESSE

1. Esistono 2 tipi di lastre

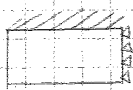
→ lastre piane: sono lastre il cui piano medio è contenuta in un piano

→ lastre curve: sono elementi bidimensionali dove la superficie media è una superficie curva nello spazio (non è un piano).



Se la lastra è caricata perpendicolarmente al suo piano medio, allora si ha un comportamento prevalentemente di tipo flessionale (tipo trave) e si parla di lastra inflessa.

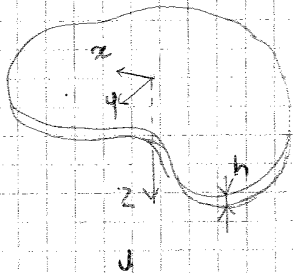
Viceversa, se la piastra è caricata nel piano medio, si ha comportamento membrinale e si parla di lastra membrinale.



Una lastra sul contorno può poi avere diversi vincoli

→ contorno incastrato

→ contorno incernierato



A livello di convenzione, si pone un sistema di riferimento x, y, z con

z = asse del carico

x, y = punti della superficie media della lastra

→ z non è più diretta nel piano

Si indica poi con h lo spessore della lastra e il carico applicato si esprime come

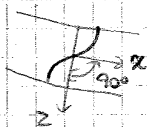
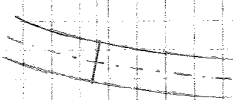
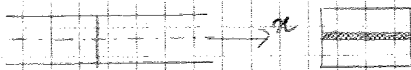
$$q = F(x, y) \quad \rightarrow \text{in genere è costante}$$

convenzioni diverse dalle travi

2. Teoria di Kirchhoff delle lastre piane inflesse:

è una teoria semplificata ed efficace, che si basa su un'ipotesi cinematica (come in Navier):

i segmenti perpendicolari al piano medio, a deformazione avvenuta, restano perpendicolari al piano medio, cioè i segmenti rimangono PIANI.



In particolare, nel caso delle lastre si ragiona a strisce, prendendo una striscia diretta come x e guardando in direzione z .

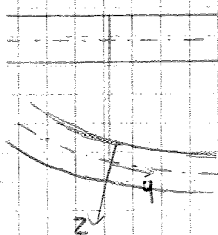
Secondo questa ipotesi, la sezione OP rimane piana e non c'è distorsione (anche se in realtà c'è distorsione a la deformazione di taglio).

Se non c'è distorsione, non c'è deformazione γ nel piano xz :

in tutti i punti della sezione vale

$$\gamma_{zx} = 0 \quad \rightarrow \text{l'angolo tra } z \text{ e } x \text{ è sempre } 90^\circ$$

Questo, implicitamente, corrisponde a dire che non ci sono tensioni tangenziali T_{zx} .



A questo punto, si può valutare il campo delle deformazioni, mediante derivazione

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(\varphi_x z)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} z = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z = \chi_x z$$

χ_x = curvatura della striscia diretta come x , positiva se l'angolo è negativo (x il segno "-")

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial(\varphi_y z)}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} z = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z = \chi_y z$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \text{non dipende da } z$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) z = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z$$

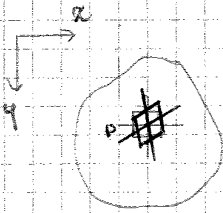
↓
nuova quantità

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_x - \varphi_x = 0$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \varphi_y - \varphi_y = 0$$

Quindi la deformazione ha espressione

$$\begin{cases} \epsilon_x = \chi_x z \\ \epsilon_y = \chi_y z \\ \epsilon_z = 0 \\ \gamma_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z \\ \gamma_{xz} = 0 \\ \gamma_{yz} = 0 \end{cases}$$



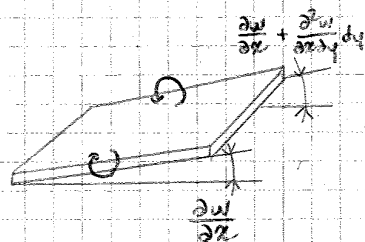
Prendendo l'intorno del punto P, γ_{xy} è la distorsione delle 2 fibre inizialmente dirette come x e y e rappresenta lo scorrimento nel piano xy .

Ciò deriva dal fatto che, anche se si ragiona su strisce, la lastra è continua e non sono indipendenti. Così al loro incrocio le strisce sono solidali e l'accoppiamento delle strisce nel piano xy è letto con γ_{xy} .

Inoltre, nella flessione nel piano medio intervengono le curvature χ_x e χ_y in direzione x e y .

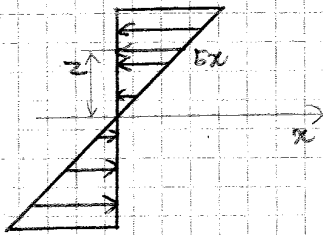
A questo si aggiunge una nuova curvatura torsionale, detta twist χ_{xy}

$$\chi_{xy} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$



Essa indica che si sta accoppiando alla deformazione flessionale della striscia diretta come x con la deformazione flessionale della striscia diretta come y .

Dunque l'elemento di incrocio non può in flettersi semplicemente come la striscia (lunga una sola direzione) e si realizza così il twist.



Se poi si integrano le tensioni moltiplicate x z da $-h/2$ a $h/2$ (sullo spessore), si calcolano le coppie

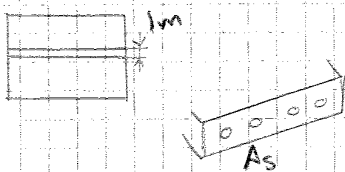
$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz$$

Si nota che M_x non è il momento attorno a x, ma quello sulla faccia di normale x (della striscia diretta come x). Dimensionalmente, si nota che

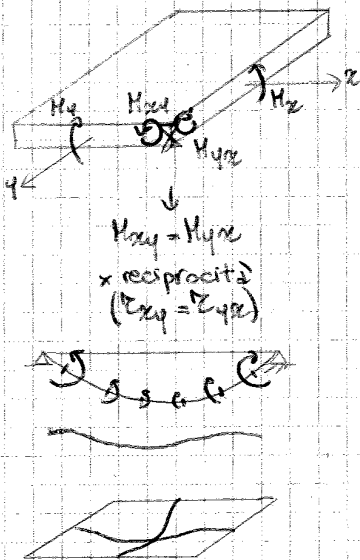
$$[M] = \frac{[F]}{[L]^2} \cdot [L] \cdot [L] = [F]$$



nonostante il momento sia Forza x lunghezza. Esso rappresenta il momento x unità di striscia, cioè x 1 m di striscia

$$[M] = Nm/m$$

Si potrebbe ragionare in mm ma, se si studia la striscia di 1 mm, si troverebbe un momento pari a 1/1000 ma non si saprebbe come armare, cioè come fare As.



