



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 1843A -

ANNO: 2016

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Agricola Salvatore

MATERIA: Dynamic design of machines - prof. Genta, Amati

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

## DYNAMIC DESIGN OF MACHINES (mechanical Engineering)

Academic year 2015-2016  
Lectures  
Classroom and laboratory exercises

Fall Semester  
Prof. Giancarlo Genta  
Prof. Nicola Amati

### Organization of the course

The course is based on a total of 63 hours of lectures plus 39 hours of classroom or laboratory exercises, with the following timetable:

Lessons	Monday	14.30-17.30	Room 4N
	Thursday	8.30-10.00	Room 1I
Exercises	Friday	<del>16.00-19.00</del> 11.30-14.30	Room 7B

### Aims of the course

The main aim of the course is to give the students a deeper insight of the methods used for the dynamic stress analysis used in mechanical design. The course is concluded with the study of two applications, namely the dynamic stress analysis of rotors and of the crankshafts of reciprocating engines.

### Textbooks

G. Genta, Vibration of structures and machines, Springer, New York, 1998.  
G. Genta, Vibration dynamics and control, Springer, New York, 2009.

### CALENDAR (Dates are subject to change)

#### Part 1: An overview of dynamic analysis of discrete systems

Lecture 1 September 28	3 h	Mechanical design. Static and dynamic stress analysis. Classical and numerical approach. Automatic computation in design. Numerical simulation. Computer aided engineering (CAE). Discrete linear systems: equations of motion in the configuration space
Lecture 2 October 1	1.5 h	Equations in Lagrange form. State space. Block diagrams
Lecture 3 October 5	3 h	Free behavior of single and multi-d.o.f. systems. Modal uncoupling Structural damping; systems with frequency dependent parameters.
Lecture 4 October 8	1.5 h	Forced response to harmonic excitation.
Lecture 5 October 12	3 h	Modal participation factors. Forced response to non harmonic excitation
Lecture 6 October 15	1.5 h	Short account of random vibrations
Lecture 7 October 22	1.5 h	Dynamics of controlled systems
Lecture 8 October 23	3 h	Dynamics of controlled systems
Exercises 1 October 2	3 h	Basics on dynamic behavior of discrete systems.
Exercises 2 October 9	3 h	Dynamic behavior of an automotive suspension: equations of motion, transfer functions.
Exercises 3 October 16	3 h	Dynamic behavior of an automotive suspension: design for fatigue, active suspension.
Exercises 4 October 19	3 h	Exercises on dynamic analysis of discrete systems.

#### Part 2: Dynamic behavior of continuous systems and discretization techniques

Lecture 9 October 29	1.5 h	Beams and bars. Euler-Bernoulli beams. Modes of continuous systems, Timoshenko beams. Effect of axial forces on flexural behaviour of beams; vibrating strings.
-------------------------	-------	---

Trial exam  
January 7

### Exams

The exam will include a written test followed by an oral examination. To be allowed to the oral exam the student **must have passed the written test with at least 18/30 rating.**

### Written test

The written test will consist of 30 multiple choice tests (correct answer: 1 point; no answer 0 points; wrong answer: -0.5 points) plus 8 simple exercises (correct answer: 2 points; no or wrong answer: 0 points) to be answered in 2 hours. **At least 15 tests and 4 exercises must be answered.** No books, notes or other material are allowed at the written test. Use of a cell phone or other communication device will cause immediate expulsion.

### Oral exam

If the rating of the written test is between 18/30 and 23/30 (included) the oral exam may be substituted by a discussion of the exercises. This can produce an increase or a decrease of the rating up to 2 points, depending on how the exercises are made. A complete failure of answering questions about the exercises **causes a failure of the exam.** If the student aims to obtain more than 23/30 or **he has answered less than 15 tests and 4 exercises the oral exam is compulsory.** The oral exam includes at any rate a discussion on the exercises. **A failure of answering the questions on exercises or the presentation of incomplete exercises causes a complete failure of the exam.**

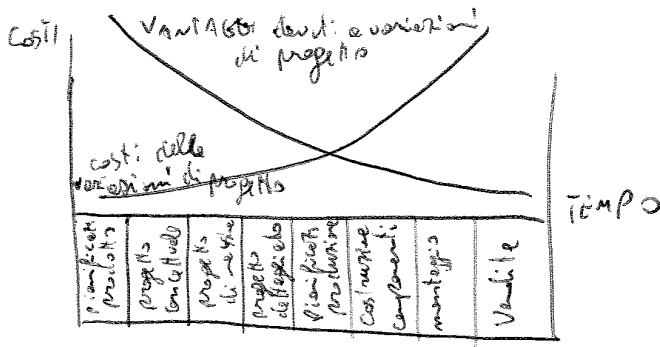
It is recommended to book the exam only when there is a reasonable expectation to actually giving the exam.

The exam rules stated for the past years will apply to students who have followed the course in the past.

30

# DYNAMIC DESIGN OF MACHINES

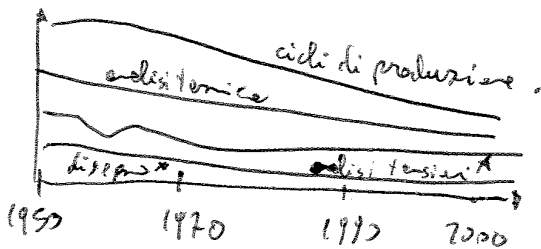
## PARTE I



Apportare delle modifiche ad un progetto comporta una riduzione di vantaggi e un aumento dei costi. Proprio per evitare queste variazioni, risulta molto utile effettuare delle simulazioni con test che si basano su modelli meta-

metici. Da notare che in alcuni casi prima di prototipizzare un prodotto, quella delle simulazioni, è l'unica strada percorribile come per esempio un prodotto che deve andare nello spazio. Occorre considerare che seppure le simulazioni siano più e onerose (migliaia di euro) rispetto alle prove sperimentali (10 migliaia di euro) non sono in assoluto economiche. Negli anni è aumentata l'attenzione verso l'ambito delle progettazioni infatti: in un primo momento era richiesto molto tempo per fare analisi delle tensioni, analisi termiche, cicli di produzione e disegno, ora con il tempo e il PC è richiesto sempre meno tempo e denaro.

Inoltre solo recentemente è stata introdotta l'analisi dinamica, questo perché in passato non era noto alcun modello metaemetico che permettesse di farlo.



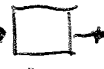
### TIPOLOGIE DI CARICHI

Nell'analisi dinamica e statica occorre distinguere 3 tipologie di carico:

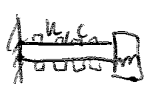
- **CARICO STATICO**: è un carico che è sempre applicato alla struttura e non cambia in modulo (è costante). In questi casi l'analisi statica prevede la scelta di un materiale che non venga troppo influenzato dall'ambiente si deve valutare che la deformazione rientri nei limiti imposti in fase di progetto. Il carico è definito statico anche quando non è sempre applicato ma viene rimosso e applicato lentamente, in questi casi si deve valutare il problema delle LCF (low cycle fatigue) cioè la fatica a basso numero di cicli.

- ANALITICO: Il modello analitico è rappresentato da equazioni differenziali ordinarie del 2° ordine del tipo  $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$  e ogni coefficiente che compare nell'espressione ha un significato fisico, per esempio  $m$  = massa,  $c$  = smorzamento,  $k$  = rigidità, è un modello fisico.

• A SCATOLA NERA

→  è un modello empirico che nasce nel caso di sistemi molto complessi in cui diventa difficile lavorare con molte ODE e dove conoscendo gli INPUT e sapendo quali OUTPUT si ottengono, si può trovare una legge EMPIRICA (da cui modello empirico) in cui i coefficienti della equazione non hanno un significato fisico. Per esempio una formula empirica può essere  $F_y = c_1 \sin(\omega t + \phi)$ .

C'è ancora un altro modello detto A SCATOLA GRIGIA o IDENTIFICATO questo viene utilizzato in alcuni casi come nell'esempio seguente.



Si ha una trave con dei pesetti e una massa appesa. Non si può usare il modello fisico perché non si conosce la massa dell'intera struttura (trave e masse), allora con il modello a scatola nera concentro le masse delle strutture in una massa  $m_t = m \cdot 1,3$  dove 1,3 è un numero trovato empiricamente. A questo punto si conosce  $m_t, k, c$  e si può applicare il modello analitico.

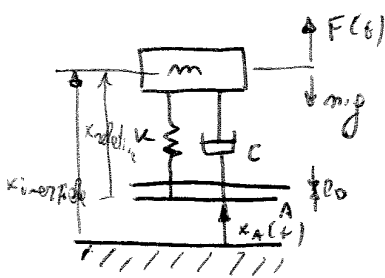
C'è un'ulteriore distinzione all'interno del modello analitico ed è fra modello analitico e modello numerico. Il modello analitico è un modello che permette la risoluzione delle ODE in forma chiusa ed è adatto per sistemi semplici in cui si vuole un risultato qualitativo. Il modello numerico è un modello che prevede la risoluzione delle ODE in forma numerica e permette di risolvere sistemi complessi anche non lineari dando un risultato quantitativo. Ci sono casi in cui si preferisce uno e casi in cui si preferisce l'altro, entrambi hanno vantaggi e svantaggi. Il modello numerico fra i vantaggi presenta la possibilità di risolvere sistemi lineari e non lineari, ~~per~~ trovare le risposte a precisi input (con il modello analitico questo non è possibile perché è troppo difficile la risoluzione). Fra gli svantaggi presenta il fatto che fornisce il risultato quantitativo e quindi per un caso particolare, viene richiesto elevato tempo di calcolo e quindi elevati costi e impieghi per vedere

$$\ddot{\theta} = \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial t} \quad \ddot{\theta} = \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad F_i = F_e \quad m l^2 \ddot{\theta} = -c \theta - m g l \sin \theta \quad 5$$

Posso scrivere l'equazione del moto in forma canonica

$m l^2 \ddot{\theta} + c \theta + m g l \sin \theta = 0$  Questa forma però non è lineare e allora posso linearizzarla considerando lo sviluppo di Taylor  $\sin \theta \approx \theta + d$ .  
 $m l^2 \ddot{\theta} + c \theta + m g l \theta = 0$  La linearizzazione è possibile considerando piccoli spostamenti.

### Esempio 2



Essendo un sistema inerziale vale che le forze d'inerzia sono uguali alle forze esterne  $F_i = F_e$ .

Nel caso studio  $F_i = m \ddot{x}_i$   $F_e = F(t) - F_k - F_c$

$F_k = -k(x_i - x_A)$  (-) perché sono delle reazioni e  $F(t)$

$F_c = -c(\dot{x}_i - \dot{x}_A)$

Applicando la legge di Newton  $F = m \ddot{x}$  si scrive

$m \ddot{x}_i = -k(x_i - x_A) - c(\dot{x}_i - \dot{x}_A) + F(t)$  e in forma canonica

$m \ddot{x}_i + c(\dot{x}_i - \dot{x}_A) + k(x_i - x_A) = F(t)$

$m \ddot{x}_i + c \dot{x}_i + k x_i = c \dot{x}_A + k x_A + F(t)$

equazione omogenea

forza eccitante

NOTA: se il sistema è lineare possiamo sempre disaccoppiare la parte statica da quella dinamica; vediamo come fare.

si modifica  $F_A = k(x_i - x_A + l_0)$  e si aggiunge  $-m g$

$m \ddot{x}_i = -k(x_i - x_A - l_0) - c(\dot{x}_i - \dot{x}_A) + F(t) - m g$

Se sono nel caso statico e quindi il sistema non vibra  $\ddot{x} = \dot{x} = 0$   
 $F(t) = 0$   $k x - k x_A - k l_0 = -m g$   $x_{st} = x_A + l_0 - \frac{m g}{k}$

nelle forme più generale si può scrivere

$$[M] \{ \ddot{x} \} + \{ [C] + [G] \} \{ \dot{x} \} + ([K] + [H]) \{ x \} = \{ F(t) \}$$

qualsiasi matrice infatti può essere divisa in una parte simmetrica e una antisimmetrica e per esempio:

$[C]$  = matrice simmetrica di smorzamento che stabilizza il sistema.

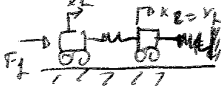
$[G]$  = matrice antisimmetrica "dissipativa" relativa alle forze d'inerzia, per esempio Coriolis per i corpi rotanti.

$[K]$  = matrice di rigidezza simmetrica

$[H]$  = matrice antisimmetrica "dissipativa" che instabilizza il sistema. B, G e H possono essere nulle se si ha  $\frac{dT}{dt} = 0$  e cioè T indipendente dalle posizioni ma solo delle velocità (sistema conservativo)

generalmente  $[K]$  e  $[M]$  sono definite positive o il significato fisico è che a ogni p.d.l. è associato un contributo d'inerzia concorrente che è positivo.  $[M]$  è singolare (e quindi non invertibile) se

ha dei p.d.l. associati senza massa,  $[K]$  è singolare (cioè non invertibile) se

se ci sono moti rigidi 

### EQUAZIONE DI LAGRANGE

È un metodo alternativo all'approccio newtoniano per ricavare le equazioni del moto. È un metodo semplice, molto utilizzato soprattutto per sistemi complessi perché riduce l'errore e permette di scrivere le forze inerziali in modo abbastanza semplice. Lagrange infatti dimostrò che le forze d'inerzia sono funzione dell'energia cinetica T.

Si può scrivere allora  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} = Q_{i2}$   $Q_{i2}$  = forze esterne.

Ma in  $Q_{i2}$  (forze esterne) ci sono anche le forze conservative che posso esprimere come derivate dell'energia potenziale  $F_c = -\frac{\partial U}{\partial x_i}$  e

allora l'espressione diventa  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial U}{\partial x_i} = Q_{i2}$  ma

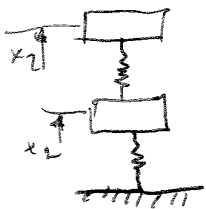
in  $Q_{i2}$  sono contenute anche le forze dissipative (di Rayleigh) che possono essere scritte come funzione di una funzione F (simile all'energia potenziale)  $F_{nc} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$



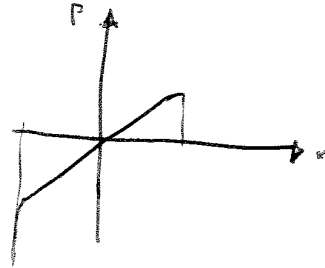
**SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI**

è una rappresentazione dove le coordinate generalizzate sono contenute in un vettore colonna  $x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{Bmatrix}$ . È detto così perché ogni punto

di questo vettore può essere associato a una configurazione del sistema nello spazio delle dimensioni dei p.d.l. Considerando l'esempio seguente

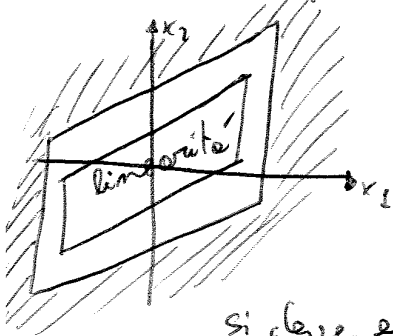


avremo 2 g.d.l. e possiamo valutare le caratteristiche del sistema



si vede che il sistema superato la linearità diventa non lineare.

Allora possiamo valutare un grafico particolare dove negli assi si mettano i p.d.l.



Le zone tratteggiate fa riferimento al caso in cui le molle che superano il tratto lineare e si è rotto. Il sistema è non lineare o addirittura rotto. Il parallelogramma fa riferimento alle zone lineari (di funzionamento). Durante le progettazioni

si deve essere sicuri di non andare oltre le zone lineare per evitare le rotture del sistema e allora si sceglie una sottozona di sicurezza; ovviamente tanto più è piccola la sottozona tanto più si sovredimensiona il sistema.

