



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1841A -

ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Zaher Sara

MATERIA: Meccanica delle macchine - prof. Eula

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

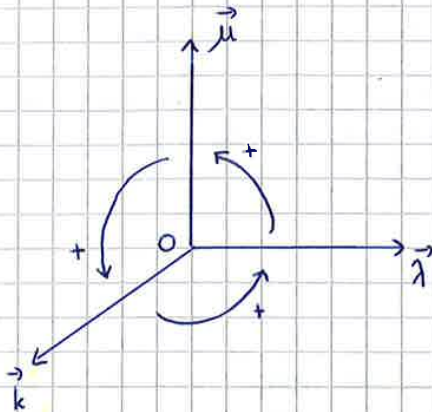
**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

CINEMATICA

05/03/2015

$$\frac{d(r\vec{\lambda})}{dt} = \omega \vec{k} \wedge (r\vec{\lambda})$$

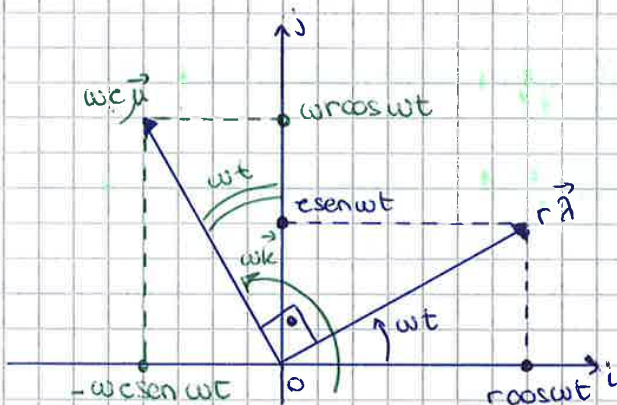
ω = velocità angolare
 r = vettore posizione



$$\begin{cases} \vec{\lambda} \wedge \vec{\mu} = \vec{k} \\ \vec{\mu} \wedge \vec{k} = \vec{\lambda} \\ \vec{k} \wedge \vec{\lambda} = \vec{\mu} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{\lambda} \wedge \vec{k} = -\vec{\mu} \\ \vec{k} \wedge \vec{\mu} = -\vec{\lambda} \\ \vec{\mu} \wedge \vec{\lambda} = -\vec{k} \end{cases}$$

Relazioni fondamentali di una terna di vettori

Pseudiamo un sistema di riferimento e un vettore posizione che ruota nel piano con velocità ωt :



Prendiamo un vettore rotante $r\vec{\lambda}$, prendiamo un altro vettore ortogonale a quello iniziale il cui modulo è $r\omega$ e il verso è perpendicolare a $\vec{\lambda}, \vec{\mu}$. Notiamo che le proiezioni del secondo vettore sono le derivate delle proiezioni del primo vettore sugli assi di riferimento:
 $(r \cos \omega t)' = -r \omega \sin \omega t$
 $(r \sin \omega t)' = r \omega \cos \omega t$

Quindi se le proiezioni del secondo vettore sono le derivate delle proiezioni del primo vettore allora anche il vettore stesso (2°) porta la derivata del primo.

$\Rightarrow \frac{d(r\vec{\lambda})}{dt} = \omega r \vec{\mu}$ Questa relazione rispetta la regola del vettore rotante

Infatti: $\omega r \vec{\mu} = \omega r [\vec{k} \wedge \vec{\lambda}]$ ($\vec{\mu} = \vec{k} \wedge \vec{\lambda}$) (\vec{k} è il vettore uscente dal piano verso di noi)
 $= \omega \vec{k} \wedge (r\vec{\lambda})$

$$\omega r \vec{\mu} = \frac{d(r\vec{\lambda})}{dt} = \omega \vec{k} \wedge (r\vec{\lambda})$$

Notiamo quindi che il vettore $\omega r \vec{\mu}$ è la derivata del vettore posizione $r\vec{\lambda}$ che è anche uguale al prodotto esterno tra il vettore posizione stesso e la sua velocità angolare ω

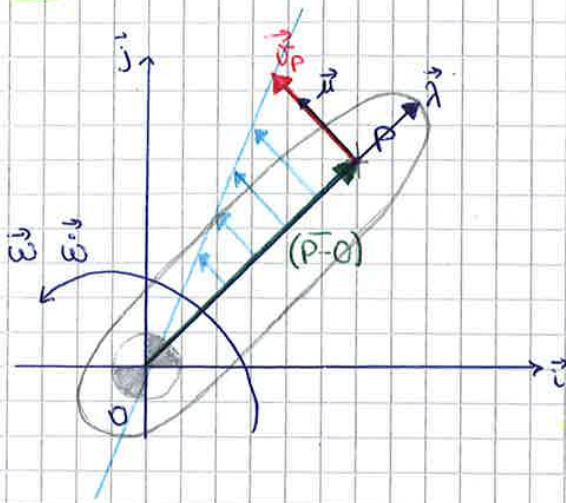
Graficamente, fare la derivata di un vettore rotante nel piano corrisponde a prendere un vettore ortogonale al primo rotando di 90° e con il modulo moltiplicato per ω .

Caratteristiche del moto traslatorio:
(no rotazione)

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B$$

2) ROTAZIONE INTORNO A UN ASSE FISSO



Consideriamo su un sistema di assi coordinati un corpo rigido con forma non generica. Abbiamo una leva in cui esiste una rotazione ω e un'accelerazione angolare $\dot{\omega}$ esiste su questa leva il punto P. La leva è vincolata tramite una cerniera perno-boccola (come quello presente nella ruota di una bicicletta) quindi è un sistema che permette solo rotazione. Una cerniera parzialmente annata è tale che è fissa su un telaio.

Definiamo la distanza $PO = r = \text{costante}$.

Dobbiamo calcolare la velocità e l'accelerazione di P (\vec{v}_p e \vec{a}_p)

$$\vec{v}_p = \frac{d(\vec{r}_p)}{dt} = \frac{d(r\vec{\lambda})}{dt} = r \frac{d\vec{\lambda}}{dt}$$

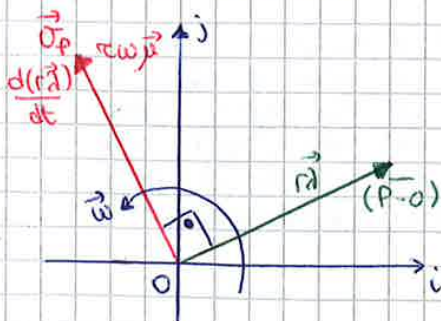
è perché r è costante

Come precedentemente definito, la velocità può anche essere espressa come il prodotto esterno tra il vettore e la velocità angolare.

$$\vec{v}_p = r (\omega \vec{k} \wedge \vec{\lambda}) = \omega \vec{k} \wedge (r\vec{\lambda}) \rightarrow \vec{v}_p = \omega \vec{k} \wedge (\vec{P}-\vec{O})$$

Scrivendo la relazione uguagliata a rinvoliamo dai vettori $\vec{\lambda}$ e $\vec{\lambda}$ che restano solo come dimostrazione.

Notiamo che si sta utilizzando una terna destrorsa perché abbiamo il vettore posizione, il vettore delle velocità angolare perpendicolare alla lavagna e il vettore velocità che è uguale alla derivata del vettore posizione. Questi tre termini dunque costituiscono una terna, \vec{PO} , \vec{k} (perpendicolare al piano), e \vec{v}_p che indubbiamente appartiene al piano perché solo un vettore può uscire dal piano su cui stiamo lavorando (\vec{k}). In particolare \vec{v}_p , poiché è il risultato di un prodotto vettoriale, sarà perpendicolare a \vec{k} e perpendicolare al vettore posizione (poiché è la sua derivata).



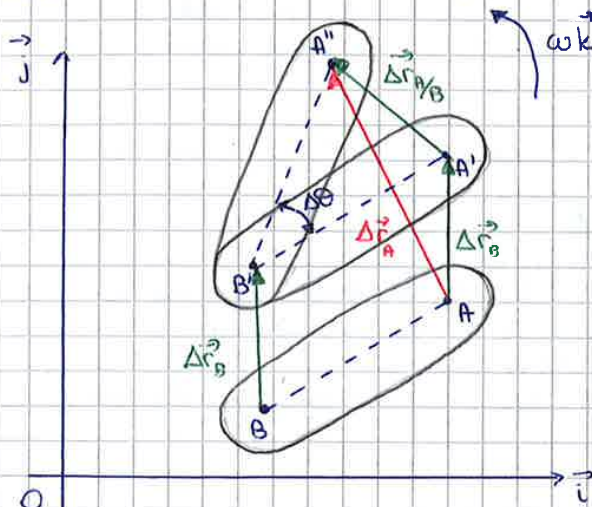
Quindi fare la derivata di un vettore, in particolare del vettore posizione, significa ruotarlo di 90° nel senso di ω e moltiplicarlo per ω .

$$\vec{v}_p = \omega \vec{k} \wedge (\vec{P}-\vec{O}) \begin{cases} \text{Modulo} & v_p = \omega PO \\ \text{Direzione} & \perp \vec{PO} \\ \text{Verso} & \vec{\omega} \end{cases}$$

Poiché O è un punto fisso esiste una distribuzione triangolare delle velocità con velocità nulla in O punto fisso. Se considero dunque una retta che congiunge il vettore \vec{v}_p e O si nota la distribuzione triangolare di velocità, in cui ogni velocità è data

3) MOTO PIANO GENERICO O ROTOTRASLAZIONE

Consideriamo una sbarretta libera di muoversi nel piano. Supponiamo che la sbarretta subisca prima una traslazione e successivamente una rotazione attorno al punto B.



Analizziamo \vec{v}_A e \vec{a}_A

$$\Delta \vec{r}_A = \Delta \vec{r}_B + \Delta \vec{r}_{A/B}$$

$$\Delta \vec{r}_{A/B} = (AB) \Delta \theta$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$$

FORMULA FONDAMENTALE DELLA CINEMATICA

$$\vec{v}_{A/B} = \omega \vec{k} \wedge (\vec{A}-\vec{B})$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B} \rightarrow \vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B,n} + \vec{a}_{A/B,tg}$$

TEOREMA DI RIVALS

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B - \omega^2 (\vec{A}-\vec{B}) + \dot{\omega} \vec{k} \wedge (\vec{A}-\vec{B})$$

Casi particolari:

(a) $\omega = 0, \dot{\omega} = 0 \rightarrow \begin{cases} \vec{v}_A = \vec{v}_B \\ \vec{a}_A = \vec{a}_B \end{cases}$ TRASLAZIONE

(b) $v_B = 0, a_B = 0$ (B punto fisso) $\rightarrow \begin{cases} \vec{v}_A = \vec{v}_{A/B} = \omega \vec{k} \wedge (\vec{A}-\vec{B}) \\ \vec{a}_A = -\omega^2 (\vec{A}-\vec{B}) + \dot{\omega} \vec{k} \wedge (\vec{A}-\vec{B}) \end{cases}$ ROTAZIONE PURA INTORNO A UN PUNTO FISSO.

Il teorema di Rivals e la formula fondamentale della cinematica sono i casi più generali dei moti della cinematica!

METODO ALTERNATIVO PER IL CALCOLO DELLE VELOCITÀ CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE (o centro delle velocità)

06/03/2015

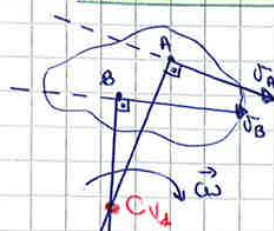
Il centro di istantanea rotazione C_v è un punto particolare poiché la sua velocità è nulla.

$$\vec{v}_{C_v} = 0 \text{ (in ogni istante)}$$

Se il corpo rigido ha una cerniera fissa (vedi lezione precedente) il C_v coincide con la cerniera (vincolo) poiché non è possibile avere due punti a velocità nulla.

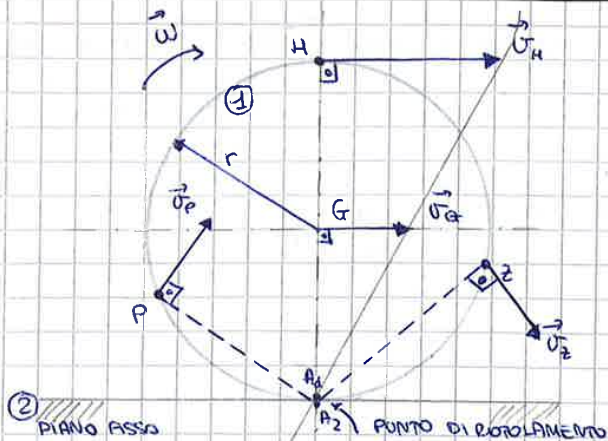
Ci sono 2 casi particolari: dati due punti A, B appartenenti al corpo rigido e le rispettive velocità

(1) \vec{v}_A, \vec{v}_B solo direzioni



Per ricavare il centro di rotazione è sufficiente conoscere le direzioni delle velocità.

Il C_v si determina tracciando le perpendicolari alle direzioni delle velocità. La loro intersezione mi determina il C_v .



Nel punto di contatto il rullo ha moto di puro rotolamento. (Dato che deve sempre essere precario negli esercizi perché i rulli possono anche strisciare)

Nel moto di puro rotolamento i punti a contatto hanno velocità relativa nulla
 $\rightarrow \vec{v}_{A_1} = \vec{v}_{A_2}$

$\vec{v}_{A_1} = \vec{v}_{A_2} + \vec{v}_{rel}$
o perché puro rotolamento
o perché piano fisso

$|\vec{v}_{A_1}| = |\vec{v}_{A_2}| = 0$

Non avendo cerniere o vincoli ed essendo $\vec{v}_{A_1} = 0$ allora $A_1 = C_{V_1}$

\rightarrow Moto di puro rotolamento \rightarrow il C_V coincide con il punto di contatto tra i corpi

• Calcoliamo la velocità \vec{v}_G :

$\vec{v}_G = \cancel{\vec{v}_{C_{V_1}}} + \vec{v}_{G/C_{V_1}} = \vec{\omega} \wedge (G - C_{V_1}) \rightarrow \vec{v}_G$ è perpendicolare
 al raggio tra centro e punto di contatto A_1

Quando abbiamo il moto di puro rotolamento possiamo calcolare facilmente le velocità richieste riferendole al C_{V_1} .