Il momento torcente M_{xy} fa invece le veci di M_z nei grigliati piani. Infatti ora c'è un insieme continuo e, quanto si è più vicino ai bordi, tanto più è importante l'effetto del momento torcente. Del resto, nelle strisce centrali gli elementi di interazione non sono tanto disturbati e hanno poca torsione perché sono nella mezzeria di 2 fibre inflesse. Ai bordi, invece, la striscia lunga vuole inflettersi ma è ostacolata dalla striscia perpendicolare, che crea un momento torcente che porta un po' in su la striscia nella deformata.

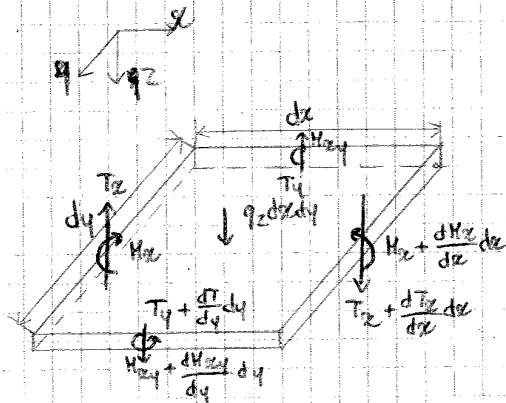
Dunque il momento torcente è

- massima ai bordi
- nulla al centro

Questo effetto, evidente sulle strisce perpendicolari, si nota anche su quelle adiacenti:

se fossero travi, sarebbero indipendenti; ora sono unite e l'effetto Poisson costringe a farle lavorare insieme, dando luogo a un momento M_{xy} (= M_{yx} x reciprocità).

Equazioni indefinite di equilibrio



Per descrivere la statica, si consideri un elemento $dx \times dy$, a cui si applicano le caratteristiche della sollecitazione e a una faccia e gli incrementi all'altra.

A partire dai momenti, si può scrivere l'equilibrio alla rotazione:

Occorre poi scrivere l'equilibrio alla traslazione, in direzione z :

Si nota che non c'è distorsione γ , a cui non esistono tensioni tangenziali e dunque non c'è una risultante di taglio che equilibri il carico applicato $q_z dx dy$. L'ipotesi di Kirchhoff così ha portato a una lastra senza taglio.

⇒ Per rispettare l'equilibrio, occorre INTRODURRE IL TAGLIO, anche se si viola l'ipotesi di Kirchhoff.

Per convenzione, il taglio è diretto lungo z ma è indicato come T_x e T_y (e sulle facce di normale x e y). Ovviamente, il taglio dovrà essere considerato nell'equilibrio alla rotazione.



Si è mosso il taglio e congruenza ma è neutro l'equilibrio.

Si scrivano dunque le equazioni di equilibrio

→ ROTAZIONE ATTORNO ALL'ASSE y

$$\left(\frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy + \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} dy \right) dx - (T_x dy) dx = 0$$

Si semplifica $dx dy$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - T_x = 0$$

A differenza delle travi rettilinee, c'è M_{xy} .
Dunque il taglio non è solo la derivata del momento, ma ha anche i contributi forcenti perpendicolari che intervengono nell'equilibrio alla rotazione.

→ ROTAZIONE ATTORNO ALL'ASSE x

Analogamente, si ottiene

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - T_y = 0$$

→ TRASLAZIONE VERTICALE

$$\left(\frac{\partial T_x}{\partial x} dx \right) dy + \left(\frac{\partial T_y}{\partial y} dy \right) dx + q dx dy = 0$$

Si semplifica $dx dy$

6 Equazioni costitutive:

essi si esprimono con la rigidezza D

$$\begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ M_{xz} \\ M_y \\ M_{zy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} Gh & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} Gh & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D & 2D & 0 \\ 0 & 0 & 2D & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2D} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_y \\ \chi_{xz} \\ \chi_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}$$

→ c'è un rapporto simile alla trave (Jourawsky) poiché $\frac{5}{6}$ si lega al fattore di taglio x un rettangolo $\frac{3}{6} GA$

L'insieme di equazioni si può scrivere in forma compatta come

$$\begin{aligned} \{q\} &= [a] \{g\} & [a] & 5 \times 3 \\ [a^*] \{q\} + \{F\} &= 0 & [a^*] & 3 \times 5 \\ \{Q\} &= [H] \{q\} \end{aligned}$$

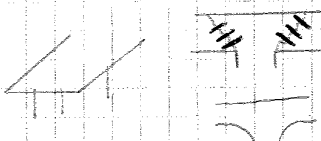
7 Teoria di Mindlin per le lastre piane inflesse:

Mindlin ha elaborato una teoria più corretta che fin dall'inizio, introduce la DISTORSIONE γ (no sezioni piane) e, di conseguenza, lo stato è triassiale (più complesso).

La teoria è applicata quando LA LASTRA HA SPESSORE IMPORTANTE e la sollecitazione di tensione di taglio diventa più importante della tensione di flessione e di fini della resistenza.

↳ proprio come nelle travi dove c'è Eulero-Bernoulli vs Timoshenko

Se non applicata, il taglio entrerebbe solo come sottoprodotto dell'equilibrio e non come azione costitutiva e sarebbe sottovalutata. Così si sottoestimerebbe l'armatura di taglio e ci sarebbero fessure (problemi ai bordi).