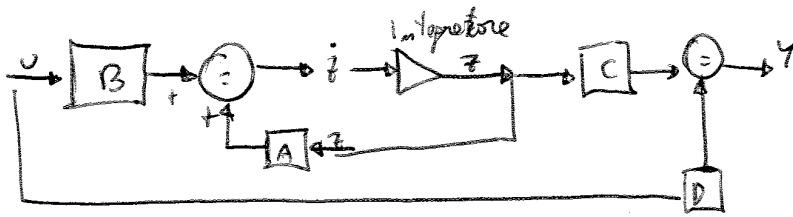
**SPAZIO DEGLI STATI**

Questo spazio nasce perché conoscere la configurazione del sistema ad un dato tempo, o conoscere la storia temporale delle portante, non è sufficiente e conoscere la storia passata o prevedere l'evoluzione futura. Se invece si conoscono le "variabili di stato" cioè posizione e velocità, lo stato del sistema è noto a ogni tempo. Si può pensare da n ODE di 2° ordine e 2n ODE di 1° ordine, ovviamente così si ha il doppio delle equazioni e delle incognite e quindi si usa una variabile ausiliaria

$$z = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ x \end{Bmatrix} \quad \text{Data } A_1 \dot{x} + A_2 x = P(t) \Rightarrow \dot{x} + A_1^{-1} A_2 x = A^{-1} P(t)$$

# IL QUADRIPOLO

L'equazione  $\dot{z} = Az + Bu$  può essere scritta anche in un diagramma a blocchi:



D = è un integratore con feedback

$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bu \\ y = Cz + Du \end{cases}$ 
 spesso è difficile conoscere lo stato  $z$  ma si conosce l'output  $y$ .  $C$  = output gain matrix

$\dot{z} = Az + Bu$  è un'ODE, cioè  $z$  dipende dalle storie temporali passate  
 $y = Cz + Du$  è un'equ. algebrica e quindi non c'è passato.

Il quadrupolo del sistema è l'insieme delle matrici  $A, B, C, D$ .

In  $A$  è contenute la dinamica del sistema;  $B$  e  $C$  sono le matrici di guadagno di input e output;  $D$  esprime l'influenza diretta degli input sugli output (è la matrice di legame diretta).

Quando si scrive  $\dot{z} = Az + Bu$  si parla l'equazione del moto e il tipo di sistema da cui deriva; queste forme viene usate dai biologi per valutare come varia la popolazione mondiale, dagli economisti per valutare come variano le scorte. Si possono usare le stesse equazioni anche se il sistema è non-lineare ma  $A, B, C, D$  non sono costanti.

## RISOLUZIONE DI UN SISTEMA A UN G.D.L.

Le soluzioni di un ODE lineare è somma di una soluzione omogenea e l'equazione completa. Il significato fisico dell'omogenea è quello di un forzante nullo quindi la soluzione generale è una combinazione lineare di quello che il sistema farebbe se fosse libero e di quello dei costretti e forze e cause delle forzanti.

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$  Dobbiamo trovare una  $x$  che abbia la stessa

forme onde derivata due volte; ci sono 3 alternative.

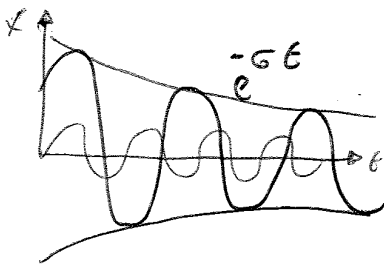
1)  $x = x_0 \sin(\omega t + \varphi) = x_0 \sin \omega t \cos \varphi + x_0 \cos \omega t \sin \varphi$   $x_1 = x_0 \sin \varphi$   
 $x_2 = x_0 \cos \varphi$

2)  $x = x_1 \cos \omega t + x_2 \sin \omega t$

3)  $x = x_0 e^{st}$

~~$e^{st} = e^{-\sigma t}$~~  dove  $\sigma = -\text{Re}(s)$   $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$  = frequenza naturale 13

$e^{st} = e^{-\sigma t} \cdot [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)]$  è una funzione armonica più l'espone-  
 nale che decresce



$$\sigma = -\text{Re}(s) = \frac{c}{2m} = \frac{c}{2m} = \frac{2\zeta \omega_n}{2m} = \zeta \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\sigma = \zeta \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Vediamo come l'ampiezza si riduce nel tempo.  
 Nota: il numero complesso serve solo per dare uno sfasamento alle risposte.

**DECremento LOGARITMICO**

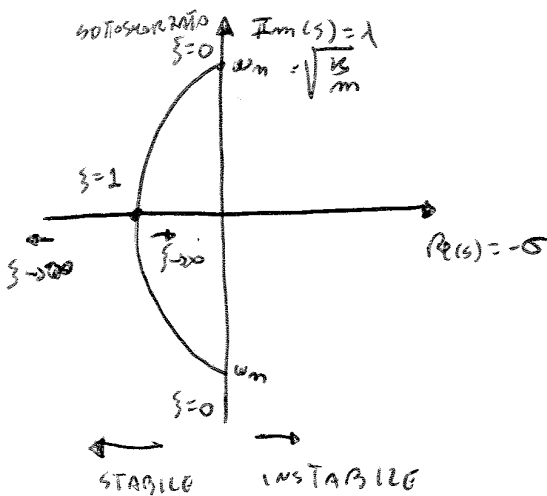
Riflesce il decremento delle vibrazioni; si calcola in maniera  
 semplice  $\delta = \ln\left(\frac{x_i}{x_{i+2}}\right) = \frac{2\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \approx 2\pi \zeta$   $x_i$  = ampiezza di un picco  
 $x_{i+2}$  = ampiezza del picco  
 successivo.

Se il sistema è lineare  $\delta = c \cdot \sigma t$

NOTA:  $\zeta$  per molti materiali è dell'ordine di 0,001; 0,0001 ma anche  
 fosse maggiore (per le sospensioni d'auto è 0,3) si può scrivere

$\delta \approx 2\pi \zeta$   $\delta = \pi \eta \Rightarrow \eta = \frac{\delta}{\pi}$

**LUOGO DELLE RADICI**



possiamo rappresentare nel piano di Gauss le  
 radici del sistema; vediamo che se il  
 sistema non è smorzato ( $\zeta = 0$ ) un  
 è la frequenza naturale del sistema, se un numero  
 immaginario; se il sistema è smorzato  
 $\zeta \neq 0$   $\omega_n$  è ancora la frequenza naturale  
 ma  $\sigma$  è un numero reale.  
 Se  $\zeta \rightarrow \infty$  ( $\zeta > 1$ ) si hanno 2 sol. reali  
 Se  $\zeta < 1$  si hanno 2 sol. immaginarie

Se  $-\sigma > 0$  le soluzioni anziché decrescere nel tempo, incrementano e il sistema  
 diventa instabile; se  $-\sigma < 0$  il sistema si stabilizza

**RISOLUZIONE DI SISTEMI A MOLTI G.D.L.**

Ci sono due metodi per trovare l'equazione del moto: Newton e Lagrange.  
 Lo shock absorber della sospensione può essere considerato come uno smorzatore viscoso, ma anche le punte delle ruote; infatti come approssimazione si pone uno smorzatore in parallelo alle molle (de equivele de rigidezza delle ruote). Si usano smorzatori viscosi perché ci semplifica la risoluzione di sistemi lineari; se il sistema non è lineare si usano smorzatori più complessi; si come modelli di Coulomb che non sono lineari.

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \quad (1)$$

$(n \times n)$     $(n \times 1)$     $(n \times n)$     $(n \times 1)$     $(n \times n)$     $(n \times 1)$     $(n \times 1)$

Per l'approccio Lagrangiano ricordiamo  $L = T - U$  e quindi l'equazione diventa

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial q_i} = a_i \quad i \in [1, \dots, n] \quad n = \text{no. di g.d.l.}$$

$$a_i = \frac{\partial F_i}{\partial q_i} \quad \text{rapporto fra il lavoro infinitesimo delle forze esterne e la variazione virtuale (costanti virtuali)}$$

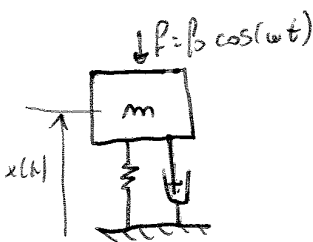
quest'approccio è molto utile nei sistemi complessi perché con Newton è facile dimenticarsi qualche termine.

Il sistema (1) è formato da un set di ODE del 2° ordine.  
 Le soluzioni si dete dalle somme delle soluzioni omogenee e quelle particolari

$$\{x(t)\}_{(n \times 1)} = \{x(t)_{om}\}_{(n \times 1)} + \{x(t)_{ip}\}_{(n \times 1)}$$

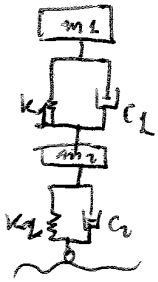
↓  
 omogenee associate (con forzante nulle)

↓  
 integrale particolare



$F_0$  = ampiezza delle forze  $\omega$  = frequenze delle forzanti e si ha un spostamento  $x(t)$  che in una 1° fase dipende dal comportamento dinamico interno del sistema, poi in un 2° momento diventa dominante il comportamento in risposta alle forzanti. Noi partiamo da una posizione  $x_0$  dovuta alla deflessione statica della struttura a cause del peso proprio. Le presenza dello smorzatore permette di avere un decadimento nell'oscillazione. Il periodo dell'oscillazione  $T = \frac{1}{\lambda}$   $\lambda = \sqrt{\frac{k}{m}}$   $\lambda$  = frequenza naturale del sistema

per il progetto si ha,



e quindi avremo 2  $\lambda_i$ .

$$(-\lambda_i^2 [M] + [K]) \{q_i\} e^{i\lambda_i t} = \{0\}$$

$q_i$  è un certo spostamento dovuto alle frequenze naturali  $\lambda_i$  e quindi  $\{q_i\}$  è l'autovettore associato alle frequenze  $\lambda_i$ .  
Danno le forme modali

Siccome nel determinante ci saranno almeno 1 righe da dipendere dalle altre oltre nell'autovettore  $\{q_i\}$  dovrà assegnare arbitrariamente un certo spostamento e poi gli altri verranno di conseguenza

quindi se  $n$  sono i p.d.l., si avranno  $n$   $\lambda_i$  corrispondenti degli autovettori  $q_i$  che saranno  $n$ .

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \text{ e cui}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\left\{ \begin{matrix} \{q_1\} \\ \{q_2\} \\ \dots \\ \{q_i\} \\ \dots \\ \{q_n\} \end{matrix} \right\}}_{\text{è detta matrice } [\Phi]}$$

Ci sono alcune proprietà di questi autovetori e autovettori e cioè che sono  $M$  e  $K$  ortogonali.

DEMONSTRAZIONE DELLA  $M$ - $I$  e  $K$ - $I$

Parto dal p.d.l.  $i$ .

$$[K] \{q_i\} = \lambda_i^2 [M] \{q_i\} \quad \text{avendo semplificato } e^{i\lambda_i t}$$

Considerato un autovettore  $\{q_j\}$  lo prendo moltiplico a tutto e  $\tau$  i membri ~~trasposto~~ trasposto, ottenendo una nuova formulazione.

$$\{q_j\}^T [K] \{q_i\} = \lambda_i^2 \{q_j\}^T [M] \{q_i\} \quad (A)$$

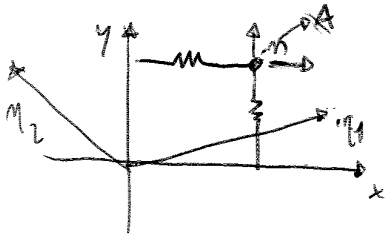
Adesso parto dal p.d.l.  $j$

$$[K] \{q_j\} = \lambda_j^2 [M] \{q_j\} \quad \text{Adesso moltiplico per } \{q_i\}^T$$

$$\{q_i\}^T [K] \{q_j\} = \lambda_j^2 \{q_i\}^T [M] \{q_j\} \quad (B)$$

IN CONCLUSIONE

$$\{x\} = [\phi] \{\eta\} \quad \eta = \text{spostamento modale}$$



2 p.d.l. (in x e in y) ma lo spostamento finale è la combinazione finale. Con l'analisi modale si trova due coordinate **INDIPENDENTI**  $\eta_1, \eta_2$  ma la loro combinazione dà comunque lo spostamento finale!

Amzide usare un sistema di riferimento fisico, uso un sistema di riferimento modale.

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{0\} \quad \text{in questo caso (riferimento modale) solo}$$

$$[M] [\phi] \{\ddot{\eta}\} + [K] [\phi] \{\eta\} = \{0\} \quad \text{poi moltiplico per } [\phi]^T$$

$$[\phi]^T [M] [\phi] \{\ddot{\eta}\} + [\phi]^T [K] [\phi] \{\eta\} = \{0\}$$

$$[\bar{M}_i] \{\ddot{\eta}_i\} + [\bar{K}_i] \{\eta_i\} = \{0\} \quad \text{ho ora equazione disaccoppiate delle altre!!}$$

RISOLUZIONE DI SISTEMI A MOLTI G.D.L. SMORZATI E FORZATI

Da queste equazioni noi troviamo  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  e poi sostituiamo in

$$\{x\} = [\phi] \{\eta\} \quad \text{Ottago gli spostamenti: } x.$$

Consideriamo il caso di un sistema smorzato con forzante esterna.

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{p(t)\}$$

$(n \times n) \quad (n \times 1) \quad (n \times n) \quad (n \times 1) \quad (n \times n) \quad (n \times 1) \quad (n \times 1)$

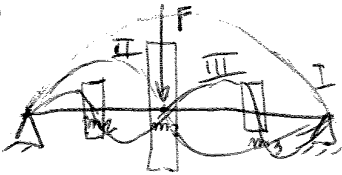
Ora sostituisco  $\{x\} = [\phi] \{\eta\}$  e poi moltiplico per  $[\phi]^T$ .

$$[\phi]^T [M] [\phi] \{\ddot{\eta}\} + [\phi]^T [C] [\phi] \{\dot{\eta}\} + [\phi]^T [K] [\phi] \{\eta\} = [\phi]^T \{p(t)\}$$

$$[\bar{M}] \{\ddot{\eta}\} + [\bar{C}] \{\dot{\eta}\} + [\bar{K}] \{\eta\} = \{\bar{P}\} \rightarrow \text{fattori di parte a posizione modale}$$

$\bar{P}_i = \frac{\bar{P}_i}{\bar{M}_i} = \frac{\phi_i^T \{p\}}{m_i \omega_i}$ 
→ fattore di parte a posizione modale normalizzato rispetto alla massa
→ forze applicate nelle direzioni modali  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$

Esempio



27

$$\lambda_1 = 100 \text{ Hz} \quad F = F_0 \cos \omega t \quad \omega = 300 \text{ Hz}$$

$$\lambda_2 = 150 \text{ Hz}$$

$$\lambda_3 = 300 \text{ Hz}$$

Si ricorre  $\omega = \lambda_3$  nel 3° modo  $m_1$  e  $m_3$  sono dei nodi che non vibrano, ma che occupano solo delle masse  $m_2$ . Quindi l'analisi di  $x$  e  $\{q\}$  è importante per capire se le frequenze del carico è nel range dei più dannosi problemi o meno (esempio  $\omega = 50 \text{ Hz}$  non è problema) o poi nel caso in cui può darsi problemi dove vedo a vedere qual'è il modo di vibrare e cui posso avere problemi e a quel punto voluto solo i punti che non sono nodali. Infatti negli alberi, i cuscinetti vengono collocati dai punti nodali dove gli spostamenti sono nulli o piccolissimi, lì dove invece lo delle vibrazioni s'aggiungono vincoli così da ridurre a zero.