• Calcoliamo la velocità \vec{v}_H

$\vec{v}_H = \cancel{\vec{v}_{C_{V_1}}} + \vec{\omega} \wedge (H - C_{V_1})$

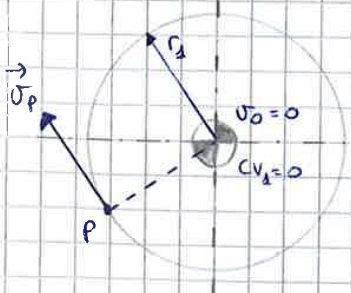
Nota la distribuzione triangolare di velocità

• Proviamo a calcolare la velocità di un punto periferico del corpo P:

$\vec{v}_P = \vec{v}_{C_{V_1}} + \vec{v}_{P/C_{V_1}} = \vec{\omega} \wedge (P - C_{V_1})$

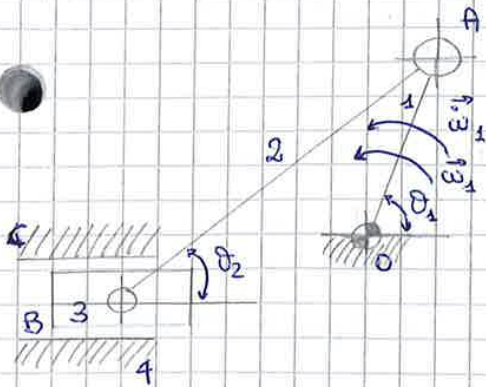
PC_{V_1} è il vettore posizione!
 quindi la direzione di \vec{v}_P è \perp a PC_{V_1}

Modulo $v_P = \omega PC_{V_1}$
 Direzione $\perp PC_{V_1}$
 Verso $(\vec{\omega})_+$



In questo sistema in cui il disco è uccernierato il C_V coincide con il vincolo quindi la \vec{v}_P è tangente al corpo perché il vettore posizione corrisponde al raggio.

SISTEMA BIELLA - MANOVELLA



$$n_1 = 1500 \frac{\text{rpm}}{\text{min}}$$

$$\dot{\omega}_1 = 1000 \text{ rad/s}^2$$

$$OA = 0,21 \text{ m}$$

$$\theta_1 = 45^\circ$$

$$AB = 0,61 \text{ m}$$

$$\theta_2 = 30^\circ$$

\overline{OA} = MANOVELLA

\overline{AB} = BIELLA

A = BOTTONE DI MANOVELLA

B = PIEDE DI BIELLA

C = CORSOIO

Abbiamo due tipi di cerniere: quella biacca-nera che è fissa e vincola il corpo rigido al telaio, la cerniera A che è mobile, e C che è un corsoio che permette al piede di bielle di scorrere all'interno (traslazione).

(a) A cosa serve e come funziona il sistema

Abbiamo la manovella AO che è un corpo rigido (1) vincolato al telaio in O e può ruotare attorno ad O. Agganciata alla manovella tramite la cerniera A esiste la biella 2 che ci permette di muovere il piede di bielle tramite un movimento rettilineo alternato che si inverte nella guida del telaio. Quindi la guida ci impone un vincolo di movimento orizzontale.

La manovella spinge tutto il sistema che trasla verso sinistra dopo di che quando la manovella passa nel quadrante inferiore comincia a retrarre il piede di bielle.

Il meccanismo, dunque, compie una trasformazione di movimento oltre a trasmettere il movimento: trasmette il movimento dalla manovella al piede di bielle ma fa anche una trasformazione del moto perché la manovella AO ha una rotazione mentre il piede di bielle B ha una traslazione alternata. Quindi passa da una rotazione rigida attorno ad O a una traslazione orizzontale alternata.

(b) Calcolo dei gradi di libertà del sistema

Applichiamo la formula di Grübler

$$X = 3(m - 1) - 2C_1 - C_2$$

$$m = 4 \text{ (compreso il telaio)}$$

$$C_1 = 4 \text{ (O, A, B, C)}$$

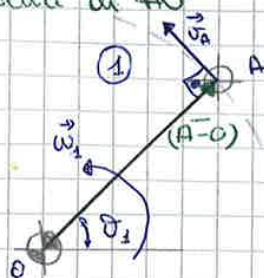
$$C_2 = 0$$

$$\Rightarrow X = 1 \text{ (Infatti abbiamo solo } \omega_1 \text{)}$$

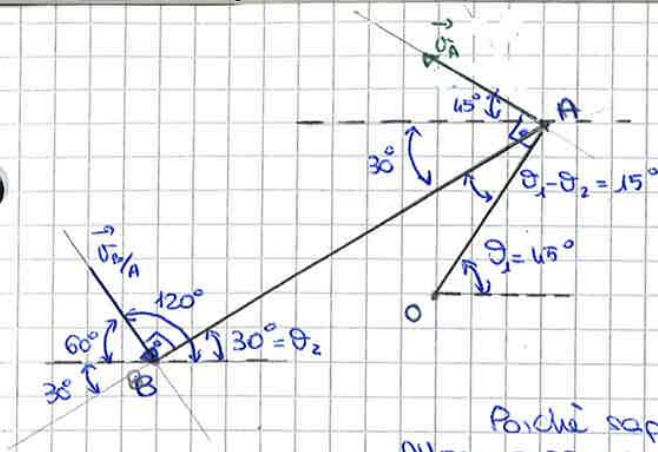
(c) Calcolo delle velocità

Lo scopo è calcolare la velocità di B ma partiamo calcolando quella della manovella OA dove abbiamo nota ω .

• Velocità di AO



La manovella, corpo (1), compie una rotazione rigida attorno ad O, quindi esiste una cerniera fissa $\vec{v}_O = 0, \vec{\alpha}_O = 0$



Ora tramite il teorema dei seni possiamo calcolare il modulo di \vec{v}_B e $\vec{v}_{B/A}$.

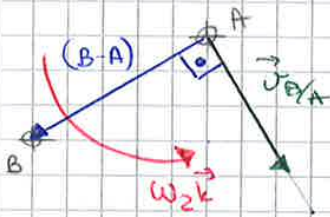
$$\frac{v_A}{\sin 120^\circ} = \frac{v_{B/A}}{\sin 45^\circ} \rightarrow v_{B/A} = 26,93 \text{ m/s}$$

$$\frac{v_A}{\sin 120^\circ} = \frac{v_B}{\sin 15^\circ} \rightarrow v_B = 9,85 \text{ m/s}$$

Perché sappiamo che $v_{B/A} = \omega_2 \vec{k} \wedge (\vec{B}-\vec{A})$
Allora possiamo calcolare ω_2

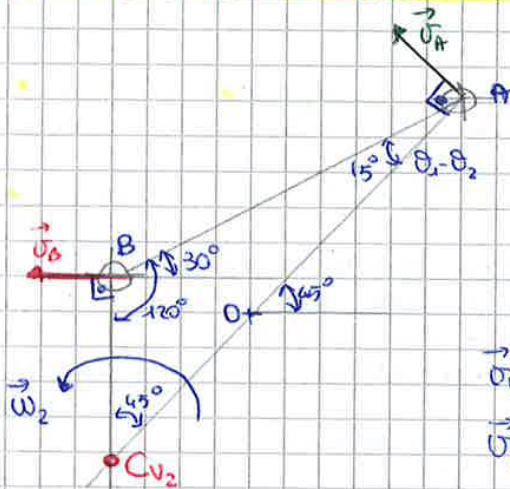
$$\omega_2 = \frac{v_{B/A}}{AB} = 44,15 \text{ rad/s}$$

Ora conosciamo M.D.V. delle velocità \vec{v}_B e $\vec{v}_{B/A}$ ma non sappiamo ancora qual è il verso di ω_2 . Ricaviamolo con la regola del prodotto esterno



Conosciamo il vettore posizione $(\vec{B}-\vec{A})$ e il vettore velocità $\vec{v}_{B/A}$ ricavato prima dal triangolo. La velocità angolare ω_2 è quella che mi fa passare dal vettore $(\vec{B}-\vec{A})$ al vettore velocità. Quindi per passare il vettore posizione sul vettore velocità devo avere una ω_2 antioraria.

Calcoliamo le velocità con il metodo del CV



Traccio le perpendicolari a \vec{v}_B e \vec{v}_A , la loro intersezione è il CV

Conoscendo la distanza AB uso il teorema dei seni:

$$\frac{AB}{\sin 15^\circ} = \frac{AC_{v2}}{\sin 120^\circ} = \frac{BC_{v2}}{\sin 45^\circ}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{C_{v2}/A} + \vec{v}_{A/C_{v2}} = \omega_2 \vec{k} \wedge (\vec{A}-\vec{C}_{v2})$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{C_{v2}/B} + \vec{v}_{B/C_{v2}} = \omega_2 \vec{k} \wedge (\vec{B}-\vec{C}_{v2})$$

Avendo ricavato le distanze AC_{v2} e BC_{v2} tramite il teorema dei seni, posso calcolare ω_2 come $\frac{v_A}{AC_{v2}}$

che sostituisco nell'espressione di \vec{v}_B per ricavare \vec{v}_B .

(c) Calcolo delle accelerazioni

Teorema di Rivale applicato ad AO: $\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{a}_{A/O_n} + \vec{a}_{A/O_{tg}}$

$$\rightarrow \vec{a}_A = -\omega_1^2 (\vec{A}-\vec{O}) + \omega_2 \vec{k} \wedge (\vec{A}-\vec{O})$$

$$\rightarrow \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A_n} + \vec{a}_{B/A_{tg}} = \vec{a}_A - \omega_2^2 (\vec{B}-\vec{A}) + \omega_2 \vec{k} \wedge (\vec{B}-\vec{A})$$

$$\vec{a}_{A/O_n} = \omega_1^2 AO = 5180,91 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_{A/O_{tg}} = \dot{\omega}_1 AO = 210 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_{B/A_n} = \omega_2^2 BA = 1192,26 \text{ m/s}^2$$

FORMULE DEL MOTO COMPOSTO

$$\vec{v}_{pass} = \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{trc}$$

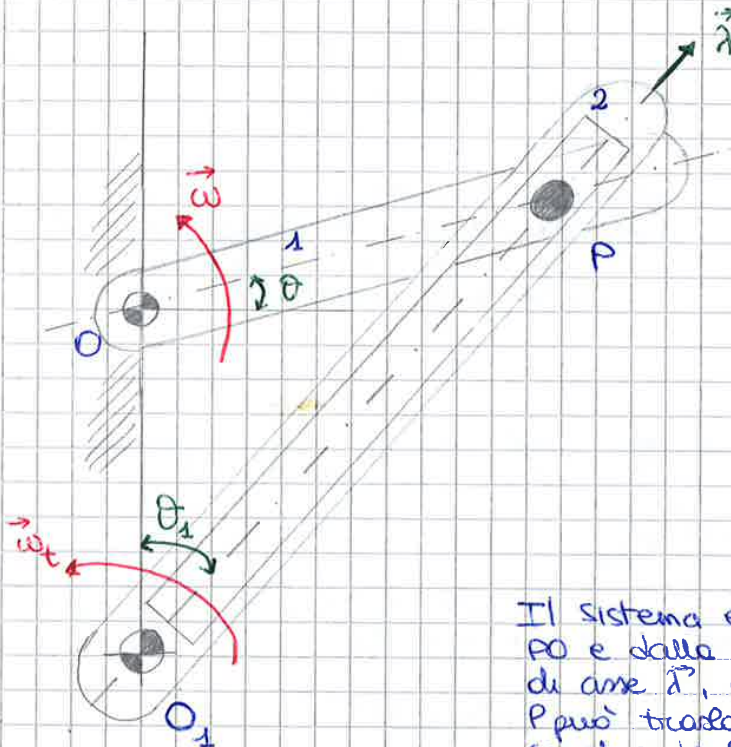
$$\vec{a}_{pass} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{P/trc} + \vec{a}_{co}$$

Per quanto riguarda le accelerazioni, poiché all'interno del sistema del sistema c'è una composizione di due moti, nasce l'accelerazione di Coriolis. Il punto P, cioè, risente sia del suo moto relativo sia del suo moto di trascinamento.

$$\vec{a}_{co} = 2\omega_{trc} \vec{k} \wedge \vec{v}_{rel}$$

Il moto di trascinamento deve essere un moto angolare perché ne fosse una traslazione l'accelerazione di Coriolis vale zero.

GUIDA DI FAIRBAIN (o glifo)



$$\omega = 157 \text{ rad/s} = \text{cost}$$

$$\dot{\omega} = 0$$

$$OP = 0,3 \text{ m}$$

$$OO_1 = 0,4 \text{ m}$$

$$\theta_1 = 26,38^\circ$$

$$\theta = 27,27^\circ$$

$O_1P \neq \text{cost} \Rightarrow$ moto composto (nella figura $O_1P = 0,6 \text{ m}$)

Il sistema è costituito dalla manovella PO e dalla guida 2, che ha una ferata di asse \vec{x} , all'interno della quale il punto P può traslare. OP è una manovella in cui il punto P è fisso, quindi la distanza OP è fissa mentre la distanza O_1P cambia nel tempo perché per fare muovere il sistema

la manovella 1 ruota di un certo angolo e la guida all'interno del corpo due le va dietro grazie al fatto che P può variare la distanza da O_1 .

Quindi la manovella può percorrere, a seconda della lunghezza della guida, un arco di circonferenza o una circonferenza completa, mentre il corpo 2 diventa una specie di "tergicristallo", cioè ha un movimento rotatorio alternato.