↳ bisogna allargare la base di imposta

Ad es. Mindlin si applica nel caso di punzonamento, in cui la piastra è sollecitata da carichi concentrati in campo. Questo può essere un solido dove la colonna si appoggia direttamente sulla piastra e si comporta come un ago.

In questo caso, la lastra si rompe con la formazione di un cono di 30° e questa si sfonda, lasciando il pilastro in piedi.

8 Se si trascura la DEFORMABILITÀ A TAGLIO, si giunge a un'equazione della sola incognita w , detta equazione di Sophie Germain:

questa equazione, estratta dal modello di Kirchhoff, descrive il piano elastico (corrisponde alle ODE della linea elastica x le travi) cioè descrive lo spostamento w in forma differenziale.

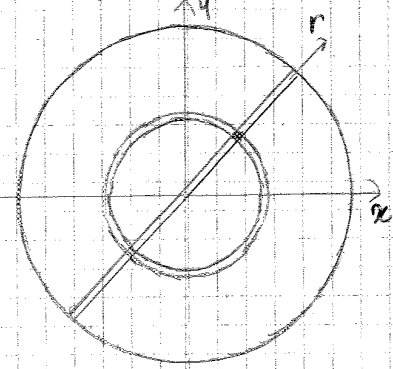
Per ricavarla, si derivano le equazioni di equilibrio alla rotazione

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_x}{\partial x} &= \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial T_y}{\partial y} &= \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

Piastre circolari

1. Essa è la forma che è MASSIMO L'EFFETTO LASTRA perché le dimensioni sono uguali e dunque qui si evidenzia l'efficienza rispetto ai sistemi di strisce indipendenti.

2. In genere, si prendono strisce dirette come x e y .



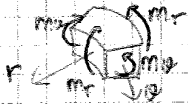
In presenza di forme polarsimmetriche conviene usare un sistema di riferimento polare, con strisce radiali e anelli circonferenziali.

Sulle strisce radiali si legge il momento m_r , dove r è la direzione della striscia e m_r è il momento lungo la striscia radiale (sulla faccia di normale r).

Gli anelli circonferenziali sono descritti da θ e sulle facce si legge m_θ , che è il momento sulla faccia di normale θ .

Così su un elemento agiscono m_r e m_θ .

A meno di infinitesimi di ordine superiore c'è intersezione perpendicolare tra anelli e strisce radiali e si può adottare la descrizione di Kirchhoff.



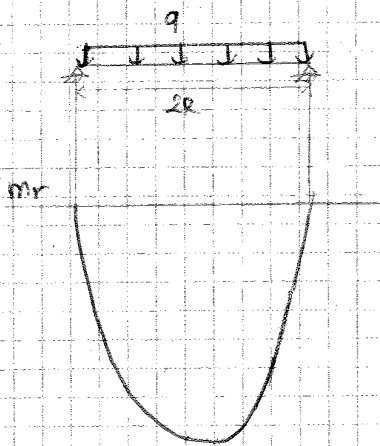
3. Piastre circolari appoggiate

Si consideri una lastra circolare vincolata al bordo tramite carriere.

Essa può essere risolta sulle strisce o anelli tramite l'equilibrio o le equazioni di Sophie Germain.

Si suppone che sia applicato un carico q uniformemente distribuito.

$\rightarrow M_r$



Valutando una striscia radiale, si ottiene un momento M_r parabolico con un massimo in mezzeria

$$(3 + \mu) \frac{qR^2}{16}$$

Se la trave fosse isolata, si avrebbe $qR^2/2$ contro $3/16 qR^2$, che è più piccolo.

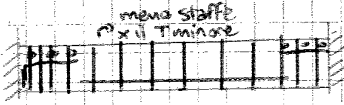
Dunque, rispetto alla striscia isolata, il momento massimo è sotto la metà e dunque in strutture in cemento armato occorre meno della metà delle armature di trazione.

\Rightarrow si sente molto l'effetto lastra (dove le strisce non sono isolate ma appartengono a un sistema) e conviene molto, perché così si può ridurre lo spessore.

Rispetto alla trave isolata, si mantiene la forma parabolica di varia della distanza r dal baricentro.

6 Piastre circolari incastrate

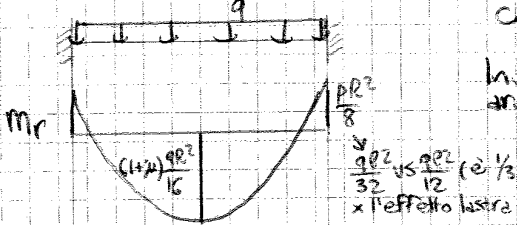
Si assume un CARICO DISTRIBUITO



Per quanto riguarda m_r , si ottiene uno schema simile alla trave incastrata.

Dunque, si arma in positivo vicino ai bordi e in campata si arma in negativo.

Invece m_{lg} ha un andamento simile a prima e si mettono armature circolari.



Il rapporto dei momenti appoggio-incastro è 2,5 vs 2,66

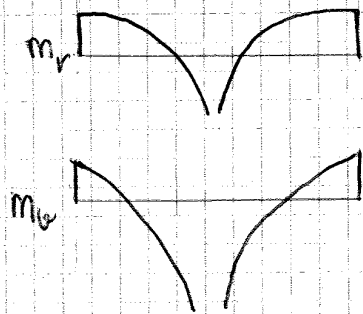
Si assume poi CARICO CONCENTRATO



Il momento all'incastro vale

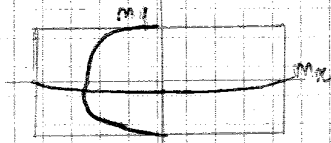
$$\frac{qR^2}{16}$$

e la striscia si abbassa meno della metà rispetto alla striscia isolata.



3. Piastre rettangolari appoggiate

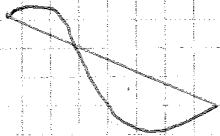
Si assume CARICO UNIFORME



Ragionando come in travi appoggiate, si nota che il momento nelle strisce corte è maggiore che in quelle lunghe.
 Dunque si deriva di più nelle strisce corte

Si assume CARICO CONCENTRATO e l'evoluzione è esponenziale

4. Piastre rettangolari incastrate



In presenza di CARICO DISTRIBUITO, il momento è negativo sul bordo ed è massimo al centro del bordo, anche se non c'è tendenza alla risalita del vertice.