SISTEMI CON ECCITAZIONE ARMONICA A I.G.D.L

Vediamo un sistema a I.G.D.L anche perché abbiamo visto che qualsiasi sistema può essere ridotto a tante ODE a I.G.D.L.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_0 e^{i\omega t}$$

la parte <sup>esclusione</sup> reale sarà solo la parte reale!!  
 $\omega =$  frequenza dell'eccitazione

$$x(t) = x_{omo}(t) + x_{inpart}(t)$$

Vediamo come è fatta  $x_{inpart}(t)$ ; si vorrebbe avere le stesse forme della forzante.

ovvero le stesse forme della forzante.

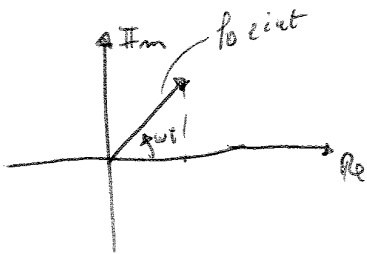
$$x_{ip}(t) = x_0 e^{i\omega t}$$

o trasformiamo le ODE in un'equazione algebrica.

$$\dot{x}_{ip}(t) = i\omega x_0 e^{i\omega t}$$

$$\ddot{x}_{ip}(t) = -\omega^2 x_0 e^{i\omega t}$$

essendo il nostro sistema sotto posto a una forzante reale, però prendendo la proiezione sull'asse reale e quindi della soluzione prenderò solo la parte reale



nel dominio della frequenza si può scrivere.

$$(-m\omega^2 + i\omega c + k) x_0 e^{i\omega t} = f_0 e^{i\omega t}$$

$$k_{dym} x_0 = f_0 \quad k_{dym} = \frac{f_0}{x_0}$$

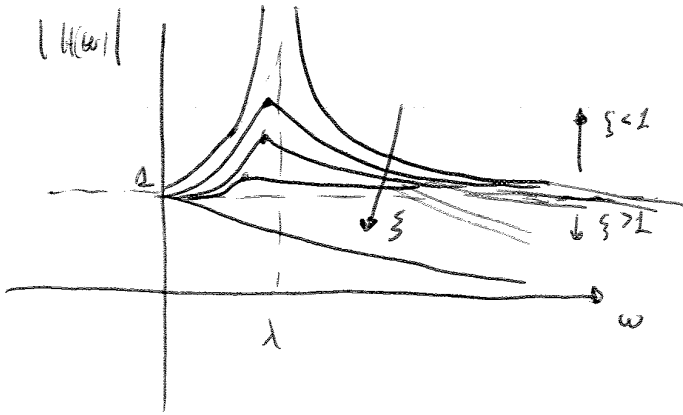
$$k_{dym} = -m\omega^2 + i\omega c + k$$

$$\frac{x_0}{f_0} = \frac{1}{-m\omega^2 + i\omega c + k} = \frac{1}{k}$$

$H(\omega) = k^{-1}$  è la ~~funzione~~ <sup>DEFINIZIONE</sup> dinamica complessa

metrice di risposta dinamica del sistema.

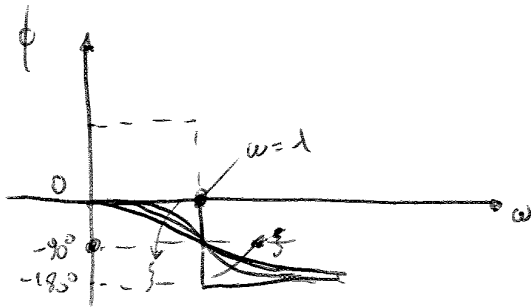
VIBRATIONS DI BOVE



$\lambda = \text{frequenza naturale}$

il sistema non riesce a vibrare perché lo smorzamento smorza le vibrazioni

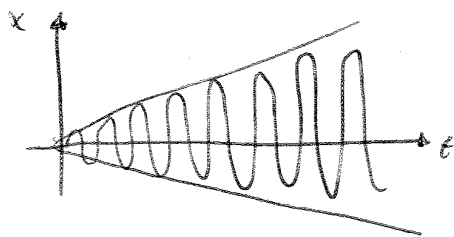
Aumentando lo smorzamento i picchi delle risposte sono via via più bassi e si fanno per frequenze inferiori a  $\lambda$ .



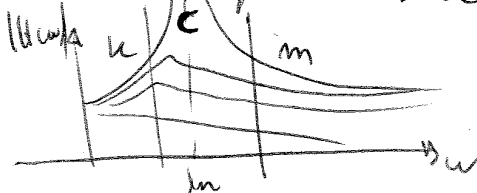
se  $\phi = 0$  il sistema è in fase con l'input; se  $\phi = -180^\circ$  il sistema è in ritardo di  $180^\circ$  rispetto all'input

Commenti sul diagramma di Bode

dal grafico sembra che si veda subito a  $\infty$  per  $w = \lambda = \omega_n$  ma in realtà non si ha nessuna situazione del genere perché i sistemi reali presentano un po' di smorzamento (anche se piccolo) che diminuisce i picchi. Nella realtà poi si può andare ad ampiezze infinite in maniera più o meno rapida.



Inoltre dal diagramma di Bode si osserva come per basse frequenze è dominata dalle forze elastiche che si oppongono alle forze esterne, alle alte frequenze il sistema è dominato dalle forze d'inerzia che si oppongono alle forze esterne. Per frequenze intermedie le forze elastiche bilanciano le forze d'inerzia e quindi le forze esterne possono essere bilanciate solo dallo smorzamento che però se è piccolo è quasi nulla e quindi si ha la risonanza  $\omega_n = \lambda_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$





$n=3$

$$A = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ & H_{22} & H_{23} \\ & & H_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\text{M}} & \boxed{\text{M}} & \boxed{\text{M}} \\ & \boxed{\text{M}} & \boxed{\text{M}} \\ & & \boxed{\text{M}} \end{bmatrix}$$

25

\* = antinod  
\* = nodo

Si possono definire poi altri due parametri:

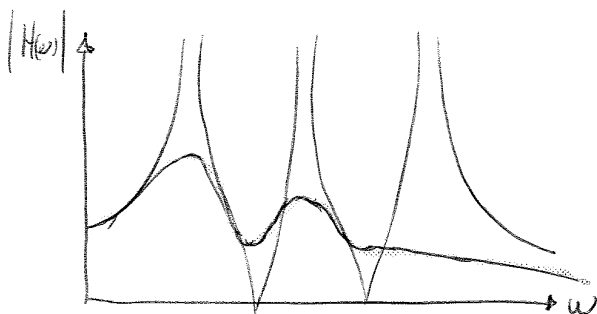
$$\text{MOBILITÀ} = \frac{|v_0|}{|p_0|} = \frac{\omega |x_0|}{|p_0|}$$

$|v_0|$  = ampiezza delle velocità espresso come prodotto delle frequenze per l'ampiezza dello spostamento.

$$\text{INERTANZA} = \frac{|a_0|}{|p_0|} = \frac{\omega^2 |x_0|}{|p_0|}$$

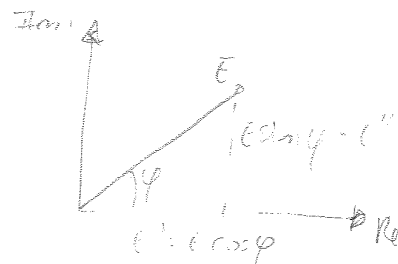
La grandezza più usata è l'inertanza perché durante gli esperimenti, il moto è monitorato tramite accelerometri che misurano l'accelerazione e quindi si misura direttamente  $|a_0|$ . Se si usassero i velocimetri si misurerebbe le velocità e quindi la mobilità. In realtà ed oggi l'esperimento viene monitorato dal PC e quindi si misura qualsiasi cosa.

NOTA: I grafici del diagramma di Bode sono in scala logaritmica quindi se ho 0 in realtà è perché  $v_0$  e  $-∞$ .  
Qual è l'effetto dello smorzamento? Di ridurre i picchi di risonanza e aumentare i valori dell'anti-risonanza.



— = sistema non smorzato  
— = sistema smorzato.

OSS:  $\epsilon = \epsilon_0 \cos(\omega t - \varphi) = \epsilon_0 \cos \omega t \cos \varphi + \epsilon_0 \sin \omega t \sin \varphi =$   
 $= \underbrace{\epsilon_0 \cos \varphi}_{\text{parte in fase}} \cos \omega t + \underbrace{\epsilon_0 \sin \varphi}_{\text{spostamento}} \sin \omega t$



Dalla legge di Hooke  $\sigma = \epsilon E$  e allora  $\frac{\sigma}{E} = \epsilon$ .

$\frac{\sigma}{E} = \frac{\sigma_0}{E_0} (\cos \varphi + i \sin \varphi) = E' + i E''$  Abbiamo un termine reale

$E'$  (modulo della rigidità in fase), e un termine immaginario  $i E''$  (è legato allo smorzamento  $\hat{r}$  in quest'ultima ed è una perdita).

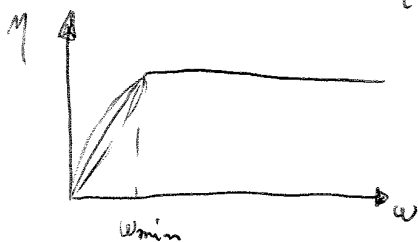
Si può scrivere  $\frac{\sigma}{E} = E' \left( 1 + i \left( \frac{E''}{E'} \right) \right)$  ed  $\frac{E''}{E'} = \tan(\varphi) = \eta$  (fattore di perdita del materiale)

Possiamo fare lo stesso ragionamento per la rigidità infatti sia per  $\sigma$  che per  $\epsilon$  (con la stessa ipotesi) sono armoniche e allora

$\frac{F}{x} = k' + i k'' \Rightarrow \eta = \frac{k''}{k'} = \tan(\varphi)$ . in questo caso  $\varphi$  è la fase fra lo spostamento e il carico.

Queste formule sono usate per materiali ad alte frequenze ma in generale nei materiali ingegneristici  $E' \gg E''$ ,  $k' \gg k''$  e  $\varphi$  è molto basso per cui anche  $\eta$  è basso. Si scrive allora  $k' \approx k$ ,  $k'' = k' i \eta = k(1 + i \eta)$   
 $\eta \approx \varphi$ ,  $E^* = E(1 + i \eta)$ .

In 1ª approssimazione si può considerare  $\eta = \text{cost}$  e si può trovare nei libri tabulato. In realtà  $\eta$  e  $\varphi$  sono uguali per un certo materiale in un certo stato, infatti dipendono anche dai trattamenti termici, dalla fatica, dal carico. Inoltre  $\eta$  è anche funzione delle frequenze!!



Oltre una frequenza minima si può ritenere  $\eta = \text{cost}$ , ed il solito  $\hat{r}$  invece è variabile anche per valori di  $\omega = \omega_0 \pm \omega$ .

Def: smorzamento relativo  $\Psi \approx 2\pi\varphi \approx 2\pi\eta$

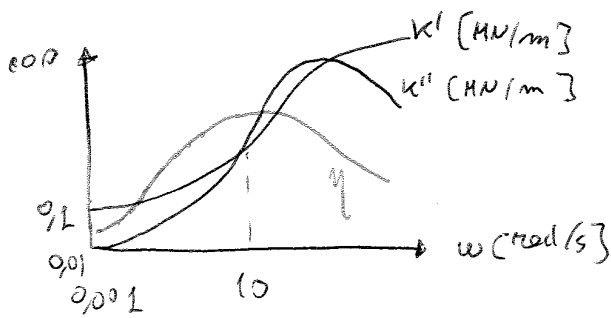
$S = \frac{2\pi A \Psi}{\pi} = \frac{2\pi \eta}{\pi}$   
 $\Rightarrow \eta = \frac{S}{\pi}$

**PARAMETRI DIPENDENTI DALLA FREQUENZA**

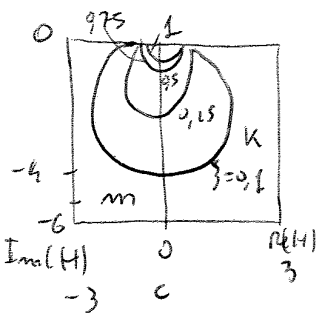
Potremmo scrivere  $m\ddot{x} + c(\omega)\dot{x} + k(\omega)x = f(t)$  ma se  $k(\omega)$  non è armonica non è corretta questa scrittura ma è corretta la seguente:  $(-m\omega^2 + i\omega c(\omega) + k(\omega))x_0 = f_0$ . Se il sistema ha smorzamento isteretico  $(-m\omega^2 + i\eta\omega + k(\omega))x_0 = f_0$

Tutti gli elastomeri (come le gomme) hanno solitamente  $c$  e  $k$  dipendenti da  $\omega$ . Questi a basse  $\omega$  si comportano come le gomme cioè basso rigidezza  $k$  e basso smorzamento  $c$ . Ad alte frequenze  $\omega$  diventano come il vetro con  $k'$  da continua e solida e  $k''$  da scade ma è comunque alto e  $c$  da continua a diminuire. Per valori intermedi di frequenze  $\omega$  si ha una zona di transizione dove la rigidezza aumenta ma lo smorzamento  $\eta$  si riduce e siccome  $\eta < 1$  vuol dire che si sta dissipando molte energie.

NOTA: se in ascisse mettessi  $\frac{1}{T}$  avrei lo stesso grafico



**NYQUIST-DIAGRAMMA**



Questo diagramma rappresenta lo sistema in frequenza del sistema. Sono rappresentati la parte  $Re(H)$  e la parte immaginaria  $Im(H)$ . Il parametro che varia è lo smorzamento  $\zeta$ . In questo modo è facile e semplice valutare lo stato del sistema, ma la frequenza è implicita. Inoltre è molto

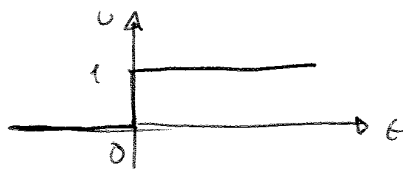
difficile averlo sperimentalmente (soprattutto per sistemi sottosmorzati) perché ci servono molti punti; in questo caso anziché avere un cerchio avremo un poligono. In generale se il grafico è molto circolare il sistema è lineare altrimenti se è distorto non è lineare.

$$\left\{ \begin{aligned}
 h(t) &= \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \lambda_n t} \sin(\lambda_n \sqrt{1-\zeta^2} t) & c < c_c \\
 h(t) &= \lambda_n t e^{-\lambda_n t} & c = c_c \\
 h(t) &= \frac{1}{2\sqrt{1-\zeta^2}} \left\{ -e^{-(\zeta + \sqrt{1-\zeta^2}) \lambda_n t} + e^{-(\zeta - \sqrt{1-\zeta^2}) \lambda_n t} \right\} & c > c_c
 \end{aligned} \right.$$

Spesso non si usa questo modo perché gli shock reali possono durare più del 5 di Dsec.