(1) GdL → Formula di Grübler

$$\kappa = 3(m-1) - 2C_1 - C_2$$

$m =$ n° corpi ruotanti più il telaio → 3 (corpo 1, corpo 2, telaio)

$C_1 =$ n° di vincoli a 1 gdl → 2 (O, O_1)

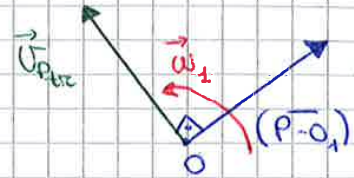
$C_2 =$ n° di vincoli a 2 gdl → 1 (P)

→ $\kappa = 1$ infatti è assegnata solo $\vec{\omega}$ che è un ingresso del sistema

$$v_{Prel} = v_{Pam} \cos(\theta + \theta_1) = 27,91 \text{ m/s}$$

$$v_{Pte} = v_{Pam} \sin(\theta + \theta) = 37,93 \text{ m/s}$$

$$\omega_1 = \frac{v_{Pte}}{PO_1} = 63,22 \text{ rad/s}$$



(4) Calcolo delle accelerazioni

$$\vec{a}_{Pam} = \vec{a}_{Prel} + \vec{a}_{Pte} + \vec{a}_{Pco}$$

$$\vec{a}_{Prel} = \pm a_{Prel} \vec{\lambda} \quad \vec{a}_{Pte} = \text{rotazione rigida attorno ad } O_1$$

$$\vec{a}_{Pte} = [\vec{a}_{O_1} + \vec{a}_{P/O_1}]_{te} = \dot{\omega}_1 \vec{k} \wedge (\vec{P}-O_1) - \omega_1^2 (\vec{P}-O_1) = \vec{a}_{P/O_1, tg} + \vec{a}_{P/O_1, n}$$

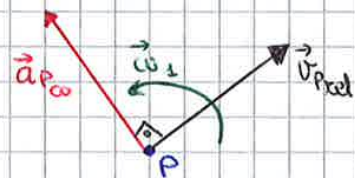
$$\vec{a}_{Pam} = \vec{a}_0 + \vec{a}_{P/O_1, tg} + \vec{a}_{P/O_1, n} = \dot{\omega}_1 \vec{k} \wedge (\vec{P}-O_1) - \omega_1^2 (\vec{P}-O_1)$$

$$\vec{a}_{Pco} = 2 \omega_1 \vec{k} \wedge \vec{v}_{Prel} = 2 \omega_1 \vec{k} \wedge \vec{v}_{Prel} \quad (\dot{\omega} = 0)$$

$$|\vec{a}_{P/O_1, n}| = \omega_1^2 PO = 7394,7 \text{ m/s}^2$$

$$|\vec{a}_{P/O_1, n}| = \omega_1^2 (PO_1) = 2398 \text{ m/s}^2$$

$$|\vec{a}_{Pco}| = 2 \omega_1 v_{Prel} = 3528,9 \text{ m/s}^2$$

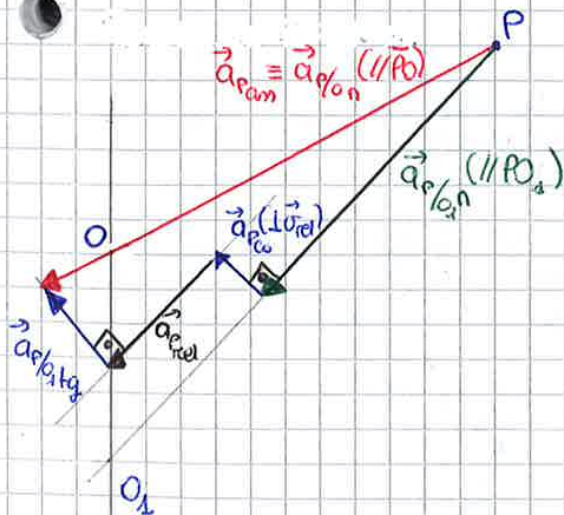


Traiamo ora il poligono delle accelerazioni:

corpo 1: $\vec{a}_P = \vec{a}_{Pam} = \vec{a}_0 + \vec{a}_{P/O_1, tg} + \vec{a}_{P/O_1, n}$

corpo 2: $\vec{a}_P = \vec{a}_{Prel} + \vec{a}_{Pte} + \vec{a}_{Pco} = \pm a_{Prel} \vec{\lambda} + [\vec{a}_{O_1} + \vec{a}_{P/O_1, tg} + \vec{a}_{P/O_1, n}]_{te} + \vec{a}_{Pco}$

\vec{a}_{Pco} è nota in R, D, V, $\vec{a}_{P/O_1, n}$ è nota in R, D, V, $\vec{a}_{P/O_1, tg}$ è nota solo in direzione ($\perp \vec{PO}_1$) e anche \vec{a}_{Prel} è nota solo in direzione (lungo $\vec{\lambda}$).

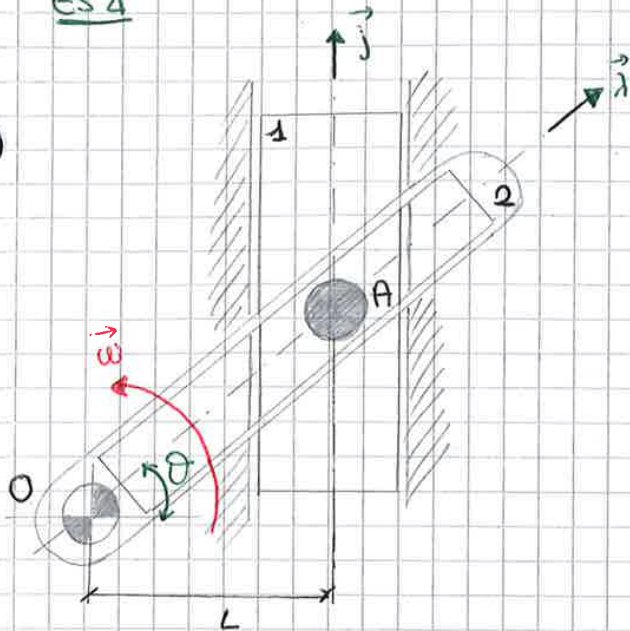


Perché la \vec{a}_{Pam} è la somma di tutti gli altri vettori posso metterci verso agli altri vettori. I vetti saranno tutti in cascata essendo la loro risultante la \vec{a}_{Pam} .

Questo poligono permette solo di calcolare i vetti, i moduli non sono ancora noti ed essendo un procedimento geometrico molto lungo a fermiamo a disegnare il poligono (come programma del corso).

ES 4

13.03.2015



$$AO = \frac{L}{\cos \vartheta} \begin{cases} \nearrow 0,2 \text{ m} \\ \searrow 0,213 \text{ m} \end{cases}$$

$$\omega = 1 \text{ rad/s} = \text{cost}$$

$$\dot{\omega} = 0$$

$$L = 200 \text{ mm}$$

$$\vartheta = 0^\circ; 20^\circ$$

$$? \vec{v}_{A \text{ rel}}, \vec{v}_{A \text{ abs}}$$

Il sistema ha la struttura di un glifo dove però il corpo 1 è al posto della manovella FO. Il corpo 1 porta solidale con se stesso il perno A e trasla lungo \vec{j} . Il perno A può traslare lungo \vec{i} e il corpo 2 contemporaneamente ruota attorno ad O. Il problema ci dà due valori di ϑ quindi dobbiamo studiare due casi figurazioni.

(1) GdL: Formula di Gröbler

$$\chi = 3(m-1) - 2C_1 - C_2$$

$$m=3$$

$$C_1 = 2(O, \vec{j})$$

$$C_2 = 1(A)$$

$$\rightarrow \chi = 1$$

Infatti il sistema ha imposto su un solo motore ($\vec{\omega}$)

(2) Calcolo delle velocità $\omega \neq \text{cost} \Rightarrow$ MOTO COMPOSTO

$$\vec{v}_{A \text{ abs}} = \vec{v}_{A \text{ rel}} + \vec{v}_{A \text{ trc}}$$

- MOTO RELATIVO: traslazione lungo \vec{i} di A
- MOTO DI TRASCINAMENTO: rotazione intorno ad O di A
- MOTO ASSOLUTO: traslazione lungo \vec{j} di A

$$\vec{v}_{A \text{ abs}} = \pm v_A \vec{j} \text{ (Direzione)}$$

$$\vec{v}_{A \text{ rel}} = \pm v_{A \text{ rel}} \vec{i} \text{ (Direzione)}$$

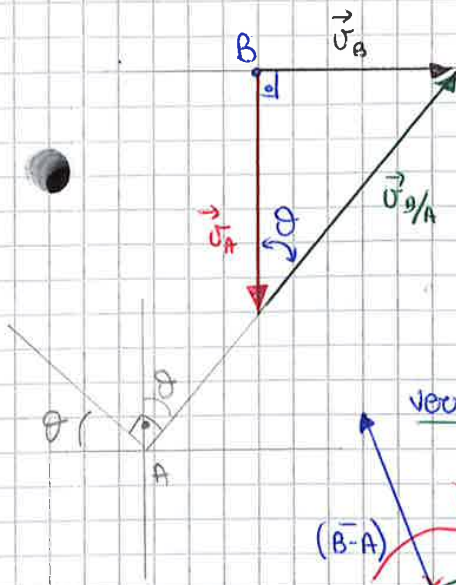
$$\vec{v}_{A \text{ trc}} = \vec{v}_O + \vec{v}_{A/O} = \omega \vec{k} \wedge (\vec{A}-O)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M: \omega_{AO} \\ D: \perp \vec{AO} \\ V: \vec{\omega}^+ \end{array} \right.$$

$$\vartheta = 0^\circ \rightarrow 0,00 \text{ m/s}$$

$$\vartheta = 20^\circ \rightarrow 0,215 \text{ m/s}$$

Possiamo ora disegnare il triangolo delle velocità



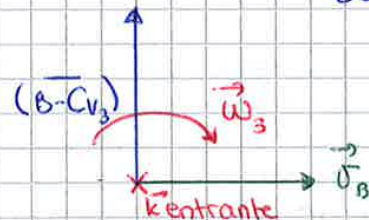
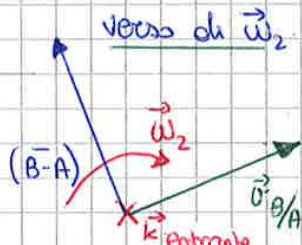
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} \rightarrow \text{stabilisco i versi}$$

$$|\vec{v}_B| = |\vec{v}_A| \operatorname{tg} \theta = 1,15 \text{ m/s}$$

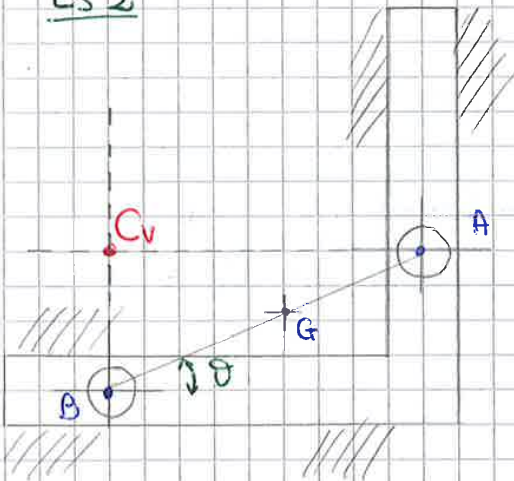
$$|\vec{v}_{B/A}| = \frac{|\vec{v}_A|}{\cos \theta} = 2,31 \text{ m/s}$$

$$\omega_2 = \frac{|\vec{v}_{B/A}|}{AB} = 11,55 \text{ rad/s}$$

$$\text{verso di } \vec{\omega}_3 = \frac{v_B}{BC_{v_3}} = 11,55 \text{ rad/s}$$



ES 2



$$AB = 200 \text{ mm}$$

$$v_A = 2 \text{ m/s} = \cos \theta$$

$$\theta = 30^\circ$$

? $\vec{v}_B, \omega, \vec{v}_G$

$$GA = \frac{AB}{2} = 0,1 \text{ m}$$

Risolvo l'esercizio con il metodo del centro di velocità.

I due punti A, B collegati con la sbarretta AB non obbligati a scorrere all'interno delle guide prismatiche fisse nel telaio. A scorre verticalmente, B orizzontalmente. G è il baricentro della sbarretta. Per determinare il C_v traccio le perpendicolari alle velocità note in direzione di A e di B.

Tutti i punti della sbarretta AB ruotano con la stessa velocità angolare ω intorno al C_v .

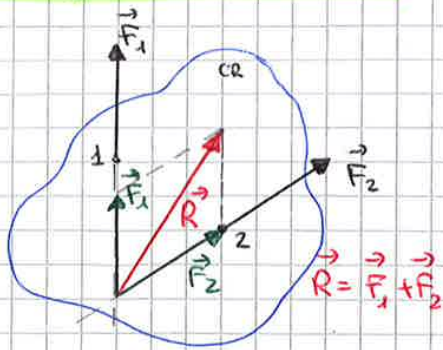
$$(1) \vec{v}_A = \vec{v}_{C_v} + \vec{v}_{A/C_v} = \omega \vec{k} \wedge (\vec{A} - \vec{C}_v)$$

$$(2) \vec{v}_B = \vec{v}_{C_v} + \vec{v}_{B/C_v} = \omega \vec{k} \wedge (\vec{B} - \vec{C}_v)$$

\vec{v}_A è nota in D.R.V., \vec{v}_B è nota solo in direzione (orizzontale) ω non è nota, $\vec{A} - \vec{C}_v$ e $\vec{B} - \vec{C}_v$ non sono note e dobbiamo calcolare le distanze in modulo. La direzione dei vettori $(\vec{A} - \vec{C}_v)$ e $(\vec{B} - \vec{C}_v)$ le conosciamo perché il vettore punta verso il primo punto.

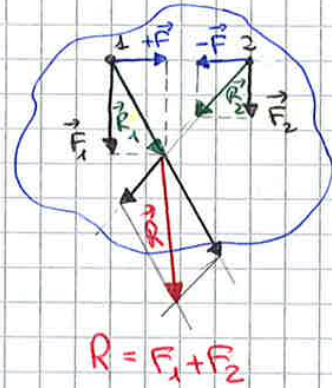
Questa è la differenza tra il metodo del C_v e il teorema fondamentale della cinematica: in quest'ultimo lavoriamo soprattutto sui triangoli delle velocità mentre nel primo lavoriamo sulle distanze (vettore posizione).