↓
 il beneficio in lastre quadrate appoggiate / incastrate è 2,34 vs 1,62 (meno delle lastre circolari).

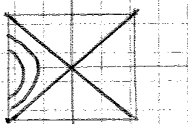
5. Sulle lastre si possono fare dei ragionamenti sull'isostatica, ma in genere ci si riferisce all'isostatica di momento:

è la direzione in cui il momento flettente è massimo e li si dimostra che

$$M_z = 0$$

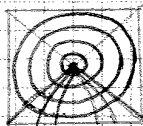
LASTRE CIRCOLARI → si nota che il momento massimo si trova in direzione radiale e circonferenziale

LASTRE QUADRATE APPOGGIATE



C'è una certa dispersione, con una situazione diagonale vicino al bordo.

LASTRE QUADRATE INCAstrate



Le linee sono simili al caso di lastre circolari.

→ diverso funzionamento a seconda del comportamento dei vertici.

Il simbolo "N" è dovuto al fatto che N_{12} è ancora una sollecitazione membranale.
Spesso, x simmetria, si ha

$$N_{12} = 0$$

e questa è una situazione ottimale perché i materiali dell'ingegneria civile non amano le tensioni tangenziali.

→ 5 incognite legate al regime flessionale (come il regime di una ^{lastra} trave piana).

→ tagli T_1 e T_2

→ momenti flettenti M_1 e M_2

→ momento torcente M_{12}

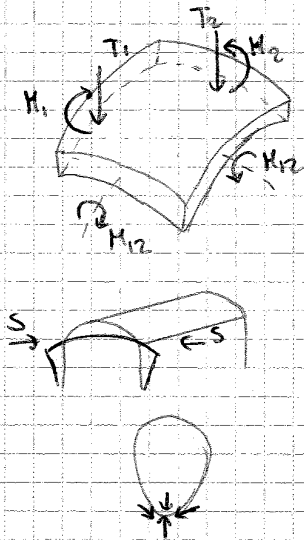
Queste sollecitazioni sono non volute perché mettono in crisi la struttura.

Quando è che nasce il regime flessionale?

Ad es se una volta a botte (è una lastra a doppia curvatura) poggia su pilastri in muratura e le imposte non sono ben fissate, queste non garantiscono la spinta S .

Di conseguenza, l'arco si abbassa e tende a una trave inflessa, cioè il momento aumenta e, x lo stato flessionale, si fessura come una trave.

Dall'altra parte, facendo cadere un uovo dalla parte a raggio minimo, questa si prende le reazioni e l'effetto della doppia curvatura è massima. Di conseguenza, non nasce flessione ma solo sforzo normale.



A queste 8 caratteristiche della sollecitazione si associamo 8 caratteristiche cinematiche

→ M_1, M_2

⇒ curvature χ_1, χ_2

→ M_{12}

⇒ curvatura χ_{12}

→ T_1, T_2

⇒ scorrimento γ_1, γ_2

→ N_1, N_2

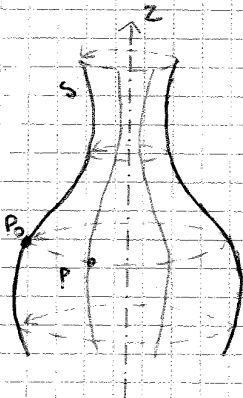
⇒ dilatazioni ϵ_1, ϵ_2 → allungamento delle fibre

→ N_{12}

⇒ distorsione ϵ_{12}

Semplificazione: lastre a doppia curvatura di rivoluzione

COSA SONO



Esse sono strutture ottenute dalla rotazione di 360° di una generica curva s , detta curva generatrice, nel piano attorno all'asse z giacente nello stesso piano. Con il termine "rivoluzione" infatti s'intende la rotazione completa attorno all'asse.

A seguito di questa operazione si nota che nel punto P le 2 direzioni di curvatura principale sono individuabili da

→ generatrice

→ direttrice di rotazione, che parte dal punto P_0 sulla generatrice e, con la rotazione, individua P .

DESCRIZIONE GEOMETRICA

Inanzitutto, si nota che generatrice (nelle diverse posizioni) e direttrici di rotazione corrispondono a meridiani e paralleli (che sono circonferenze) nella geometria.

La descrizione può essere fatta con raggi di curvatura

→ R_1 = raggio di curvatura del meridiano.

Esso può avere un centro che può anche non coincidere con l'asse (ad es nel cilindro il centro è all'infinito in ogni punto).
Delta t la tangente alla curva meridiana e n la normale, R_1 giace nel piano nt .

→ R_2 : la tangente al parallelo si dice binormale m e permette di trovare nel piano nm il raggio r di curvatura passante a P duale a R_1 .

Questo di sicuro è centrato sull'asse di rivoluzione. A questo si associa il raggio R_2 , che non è il raggio del parallelo ma è il raggio di curvatura nel piano nm dell'altro ordine di archi con curvatura massima/minima in P .

Si nota che il raggio del parallelo vale

$$r = R_2 \cos \alpha \quad \alpha = \text{angolo tra } R_2 \text{ e l'orizzontale}$$

Più in generale, si possono associare le coordinate

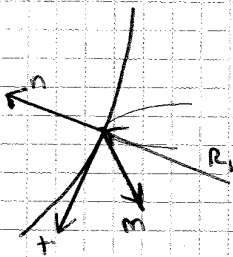
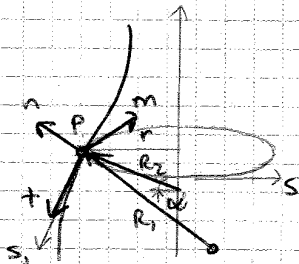
→ $S_1 = s$ coincidente con la tangente t (meridiano)

Si indica con s perché, se la struttura di rivoluzione è caricata polarisimmetrica rispetto a z , la descrizione lungo le altre coordinate è inutile.