**RISPOSTA AL GRADINO**

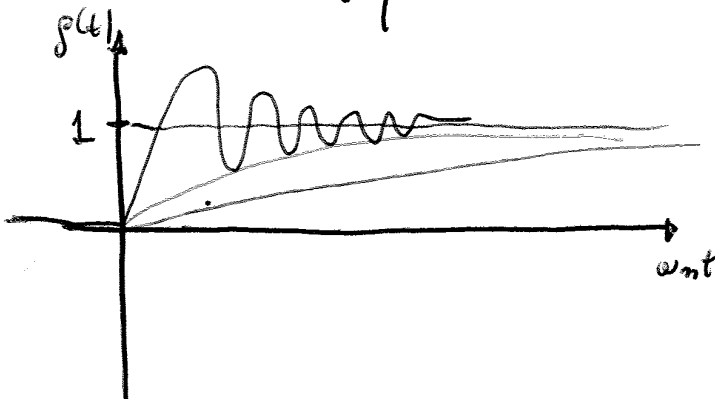
$$u(t) = \begin{cases} u=0 & t < 0 \\ u=L & t > 0 \end{cases}$$



$$f(t) = \int_0^t u(t) dt$$

Si modellano poche situazioni ma è molto facile calcolare le risposte ed è molto usato. La porta passa da 0 a un valore costante istantaneamente e quindi noi calcoliamo la risposta libera per  $t > 0$ . La risposta si può calcolare come segue:  $x(t) = \frac{p_0}{k} g(t)$

$$\left\{ \begin{aligned}
 g(t) &= 1 - e^{-\zeta \omega_n t} \left[ \cos(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) \right] & c < c_c \\
 g(t) &= 1 - (1 - \omega_n t) e^{-\omega_n t} & c = c_c \\
 g(t) &= 1 - \frac{1}{2} \left\{ -e^{-(\zeta + \sqrt{1-\zeta^2}) \omega_n t} + e^{-(\zeta - \sqrt{1-\zeta^2}) \omega_n t} \right\} & c > c_c
 \end{aligned} \right.$$



- = sistema sottosmorzato
- = sistema criticamente smorzato
- = sistema sovrasmorzato

**ECCITAZIONE PERIODICA**

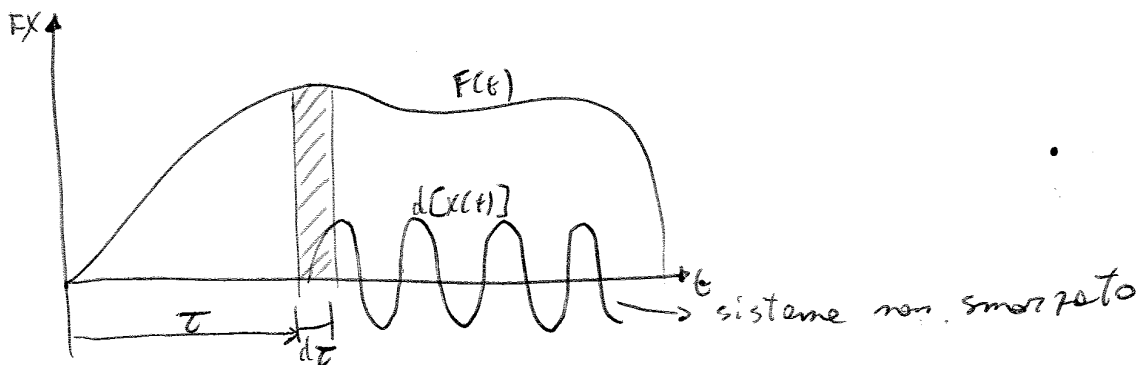
Quando abbiamo una forzante periodica ma non armonica, possiamo considerarla come somma di termini armonici sviluppati in serie di Fourier, se il sistema è lineare le ~~risposte~~ delle somme delle armoniche è uguale alle somme delle risposte.

$$F(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos\left(\frac{2\pi i}{T} t\right) + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \sin\left(\frac{2\pi i}{T} t\right)$$

$$x(t) = \frac{1}{k} \left\{ e_0 + \sum_{i=1}^{\infty} [a_i \operatorname{Re}(H(\omega_i)) + b_i \operatorname{Im}(H(\omega_i))] \cos(\omega_i t) + \sum_{i=1}^{\infty} [b_i \operatorname{Re}(H(\omega_i)) - a_i \operatorname{Im}(H(\omega_i))] \sin(\omega_i t) \right\}$$

**DUHAMEL'S INTEGRAL**

si usa nel caso in cui ho una forzante generica non periodica  $f(t)$ . Quello che posso fare è dividerla in un certo numero di impulsi e così posso calcolare le risposte a ogni impulso usando la funzione risposta dell'impulso  $h(t)$ . La somma delle risposte a ogni impulso sarà la risposta del sistema avvenuta in campo lineare.



$t$  = tempo in cui misuro l'output

$\tau$  = tempo in cui avviene l'impulso infinitesimo

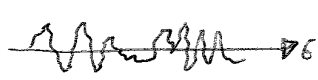
$$d[x(t)] = \frac{F(\tau) d\tau}{m\omega_n} h(t-\tau) \Rightarrow x(t) = \int_0^t d[x(\tau)] d\tau = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t F(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$$x(t) = A(t) \sin(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t) - B(t) \cos(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t) \rightarrow \text{nel caso in cui si introduce uno smorzamento.}$$

se la forzante è armonica  $A$  e  $B$  sono costanti; altrimenti come in questo caso dipendono dal tempo  $t$

## CARICHI RANDOM

Ci sono molti casi in cui le forzanti agenti su un sistema dinamico hanno una storia temporale molto complessa, e non possono essere ridotte a delle funzioni armoniche né si possono risolvere in maniera deterministica. Esempi tipici sono i terremoti, le irregolarità delle streghe di eccitazione in maniera casuale: veicoli, l'eccitazione delle navi date dalle onde, ecc... In tutti questi casi si può misurare la storia temporale dell'eccitazione e se sono stati presi molti dati sperimentali, si può condurre un'analisi statistica e quindi prevedere il comportamento futuro.

Immaginiamo di avere un'eccitazione casuale  $z \neq$    $z = z(t)$  per studiarla si fanno due ipotesi:

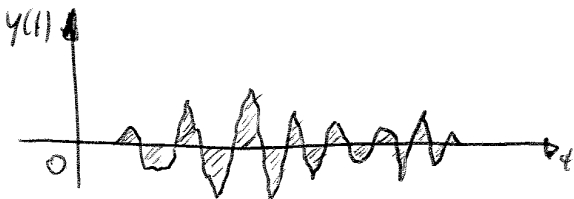
- fenomeno stazionario: le caratteristiche dell'eccitazione si mantengono uguali (per esempio lo stesso picco  $\lambda$  e non  $\gamma$ )

- ergodicità: è una proprietà statistica complessa che dice in sintesi che un qualunque campione può essere considerato tipico di tutti i campioni disponibili

Sotto queste ipotesi la r.m.s, la varianza e altri parametri statistici possono essere considerati indipendenti dal particolare campione usato per il calcolo

Consideriamo una funzione generica  $y(t)$ , preso un campione la cui durata è  $T$ , il valore medio nel tempo è  $\bar{y} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$ ; si può poi definire la media quadratica  $\bar{y}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T y^2(t) dt$ . La radice della media quadratica, root mean square da cui r.m.s. è  $y_{rms} = \sqrt{\bar{y}^2} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T y^2(t) dt}$ .

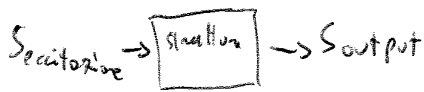
Si definisce poi la varianza  $\sigma^2 = \overline{(y - \bar{y})^2} = \frac{1}{T} \int_0^T [y(t) - \bar{y}]^2 dt$ . In molti casi si assume che l'input abbia media nulla.



L'area dei picchi superiori è uguale all'area dei picchi inferiori e quindi

$$\bar{y} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = 0$$

Consideriamo di avere un input random e vogliamo calcolare l'output random. Considerando che il sistema è lineare, si può applicare la sovrapposizione degli effetti.



Il sistema risponde frequenze per frequenza moltiplicato per una certa  $H(\omega)$ .

L'eccitazione se produce un output che è la PSD dell'output.

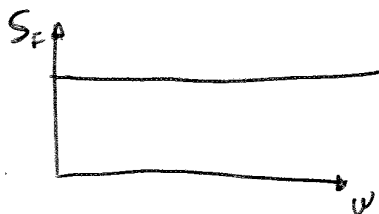
$output^2 = H(\omega)^2 \cdot input^2$  [ se vessimo la velocità avremo la mobilità, se vessimo l'accelerazione avremo l'inerzia ]

$S_o(\omega) = H(\omega)^2 \cdot S_e(\omega)$

Il sistema avrà  $x_{rms} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega}$

**RUMORE BIANCO**

è il tipo di eccitazione random più semplice con PSD costante, e conti-  
ne tutte le possibili frequenze alla stessa misura. Una similitudine  
si può fare con la luce bianca dove tutte le frequenze hanno la stessa  
intensità.

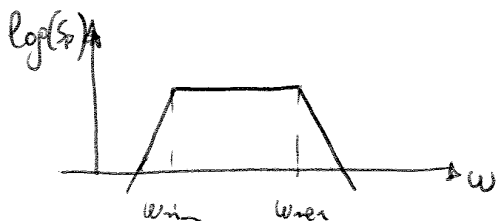


Ovviamente questo è solo un modello matematico poiché il PSD è cost. r.m.s., essendo

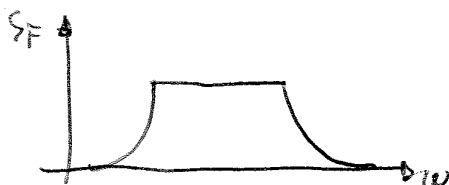
$x_{r.m.s} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega}$ , vamo a  $\infty$ .

Per questo motivo e li vede realisticamente si introduce una BANDA limitate  
del rumore bianco.

Si tronca a una frequenza minima e a una  
frequenza max. Assume così una forma di  
trapezio in un piano bi-logaritmico, con el  
centro valori costanti e si let. con pendenze costante  
solitamente misurata in dB/oct (decibel per  
ottave) o dB/dec (decibel per decade).

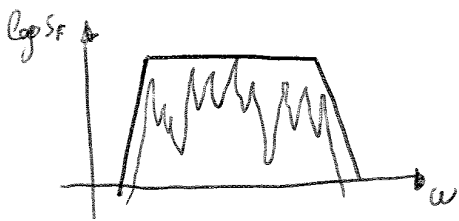


Se il sistema fisico non fosse logaritmico avrei



le vibrazioni. Spesso c'è un altro vincolo nello spostare le risonanze, 39 perché non si può scendere sotto un certo valore di frequenza minimo che è però inferiore alle un naturale dei sistemi che è circa sette, quindi la troviamo nella banda; potremmo aumentare un po' e spesso è difficile.

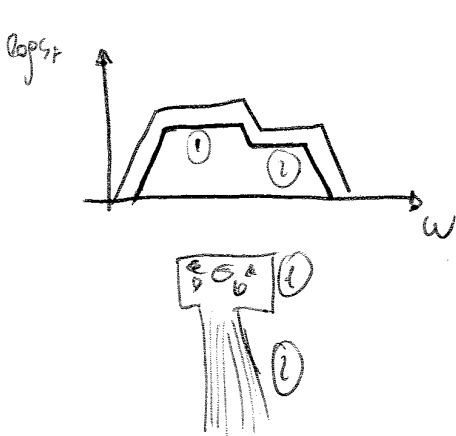
Nelle realtà non si fanno delle PSD trapezoidali ma hanno forme complesse rilevate sperimentalmente tramite un accelerometro posto nel punto in cui vogliamo rilevare il PSD. Quello che si fa è approssimare l'input con una PSD trapezoidale, cioè con il rumore bianco. Di solito il cliente ci dà



lo spettro delle varie esperienze  $M_f$ , noi e livello di progetto usiamo il rumore bianco (curva rossa) perché siamo delle parte della sicurezza infatti siamo ad ampiezze maggiori. C'è inoltre da

dire che il cliente ci dà lo spettro, ci dà quello maggiore cioè più pericoloso e quindi siamo sicuri di approssimarlo con la curva rossa, steremo delle parte della sicurezza

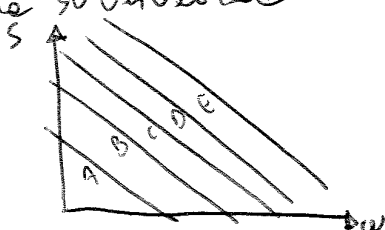
In alcuni casi però lo spettro non può essere approssimato così facilmente con il rumore bianco, perché si può avere il seguente caso (combustione gas)



Questo grafico ci mostra che ci sono due fenomeni pericolosi: uno forte a basse frequenze (relativo alle turbolenze della combustione nella camera di combustione) e uno meno forte ad alte frequenze (relativo alle turbolenze dei gas accelerati nel condotto). Quello che si può fare in questi casi è vedere se c'è uno spettro PSD (rumore bianco) come le curve rosse, che è meno sicuro ma più facilmente seguibile. Ovviamente bisogna

vedere se è possibile ridurre la sicurezza senza creare problemi; se con certo fenomeno non si può approssimare con il rumore bianco allora occorre rivedere il progetto e cambiare la posizione dei componenti.

Le ISO te fornito in scale logaritmica un grafico relativo al PSD di una strada su un veicolo

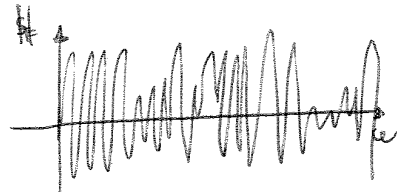


A: è un'ottima strada da de poche vibrazioni

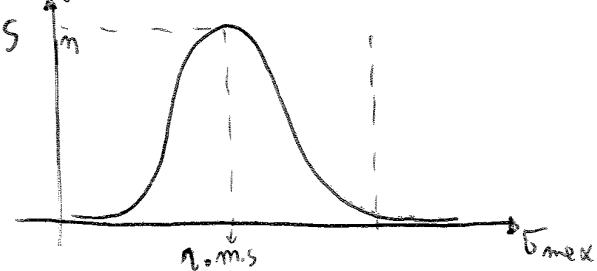


# DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ

Se abbiamo un'eccitazione random tipo abbiamo molti picchi, molte valli, ma le lunghezze dei picchi non è abbastanza grande da poter censore rotture e allora si definisce la funzione densità di probabilità che è definita come la probabilità che una variabile random  $y(t)$  assume un valore fra  $y$  e  $y+dy$ . Si ottiene allora la unimodale che



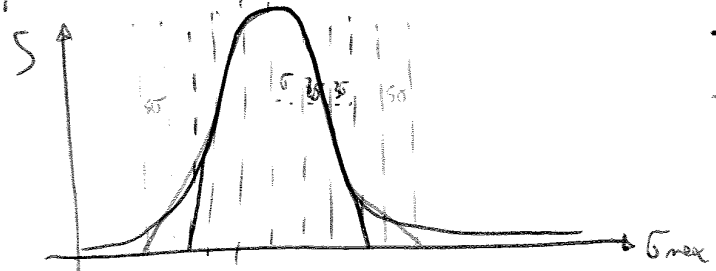
è una gaussiana



Il grafico potrebbe essere lo spettro per esempio accelerazione, carico, il terreno con le sue irregolarità;  $n$  è il numero di picchi a una certa  $\sigma$ .