COMPOSIZIONE DI VETTORI



Date due forze applicate su due punti distinti di un corpo rigido posso comporre traslandole lungo la loro retta di azione fino al loro punto di intersezione. Posso quindi costruire il parallelogramma con i lati paralleli alle due forze. La sua diagonale è la risultante somma delle due forze.

Esiste un caso particolare in cui le due forze sono parallele: in questo caso sommo e sottraggo la stessa quantità F al numeratore. Compongo le forze F_1, F e $F_2, -F$ con la regola del parallelogramma trovando R_1 ed R_2 che prolungate hanno un punto di intersezione dove io posso nuovamente applicare la regola del parallelogramma tra R_1, R_2 e la loro composizione è la risultante R complessiva tra F_1 e F_2 .



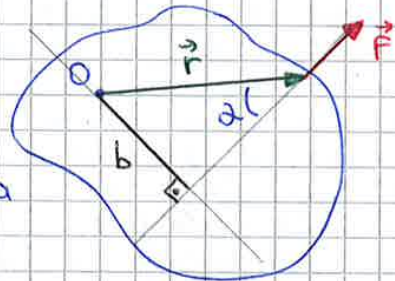
MOMENTO DI UNA FORZA

Una forza F tende a fare traslare un corpo, ma se il corpo è libero nel piano può anche ruotare quindi si parla anche di momento di una forza rispetto ad un punto.

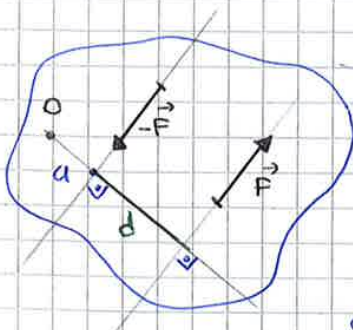
$$\vec{M}_0 = \vec{r} \wedge \vec{F} \quad M_0 = r F \sin \alpha \vec{k} = b F \vec{k}$$

$b =$ BRACCIO $=$ $r \sin \alpha$
DELLA FORZA

Il braccio della forza è la distanza tra il punto O e la retta di azione della forza \vec{F} (deve essere \perp)



COPPIA DI FORZE



Se in un sistema abbiamo due forze parallele con uguale modulo ma diversa retta di azione e in verso opposto si parla di COPPIA DI FORZE

$$\begin{cases} \vec{F} \parallel -\vec{F} \\ |\vec{F}| = |-\vec{F}| \\ \neq \text{retta di azione} \\ \text{verso opposto} \end{cases}$$

d è la distanza tra le due forze

Sovponendo l'equazione di momento rispetto ad O (in termini scalari):

$$M_0 = F(a+d) - Fa = Fd \rightarrow \boxed{C = Fd}$$

Quindi in questo caso non compare il momento rispetto ad O , quindi non dipende dalla distanza delle forze da O .

Sulla struttura assemblata si vedono la forza peso e la forza d'inerzia ma non si vedono le reazioni ai vincoli che sono forze interne.

Reazioni Vincolari

Sono forze interne e sono sempre incognite in modulo direzione e verso, però di sicuro sappiamo il punto di applicazione.

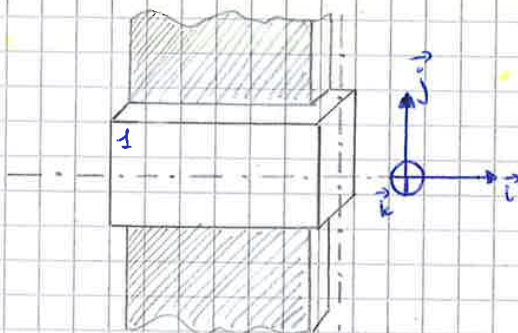
Le reazioni vincolari dipendono da come funziona il meccanismo, a quale velocità funziona e come è collegato, quindi possono anche cambiare nel tempo.

Parleremo quindi di reazioni vincolari riferite ai principali tipi di vincoli che incontreremo nei nostri sistemi.

Sostanzialmente andremo a utilizzare come vincoli quelle che sono definite coppie cinematiche, ovvero vincoli il cui moto relativo (la capacità di movimento tra le due parti) dipende dalle forme delle superfici.

vedremo tre tipi di coppie cinematiche:

(a) COPPIA PRISMATICA (senza attrito)



È un parallelepipedo in grado di traslare lungo x all'interno di una guida prismatica.

La coppia prismatica permette il solo movimento di traslazione del sistema lungo j .

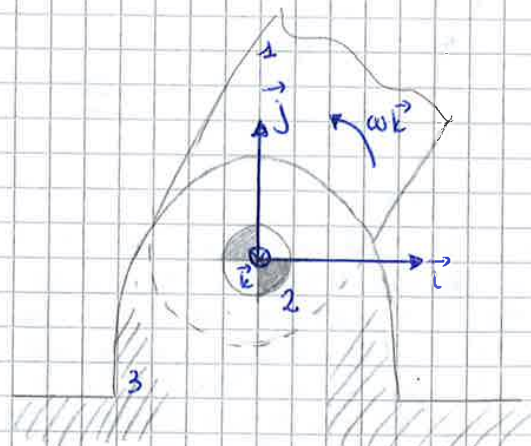
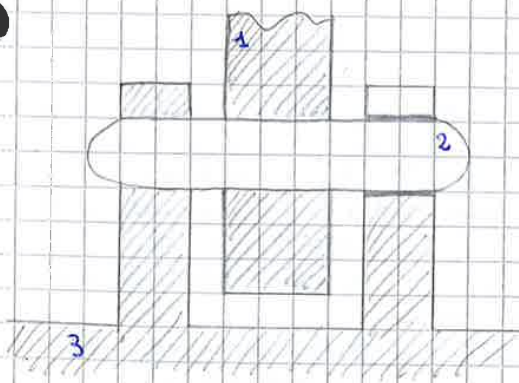
$$\begin{cases} v_x \neq 0 \\ v_y = 0 \\ \omega_z = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y \neq 0 \\ M_z \neq 0 \end{cases}$$

Reazioni vincolari della coppia prismatica.

Il vincolo ha quindi un solo grado di libertà, traslazione lungo x . Se io separo il corpo 1 dal telaio, quello che devo definire sono le reazioni che il corpo 1 scambia con il telaio. Quindi spezzando le diverse parti del meccanismo sono obbligata a mettere le reazioni vincolari dove c'erano i vincoli. Le reazioni vincolari nascono dove il movimento è impedito.

(b) COPPIA ROTOIDALE (o cerniera)



Questi sono due esempi di coppia rotoidale: a sinistra la vista assiale e a destra la vista frontale.

Il perno 2 è in grado di ruotare intorno alla rete e il corpo 1 può essere trascinato in movimento rispetto al perno.

La vista frontale mi serve per evidenziare la cerniera fissa.

Da punto di vista cinematico cerniera fissa e cerniera mobile si comportano allo stesso modo.

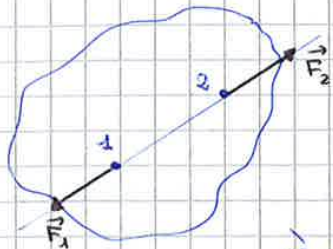
Questo sistema permette solo la rotazione.

Metodo equilibrio grafico

Con questo metodo lavoro solo sulle risultanti cioè se c'è una reazione vincolare su una cerniera non tengo conto delle componenti della forza vincolare ma lavoro solo sulle risultanti e trascuro i pesi dei corpi seipoi a meno che non venga assegnato dall'esercizio.

$$\text{EQUILIBRIO: } \begin{cases} R_F = 0 \\ M_R = 0 \end{cases}$$

(1) CORPO RIGIDO SOGGETTO A 2 FORZE



Le due forze F_1 e F_2 devono essere uguali e opposte altrimenti il corpo tenderebbe a traslare.

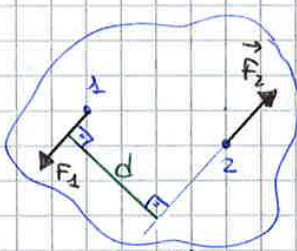
Modulo: $|F_1| = |F_2|$

Direzionale: stessa retta di azione

Verso: verso opposto

È importante che le due forze abbiano la stessa retta di azione altrimenti il corpo tenderebbe a ruotare.

(2) CORPO RIGIDO SOGGETTO A 2 FORZE E 1 COPPIA



In questo sistema conosciamo la coppia \vec{C} e la forza \vec{F}_1 . Determiniamo come deve essere la forza \vec{F}_2 in modo che il sistema sia in equilibrio.

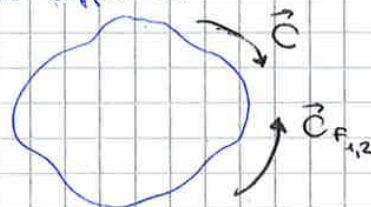
\vec{F}_2 deve avere stesso modulo di \vec{F}_1 e deve essere $\parallel \vec{F}_2$.

Modulo: $|F_1| = |F_2|$
 Direzione: $F_1 \parallel F_2$
 Verso: verso opposto

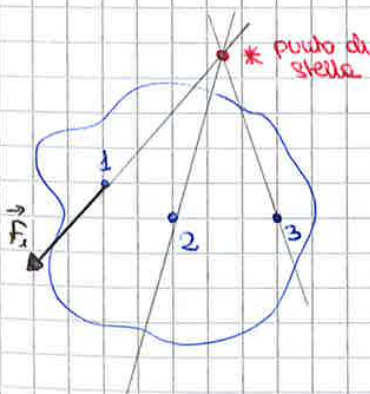
Se le due forze hanno queste caratteristiche allora formano una coppia di forze uguale e opposta alla coppia \vec{C} .

Per l'equilibrio: $C = F_2 \cdot d$

Quindi il sistema equivalente è:



(3) CORPO RIGIDO SOGGETTO A 3 FORZE



Abbiamo la forza \vec{F}_1 nota in M.D.V., la forza \vec{F}_2 nota solo in direzione e di \vec{F}_3 conosciamo solo il punto di applicazione 3.

Prolungo la forza \vec{F}_1 e trovo il punto di intersezione punto di stella, con la direzione di \vec{F}_2 .

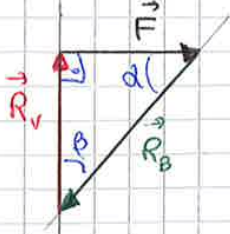
Per l'equilibrio alla rotazione anche la terza forza \vec{F}_3 deve passare per il punto di stella, trovo così la direzione di \vec{F}_3 .

Questa condizione mi permette di scrivere:

$$\sum_{i=1}^n M_i = 0 \quad \text{perché} \quad F_1 \cdot 0 + F_2 \cdot 0 + F_3 \cdot 0 = 0$$

Quindi ho l'equilibrio alla rotazione.

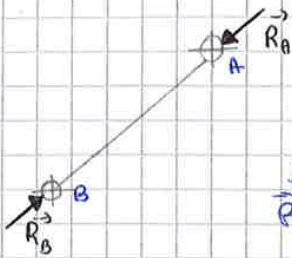
Disegno il triangolo delle forze rispetto al corpo 3.



Equilibrio alla traslazione: $\vec{F} + \vec{R}_B + \vec{R}_V = 0$
 Ora posso calcolare anche i moduli:

$$\frac{R_B}{\sin 90^\circ} = \frac{F}{\sin \beta} \quad \frac{R_V}{\sin \alpha} = \frac{F}{\sin \beta}$$

Ora so che sul corpo 2 si trova una reazione R_B uguale e opposta a quella che ho analizzato sul corpo 3 per il principio di azione e reazione.

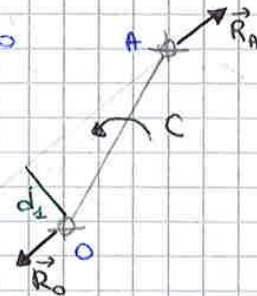


In questo modo riesco a determinare anche R_A avendo nota R_B :

$$|R_B| = |R_A| \text{ essendo il corpo 2 un'asta scarrata.}$$

Analizziamo ora il corpo ①. Abbiamo già nota R_A dovuta alla reazione vincolare in A.

Con il corpo ① ricorriamo nella seconda regola degli equilibri. R_0 deve essere uguale e opposta e \parallel ad R_A e devono formare una coppia uguale e opposta a C .
 Poiché la coppia R_A ed R_0 tende a far ruotare il corpo in senso orario determino il verso di C che deve essere opposto.

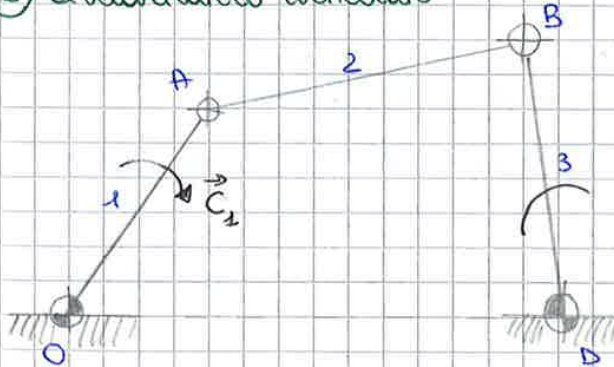


$$\vec{R}_0 \parallel \vec{R}_A \\ |R_A| = |R_0|$$

$$C = R_A \cdot d_{\perp}$$

→ Ricavo C

② Quadrilatero articolato



Il meccanismo è costituito da tre leve incernierate al telaio in O e in D con la possibilità di rotazione.
 A, B sono cerniere mobili che permettono solo rotazione.
 Conosciamo la coppia C_1 e dobbiamo ricavare la coppia C_3 per l'equilibrio.

transcurriamo i pesi
 uso solo le risultanti

Come prima cosa separo i corpi rigidi in corrispondenza delle cerniere e disegno i diagrammi di corpo rigido per ogni corpo rappresentando le forze esterne e quelle interne.
 Noto che il corpo 2 è un'asta scarrata quindi so che R_A e R_B sono uguali e opposte e ne conosco la direzione.