→ S_2 coincidente con il parallelo ma non con m

(sistema comodo e in genere $S_2 \equiv m$)

Così si può ricorrere al sistema di riferimento puramente geometrico nm o a quello più comodo nS_2 (infatti si lavora sempre con i paralleli, anche se non sono sempre un arco estremo).



A queste si associano le EQUAZIONI STATICHE

$$\begin{bmatrix}
 \frac{\partial}{\partial s_1} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial R_2}{\partial s_1} & -\frac{1}{R_2} \frac{\partial R_2}{\partial s_1} & \frac{\partial}{\partial s_2} + \frac{2}{R_1} \frac{\partial R_1}{\partial s_2} & \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{R_1} \frac{\partial R_1}{\partial s_2} & \frac{\partial}{\partial s_2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial R_1}{\partial s_2} & \frac{\partial}{\partial s_1} + \frac{2}{R_2} \frac{\partial R_2}{\partial s_1} & 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial s_1} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial R_2}{\partial s_1} & \frac{\partial}{\partial s_2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial R_1}{\partial s_2} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{\partial}{\partial s_1} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial R_2}{\partial s_1} & -\frac{1}{R_2} \frac{\partial R_2}{\partial s_1} & \frac{\partial}{\partial s_2} + \frac{2}{R_1} \frac{\partial R_1}{\partial s_2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{R_1} \frac{\partial R_1}{\partial s_2} & \frac{\partial}{\partial s_2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial R_1}{\partial s_2} & \frac{\partial}{\partial s_1} + \frac{2}{R_2} \frac{\partial R_2}{\partial s_1}
 \end{bmatrix}$$

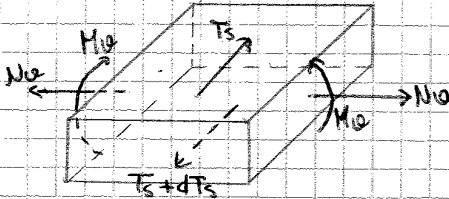
$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_2 \\ T_1 \\ T_2 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ q \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si nota che, tra le equazioni, esiste una dualità, assicurata dal PLV. Soltanto i termini non differenziali cambiano di segno (sono i termini che decoppiano taglio e momento) e ciò deriva dal teorema di Green.

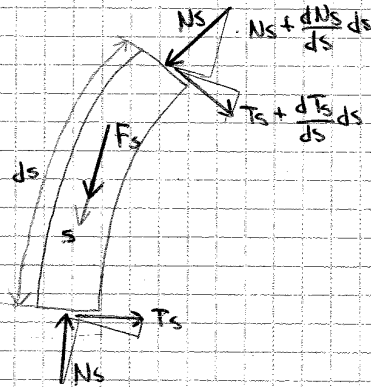
2 Equazioni di equilibrio

In questo caso, ci sono 3 equazioni x 5 caratteristiche della sollecitazione e il problema è solo più 2 volte iperstatico.

Si consideri un elementino compreso tra 2 paralleli e meridiani infinitamente vicini, di lati ds_1 e ds_2 .



I EQUILIBRIO ALLA TRASCALAZIONE LUNGO IL MERIDIANO (lungo s)

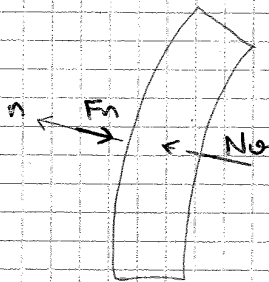


Si nota che l'elemento è curvo, a cui intervengono N_s e T_s con le loro componenti in direzione s . Queste equilibrano la componente F_s dell'azione.

$$dN_s r d\varphi + N_s dr d\varphi - N_s \sin \alpha ds d\varphi + T_s \frac{ds}{r} r d\varphi + F_s r ds d\varphi = 0$$

Si nota che è abbastanza rara un'azione parallela alla lastra di rivoluzione (es. attrito di un liquido)

II EQUILIBRIO ALLA TRASCALAZIONE LUNGO LA NORMALE n AL MERIDIANO

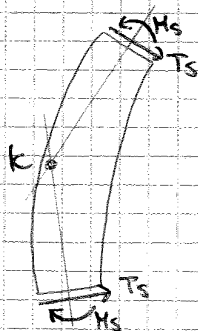


Questa è l'tipica retta d'azione dei carichi (gravità, spinta idrostatica, vento, etc.). La componente F_n esalta il comportamento del meridiano visto come arco ed esalta N_{θ} (perpendicolare al piano del foglio) poiché aiuta N_s .

$$-N_s \frac{ds}{r} r d\varphi - N_{\theta} ds d\varphi \cos \alpha + dT_s r d\varphi + T_s dr d\varphi + F_n r ds d\varphi = 0$$

Non si fa l'equilibrio lungo il parallelo perché identicamente soddisfatto (N_{θ} costante)

III EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE ATTORNO AL PARALLELO



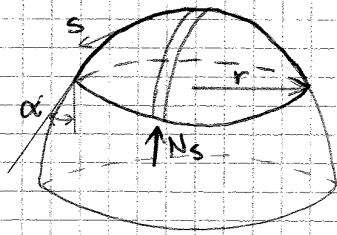
Con esso si vede l'effetto flessionale di M_s e T_s .

$$-T_s r ds d\varphi + dM_s r d\varphi + M_s dr d\varphi - M_{\theta} \sin \alpha ds d\varphi = 0$$

L'equilibrio è fatto attorno alla congiungente degli archi in modo da non far intervenire N_s ma solo T e M . Nonostante comandino T_s e M_s , si nota che interviene anche il contributo di M_{θ} perché l'elemento non è piano e le facce ortogonali al piano di disegno non sono perpendicolari all'asse di rotazione, ma c'è una componente che agisce.