Occorre definire un valore limite (della  $\sigma$ ) perché la gaussiana non va a zero ma ha un asintoto su 0 e quindi occorre porre un limite. Ovviamente r.m.s. sono al di sotto di questo valore limite. Per il fatto che è una gaussiana e che quindi va a 0 all'infinito, significa che esiste una probabilità che ci sia rotture anche oltre il valore limite anche se molto piccole per esempio  $10^{-7}$ . Ma  $10^{-7}$  va bene? No perché di perde da caso a caso. Esempio: abbiamo  $10^6$  auto prodotte; queste vanno nelle strade con delle irregolarità per  $10^{-2}$  metri sulle sospensioni; allora pensiamo che le medline faccia  $10^8$  metri quindi le irregolarità saranno a fine storia  $10^{-2} \cdot 10^8 = 10^6$ , allora la probabilità di avere di trovare un'irregolarità nelle varie auto è  $10^6 \cdot 10^6 = 10^{12}$  e quindi la probabilità di avere un guasto è  $10^{-7} \cdot 10^{12} = 10^5$  che è altissime!!

Il problema sta nelle curve di Gauss perché andando a zero all'infinito, sovrastime la probabilità di avere delle rotture; allora quello che si deve fare è avere una gaussiana che vada a zero e quindi si fa un TABELLO alle curve, il taglio può essere fatto a  $3\sigma$  o  $5\sigma$  dove  $\sigma$  è la varianza.



— = curve a 35  
— = curve a 55

Perché fisicamente  $m$  non si muove? Perché la molla  $k$  esercita una forza elastica che bilancia le forze esterne. De questo capiamo come la definizione corretta di questo sistema è ASSORBITORE DINAMICO e non SMORZATORE DINAMICO poiché la molla nel nostro esempio è vibre al posto di  $m$  e non c'è alcuna dissipazione di energia.

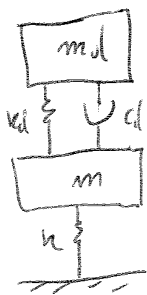
Esempio: siamo in fonderia e si introduce una macchina da rota a 3600 rpm e 60Hz che ruota da un dell'edificio e quindi si avverte vibrazione. Allora si introduce una trave con dei dischi di acciaio simulando proprio  $k$  e  $m$ .



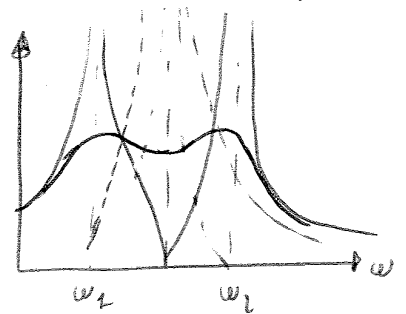
Vi è contrastare la forza centrifuga del motore dovuta all'eccentricità

$$F_c = m r \omega^2$$

Al sistema iniziale si può anche aggiungere uno smorzatore  $c$  e a questo punto il grafico di  $H$  cambierà



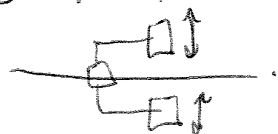
infatti si hanno dei picchi più bassi e arrotondati. Da notare che abbiamo due picchi ma in realtà possiamo controllarne solo uno poiché possiamo agire solo sul parametro  $c$ .



La situazione ideale sarebbe dei picchi finero alle stesse altezze, ma siccome ne regoliamo solo uno, facciamo in modo che l'altro sia abbastanza vicino. Quello che otteniamo è una risposta su un ampio range di frequenze.

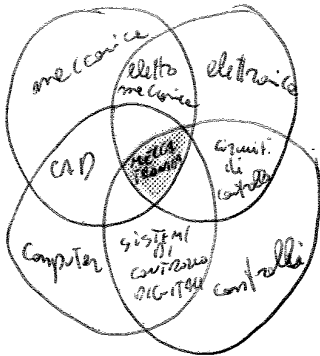
### Applicazioni:

- 1) sotto il terreno e volte si inserisce un disco di acciaio ( $m$ ) con una gomma ( $k$  ed  $c$ ) per prevenire le vibrazioni del terreno.
- 2) per i cavi elettrici ad alte tensioni, per evitare le vibrazioni e cause del vento si introducono delle nasette che vibrano al posto del filo

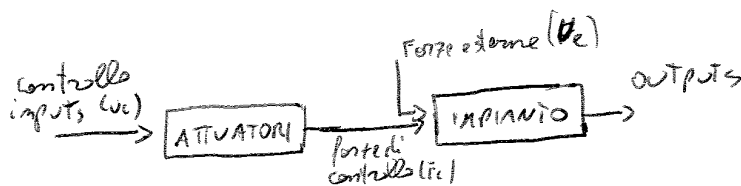


Un fenomeno particolare è quello del BATTIMENTO. Questo fenomeno si ha quando due parti del sistema vibrano a frequenze simili, queste in alcuni momenti sono in fase e si sommano, in altri sono in sovrapposizione di fase e per si annullano. È un problema tipico degli alberi motori e la conseguenza è un rumore altalenante.

Se abbiamo un sistema che ha delle parti meccaniche ed elettroniche, e tutto è gestito da un computer possiamo definirlo SISTEMA MECCATRONICO. questo non è l'unica definizione infatti non tiene conto che alcuni sistemi meccatronici non hanno un computer e hanno me sono controllati: da sistemi analogici e non digitali.



**SCHEMA DI UN SISTEMA DI CONTROLLO (MECCATRONICO)**



Se non avessimo introdotto l'attuatore il sistema non sarebbe stato controllato. L'equazione del moto nello spazio delle configurazioni si può scrivere

$$[M] \ddot{x} + [C] \dot{x} + [K] x = \{f_c\} + \{f_e\}$$

$\{f_c\}, \{f_e\}$  = sono le forze esercitate dagli attuatori e dell'esterno e si possono scrivere come:  $\{f_c\} = T_c u_c$   $\{f_e\} = T_e u_e$   $T_c =$  matrice di influenza sul controllo.

$\{x\}$  = output del sistema

Nello spazio degli stati veri il quadrupolo

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + B_e u_c(t) + B_e u_e(t) \\ y(t) = Cz + D u_e \end{cases} \quad [A] = \begin{bmatrix} -M^{-1}C & -M^{-1}K \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad [B_c] = \begin{bmatrix} M^{-1}T_c \\ 0 \end{bmatrix} \quad [B_e] = \begin{bmatrix} M^{-1}T_e \\ 0 \end{bmatrix}$$

Possiamo considerare il sistema in due modi:

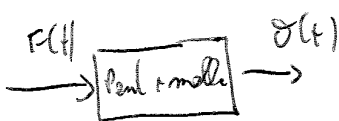
- (1) molla più pendolo inverso come unico sistema
- (2) pendolo inverso più un controllore (molla) che stabilizza il sistema.

Nel caso (1) possiamo scrivere l'equazione del moto  $ml^2\ddot{\theta} - mgl\theta + k\ell^2\theta = 0$  (per semplicità non considero lo smorzamento interno del pendolo e forze esterne); quindi l'eq. è  $ml^2\ddot{\theta} + (k\ell^2 - mgl)\theta = 0$  ovviamente se  $k\ell^2 > mgl$  il sistema è stabile poiché la molla è abbastanza rigida.

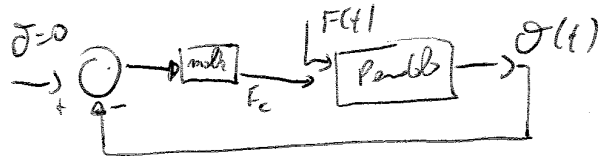
Nel caso (2) si scrive  $\begin{cases} ml^2\ddot{\theta} - mgl\theta = F_c \ell & \text{eq. del moto del pendolo} \\ F_c = -k\ell\theta & \text{eq. del moto del controllore.} \end{cases}$

Quindi capiamo che in tutti i sistemi di controllo, le parti di controllo posso considerarle all'interno dell'equazione del moto delle strutture, o esterne.

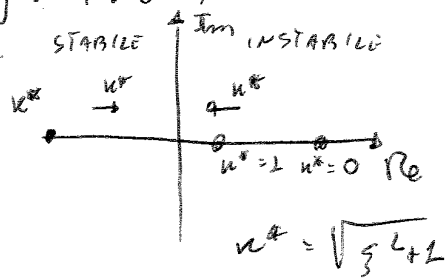
(1) conforzante



(2) conforzante



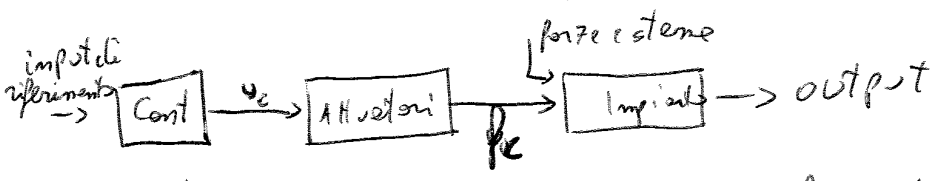
Le stesse equazioni scritte prima si possono scrivere nel dominio di Laplace considerando  $\theta = \theta_0 e^{st}$   $(s^2 ml^2 - mgl + k\ell^2) \theta_0 e^{st} = 0$  e possiamo così valutare il luogo delle radici.



È un esempio molto semplice ma generale, infatti se avessimo un sistema a molti p.d.l.,  $F_c$  non sarebbe la forza di controllo ma un controllo di forza di controllo; poi scuro le equazioni del moto e lo risolviamo nello spazio delle configurazioni o nello spazio degli stati.

**CONTROLLO A CICLO APERTO**

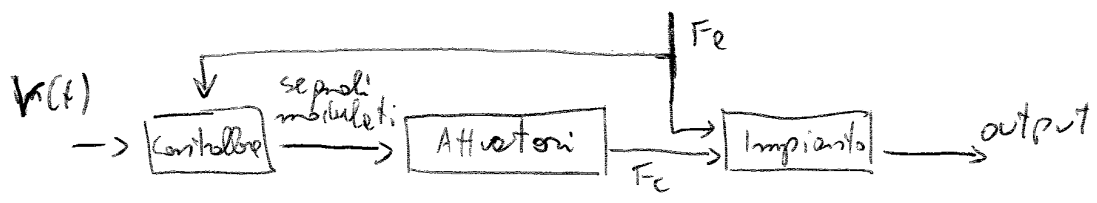
Considerando lo scheme seguente:



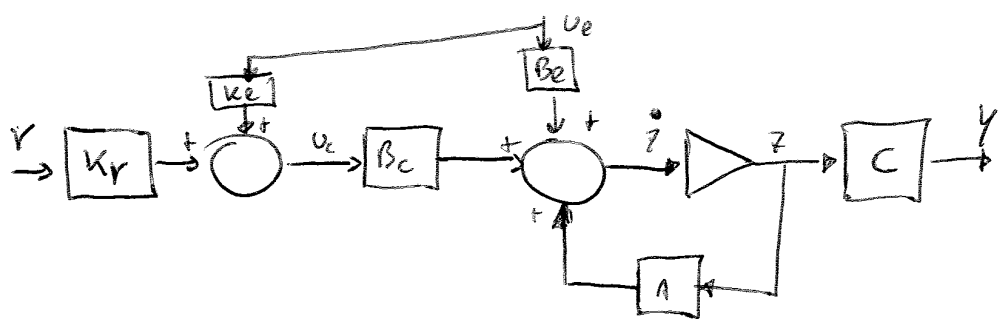
gli attuatori aggiunti servono per fornire forze di controllo idonee, essi sono azionati da un controllore al quale giungono una serie di ingressi di riferimento.

$v(t)$  = sono i segnali da cui ~~una~~ come vogliamo gli output. Se sono costanti parliamo di regolatori, se variano nel tempo si parla di servomeccanismo. Se il controllore è lineare, l'input del controllore potrà avere scritto come  $u_c = k_v \cdot v(t)$  e si introduce nell'espressione del moto.

Un sistema a ciclo aperto più complesso è quello con la compensazione dell'input, nel quale un dispositivo fornisce una serie di input di controllo  $u_c$  che non sono solo funzione degli input di riferimento  $v(t)$  ma anche delle forze esterne  $f_e(t)$  o meglio degli input esterni  $u_e(t)$  applicati al sistema. Lo scheme è il seguente:



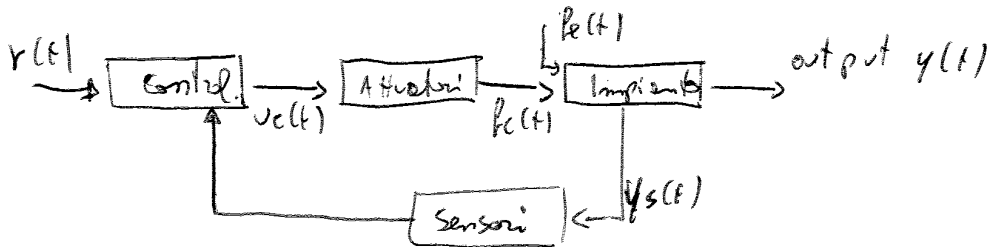
con la rappresentazione a blocchi



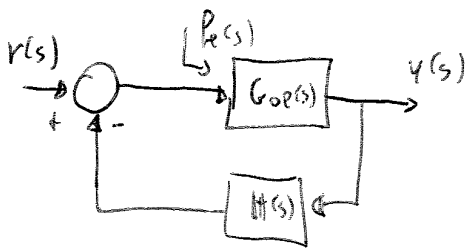
Si può scrivere allora  $u_c(t) = k_v v(t) + k_e u_e(t)$ . Le matrici  $[K_v]$  e  $[K_e]$  hanno tante righe quanti sono gli  $u_c(t)$  e tante colonne quanti sono  $u_e(t)$  e  $F_e(t)$ .

**SISTEMI A CICLO CHIUSO**

È un sistema detto feedback control ed è caratterizzato dalla presenza di un sensore che può essere posizionato su  $z$  o su  $y$ .



Con lo scheme a blocchi



$G$  e  $H$  sono le funzioni di trasferimento dell'impianto e del sistema di controllo nel ciclo aperto.

$$y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} r(s)$$

Il sensore ci permette di controllare gli output e riferire lo stato degli output al controllore, il quale darà all'attuatore un segnale di input in funzione dell'output ricevuto. Come vediamo il sistema è molto preciso.

Facciamo una classificazione:

SISO = single input single output

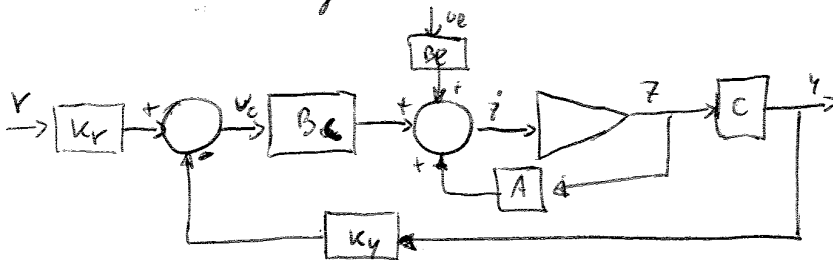
MIMO = multi input multi output

SIMO = single input multi output

MISO = multi input single output

ovviamente queste classificazioni non le moltiplichiamo con il numero dei p.d. e me solo con il no di input e output.

Consideriamo il seguente schema.



L'equazione del moto nello spazio degli stati è uguale a quella scritta per il ciclo aperto ma adesso  $u_c$  è legato agli output  $y$  del sistema e cioè  $u_c = k_r z - k_y y$  equazione di controllo

Allora l'equazione del moto diventa  
del sistema controllato

$$M\ddot{x} + (C + T_c G_1 C_1)x + (K + T_c G_2 C_2)x = P_e$$

dove  $T_c$  deriva da  $f_c = -T_c G_1 C_1 x - T_c G_2 C_2 x$ .