Quando il corpo rigido nel piano trasla e ruota. Essendo il corpo rigido con dimensioni definite dobbiamo parlare di baricentro, ovvero un punto in cui si suppone sia concentrata la massa dell'intero corpo. La seconda legge diventa quindi:

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_{est\ G} = I_G \vec{\omega}$$

I_G = momento di inerzia baricentrico [$\text{kg} \cdot \text{m}^2$] indica la resistenza del corpo al variare la sua velocità angolare.

Definiamo queste due grandezze:

$$\vec{F}_{in\ G} = -m \vec{a}_G$$

Forza di inerzia baricentrica.

$$\vec{M}_{in\ G} = -I_G \vec{\omega}$$

Coppia di inerzia baricentrica.

Le azioni di inerzia nascono due perché il corpo può sia ruotare sia traslare e il corpo ha forma definita. Ovvero il segno negativo significa che sono azioni opposte all'accelerazione.

$\vec{F}_{in\ G}$ e $\vec{M}_{in\ G}$ sono legate alla massa e all'accelerazione: mentre m non può essere nulla perché noi consideriamo corpi rigidi con forma e massa definite (a meno che non si faccia un'approssimazione che però non corrisponde più alla realtà); l'accelerazione può essere nulla per esempio per velocità costante oppure sistema fermo.

Allora queste espressioni indicano le azioni di inerzia opposte all'accelerazione (lineare o angolare) dove esiste un equilibrio dinamico che coinvolge delle accelerazioni.

Esiste anche il moto inerte, come ad esempio una macchina ferma al semaforo dove per poche ore accelera e quindi ha velocità = 0 e accelerazione $\neq 0$, quindi non è detto che velocità = 0 significhi accelerazione = 0.

Queste sono le azioni di inerzia che ci permettono di scrivere in altro modo le relazioni dove abbiamo coinvolto le forze esterne:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{est\ i} + \vec{F}_{in\ G} = 0$$

Semplicemente abbiamo preso $m \vec{a}_G$ e portato dall'altra parte dell'uguale dove ottengo $-m \vec{a}_G$ che è la forza di inerzia baricentrica.

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_{est\ i\ G} + \vec{M}_{in\ G} = 0$$

Stessa cosa per la rotazione.

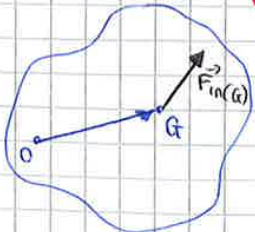
Le due equazioni appena scritte sono equazioni di equilibrio riferite al baricentro ecco perché non compare il momento che la forza di inerzia $\vec{F}_{in\ G}$ dà rispetto al baricentro perché essendo concentrato nel baricentro ha braccio nullo.

Se facciamo l'equilibrio rispetto ad un punto qualsiasi diverso da G :

$$P \neq G \left[\begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \vec{F}_{est\ i} + \vec{F}_{in\ G} = 0 \\ \sum_{i=1}^n \vec{M}_{est\ i\ P} + \vec{M}_{in\ G} + h \wedge \vec{F}_{in\ G} = 0 \end{array} \right]$$

dove h è il braccio che il punto P forma rispetto al baricentro

Equazioni cardinali della dinamica



$$\vec{M}_O = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

$$\vec{M}_O = h \wedge \vec{F}_{in\ G}$$

Nel piano abbiamo tre equazioni scalari:

$$\textcircled{1} \vec{x} \hat{i} \sum_{i=1}^n F_{est\ i\ x} + F_{in\ G\ x} = 0$$

$$\textcircled{2} \vec{y} \hat{j} \sum_{i=1}^n F_{est\ i\ y} + F_{in\ G\ y} = 0$$

$$\textcircled{3} \vec{P} \sum_{i=1}^n M_{est\ i\ P} + M_{in\ G} + h F_{in\ G} = 0$$

Quando G ha una rotazione rigida intorno a O quindi ha un contributo centripeto, che a noi non interessa, e ha contributo tangenziale che dipende da $\dot{\omega}$.

Io devo fare un'equazione di equilibrio sul sistema e quindi scrivo un'equazione di momento rispetto a O

① $\overset{+}{\curvearrowright} \circlearrowleft I_G \dot{\omega} + m \ddot{y}_G (GO) + \dots = 0$ (..) Indica due o solo altri contributi che noi in questo momento siamo trascurando

Anche se faccio l'equazione di momento rispetto a O , i contributi di inerzia rimangono riferiti a G per quanto riguarda il sistema ①

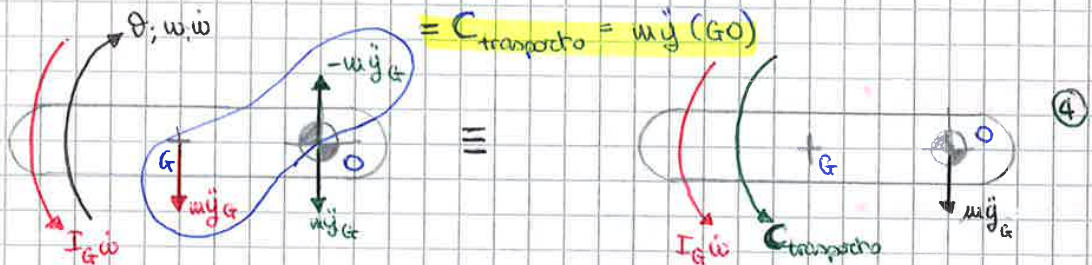
Se io invece considero il sistema ②, dove ho trasportato tutte le forze d'inerzia in O , facendo l'equazione di momento ottengo:

② $\overset{+}{\curvearrowright} \circlearrowleft I_O \dot{\omega} + \dots = 0$ $m \ddot{y}_G$ non ha contributo perché è stata trasportata in O

Un errore molto comune è scrivere: $\overset{+}{\curvearrowright} \circlearrowleft I_O \dot{\omega} + m \ddot{y}_G (GO) + \dots = 0$ NO

In questo modo si conta 2 volte la forza d'inerzia in G .

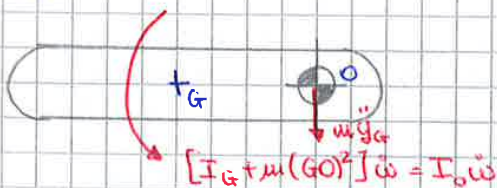
Se voglio riferire tutto al punto O , devo riferire ad O non solo la coppia d'inerzia ma anche la forza d'inerzia, quindi devo trasportare la $m \ddot{y}_G$ in O . Ma per trasportare una forza fuori dalla sua retta di azione bisogna aggiungere il momento di trasporto



Essendo $\ddot{y}_G = \dot{\omega} GO$, la coppia nella coppia di trasporto trova:

$$C_{trasp} = m (\dot{\omega} GO) GO = m (GO)^2 \dot{\omega}$$

Se sommo le due coppie del sistema, ottengo un sistema equivalente che vede la forza d'inerzia applicata in O e la somma dei due contributi di coppia d'inerzia che abbiamo trovato.



Questo sistema è equivalente a ④. Solo in questo modo posso scrivere il momento riferito ad O .

Forza d'inerzia e coppia d'inerzia devono sempre essere riferite allo stesso punto (meglio se riferiamo tutto al baricentro G).

Geometria delle masse

Definiamo baricentro, o centro di massa, un punto geometrico in cui si può considerare concentrata in modo equivalente tutta la massa del corpo.

Consideriamo i seguenti casi:

(a) SISTEMA DISCRETO (nel piano) → masse separate

$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad Y_G = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Momenti di inerzia diametrali

$$I_x = \int_H x^2 dm \quad I_y = \int_H y^2 dm \quad I_x = I_y \text{ per simmetria}$$

Essendo $I_o = \int_H r^2 dm$, se prendo un r generico, e lo posso spezzare in x e in y

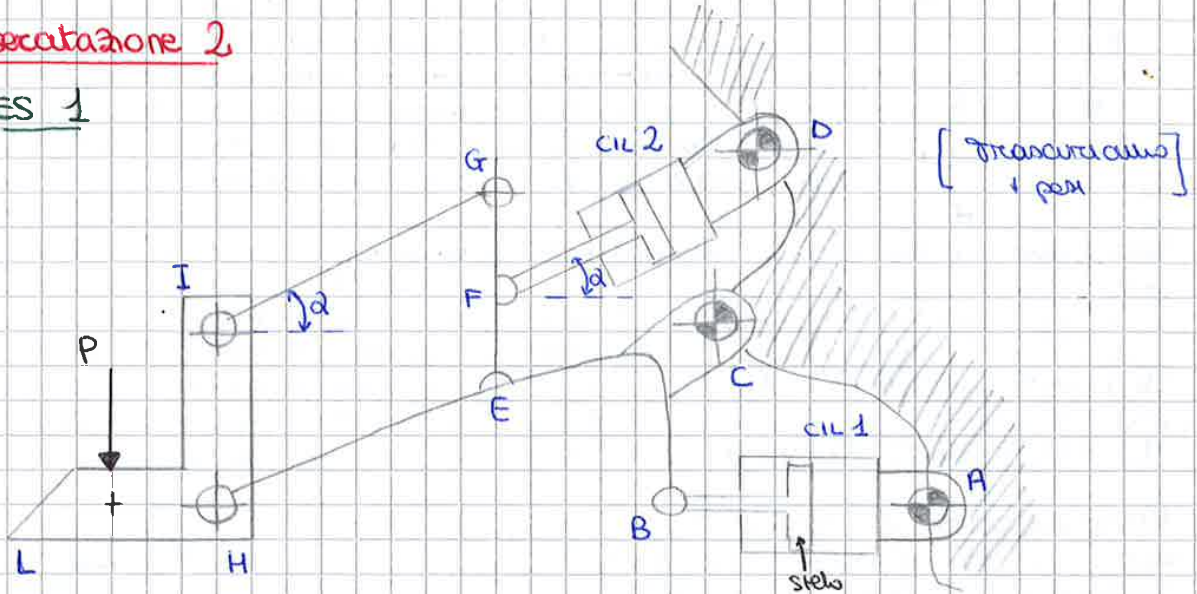
$$I_o = \int_H r^2 dm = \int_H x^2 dm + \int_H y^2 dm = I_x + I_y$$

Poiché I_x e I_y sono uguali per simmetria allora posso scrivere

$$I_x = I_y = \frac{I_o}{2} = \frac{MR^2}{4}$$

Esercitazione 2

ES 1



- HI = EG = 572 mm
- IG = HE = 1066 mm
- BC = 572 mm
- LH = 250 mm
- FE = FG = GE/2 = 286 mm
- $\alpha = 30^\circ$

- $\Phi_1 = 160 \text{ mm}$
- $\Phi_1 = 60 \text{ mm}$
- $\Phi_2 = 120 \text{ mm}$
- $\Phi_2 = 60 \text{ mm}$
- Alesaggi da cilindro
- P = 60000 N

Calcolare le pressioni nei cilindri 1 e 2 della pala caricatrice.

Viene assegnato al quindi dobbiamo analizzare il sistema nel caso statico $\alpha = 30^\circ$. I cilindri 1 e 2 sono (che siano cilindri pneumatici o oleodinamici) dei motori che vengono azionati da valvole e sono costituiti da uno stelo, ovvero la forma a T, uno stantuffo che scorre dentro la camera.

Lo stantuffo percorre con moto rettilineo lungo l'asse del cilindro e la distanza tra le due camere cambia.

I cilindri vengono trattati come ante scorriche

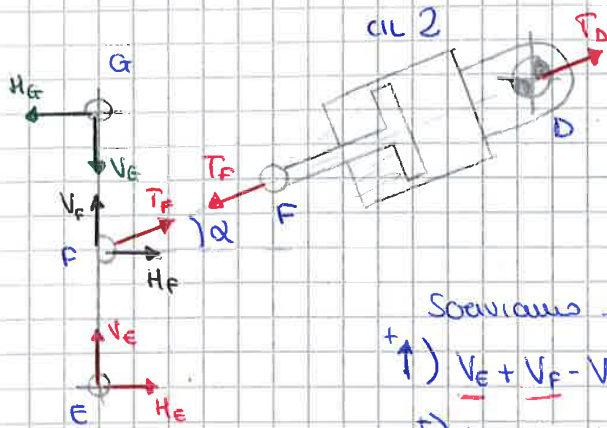
Nel sistema IG è un'asta scarica ma GE non è un'asta poiché la cerniera F è appoggiata all'anta permettendo al cilindro 2 di esercitare una forza in corrispondenza del punto F.

Anche l'asta HB non è un'asta scarica.

La pala è una struttura su cui viene applicato un carico

Poiché ci sono 2 motori, cilindro 1 e cilindro 2 il sistema ha due gradi di libertà: bloccando il cilindro 1, il quadrilatero HIGE archeggiato si piega, per esempio verso sinistra e la pala si flette potendo così scaricare il carico, per azione del cilindro 2, oppure restringo il cilindro 2 e

Pensiamo ora al corpo GFE



La cerniera G è già stata risolta quindi devo prendere delle reazioni vincolari in G uguali e opposte a quelle presenti nel corpo ad esso vincolato. Non avendo mai trattato la cerniera Fe la cerniera E scelgo in modo arbitrario le reazioni vincolari

Scriviamo le eq. di equilibrio per l'asta GFE

$$\begin{aligned} \uparrow \quad & V_E + V_F - V_G = 0 \quad (1) \\ \rightarrow \quad & H_E + H_F - H_G = 0 \quad (2) \\ \curvearrowright \quad & H_G(EG) - H_F(EF) = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Abbiamo di nuovo 3 equazioni ma 4 incognite. Analizziamo quindi il cilindro 2.

Perché in F è collegato un cilindro che è un'asta scarica T_F va lungo la congiungente degli estremi del cilindro. In questo caso F e D sono collegati in modo assiale.