Si nota che, x $R_1, R_2 \rightarrow \infty$, si rettifica la superficie e si ottiene una **LASTRA CIRCOLARE PIANA** (dove il comportamento bidimensionale è massima)

In alternativa, si può fare un equilibrio parziale:



x conoscere lo sforzo normale N_s alle diverse quote, anzi che integrare l'equazione di prima, si può calcolare il peso della porzione al di sopra di quella quota e fare l'equilibrio in direzione z .

$$Q = N_s \cos \alpha (2\pi r)$$

α = inclinazione della tangente alla quota considerata

Da qui si ricava il la sforzo N_s

$$N_s = \frac{Q}{2\pi r \cos \alpha}$$

Dividendo N_s e N_θ x l'area della striscia $h \cdot l$ (area della sezione di guscio), si ottengono σ_s e σ_θ e si ha

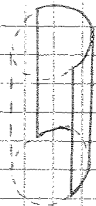
$$\frac{\sigma_s}{R_1} + \frac{\sigma_\theta}{R_2} = \frac{p}{h}$$

p = pressione agente sulla superficie media

CASI PARTICOLARI → membrana cilindrica infinitamente lunga:

in essa si ha

$$R_1 \rightarrow \infty \quad R_2 = r$$



e si ricava la formula di Mariotte, in cui la trazione nell'anello è data dalla pressione del fluido.

$$\sigma_\theta = \frac{pr}{h}$$

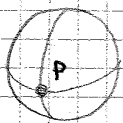


Si nota che, nell'occiaio, con pochi mm di spessore, si reggono grandi pressioni.

→ membrana sferica:

tutti i suoi punti presentano lo stesso raggio di curvatura, cioè

$$R_1 = R_2 = r$$

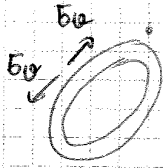


e la membrana lavora in trazione nelle 2 direzioni con la stessa tensione



$$\sigma_s = \sigma_\theta = \frac{pr}{2h}$$

Si nota che la doppia curvatura dimezza la trazione (è un vantaggio) perché ci sono due ordini di archi/funi che lavorano.



La tensione lungo il parallelo vale

$$\sigma_\theta = \frac{PR_1}{2h}$$

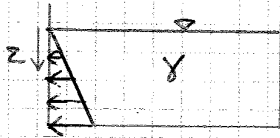
e coincide con la tensione in una sfera soggetta a un carico P . Questo è un valore piccolo e non preoccupa

contano le tensioni alla Marriotte sui meridiani

OSSERVAZIONE:

le relazioni scritte valgono quando l'elemento contiene fluido in pressione (es. tubi o serbatoi).

Esistono però situazioni a pressione atmosferica.

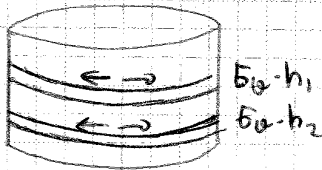


Ad es in un bicchiere contenente idrocarburi, comanda la pressione del fluido, che si caratterizza di un profilo che aumenta con la profondità.

In questa struttura (cilindro a semplice curvatura), in ogni suo punto, c'è un funzionamento ad anello, in cui interviene solo σ_θ , che dipende dalla quota dell'anello. Siccome la tensione σ_θ aumenta con la profondità, x avere

$$\sigma_\theta \cdot h = \text{cost}$$

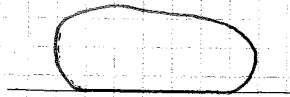
si dovrà variare lo spessore



⇒ GLI ANELLI PIÙ BASSI SONO PIÙ SPESSI poiché devono sopportare una pressione idrostatica maggiore.

Se si volesse una pressione uniforme, anziché il bicchiere, la forma ideale è la GOCCIA:

avendo una pressione interna collegata all'atmosfera (in testa si ha $p = p_{atm}$), questa forma garantisce uniformità di resistenza e di spessore.

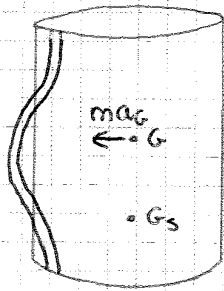


Si nota poi che, all'aumentare della pressione, si passa dalla goccia alla sfera

nella goccia tutte le molecole esterne fungono da lastra a doppia curvatura che lavora in trazione mentre la massa interna spinge idrostaticamente

Il cilindro è più semplice dal punto di vista costruttivo, anche se a parità di volume stoccato richiede più materiale.

OSSERVAZIONE



lo sloshing può anche provocare sversamenti o scintille (x il contatto tetto-metallo) che innescano incendi.

In un serbatoio contenente un fluido, s'individua il baricentro delle masse G e delle spinte G_s (posto a $h/3$ perché la spinta è triangolare).

Durante un sisma, il contenitore inizia a muoversi con il terreno e il fluido, con la sua inerzia, è messo in oscillazione attorno al baricentro con ma_G .

⇒ nasce il fenomeno dello sloshing, in cui nascono delle spinte addizionali sulla lastra che hanno un certo andamento (approssimabile con un rettangolo). Per via delle onde, si nota che le quote più alte sono le più soggette a queste spinte addizionali supplementari.

Se non si tiene conto di questo aspetto, gli anelli della Mariotte non avrebbero problemi (e difficile superare la resistenza) ma va in crisi il comportamento a trave delle strisce e nasce un **MOZZAMENTO**, cioè le strisce verticali vanno in instabilità.

Infatti, in alto la spessore non è elevato perché si lavora con piccole spinte idrostatiche ma, incrementando, l'elemento non regge.

→ EQUAZIONI STATICHE

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} & \frac{d}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{d}{dx} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ T_x \\ M_x \\ M_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ q \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

S'ipotizza che il carico sia **PERPENDICOLARE ALLA SUPERFICIE MEDIA** (es. fluido).

Innanzitutto, si nota che c'è trasposizione della matrice.

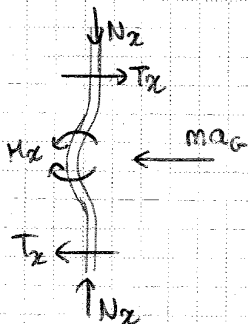
Inoltre, l'ultima colonna è nulla, x cui

$$M_y = 0$$

ossia l'anello lavora solo in trazione/compressione e non c'è flessione. Di fatto, comandano

→ sforzo alla Mariotte N_y

→ taglio T_x e momento M_x della striscia verticale (comportamento a trave).