**C<sub>1</sub> e C<sub>2</sub> CO-LOCATI**

$$C_1 = C_2 = T_c^T$$

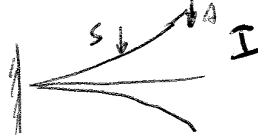
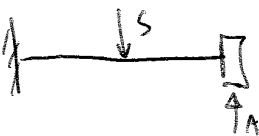
Se sensori e attuatori sono co-locati, le forze generalizzate e servitate degli attuatori corrispondono allo spostamento e alle velocità letti dai sensori e vale la relazione scritta su.

Vediamo il significato fisico.



Se sono co-locati vuol dire che se A sono nello stesso punto. se il sensore misura una velocità è come se mettessi un smorzatore perché A agisce in modo da ridurre la velocità per stabilizzare il sistema; se S misura uno spostamento è come se mettessi una molla perché A si diventare la struttura più rigida.

Vediamo un sistema non stabile.



Il sistema vibra nel 1° modo ma A riesce a rendere stabile il sistema e a compensare lo spostamento rilevato da S.



Se il sistema vibra nel 2° modo, il sensore rileva uno spostamento ma l'attuatore A dà una forza verso il basso causando l'instabilità del sistema.

Allora se S e A sono in punti diversi ho un sistema instabile; questo forse me lo parso dei limiti perché non è sempre facile porre nello stesso punto S e A. Prendiamo il caso di un A elettromagnetico e un sensore S elettrico magnetico, non posso mettere S e A nello stesso punto perché l'uno risentirebbe del campo magnetico dell'altro; quindi si deve disporre S un po' più lontano da A. Così però i nodi compresi fra S e A sarebbero instabili.

3) Controllo integrale (I): 
$$v_c = k_i \int_0^t e_y(t) dt$$

il controllore reagisce all'accendersi degli errori e provoca un'azione di controllo molto lenta; il suo vantaggio è che è insensibile alle alte frequenze e provoca instabilità.

In alcuni casi si usano tutti e 3 i modi (PID), proporzionale, integrale, derivativo.

$$v_c = K_p e_y + k_i \int_0^t e_y(t) dt + k_d \frac{d e_y}{dt} = k_p \left( e_y + T_i \int_0^t e_y(t) dt + \frac{1}{T_d} \frac{d e_y}{dt} \right)$$

dove  $T_d = \frac{k_d}{k_p}$       $T_i = \frac{k_p}{k_i}$

Facciamo un esempio

una trave desimile un braccio robotico che vogliamo controllare con  $\theta$



l'espressione del moto è  $J \ddot{\theta} = -mgl \cos \theta + \tau_m$

1) Controllo P

$\tau_m = -k_p (\theta - \theta_0)$  misura un angolo  $\theta$  e fornisce una coppia (in realtà fornisce una corrente  $i$  al motore che dà una coppia) proporzionale a  $\theta - \theta_0$  con l'obiettivo di compensare  $\theta - \theta_0$  (per questo si mette il segno meno).

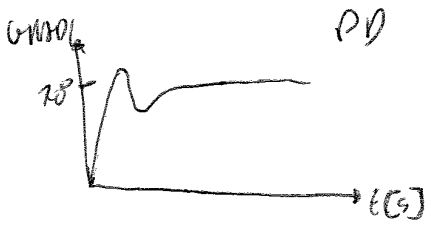
$$J \ddot{\theta} = -mgl \cos \theta - k_p (\theta - \theta_0) \quad J_p \ddot{\theta} + k_p \theta = -mgl \cos \theta + k_p \theta_0$$

Nella situazione di equilibrio, cioè stazionaria  $\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$  e allora

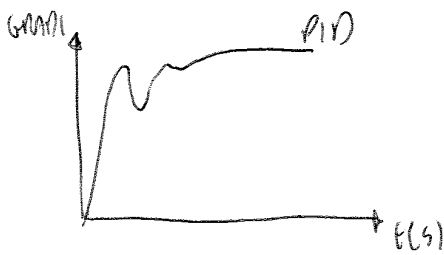
$$\theta = \frac{-mgl \cos \theta}{k_p} + \theta_0$$

vedo che con il controllo P si rende la precisione nella posizione di equilibrio. per il punto  $\theta = \theta_0$  il motore rende una coppia  $\tau_m$  per compensare l'errore dato dal peso proprio.



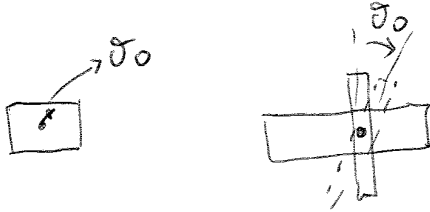


si ottiene prima l'equilibrio



All'inizio si ha una brusca variazione ma lentamente si riesce ad arrivare all'equilibrio. All'inizio si ha un rapporto elevato e si controlla tanto, mentre dopo si ha la stabilità secondo un asintoto.

esempio di servomeccanismo



Lo ha un trasmettitore da cui attraverso una lente, imposto un certo valore di riferimento che viene trasferito al meccanismo che si sposta di una quantità proporzionale al riferimento. Se muovo le

lente velocemente, osserverei il meccanismo oscillare,

quindi in generale noi partiamo da un sistema che può essere anche a molti p.d.l., qui per semplicità si considera un sistema a 1 p.d.l.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_e + f_c \quad \text{Considerando } e = x - r \quad \begin{matrix} x = \text{posizione} \\ r = \text{riferimento} \end{matrix}$$

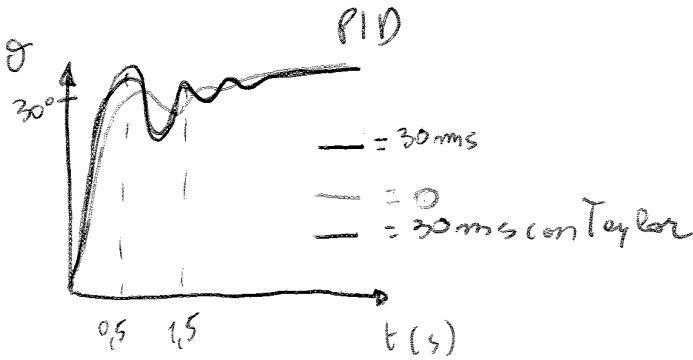
$f_c = k_p e + k_d \dot{e} + k_i \int e dt$  con legge PID, assumendo  $r = 0$  cioè posso stabilizzare il sistema intorno alla posizione di equilibrio statica, e quindi le forze di controllo si può scrivere come segue:

$F_c = k_p x + k_d \dot{x} + k_i \int x dt$  e sostituendo nell'eq. del moto si ottiene un'equazione integro-differenziale e questa vale solo se il sistema è lineare o molto poco non lineare.

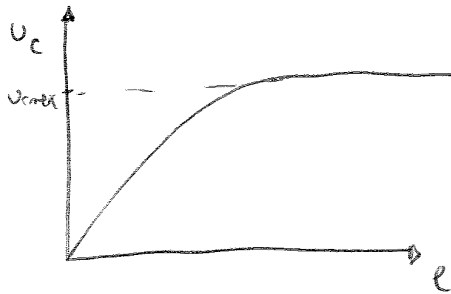
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_e - k_p x - k_d \dot{x} - k_i \int x dt \quad \text{se } k_p, k_d, k_i \text{ sono positive si mette un -}$$

Adesso lo scrivo nello spazio degli stati introducendo due variabili ausiliarie:

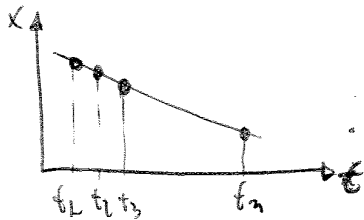
$$\begin{aligned} 1) \quad \dot{v} &= \dot{x} \\ 2) \quad \dot{w} &= x \quad \text{e cioè} \quad w = \int x dt \end{aligned}$$



È importante che  $\tau$  sia minore del periodo di vibrazione che in questo esempio è 1s. se non fosse così, le vibrazioni avviate dal controllore inizierebbero in ritardo e si creerebbe instabilità. Oltre ad aggiungere che oltre al ritardo del controllore occorre considerare che le forze di controllo non sono infinite ma hanno una SATURAZIONE ed il crescere dell'errore  $e$ .



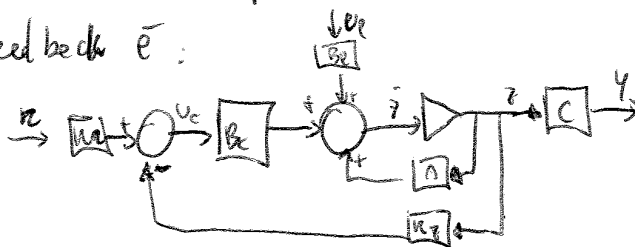
Se si ha un controllore digitale si ha un ulteriore errore dovuto alla digitalizzazione e si ha un ritardo legato ai cicli del processore, infatti il processore legge  $x$  a intervalli di tempo discreti  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$



**STATE FEEDBACK E STATE OBSERVERS**

- Per i sistemi chiusi si possono avere due tipi di controlli:
- state feedback  $e = z - z$  si ha bisogno di molti sensori perché devo conoscere tutti gli stati  $z$
  - output feedback  $e = y - r$  si controllano solo gli output che imporre sono pochi.

uno schema per state feedback è:



$$u_c = k_r r - k_f z$$

Ma  $\{\bar{c}\}$  non è disponibile ma per i disturbi fatti quando si è parlato 61 dello smontamento strutturale possiamo trascurare i termini fuori della diagonale e renderla tale.

Nello spazio degli stati si scrive:

$$\begin{cases} \dot{\{z\}} = [A]\{z\} + [B_c]\{u_c\} + [B_e]\{u_e\} \\ \{y\} = [C]\{z\} \end{cases}$$

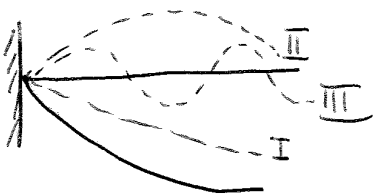
dove  $\{z\} = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ q \end{Bmatrix}$   $[A] = \begin{bmatrix} -[M]^{-1}[C] & -[M]^{-1}[K] \\ I & 0 \end{bmatrix}$   $[B_c] = \begin{bmatrix} [M]^{-1}[F] \\ 0 \end{bmatrix}$   $[B_e] = \begin{bmatrix} [M]^{-1}[G] \\ 0 \end{bmatrix}$

Trascurando alcune frequenze si hanno due tipi di errore:

- 1) observation spillover: è dovuto al fatto che il sensore misura i nodi corretti di spostamenti nodali, mentre nei dati abbiamo valori leggermente differenti per il fatto di aver trascurato delle frequenze.
- 2) control spillover: è legato al fatto che l'attuatore esercita delle forze di controllo su tutti i nodi mentre nel calcolo noi trascuriamo alcuni.

Questi errori possono portare il sistema a comportarsi in maniera diversa da quella attesa e in alcuni casi può portare a instabilità.

Esempio



Le barre si flettono e questa deformazione si può vedere come la somma di più deformazioni. Se il sensore controlla solo due modi e si trascurano il 3° allora si ha un observation error spillover. Se con un attuatore non

controlla il III modo allora si ha un control spillover. In questo modo un sistema con 3 gradi di libertà può essere semplificato volutamente solo i primi 2 gradi di libertà, ma è una approssimazione che comporta degli errori. Ma ciò vuole dire che usare molti modi si ha più ritardi quindi si ha un compromesso tra usare pochi modi e avere degli errori o usare molti modi e avere più ritardi.

Quindi l'approccio che si segue è:

- 1) scrivere espressioni del moto
- 2) scrivere le c.c.
- 3) risolvere il sistema con l'operatore inverso  $D^{-1}$

Ma quest'approccio è esatto? No, in pratica è approssimato ma anche in teoria perché nella realtà non ci sono sistemi continui ma sono sempre discreti e formati da atomi.

In generale non possiamo scrivere e risolvere l'operatore  $D$ , per cui il classico approccio (l'unico usato prima dei computer) è semplificare il modello continuo e risolverlo. La semplificazione sta nel modificare l'operatore  $D$  e risolverlo, per esempio travi, piastre, gusci. Quindi si discretizza il sistema e si risolve con metodi discreti, infatti come vedremo i sistemi continui hanno le stesse proprietà dei sistemi discreti.


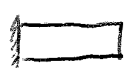

### TEORIA DELLE TRAVI

Considero una trave che è un elemento solido elastico nel quale una dimensione è prevalente sulle altre. Spesso la trave è prismatica (le sezioni sono tutte uguali), omogenea (caratteristiche della materiale costanti), rettilinea.

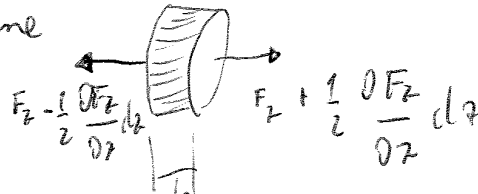
Per la trattazione unidimensionale delle travi si considerano le seguenti ipotesi:

- 1) Ogni sezione essendo un corpo rigido e avendo uno spessore molto piccolo nella direzione assiale, non ha contrazioni in altre direzioni per effetto di Poisson, ma ha solo spostamento lungo  $Z$ .
- 2) La sezione rimane  $\perp$  all'asse (cioè il caso stesso) sotto una flessione della trave ~~✗~~ e in questo caso si studia con la teoria di Eulero Bernoulli; se la sezione non è  $\perp$  all'asse allora si studia con la teoria di Timoshenko ~~✗~~ <sup>snella trave</sup>

Per capire quale teoria usare si introduce un parametro  $d = \frac{l}{r_i}$  dove  $r_i$  è il raggio d'inerzia della trave.

-   $d = \frac{l}{r_i}$  molto grande (200)  $\Rightarrow$  Eulero Bernoulli trave lunga e snella
-   $d = \frac{l}{r_i}$  basso (20)  $\Rightarrow$  Timoshenko trave corta e tozza
-   $d = \frac{l}{r_i}$  bassissimo (5) non è nemmeno una trave, è un corpo rigido che non si flette

Considerando la seguente immagine



possiamo valutare le forze interne esercitate sulle generica sezione dell'elemento  $dz$ . Considerando l'equilibrio in verso e direzione di  $z$ , si avrà:

$$-\left(F_z - \frac{1}{2} \frac{dF_z}{dz} dz\right) + F_z + \frac{1}{2} \frac{dF_z}{dz} dz = 0$$

$\frac{dF_z}{dz}$  forze dovute alle deformazioni elastiche.

Le forze esterne agenti sulle trave sono  $f_z(z, t) dz$  cioè delle forze per unità di lunghezza  $[N/mm]$

L'espressione di equilibrio è

$$\ddot{u} p A dz = \frac{dF_z}{dz} dz + f_z(z, t) dz \quad (1)$$

me  $\ddot{u}$  è un'accelerazione,  $\frac{dF_z}{dz}$  e  $f_z$  sono delle forze e allora devo trovare una relazione che li legghi.