Perché T_F è inclinata di α rispetto all'orizzontale posso scrivere la quarta equazione: $V_F = H_F \tan \alpha$ (4)

$$\begin{aligned} H_F &= 52.148 \text{ N} \\ V_F &= 30.280 \text{ N} \\ V_E &= -15.140 \text{ N} \\ H_E &= -26.224 \text{ N} \end{aligned}$$

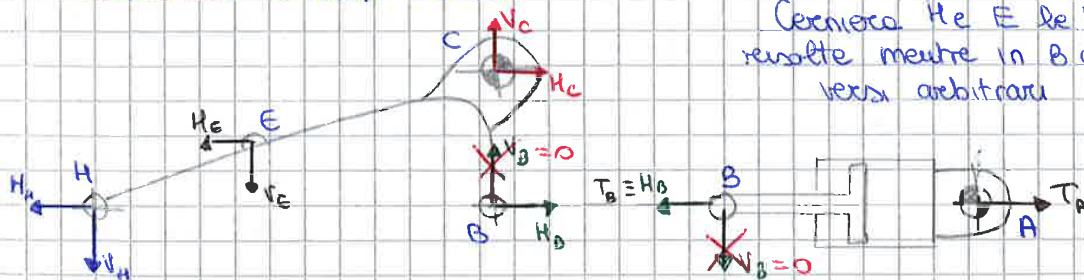
In questo caso la T_F mi serve per analizzare il cilindro quindi la calcolo

$$T_F = \sqrt{H_F^2 + V_F^2} = 60.561 \text{ N}$$

Se il cilindro fosse vincolato nel modo seguente, le reazioni T_z e T_p non si trovano lungo l'asse del cilindro ma lungo la direzione della congiungente le due cerniere a cui è vincolato.



Analizziamo il corpo HECB:



Cerniera He E le ho già risolte mentre in B e in C scelgo versi arbitrari

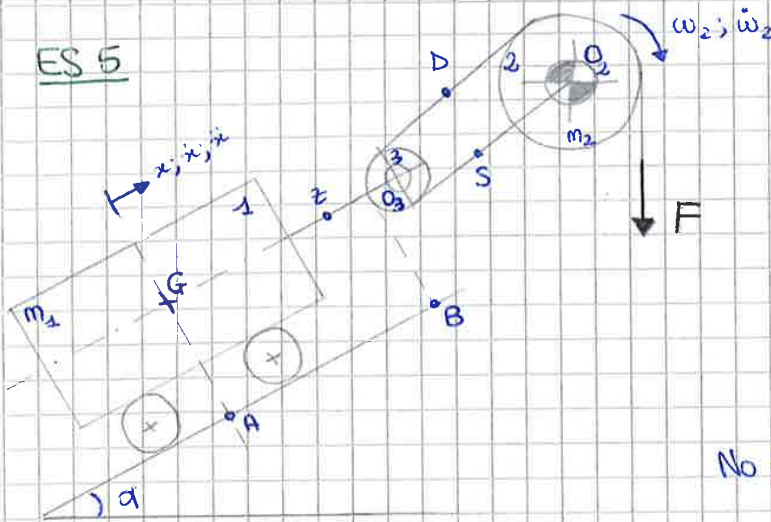
Perché il cilindro è un'asta scarica T_A e T_B sono le uniche forze che devono agire sulla congiungente delle cerniere quindi $V_B = 0$ altrimenti V_B e H_B darebbero una risultante non lungo l'asse e questo andrebbe in contro alla regola dell'asta scarica. Calcolo allora le reazioni vincolari ancora incognite.

$$\begin{aligned} \uparrow \quad & -V_H + V_C - H_C = 0 \\ \rightarrow \quad & -H_H - H_E + H_C + H_B = 0 \\ \curvearrowright \quad & H_B(BC) + V_C(EC \cos \alpha) - H_C(EC \cos \alpha) + V_H(HC \cos \alpha) - H_H(HC \sin \alpha) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_B &= -236.190 \text{ N} \\ V_C &= 29.720 \text{ N} \\ H_C &= 183.742 \text{ N} \end{aligned}$$

26.03.2015

ES 5



- $m_1 = 50 \text{ kg}$
- $m_2 = 4 \text{ kg}$
- $v_A = 0 = \dot{x}_A$
- $\alpha = 30^\circ$
- $AB = 2 \text{ m}$
- $F = 250 \text{ N}$

$\sigma_B ?$

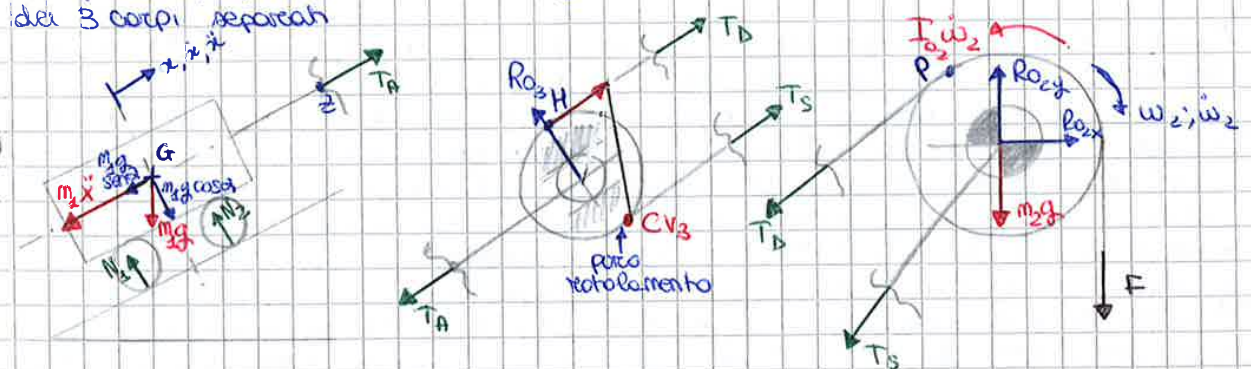
No attriti!

In questo sistema dovremo utilizzare delle equazioni cinematiche per aggiungere delle relazioni alle equazioni di equilibrio come abbiamo fatto in precedenza come ad esempio per l'asta scivola.

Nel sistema abbiamo un carrello di massa m_1 che scivola su un piano inclinato di α . Questo carrello viene movimentato tramite un sistema di carrucole: la puleggia 3 e la puleggia 2. Nella puleggia due viene fornita la massa m_2 mentre della tre non viene fornita la massa quindi si può trascurare. Abbiamo inoltre la forza uscente F esterna che agisce sull'estremità della fune e tramite il sistema di carrucole trascina verso l'alto il carrello, quindi quest'ultimo avrà il suo spostamento x , la sua velocità \dot{x} e accelerazione \ddot{x} diretti verso l'alto mentre la puleggia 2 ruoterà intorno alla cerniera O_2 con velocità ω_2 e accelerazione $\dot{\omega}_2$.

Il sistema parte da fermo e dobbiamo calcolare la velocità che esso raggiunge in B dopo avere percorso $AB = 2 \text{ m}$.

Tracciamo innanzitutto i diagrammi di corpo libero per poter ricavare la velocità v_B mediante le formule del moto uniformemente accelerato dopo avere trovato \dot{x} e \ddot{x} . Nei punti Z, D, S facciamo dei tagli virtuali per poter disegnare i diagrammi dei 3 corpi separati.



Usiamo il metodo analitico che prevede la stesura delle 3 equazioni scalari nel piano e quindi non indico il regime di vettore mentre è obbligatorio utilizzarlo nelle tre regole degli equilibri.

Le forze esterne che conosciamo sono la forza F e il peso delle pulegge, per abbiamo $m_1 \ddot{x}$ che è l'inerzia opposta all'accelerazione del carrello e $I_{O_2} \dot{\omega}_2$ dove $I_{O_2} = \frac{m_2 r_2^2}{2}$ è il momento di inerzia baricentrico del disco 2. Non conosco r_2 ma

solitamente nel momento in cui non ci forniscono un dato di ricorso questo dato durante i passaggi si semplifica. Queste forze sono quelle che vediamo anche nel sistema assemblato.

Quando separiamo le varie parti troviamo le reazioni vincolari con il terreno tra il carrello e il piano inclinato N_1, N_2 . Sul carrello agisce anche la forza legata al fatto che abbiamo tagliato la fune. Quindi quando abbiamo un sistema flessibile e lo mettiamo in trazione, tagliando virtualmente

→ come accelerazione tangenziali: $\ddot{x}_{O_3} = \ddot{x} = \dot{\omega}_3 r_3$
 $\ddot{x}_H = \dot{\omega}_3 (2r_3) = 2\ddot{x}$

Anche in questo caso l'accelerazione in H è il doppio che in O₃
 In un disco l'accelerazione del C₁ va solo lungo il raggio e quindi nella configurazione considerata diventa un'accelerazione due contraria delle centripete, quindi lungo x l'accelerazione del C₁ non ha contributo. A noi interessa che l'accelerazione del punto H due si trova sulla periferia del disco 3 sia pari a 2 volte l'accelerazione del carrello. Sul punto P del corpo 2 l'accelerazione è uguale a quella di H quindi

$\ddot{x}_P = \ddot{x}_H = \dot{\omega}_2 r_2$

→ $\dot{\omega}_2 r_2 = 2\ddot{x}$ (5) equazione che ci permette di legare l'accelerazione del carrello e $\dot{\omega}_2$ della puleggia

Nota un movimento accelerato $\begin{cases} x(t) = \dot{x}_0 t + \frac{1}{2} \ddot{x} t^2 \rightarrow t = \dot{x} / \ddot{x} \\ x(t) = x_0 + \dot{x}_0 t + \frac{1}{2} \ddot{x} t^2 \rightarrow x(t) = \frac{1}{2} \ddot{x} t^2 / \ddot{x} \end{cases}$

→ $\dot{x}_B = \sigma_B = \sqrt{2\ddot{x} x_{AB}}$ (x_{AB} è lo spazio percorso da A a B)

Da (1) + (2)

$\ddot{x} = \frac{2(\frac{T_A}{2}) - m_1 g \text{sen} \alpha}{m_1} = \frac{2(F - I_0 \frac{2\ddot{x}}{r_2^2}) - (m_1 g \text{sen} \alpha)}{m_1}$

Da (4)

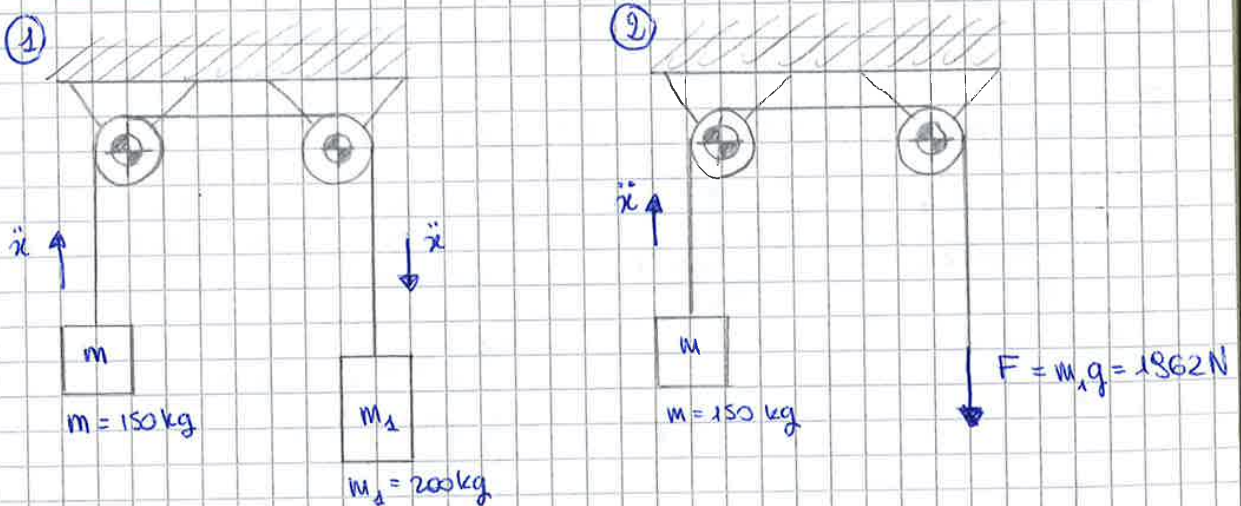
$\frac{T_A}{2} = F - I_0 \frac{\dot{\omega}_2}{r_2}$

$\ddot{x} = \frac{2F - m_1 g \text{sen} \alpha}{m_1 + 4 \frac{I_0}{2}} = 4,69 \text{ m/s}^2$

$\left[m_1 + 4 \frac{I_0}{2} = m_1 + \frac{2I_0}{r_2^2} \left[\frac{m_2 r_2^2}{2} \right] = m_1 + 2m_2 \right]$

Ricavo quindi la σ_B : $\dot{x}_B = \sigma_B = \sqrt{2 \cdot 4,69 \cdot 2} = 4,36 \text{ m/s}$

ES 4



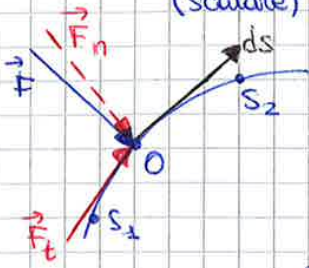
Il sistema (1) è costituito da due pulegge incrociate al telaio (trascorriamo gli attriti) le masse m₁ e m sono collegate alle due pulegge ideali (raggio uguale) tramite una fune ideale. A causa del fatto che m₁ ha massa maggiore rispetto a m, il sistema accelera con la massa m₁ che tende a scendere verso il basso mentre m tende a salire. Nel sistema (2) ho la stessa massa m e una forza F pari a m₁g applicata

Lavoro di una forza \vec{F}

Il lavoro in infinitesimo di una forza \vec{F} che sposta il suo punto di applicazione delle quantità $d\vec{s}$ viene definito come:

$$dL = \vec{F} \times d\vec{s} = F ds \cos \alpha$$

(scalare)



Se lo scriviamo in termini non infinitesimi:

$$L = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \times d\vec{s} \quad [J]$$

La forza \vec{F} può essere scomposta in una componente tangenziale e una componente normale. Essendo il prodotto scalare, l'angolo α e F_t vale zero ma il coseno di zero vale 1.