Ciononostante, si include anche N_x .

È infatti possibile avere sforzo normale sulle strisce verticali quando il serbatoio vibra e il fluido oscilla. L'azione ma_G del fluido, infatti, crea un momento ribaltante. Quando il serbatoio tende a ribaltarsi, in fondazione s'impunta e nasce lo sforzo N_x che, con M_x e T_x , fa sì che la striscia s'instabilizzi e collassi.

Bisogna solo ricavare lo spostamento w e, a tal proposito, si ricorre alla rigidità della trave, scrivendo il momento della striscia come

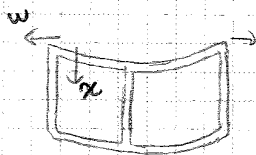
$$M_x = D \chi_x = D \frac{d\varphi_x}{dx}$$

Per semplicità, si ignora la deformazione di tagli.

$$\chi_x = \frac{dw}{dx} + \varphi_x = 0 \Rightarrow \varphi_x = -\frac{dw}{dx}$$

Si ricava così

$$M_x = -D \frac{d^2 w}{dx^2}$$



Si nota che il momento nella striscia deriva dai diversi funzionamenti degli anelli. Ciò è inevitabile perché l'anello di Mariotte al fondo è saldato alla parete e ha un comportamento molto vincolato, mentre le altre sono più libere nel modo di allargamento/restringimento. Da qui si ha

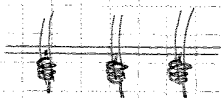
$$\frac{dw}{dx} \neq 0 \Rightarrow \chi_x \neq 0 \rightarrow \text{il momento è proporzionale a } \chi_x$$

Si sostituisce dunque nell'equazione di equilibri

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} w = q$$

$$D \frac{d^6 w}{dx^6} + \frac{Eh}{R^2} w = q$$

Questa è una ODE del IV ordine nello spostamento radiale w (x le strisce verticali).

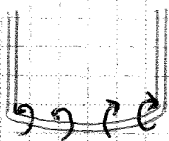


Essa ricorda l'equazione di Winkler poiché è come se le strisce verticali fossero su un letto di molle di rigidità Eh/R^2 (calcolata a una certa quota), corrispondente di vari anelli. In particolare, la rigidità dell'asta è D e la rigidità flessionale del terreno è Eh/R^2 (il raggio dà la rigidità dell'anello - $R \Rightarrow$ rigidità \leftarrow).

Se il carico fosse nullo, si otterrebbe l'equazione

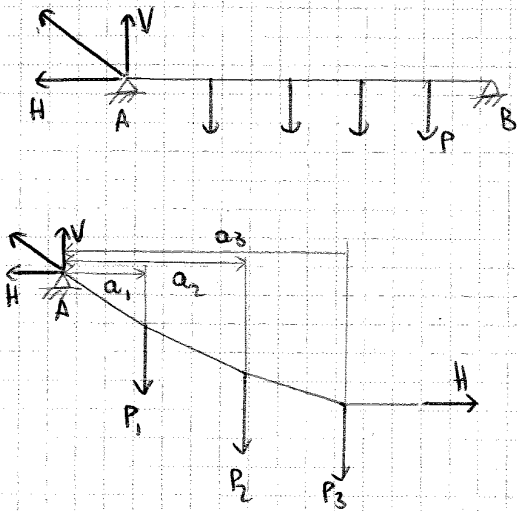
$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = 0, \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{Eh}{4DR^2}} \quad \text{rapporto delle rigidità (importante perché indica la deformazione)}$$

FONDO



In essa nasce momento flettente, in corrispondenza dell'anello poiché l'anello è saldato con il bicchiere lungo la generatrice inferiore e, x l'anello più basso, il fondo è visto come incastrato. In genere, il fondo è bombato x addebiire il momento d'incastrato.

Ora si valuta nel dettaglio il procedimento di calcolo delle tensostrutture:



si consideri ad es una fune portante soggetta a un carico P. Bisogna garantire che la struttura regga al massimo carico (affollamento, oscillazioni del vento e movimento). Inoltre, siccome il cavo assumeva l'andamento della funicolare, bisognerà regolare il pretensionamento agli appoggi x evitare eccessivo imbarcamento.

Inadattato, lo studio si può limitare a metà struttura. La pretrazione e H può essere allora calcolata con un'equazione di equilibrio alla rotazione attorno all'appoggio

$$H = \frac{\sum P_i \cdot a_i}{f}$$

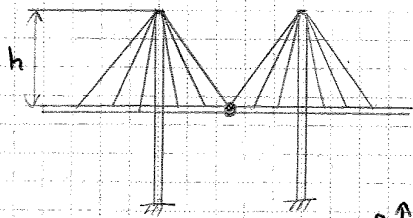
Facendo variare il carico (e la freccia) si ottengono diversi valori di H e dunque di tiro massimo

$$T_{max} = \sqrt{H^2 + V^2}$$

Il valore di tiro di riferimento è legato alla freccia massima imposta dal progettista.

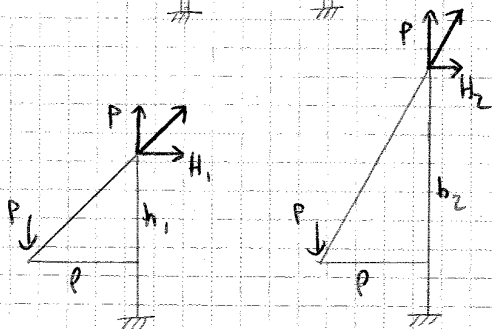
si può notare che il calcolo è semplice perché le funi lavorano in schemi isostatici

ES (PONTE STRALLATO)



I ponti strallati presentano degli STRALLI, cioè dei cavi diagonali che reggono le campate tra i pilasti e ogni porzione di campata (detta STAMPELLA) è giuntata con cerniere, in modo che siano indipendenti.

Qui comanda il tiro degli stralli, nei quali è importante l'altezza h rispetto all'impalcato:



se l'altezza aumenta, aumenta il braccio di leva degli stralli e, a parità di carico, diminuisce il tiro, poiché cambia la direzione del cavo. La componente verticale P, infatti, è sempre la stessa mentre quella orizzontale dipende dall'inclinazione del cavo.