$F_z = A \sigma$  (approssimazione alla base del calcolo delle tensioni)

$\sigma = E \epsilon$        $\epsilon = \frac{du_z}{dz}$

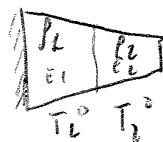
$$F_z = A E \frac{du_z}{dz}$$

sostituendo nelle (1)

$$\ddot{u}_z p A = \frac{d}{dz} \left( A E \frac{du_z}{dz} \right) + f_z(z, t)$$

In generale  $p, A, E$  sono costanti

e non dipendono da  $z$ , ma potrebbero esserci dei casi in cui variano al variare di  $z$



geometria variabile  $A = A(z)$   
 diverso materiale  $p_1 \neq p_2$   
 diverse  $E$ , modifica  $E \Rightarrow E_1 \neq E_2$

Si può scrivere in generale  $m(z) = p(z) A(z)$  e  $k(z) = E(z) A(z)$

e l'espressione di equilibrio diventa

$$m(z) \frac{d^2 u_z}{dz^2} - \frac{d}{dz} \left[ k(z) \frac{du_z}{dz} \right] = f_z(z, t)$$

Nel caso di trave prismatica e omogenea

$$\frac{d^2 u_z}{dz^2} - \frac{E}{p} \frac{d^2 u_z}{dz^2} = \frac{f_z(z, t)}{A}$$

NOTA:  $\frac{d}{dz}$  = derivata totale (derivata pura)  
 $\frac{\partial}{\partial z}$  = derivata parziale

$$\frac{1}{\eta} \frac{d^2 \eta}{dt^2} = \frac{v_s^2}{g} \frac{d^2 q}{dz^2} = \text{cost} = -\omega^2$$

Ho separato le variabili e avrò due funzioni che sono uguali per ogni valore di  $z$  e per ogni tempo  $t$ , oltre l'unica soluzione è che siano costanti. Questa costante è tradizionalmente chiamata  $-\omega^2$ .

$$\frac{1}{\eta} \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \omega^2 = 0 \quad \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \eta \omega^2 = 0 \quad \text{è un'equazione armonica e vale se } \eta = \eta_0 \cos \omega t$$

NOTA: quest'equazione vale per ogni sistema continuo anche se qui è stata ricavata solo per l'asta.

Assenza morb  $\frac{d^2 q}{dz^2} = -\frac{\omega^2}{v_s^2} q$  vale per ogni  $z$ , ogni punto oscilla in modo armonico, e la soluzione è

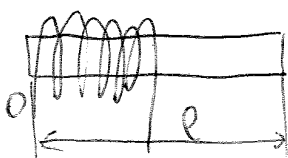
una funzione armonica (è un po' più complessa perché tener conto delle condizioni al contorno)  $q = C_1 \sin\left(\frac{\omega}{v_s} z\right) + C_2 \cos\left(\frac{\omega}{v_s} z\right)$

$$\left[\frac{\omega}{v_s} z\right] = \frac{\text{rad}}{\text{s}} \frac{\text{s}}{\text{m}} \text{ m} \quad \text{Ok!}$$

Per quanto appena detto l'equazione  $\frac{d^2 q}{dz^2} = v_s^2 \frac{d^2 \eta}{dt^2}$  è detta equazione BI-ARMONICA.

Risolviamo un caso in cui applico le C.C.

**TRAVE LIBERA-LIBERA**



La corrente fa muovere la trave o la fa oscillare liberamente.

$$(1) \left(\frac{\partial q}{\partial z}\right)_0 = 0 \quad (2) \left(\frac{\partial q}{\partial z}\right)_l = 0 \quad \text{perché non si hanno vincoli e quindi non si ha spostamento}$$

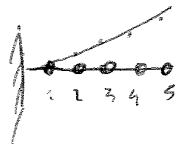
$$\frac{\partial q}{\partial z} = C_1 \frac{\omega}{v_s} \cos\left(\frac{\omega}{v_s} z\right) - C_2 \frac{\omega}{v_s} \sin\left(\frac{\omega}{v_s} z\right) \quad (1) \Rightarrow C_1 \frac{\omega}{v_s} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$(2) -C_2 \frac{\omega}{v_s} \sin\left(\frac{\omega}{v_s} l\right) = 0 \quad \text{per averlo zero deve eccedere:}$$

M ortogonalità e K ortogonalità nel continuo

quello appena studiato è un problema agli autovalori nel continuo. nel discreto nello spazio degli stati scrivevamo  $\det(A - \omega I) = 0$ , nello spazio delle configurazioni  $\det(K - \omega^2 M) = 0$ , ma in ogni caso il risultato è un insieme di autovalori  $\omega_i$  e autovettori  $q_i$  che danno le forme modali.

Esempio:



Se si ha una trave discretizzata con 5 masse, il proprio autovettore  $\{q_i\}$  fornisce gli spostamenti relativi fra le masse.  $\{q\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,1 \\ 0,3 \\ 0,8 \\ 1,3 \end{Bmatrix}$

Se siamo nel continuo si hanno  $\infty$   $\omega_i$  e  $\infty$  autofunzioni  $q_i(z)$  continue . **NOTA:**  $q(z)$  dipende solo da  $z$  per cui stiamo considerando un caso monodimensionale.

Ogni  $q_i(z)$  (che cioè la deformazione continua della trave essendo una funzione) corrisponde a un  $\omega_i$ ; mentre nel discreto  $i=1, \dots, n$ , nel continuo  $i=1, \dots, \infty$ .

Come visto nel discreto gli autovettori hanno alcune proprietà, cioè le K ortogonalità  $(K-I)$  e le M ortogonalità  $(M-I)$ .

DISCRETO: 
$$q_i^T M q_j < \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \bar{m} & i = j \end{cases}$$
 dove notare che  $\bar{m}$  è un numero

infatti nel caso in cui  $\{q_i\}$  antorge 5 componenti  $\{q_i\}^T = 1 \times 5$   $M = 5 \times 5$   $\{p_i\} = 5 \times 1$ .  $\bar{m}$  ha il significato fisico di un'energia cinetica ( $\frac{1}{2} m v^2$ ) onde se non sembra; è sufficiente ricordare che essendo nel moto armonico la velocità  $v = \omega y$  è proporzionale allo spostamento  $y$  e allora l'energia sarà proprio  $\frac{1}{2} \omega^2 m$ .

$$p_i^T K p_j < \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \bar{k} & i = j \end{cases}$$
 onde qui  $\bar{k}$  è un numero ed è legato

all'energia elastica  $\frac{1}{2} k x^2$

Le proprietà delle  $K-L$  è un po' più complicate nel continuo  $Z_1$  poiché le forze non dipendono dagli spostamenti ma dalle loro derivate (perché siamo nel caso unidimensionale, se fosse una trave con spostamento flessionale avrei derivate seconde) e quindi  $F_z = \bar{E}A \frac{du}{dz}$  (con  $\bar{E}, A$ , costanti).

Allora la  $K-L$  si scrive come  $\int \frac{dq_i}{dz} k(z) \frac{dq_i}{dz} dz = 0$  se  $i \neq j$ ; se  $i = j$

$$\int_0^l k(z) \left[ \frac{dq_i(z)}{dz} \right]^2 dz = \bar{k}_i \neq 0$$

che è la rigidezza modale.

Dunque anche nel continuo parliamo di masse modali  $\bar{m}_i$ , rigidezze modali  $\bar{k}_i$  e forze modali  $F_i$  e quindi scriveremo le equazioni

$$\boxed{\bar{m}_i \ddot{\eta}_i + \bar{k}_i \eta_i = F_i} \Rightarrow \text{Equazione modale del sistema continuo}$$

Notiamo come inizialmente l'espressione del moto era una PDE, adesso abbiamo discretizzato ottenendo un'equazione modale ODE e quindi tutti i p.d.l. sono disaccoppiati (se  $c=0$ ).

Oss: Tutti i sistemi che stiamo considerando sono lineari, ciò che può non essere lineare sono i parametri  $\bar{E}(z), A(z), P(z)$ .

Il fatto di avere  $\infty$  equazioni non è importante infatti man mano che valutiamo i modi ad alte frequenze, le rispettive forme modali contano sempre meno. Nel discreto  $z_i \rightarrow q_i$  con  $i=1, \dots, m$  ma se ne considerano  $m$  con  $m < n$  (esempio  $n=3 \cdot 10^6, m=10$ ).

Nel continuo  $i=1, \dots, \infty$  ma anche qui se ne considera un insieme ridotto, finito. Però non è tutto così semplice perché per calcolare  $\bar{m}$  e  $\bar{k}$  devo usare la  $m-L$  e  $k-L$  e per farlo mi serve conoscere le autofunzioni  $q(z)$  che ricavo però dall'espressione modale e allora come faccio? ci sono altri metodi per risolvere il problema

### VIBRAZIONI TORSIONALI

L'approccio che si segue è come quello dell'oste; si arriva a scrivere l'espressione del moto 
$$P I_z \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ G I_p \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] + m_z(z, t)$$



Sostituendo le (1) nelle (2)

$$(3) \quad \rho A \ddot{u}_x = - \frac{\partial^2 M_y}{\partial z^2} + f_x(z, t) \quad \text{ma non abbiamo ancora l'equazione}$$

del moto perché ho ancora un legame fra spostamenti e momenti e a noi invece serve una sola variabile. La teoria elementare per capi flessione ci dice che il momento è proporzionale alla curvatura

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = \frac{M_y}{EI_y} \quad \begin{array}{l} I_y = \text{momento d'inertia geometrico della sezione} \\ J_y = \text{inerzia flessionale [up m^2]} \end{array}$$

A questo punto  $M_y = EI_y \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}$  e sostituendo nelle (3)

$$\rho A \ddot{u}_x + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( EI_y \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) = f_x \quad \text{e considerando } m(z) = \rho(z) A(z)$$

$k(z) = E(z) I_y(z)$ ,  $m \ddot{u}_z + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( k \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) = f_x$ . Per studiare le frequenze e autofunzioni prismatica e omogenea studio il caso omogeneo con  $f_x = 0$

$$\boxed{m \frac{d^2 u_z}{dt^2} + k \frac{d^4 u_z}{dz^4} = 0}$$

Questa non è una equazione bi-omogenea nello spazio ma solo nel tempo.

La soluzione sarà  $u(z, t) = \eta(t) \varphi(z)$

$$\eta(t) = \eta_0 \sin \omega t \quad \begin{array}{l} \downarrow \\ \text{tempo} \end{array} \quad \begin{array}{l} \downarrow \\ \text{spazio} \end{array}$$

$\varphi(z) = C_1 \cos(\omega z) + C_2 \sin(\omega z) + C_3 e^{\omega z} + C_4 e^{-\omega z}$ ; abbiamo 4 funzioni e 4 costanti; a livello estetico si scrive

$$\varphi(z) = C_1 \cos(\omega z) + C_2 \sin(\omega z) + C_3 \cosh(\omega z) + C_4 \sinh(\omega z).$$

Per risolvere il problema e trovare le costanti  $C_1, C_2, C_3, C_4$  e poi trovare  $\omega$  (autovalore = frequenza propria) e poi le autofunzioni  $\varphi(z)$ , si devono imporre le C.C.

una forma hermitiana  $w_i = \beta_i^2 \sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}}$ ; l'unica cosa da  
 è sufficiente calcolare  $\beta$  da si trova da tabelle per le varie c.c.

c.c.	$i=0$	$i=L$	$i > 4$
1) libere - libere	0		$(i + 1/2)\pi$
2) supportate - libere	0		$(i + 1/4)\pi$
3) vincolate - libere	$\pi$		$(i - 1/2)\pi$
4) supportate - supportate	$\pi$		$i\pi$
5) supportate - vincolate	$\pi$		$(i + 1/4)\pi$
6) vincolate - vincolate	$\pi$		$(i + 1/2)\pi$

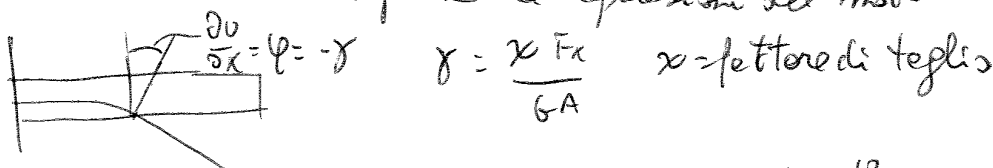


1) due moti rigidi (traslazione) = rotazione

Esempio: I giunti di trasmissione spesso vengono considerati come una trave di Eulero - Bernoulli supportate - supportate e le sue  $w_i$  si trovano con le formule suddette.

**TRAVE DI TIMOSHENKO**

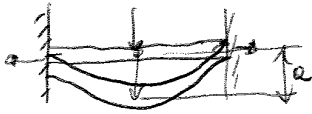
nel caso della trave di E-B si trascurava l'inerzia della rotazione per la sezione infinitesime e le deformazione del taglio, ed in questo caso non vengono trascurate. si modificano le equazioni del moto



All'equilibrio  $\rho A \ddot{u}_x = \frac{\partial F_x}{\partial t} + f_x(z,t)$   $\rho I_y \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = E \frac{\partial \theta}{\partial z}$

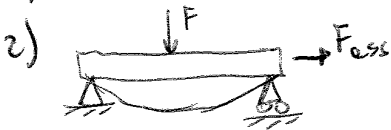
**FLESSIONE + FORZE ASSIALI IN UNA TRAVE**

Cosa succede se ho forze assiali?



Quando abbiamo una trave noi consideriamo la flessione ma non consideriamo forze assiali; se le voglio considerare ci sono 2 casi:

1) la trave dopo aver applicato una forza, si flette e ovviamente si allunga per cui risulta in trazione. Allora nascono due forze applicate alla trave in senso assiale. Queste forze applicano un momento considerando il braccio  $a$ ; il problema non è più lineare perché la flessione dipende da forze assiali.



2) questa trave è libera di spostarsi assialmente e quindi nel momento in cui flette, il carrello si sposta come se ci fosse una forza esterna assiale che quindi non dipende

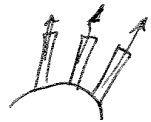
della ~~momento~~ flessione e allora posso trovare una soluzione lineare.

Un'applicazione di questo metodo è quella delle molle a tazza che sono vincolate da un lato e libere e un giunto dall'altro lato proprio per avere una molla non troppo rigida e così la molla può contrarsi o estendersi.



Le forze di trazione rendono le molle più rigide al contrario delle forze di compressione.

Un caso simile è quello delle palette di turbine che si irrigidiscono per effetto delle forze centrifughe



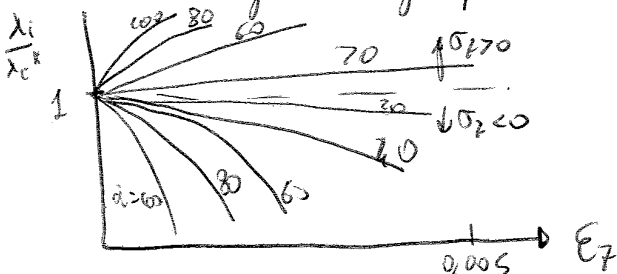
Per risolvere questi casi si aggiunge un momento aggiuntivo  $M_{add} = F_{ax} \cdot v$



$$F_2 \left( u_x + \frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial x} dx \right)$$

impone questo momento aggiuntivo.

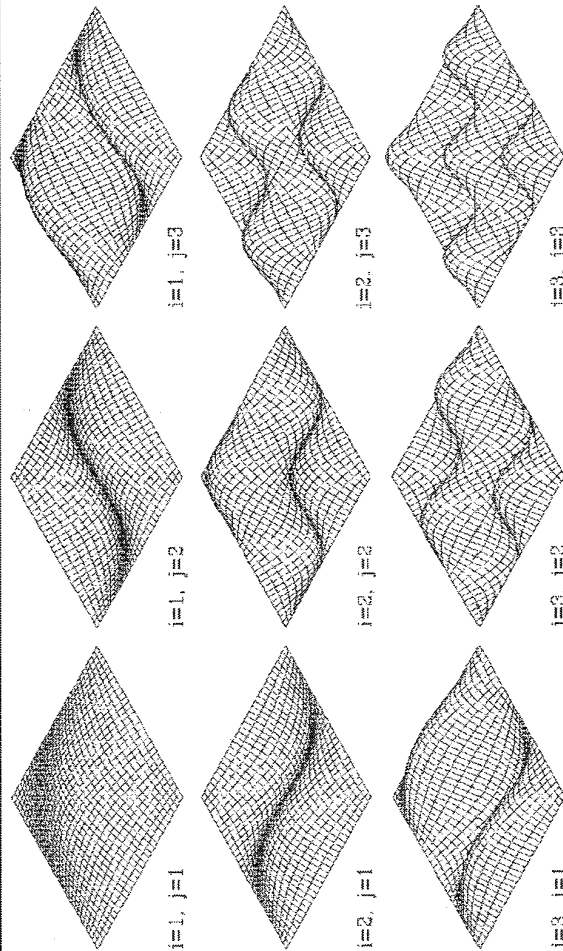
Valutiamo il seguente grafico



$\lambda_i$  è la frequenza naturale che tiene conto del momento aggiuntivo;  $\lambda_c^k$  è la frequenza naturale calcolata con E-B non considerando questo fenomeno.