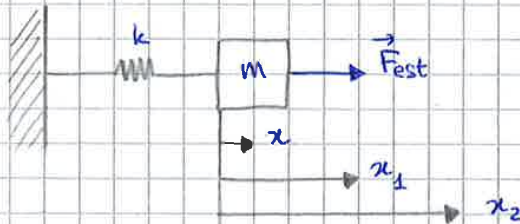
Mentre l'angolo tra F_n e ds è 90° e il prodotto scalare va a zero. Quindi rimane solo la componente tangenziale:

$$dL = F_t ds$$

LAVORO DI UNA COPPIA:

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta \quad \text{dove } M \text{ è una coppia}$$

LAVORO DI UNA MOLLA:



k = rigidità della molla

$$\vec{F}_{molla} = -k \vec{x}$$

La massa m viene spostata dalla distanza x_1 alla distanza x_2 , quindi nasce un diagramma di corpo libero che vede la forza esterna e la forza della molla che viene espressa con $-kx$ essendo opposta al movimento

$$L_{molla} = \int_{x_1}^{x_2} -kx dx = -\frac{1}{2} k (x_2^2 - x_1^2)$$

Il lavoro di una molla è sempre negativo perché la F_{molla} è sempre opposta allo spostamento della massa

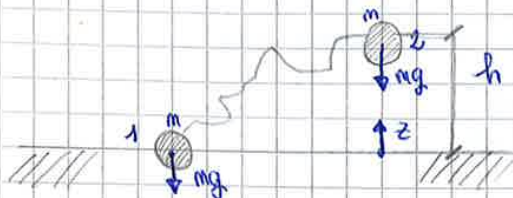
La molla non è un corpo rigido ma un corpo elastico che subisce ogni deformazione. Se la metto in trazione la molla si carica di energia potenziale, cioè ha poi la capacità di richiamare la massa se questa viene lasciata libera, mette sua condizione iniziale.

Quando si deforma un corpo elastico (compressione o trazione), immagazziniamo dell'energia che viene poi restituita quando la molla viene lasciata libera quindi si parla di energia potenziale elastica

ENERGIA POTENZIALE ELASTICA

$$L_{molla} = -\Delta E_{elastica} \quad (\Delta = \text{variazione})$$

LAVORO DELLA FORZA PESO



Abbiamo un corpo di massa m che viene spostato dalla posizione 1 alla posizione 2. La variazione di quota lo chiamiamo h .

Risulta che la somma di tutte le forze esterne è uguale alla derivata rispetto al tempo della quantità di moto.

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{est,i} = \frac{d\vec{S}}{dt} \rightarrow \text{TEOREMA DELLA QUANTITÀ DI MOTO}$$

Se un sistema è isolato (ovvero assenza di forze esterne applicate o $\sum_{i=1}^n \vec{F}_{est,i} = 0$) otteniamo che $\frac{d\vec{S}}{dt} = 0$ che significa che $\vec{S} = \text{costante} \rightarrow \text{TEOREMA DELLA CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO}$

MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO (nel piano) $\vec{K}_G = I_G \vec{\omega}$

Sapendo che la coppia di inerzia è pari a: $\vec{M}_{in,G} = -I_G \vec{\omega} = -I_G \frac{d\vec{\omega}}{dt} = -\frac{d\vec{K}_G}{dt}$

Rispetto al baricentro G abbiamo l'equazione di equilibrio alla rotazione

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_{est,i} + \vec{M}_{in,G} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \vec{M}_{est,i} = -\vec{M}_{in,G} = +\frac{d\vec{K}_G}{dt}$$

Quindi la somma di tutti i momenti esterni rispetto a G è uguale alla derivata del momento della quantità di moto rispetto al tempo

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_{est,i} = \frac{d\vec{K}_G}{dt} \rightarrow \text{TEOREMA DEL MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO}$$

Se in un sistema isolato si ha assenza di momenti esterni applicati allora risulta $\sum_{i=1}^n \vec{M}_{est,i} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{K}_G}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{K}_G = \text{costante} \rightarrow \text{TEOREMA DELLA CONSERVAZIONE DEL MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO}$

ASSI PRINCIPALI DI INERZIA: sono assi caratterizzati dal fatto che il momento di inerzia del corpo rispetto a uno di questi assi è massimo e rispetto ad un altro è minimo. Gli assi principali di inerzia coincidono sempre con assi di simmetria del corpo.

Se gli assi principali di inerzia sono centrati nel baricentro del corpo sono detti assi centrali di inerzia.

Questi assi sono utili perché: il \vec{K}_G , rispetto al baricentro nel moto piano vale $I_G \vec{\omega}$ e in quel caso abbiamo un unico vettore \vec{K} perpendicolare al piano, in un caso generico di un corpo nello spazio, riferito ad una terna centrale d'inerzia, possiamo avere un'espressione semplificata del \vec{K}_G nello spazio

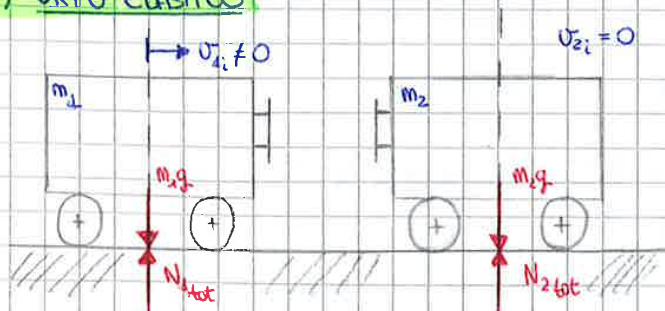
Rispetto a una terna centrale $[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]$ di inerzia si ha:

$$\vec{K}_G = I_x p \vec{i} + I_y q \vec{j} + I_z r \vec{k} \quad \text{dove } I_x, I_y \text{ e } I_z \text{ sono rispettivamente i momenti d'inerzia riferiti agli assi } \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$$

$$\begin{cases} p = \vec{\omega} \times \vec{i} \\ q = \vec{\omega} \times \vec{j} \\ r = \vec{\omega} \times \vec{k} \end{cases} \quad (\text{scalare})$$

URTI (applicazioni del teorema della conservazione della q. di moto) 27.05.2015

(1) URTO ELASTICO

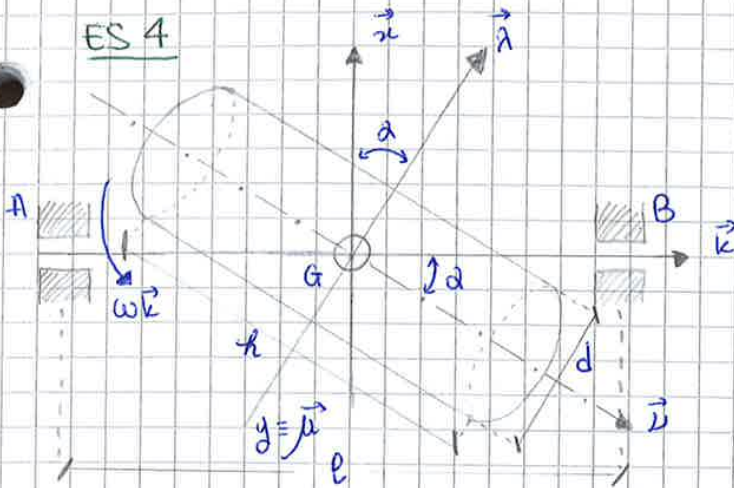


Abbiamo due carrelli ferroviari che si muovono su un piano orizzontale.

Consideriamo le masse m_1 e m_2 e le condizioni iniziali di movimento: v_{1i} diverso da zero e $v_{2i} = 0$.

Esercitazione 3

ES 4



d e ω costanti
 $\alpha = 1^\circ$

$$\omega = \frac{2\pi h}{60} = 157,08 \text{ rad/s}^2$$

$$\omega = \omega \vec{k}$$

$$l = 0,6 \text{ m}$$

$$m = (\pi r^2 h) \rho = 257,6 \text{ kg}$$

$$h = 0,5 \text{ m}$$

$$d = 0,3 \text{ m}$$

$$AG = \frac{l}{2} = 0,3 \text{ m}$$

? azioni d'inerzia

L'asse orizzontale \vec{k} costituisce l'albero attorno al quale gira il cilindro. L'albero è appoggiato su due supporti A e B che sono cuscinetti a sfere che permettono la rotazione dell'albero infatti $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ che indica la rotazione del cilindro. Il cilindro, che è il rotore, ruota come una ruota lungo l'asse \vec{x} mentre \vec{y} e \vec{z} sono assi diametrali lungo i raggi del cilindro. La terna $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$ è solidale con il rotore mentre il sistema di riferimento fisso è $[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]$. Il cilindro è inclinato dell'angolo α rispetto all'asse di rotazione, e durante la rotazione α e ω rimangono costanti. La terna $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$ è una terna centrale di inerzia perché passa per il baricentro G.

In questo sistema dobbiamo calcolare le azioni d'inerzia. Però abbiamo ω costante e sembra un'incongruenza perché le azioni d'inerzia si legano all'accelerazione però non abbiamo ω .

Ricordiamo che esiste l'accelerazione di G normale e centripeta che può essere calcolata come $-\omega^2$ per la distanza del punto dal punto di rotazione. Però nel nostro caso consideriamo tutta la massa concentrata nel baricentro e quindi esiste un'accelerazione centripeta che non dipende da ω ma da ω che nel problema ce l'abbiamo, ma avendo la massa concentrata in G non abbiamo la distanza che serve per calcolare l'accelerazione centripeta: $\vec{a}_G = -\omega^2 (G-G) = 0$

Ma allora anche l'accelerazione centrifuga si annulla: $F_{inG} = -m \vec{a}_G = 0$

Resta però la coppia d'inerzia:

$$\text{Teorema del momento della quantità di moto: } \vec{M}_{inG} = - \frac{d\vec{K}_G}{dt}$$

Però essendo ω costante quindi $\dot{\omega} = 0$ \vec{M}_{inG} esiste perché il sistema sta ruotando attorno ad un'asse che non è centrale d'inerzia!

Quindi affinché \vec{M}_{inG} sia nullo l'asse di rotazione deve coincidere con un'asse centrale d'inerzia.

Essendo $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$ terna centrale d'inerzia allora posso scrivere:

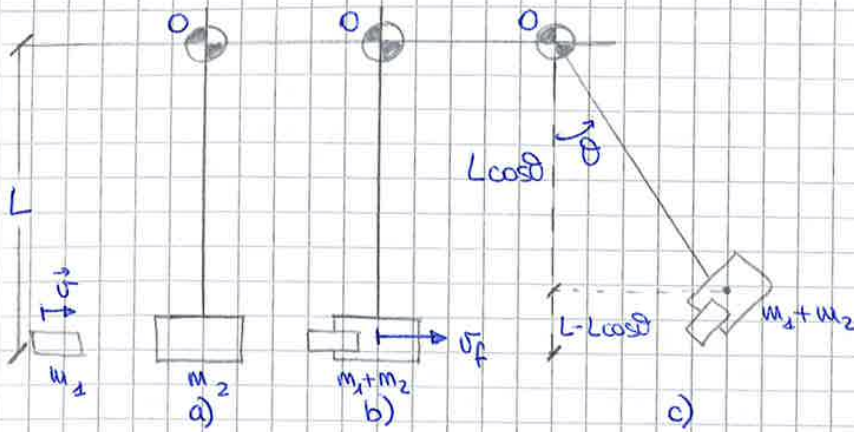
$$K_G = J_x \dot{\phi} \vec{x} + J_y \dot{\phi} \vec{y} + J_z \dot{\phi} \vec{z} \rightarrow J_x = J_y = J_z \text{ per simmetria}$$

$$\text{mentre } I_y = \frac{m r^2}{2} = 3,1 \text{ kg/m}^2$$

$$J = \frac{m}{4} \left[r^2 + \frac{h^2}{3} \right] = 7,3 \text{ kg m}^3$$

Essendo \vec{M}_{inG} legato alla derivata del momento della quantità di moto, dopo che ho trovato K_G , lo derivo rispetto al tempo e trovo \vec{M}_{inG} .

ES 3



$m_1 = 60g$
 $m_2 = 30g$
 $L = 3m$
 $\theta = 15^\circ$
 $? \vec{v}$
 $? \text{Energia persa}$

Questo sistema rappresenta il moto balistico: abbiamo una massa m_2 appesa ad un'asta e viene sparato un proiettile di massa m_1 contro la massa m_2 . Si va a calcolare le velocità delle particelle a seguito dell'urto. In questo caso abbiamo l'angolo θ che indica la massima elongazione di m_1+m_2 in seguito all'urto.

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{est,i} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^n \vec{F}_{est,i} = \frac{d\vec{Q}}{dt} \rightarrow \frac{d\vec{Q}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{Q} = \text{costante}$$

a)-b) $Q_i = Q_f \rightarrow m_1 v = (m_1 + m_2) v_f$

Sia v sia v_f sono incognite.

b)-c) Equazione dell'energia:

$$\cancel{K_{est,i}} + \cancel{K_i} = \Delta E_{an} + \Delta E_{Pg} + \cancel{\Delta E_{Pei}}$$

• $\Delta E_{an} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot 0 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_f^2$ (In c) il sistema è fermo!)

Quindi nell'istante b) ho solo energia cinetica mentre nell'istante c) essendo il sistema fermato $v_f = 0$ allora non ho energia cinetica.

• $\Delta E_{Pg} = (m_1 + m_2) g h - 0$ $h = L - L \cos \theta$

Nell'istante b) avendo $\Delta h = 0$ non ho energia potenziale mentre nell'istante c) ho solo energia potenziale.

$$\rightarrow -\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_f^2 + (m_1 + m_2) g L (1 - \cos \theta) = 0 \quad v_f = \sqrt{2g L (1 - \cos \theta)} = 1,41 m/s$$

Nota v_f calcoliamo v .

$$v = \frac{(m_1 + m_2) v_f}{m_1} = 409,41 \text{ m/s}$$

a)b) Energia persa (caso urto ANELASTICO)

$$\Delta E_{an(b)a)} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_f^2 - \frac{1}{2} m_1 v^2 = -1506f,9 \text{ J}$$

9.04.2015

ATTRITO

Le superfici dei materiali, per tanto che siano lavorate e levigate, non sono mai superfici ideali, quindi esiste sempre un minimo di rugosità, che nel momento in cui i due corpi a contatto entrano in moto relativo produce una resistenza al moto, che dipende dallo stato fisico e dal materiale dei corpi.