↓ angolo < ⇒ sofferenza minore

Poi bisognerà ragionare anche sull'ottimizzazione (effetto del vento, quantità di calcestruzzo, etc.)

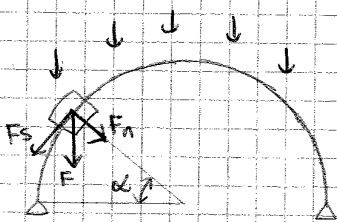
in ogni caso, la struttura tesa "dichiara" come lavora

Cupole

1 Cupole; sono lastre a doppia curvatura che seguono la legge sui meridiani e paralleli; ma sono realizzate in muratura, che non ha resistenza a trazione

⇒ l'esigenza progettuale è evitare il più possibile l'insorgenza di trazioni

2 Cupola sottile emisferica soggetta al peso proprio:



in virtù della simmetria polare, essa può essere descritta con un suo arco. Essendo poi la struttura circolare, essa può essere descritta con l'angolo al centro α .

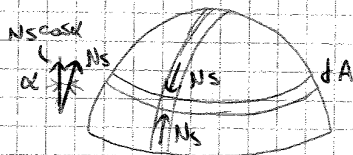
La forza peso è data dallo spessore della calotta x l m di striscia (si lavora x unità di striscia) e vale

$$F = \gamma h$$

Sulla base della nomenclatura delle lastre, si scompone la forza peso in componente radiale e tangenziale, in modo da esplicitare la forza normale agli anelli e tangente agli anelli

$$F_n = -\gamma h \sin \alpha$$

$$F_s = \gamma h \cos \alpha$$

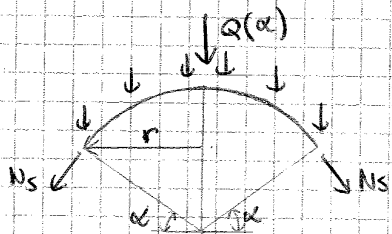


Così si possono applicare le equazioni di equilibrio delle lastre a doppia curvatura.

In realtà, è possibile fare un conto più rapido x calcolare la forza normale N_s lungo la striscia:

si isola la porzione di cupola definita dalla quota d . La risultante dei carichi agente su di essa vale

$$Q(\alpha) = \int_{\alpha}^{\pi/2} \gamma h dA$$

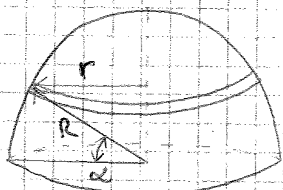


L'area è data dal parallelo considerato e vale

$$dA = 2\pi r R d\alpha = 2\pi R^2 \cos \alpha d\alpha$$

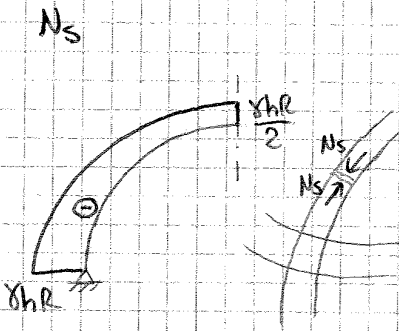
Così il carico Q vale

$$Q(\alpha) = 2\pi \gamma R^2 h \int_{\alpha}^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha = 2\pi \gamma R^2 h (1 - \sin \alpha)$$



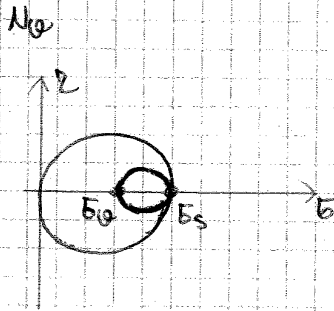
→ se $\alpha = 0$ (piede della cupola), Q è pari al carico totale

→ se $\alpha = 90^\circ$, $Q \rightarrow 0$ (in cima è piccola)



Lungo il meridiano (varia α), si nota che il meridiano è tutto compresso e si passa da un valore massimo all'imposta a un minimo in chiave.

⇒ non nasce trazione sugli spicchi (non si aprono le fessure di malta)

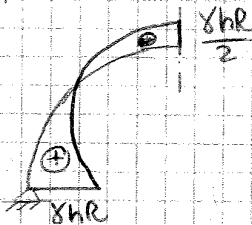


L'ideale sarebbe avere N_q (di Mariotte) di compressione.

Ciò è voluto anche dal punto di vista tensionale x la pietra. Essa, infatti, ha una resistenza limite a compressione, ma uno stato biassiale di compressione (che si ha se N_q è di compressione), il cerchio di Mohr si riduce e si riducono, dunque, le azioni tangenziali. Si tende così alla tensione idrostatica.

↓ anche se si ha sempre $N_q < N_s$ perché N_s domina

⇒ SI VUOLE EVITARE FESSURE + STATO BIASSIALE



In realtà, si nota che esiste un angolo limite, cioè N_q è di compressione solo da un certo parallelo in su.

In particolare, presso la chiave della cupola, N_s e N_q sono della stessa segno e, teoricamente, nel punto di culmine si ha uno stato idrostatico (punto infrangibile). In basso, invece N_q è di trazione e dunque sotto un certo parallelo nascono fessure.

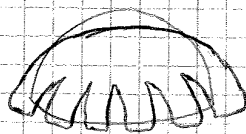
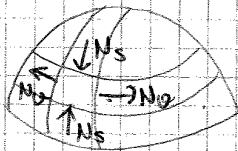
↓

non c'è rottura perché cede prima la malta e queste aperture si trovano al fondo e poi si chiudono quando N_q cambia segno.

L'angolo limite vale

$\alpha_{lim} \sim 30 \div 35^\circ$ → a seconda dello spessore

e ricorda le veni dell'arco.



SOLUZIONE: si procede a un cerchiaggio della cupola al piede, mediante una striscia di acciaio preriscaldato e inchiodata ogni 5/6 m. Raffreddandosi, si ottiene un pretensionamento, poiché la striscia si riduce di volume e stringe la muratura al piede.