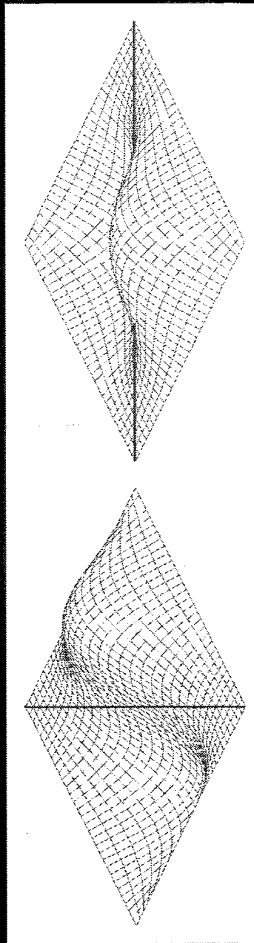
Fino ad ora abbiamo parlato di travi, per risolvere l'auto problema in forme diverse ne ci sono casi come piastre, gusci e in generale elementi bi-dimensionali. In questo caso il problema è planare e le equazioni di equilibrio diventano più complesse e si sono derivate rispetto a  $x$  e  $y$ . Nei casi in cui si possono applicare le C.C. si possono trovare i seguenti risultati:

### Vibrazioni delle piastre rettangolari



Dynamics and control of structures  
Part 2

### Vibration of rectangular plates



Dynamics and control of structures  
Part 2

79

## METODI DI DISCRETIZZAZIONE

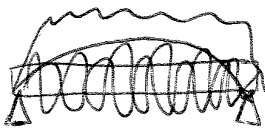
Per molti anni si è sempre cercato di trovare dei modelli di discretizzazione che permettessero di passare dal continuo al discreto e viceversa di passare da sistemi PDE a sistemi ODE. Tutti i possibili metodi si possono raggruppare in 3 categorie.

- 1) metodi ai modi assunti
- 2) metodi a parametri concentrati
- 3) FEM

Ci sono poi metodi alle differenze finite che praticamente lasciano il sistema continuo così come è ma discretizzano le equazioni.

### METODO AI MODI ASSUNTI - $\rightarrow$ uso nella dinamica strutturale

Dato un sistema continuo (potrebbe essere anche una piastra), si assume che la deformazione sia una combinazione lineare di deformazioni arbitrarie. Si scrive la deformazione totale come somma di tutte le deformazioni:  $v(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^n a_i(t) \varphi_i(x, y, z)$ . Quest'equazione è molto simile e punto a punto con l'espressione modale nel continuo con le travi  $v(x, y, z, t) = \sum \eta(t) \varphi(x, y, z)$ .



Allora le  $\varphi_i(x, y, z)$  non sono autofunzioni, ma deformazioni arbitrarie che abbiamo definito noi senza risolvere l'autoproblema.

Se  $\varphi_i(x, y, z)$  sono ortogonali e sono infinite, allora la soluzione  $v$  è esatta e l'approssimazione è tanto migliore quanto più  $\varphi(x, y, z)$  si avvicina alle forme modali.

Il procedimento è quello di calcolare l'energia cinetica  $T = \frac{1}{2} \dot{a}^T M \dot{a}$

l'energia potenziale  $U = \frac{1}{2} a^T K a$ , il lavoro virtuale  $\delta U = \sum_{i=1}^n \delta a_i \varphi_i(x, y, z)$

e le forze generalizzate  $f_i = \int \rho(x, y, z, t) \times \vec{\varphi}_i(x, y, z) dV$ ; si scrive così il sistema modale  $M \ddot{a} + K a = f(t)$  da risolvere ai due gli autovalori e gli autovettori.

Le matrici  $K$  può essere calcolate in un altro modo che in realtà 89  
 è più dispendioso e quindi non si fa ed è:

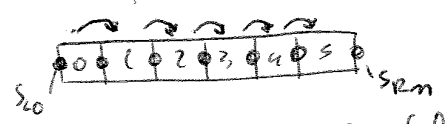
calcolo la deflexione in un punto, calcolo  $H(u)$ , calcolo  $k = H^{-1}$ .

Con questo metodo e parametri concentrati ho calcoli più semplici ma risultati più approssimati e allora dovrei aggiungere più masse e le matrici diventano enormi; con FEM invece uso poche masse ma il calcolo è più complesso

**METODO DELLE MATRICI DI TRASFERIMENTO**

Ci sono due metodi che si basano su questo concetto e sono il metodo di Holzer e quello di Mikklesadt. Sono molto utili per il calcolo di vibrazioni torsionali di alberi e periti per motori.

Consideriamo una barra la dividiamo in un certo numero di masse puntuali. Divido la struttura in nodi ed elementi



Prime dell'elemento 0 definisco un vettore degli stati che contiene non spostamento e velocità ma spostamento e forze  $F$ .  $S = \begin{Bmatrix} u \\ F \end{Bmatrix}$

$S_{L0}$  è il vettore degli stati a sx dell'elemento 0

$S_{R0}$  - - - - - dx dell'elemento 0, che coincide con

$S_{L1}$ .

$S_{R0} = T_0 S_{L0}$   $T_0$  = matrice di trasferimento dell'elemento 0.

NOTA: il sistema è lineare perché posso da un elemento a un altro facendo delle combinazioni lineari

$$S_n = T_n S_{n-1} = T_n T_{n-1} S_{n-2} = T_n T_{n-1} T_{n-2} \dots T_2 T_1 S_0 = T_G S_0$$

ciò  $S_n = \prod_{i=0}^n T_i S_0$   $T_G = \prod_{i=0}^n T_i$

Adesso metto le C.C. e cioè se è un altro un modo "no" 04

$\kappa_{7m} = 0 = \kappa_{70}$  perché non è vincolato

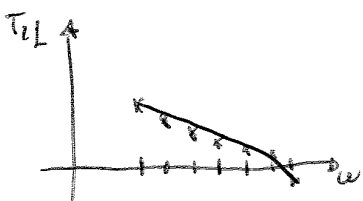
$$\begin{cases} \phi_7 \\ 0 \end{cases}_m = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{cases} \phi_7 \\ 0 \end{cases}_0 \quad \phi_{7m} = T_{11} \phi_{70} \Rightarrow \text{inutile perché non} \\ \text{coso } \phi_{7m} \text{ e non mi serve} \\ \text{calcolarlo.}$$

$0 = T_{21} \phi_{70}$  utile perché è il nostro autoproblema

se  $\phi_{70} = 0$  ho le soluzioni banali, quindi le  $\omega_i$  si calcola scrivendo

$$T_{21} = 0.$$

In realtà questo non è il modo di risolvere il problema perché se avessi 20 modi non potrei moltiplicare 20 matrici anche perché avrei un'espressione con  $\lambda^{20}$  e quindi si risolve il problema in modo iterativo.



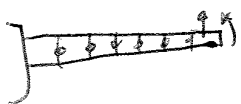
Plotto  $T_{12}$  funzione di  $\omega$ . Cioè faccio il prodotto delle variet, trovando  $T_{12}$  e calcolo  $T_{12}$  per differenti  $\omega$ . Per le  $\omega$  per cui  $T_{12}$  cambia segno ovvero le frequenze note,

ho cercato. Questo metodo ha però dei limiti perché non potrei accorgermi di due valori positivi cioè un valore negativo e quindi due soluzioni



### Metodo di Hinklestail

viene usato per valutare le vibrazioni flessionali degli aerei e in particolare delle ali modellate con delle mensole.



Divido le mensole in nodi ed elementi e ogni elemento avrà una traslazione e una rotazione.

Considerando il nodo  $i$ -esimo

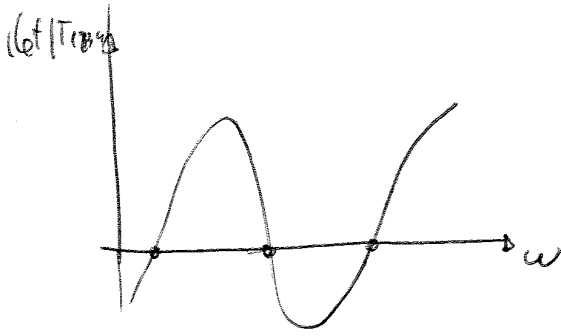
$$\begin{cases} U \\ \phi \\ F \\ M \end{cases}_{i_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -m\omega^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -J\omega^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} U \\ \phi \\ F \\ M \end{cases}_{L_i}$$

$U_{ri} = U_i$  perché il spostamento non lo influenza e lo stesso vale per  $\phi$ .

Per  $F$  e  $M$  devo considerare le forze e coppie d'inerzia

$$F_{ri} = F_i e^{-i\omega t} \quad m \ddot{U} \quad \begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_0 \cos \omega t \\ \ddot{U} = -\omega^2 U_0 \cos \omega t = -\omega^2 U \end{cases}$$

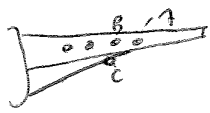
$$M_{ri} = M_i + J \ddot{\phi} = M_i - \omega^2 J \phi$$





Verbo le  $w_i$ . Nota che  $w=0$  non è  
frequenza naturale perché se il sistema  
è vibrato.

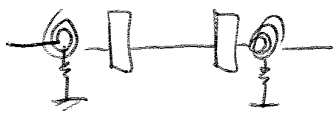
Quali sono i vantaggi di questo metodo?

1) si basa sulle matrici  $T$  e quindi posto da un lato e mi sposto su  
un altro lato e quindi non posso risolvere il seguente caso  
perché il nodo A le due nodi prime (A e B). Per  
funzionare il sistema deve essere in linea cioè  
un nodo deve avere un nodo avanti e uno indietro. Si può  
risolvere considerando



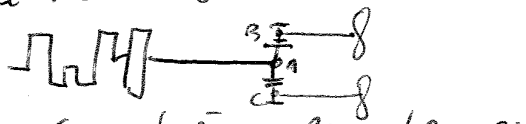
2)  sembra un problema difficile perché bisogna  
dividere il sistema in 2 parti, in realtà  
si può risolvere in modo semplice infatti  
è sufficiente aggiungere  $K$  nelle matrici  $T$ ,

È un caso comune per i rotori  dove per studiare  
il sistema dovrai analizzarlo in 3 sezioni. quello da sopra è  
aggiungere a  $T$  la rigidità torsionale e omici dei supporti



Se i cuscinetti sono molto rigidi, metto un  
valore di  $K$  elevatissimo.

Lo stesso discorso vale per il metodo di Holzer.

È l'unico limite che è quello dei motori a combustione per esempio  
in cui i nodi non sono in linea 

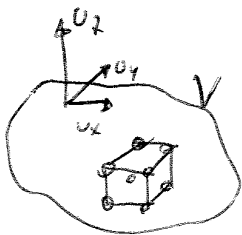
A è un nodo di sostegno a rete fissa e C ed è un limite per le  
matrici  $T$ .



$u_x, u_y, u_z$  sono i 3 spostamenti che un punto può avere nel 3D, 88  
 in alcuni casi il vettore  $q_0$  può contenere anche le rotazioni  
 $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ ; nel caso generale  $q_0$  ha tante componenti quanti sono i p.d.l.  
 nel caso 3D

$$\begin{Bmatrix} u_x(x, y, z, t) \\ u_y(x, y, z, t) \\ u_z(x, y, z, t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N(x, y, z) & 0 & 0 \\ 0 & N(x, y, z) & 0 \\ 0 & 0 & N(x, y, z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_x(t) \\ q_y(t) \\ q_z(t) \end{Bmatrix}$$

$\{q_x\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 8 \end{Bmatrix}$   
 $\{q_y\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 8 \end{Bmatrix}$   
 $\{q_z\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 8 \end{Bmatrix}$



Considero un piccolo cubetto del volume  $V$   
 (mettoncino) e considero i nodi e i vertici del cubetto.  
 Ogni nodo ha 3 spostamenti e il cubetto ha 8 nodi

quindi in totale si avranno 24 p.d.l. e allora

$$\{q_0\} = 3 \times 8 \quad \{N\} = 3 \times 24 \quad \{q\} = 24 \times 1$$

Si fanno alcune ipotesi:

- 1) si assume che gli spostamenti in  $x, y, z$  dipendano solo da  $q_x, q_y, q_z$  e questo spiega il perché di alcuni 0 nelle  $\{u\}$ .
- 2) Materiale isotropo e quindi comportamento uguale nelle direzioni  $x, y, z$ ; ma non è sempre così infatti per Poisson avremmo per esempio  $u_y$  che dipende da  $q_x(x)$ .

Le funzioni  $N$  sono solitamente semplici ma non devono esserlo troppo perché poi si ha una cattiva approssimazione.

Se considero un numero elevato di piccoli elementi la mia approssimazione buona, ma come si fa ad essere sicuri di queste cose? Perché la discretizzazione è un processo convergente e le autofunzioni e gli autovalori hanno le stesse proprietà del discreto. Quando scrivo le PDE in un cubetto del continuo lo uso parte infinitesime in un numero di elementi finiti e il processo è semplice. Se uso  $N$  semplici devo usare tanti elementi, se uso  $N$  più complesse

Se il materiale è lineare il tensore degli sforzi è

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad \text{scritto a vettore } \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}$$

e vale la legge di Hooke  $\{\sigma\} = [E] \{\epsilon\} = [E][B] \{p\}$   
6x6

$[E]$  contiene  $E, \nu, G$  se è isotropo  $[E]$  è simmetrica poiché considero un sistema conservativo. Se il materiale è omogeneo  $[E]$  sarà uguale per ogni elemento del sistema continuo. Se il materiale non è isotropo (anisotropo)  $[E]$  sarà formata da  $E_x, E_y, E_z, \nu_x, \nu_y, \nu_z, G_x, G_y, G_z$ .

A questo punto si scrive l'energia potenziale elastica, la cinetica e il vettore delle forze esterne.

•  $U = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dV = \frac{1}{2} \int_V \underbrace{\{\epsilon\}^T}_{\text{scalare}} \{\sigma\} dV$  per un elemento; se lo estendo

al volume del cubetto  $U = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV = \frac{1}{2} \int_V [B]^T \{p\}^T [E] [B] \{p\} dV$

posso portare fuori dall'integrale  $\{p\}^T$  perché non dipende dallo spazio

$$U = \frac{1}{2} \{p\}^T \int_V [B]^T [E] [B] dV \{p\}$$

NOTA:  $\sigma^T \epsilon \rightarrow$  posto a scrivere  $\epsilon^T$  ma  $\epsilon^T = \bar{\epsilon}$  perché è simmetrica.

$$[K] = \int_V [B]^T [E] [B] dV \quad \text{matricella rigidezza}$$

$$U = \frac{1}{2} \{p\}^T [K] \{p\}$$

$[K]$  può essere risolta in forme diverse solo se  $[B]$  è semplice, ne presto non è comune e spesso si risolve numericamente con metodo di Gauss.