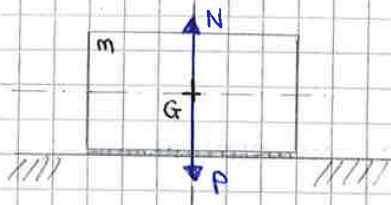
Il fenomeno di attrito NON è lineare.

Quando due corpi entrano in moto relativo tra loro con presenza di attrito si genera una dissipazione di velocità che si trasforma in E_k che si trasforma in calore cambiando così le proprietà dei corpi.

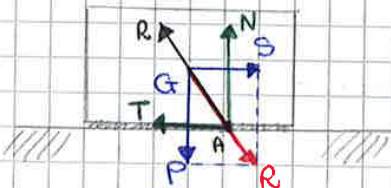
I vari tipi di attrito sono:

- ① ATTRITO DI ADERENZA o STATICO
- ② ATTRITO DI STRISCIAMENTO o RADENTE
- ③ ATTRITO VOLVENTE (legato ai corpi che rotolano)

Attrito di aderenza



Sappiamo di avere una cassa di massa m appoggiata su un piano ed inizialmente ad essa non è applicata nessuna forza esterna. Quindi $N = P$.



Cosa succede se alla stessa cassa m applico una forza S che cerca di muoverla? Le forze S e P sono applicate al baricentro G . La forza S nonostante cerchi di muovere il sistema, il sistema è fermo, $v = 0$. La risultante di S e P la chiamiamo R .

La cassa risponde a queste forze con una forza R uguale e opposta alla risultante delle forze P e S . La R (rossa) si scompone nelle due forze N e T ; T è la componente tangenziale al piano di appoggio diretta in senso opposto a S .

N : componente di R \perp al piano di appoggio

T : componente di R \parallel al piano di appoggio

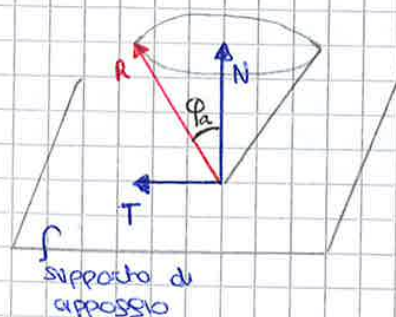
T è opposto ad S \rightarrow T è la FORZA DI ATTRITO

Se aumento S aumenta T . Nel nostro caso S non è tanto grande da mettere in moto la cassa, aumentando S , ad un certo punto le asperità si rompono facendo iniziare il moto della cassa.

Tutto questo fenomeno che precede il moto è detto fenomeno di aderenza.

Modello matematico: $T \leq f_a N$ f_a = coefficiente di aderenza

Modello geometrico:



Se traccio T , N e la loro risultante R , ottengo un coso di generatrice R e con angolo di apertura ϕ_a .

ϕ_a = angolo di aderenza

$$\boxed{\text{tg } \phi_a = f_a} \iff \boxed{\begin{matrix} T = \text{tg } \phi_a N \\ T = f_a N \text{ (in mite)} \end{matrix}}$$

La disuguaglianza di attrito aderente nel modello geometrico corrisponde a una risultante R che deve rimanere all'interno del cono.

Equazioni di equilibrio

$$\begin{aligned} \overset{G}{\curvearrowright} C_H - T r_c - I_G \ddot{\theta} &= 0 \quad (1) \\ + \uparrow N - P &= 0 \quad (2) \\ \rightarrow T - m \ddot{x} &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Sistema di 3 equazioni in 4 incognite. Il ruolo sono sistemi che possono essere dotati di rototraslazione e quindi hanno sia \ddot{x} , sia $\ddot{\theta}$

Per trovare la quarta equazione che lega \ddot{x} e $\ddot{\theta}$ si parte dall'ipotesi di aderenza:

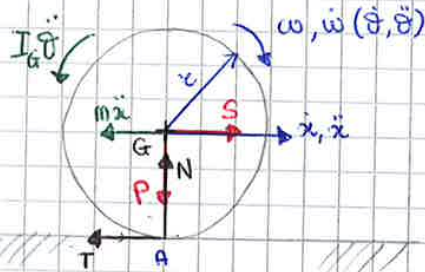
$$\left. \begin{aligned} & \text{Hp aderenza} \\ & \text{puro rotolamento} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} T &= f_a N \\ \ddot{x} &= r_c \ddot{\theta} \quad (4) \\ (A = C_v) \end{aligned}$$

} sotto questa ipotesi il sistema ha 1 grado di libertà

Nella ruota motrice si possono presentare due casi (a seconda dei calcoli numerici)

- Se $T \leq f_a N \rightarrow \ddot{x} = r_c \ddot{\theta}$ (1 GdL)
- Se $T > f_a N \rightarrow$ il sistema striscia quindi \ddot{x} e $\ddot{\theta}$ non sono legate 2 GdL $\rightarrow T = fN$ attrito di strisciamento

RUOTA TRASCINATA



Abbiamo ora la stessa ruota di prima ma in questo caso vi è applicata la forza S di trascinamento della ruota. Le azioni esterne sono P, $I_G \ddot{\theta}$, $m \ddot{x}$, e le azioni di contatto con il terreno N, T, dove T è opposta alla forza di trazione S.

Equazioni di equilibrio

$$\begin{aligned} \overset{G}{\curvearrowright} - I_G \ddot{\theta} + T r_c &= 0 \quad (1) \\ + \uparrow N - P &= 0 \quad (2) \\ \rightarrow S - T - m \ddot{x} &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Abbiamo di nuovo 3 equazioni in 4 incognite. Il sistema si risolve in modo identico a quello della ruota motrice.

$$\text{Hp di aderenza} \quad \left\{ \begin{aligned} T &\leq f_a N \\ \ddot{x} &= r_c \ddot{\theta} \quad (4) \end{aligned} \right. \quad 1 \text{ GdL}$$

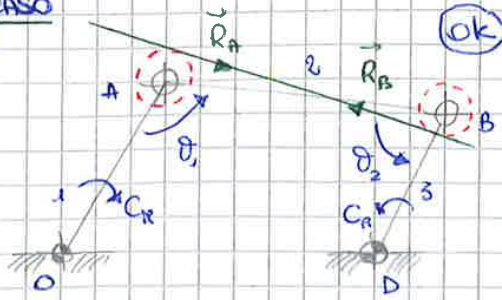
puro rotolamento

Se dai calcoli numerici risulta che $T > f_a N$ il sistema striscia e quindi ha 2 GdL. In questo caso si usa la legge di attrito di strisciamento

ATTRITO AL PERNO

Vediamo l'applicazione dell'attrito di aderenza e di strisciamento al vincolo delle cerniere. Fin'ora abbiamo considerato solo vincoli ideali. Consideriamo quindi una cerniera, ovvero il vincolo che permette solo rotazione, come quello che si trova nella ruota della bicicletta, quindi c'è un perno con una pedale che si muove lungo il cerchio e all'interno della cerniera, con un certo gioco, ruota il perno di centro O, il cui è soggetto ad un certa velocità angolare ω e a una coppia motrice C_r . Chiamiamo r_c il raggio del perno. Applichiamo nel sistema il carico F, carico applicato al perno.

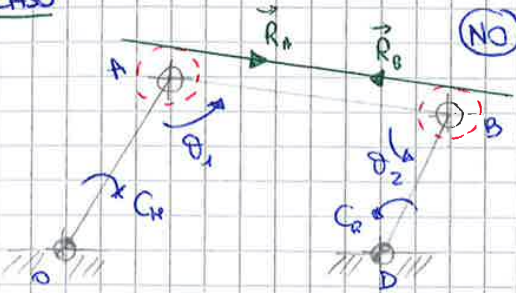
1° CASO



Sul corpo 2, essendo un'asta scorrevole, R_A ed R_B sono uguali e opposte e sono tangenti al cerchio di attrito al punto.

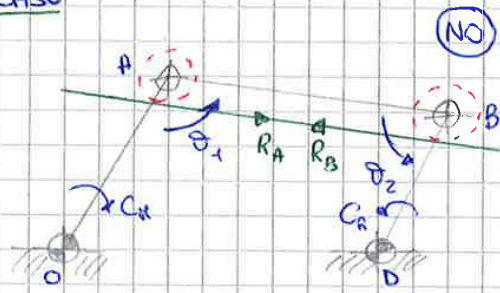
R_A, R_B sono anche opposte alla rotazione, rispettivamente a θ_1, θ_2 . Quindi questo è il caso giusto! Però vediamo anche gli altri casi

2° CASO



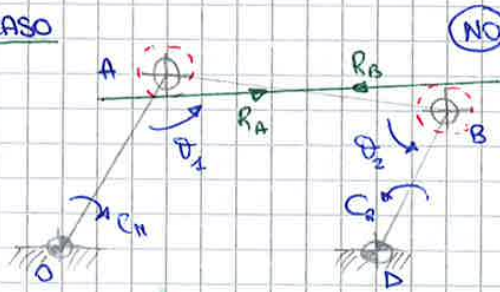
Anche in questo caso R_A, R_B rispettano le proprietà dell'asta scorrevole e sono tg al cerchio di attrito ma R_B non è opposta a θ_2 quindi R_B e θ_2 non rispettano la condizione dell'attrito al punto che dice che R_B deve essere opposta a ω

3° CASO



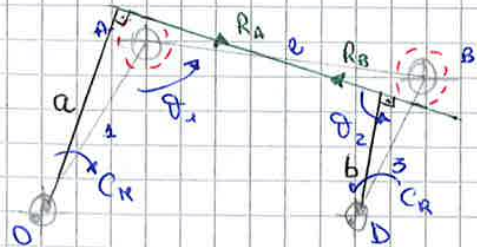
Questo caso non va bene perché R_B è opposta a ω ma R_A è concorde con θ_1 .

4° CASO



Questo caso vede entrambe le reazioni vincolari R_A, R_B concordi con ω (θ_1, θ_2)

Quindi l'unico caso corretto è il primo. Sofferamoci sul 1° caso.



Il moto si trasmette dal corpo 1 al corpo 3. Quindi il corpo 1 riceve un'azione C_R maggiore rispetto alle C_R del corpo 3

Il braccio a di R_A in presenza di attrito al punto è maggiore che senza attrito quindi aumenta la distanza da O

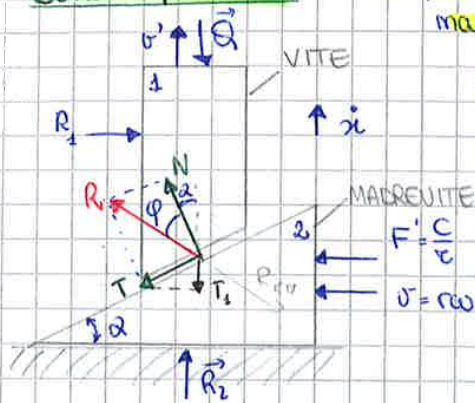
Nel corpo 3 la R_B ha verso uguale e opposto a ω . Il braccio b rispetto a O è più piccolo che senza l'attrito

Se voglio studiare il sistema vite madrevite con un'elica devo fare dei tratti lungo la superficie di contatto tra vite e madrevite. Però visto che l'elica può essere sviluppata sul piano che diventa una retta inclinata di α sull'orizzontale



Per studiare il sistema vite madrevite con un profilo rettangolare si usa un metodo equivalente: **CUNEI EQUIVALENTI**

Cunei equivalenti: trasformo la vite in un cono superiore 1 e la madrevite nel cono 2.



Considero vincoli senza attrito. Mettano le azioni esterne che agiscono sul sistema unitario. Il corpo 2 viene fatto traslare da destra verso sinistra quindi la velocità angolare diventa una velocità equivalente $v = \omega r$ e anche la coppia diventa $F = \frac{C}{r}$. Essendo vincoli senza attrito allora significa che ho solo la componente verticale N mentre la tangenziale T di attrito la trascuro.

Faccio il diagramma di corpo libero della vite.

Tra vite e madrevite nascono le forze di attrito T, N, R . Il verso di T lo prendo a caso, non so a priori se è giusto o no. Per determinare se è giusto, progetto la T scelta sull'asse della vite ed effettivamente ottengo una T_2 rivolta verso il basso ed opposta a v . Parlando di attrito di strisciamento ottengo che: $T = fN$, $\tan \varphi = f$. Viene trascurata la massa della vite. La madrevite ha una forza uterina R uguale e opposta alla R della vite per il principio di azione e reazione. Il nostro compito è dimensionare il sistema quindi dato il carico Q , devo calcolare la coppia motrice C sulla madrevite.

corpo 1

$$\begin{aligned} \uparrow & -Q + R \cos(\alpha + \varphi) = 0 \quad \leftarrow 1 \\ \rightarrow & -R \sin(\alpha + \varphi) + R_1 = 0 \end{aligned}$$

le equazioni che ci interessano sono quelle che contengono i carichi Q e F perché devo legare la forza F al carico Q

corpo 2

$$\begin{aligned} \rightarrow & +R \sin(\alpha + \varphi) - F = 0 \quad \leftarrow 2 \\ \uparrow & -R \cos(\alpha + \varphi) + R_2 = 0 \end{aligned}$$

Faccio il rapporto tra l'equazione 1 e l'equazione 2:

$$\frac{Q}{F} = \frac{R \cos(\alpha + \varphi)}{R \sin(\alpha + \varphi)} = \frac{1}{\tan(\alpha + \varphi)} \rightarrow F = Q \tan(\alpha + \varphi) = \frac{C}{r} \Rightarrow \boxed{C = Q r \tan(\alpha + \varphi)}$$

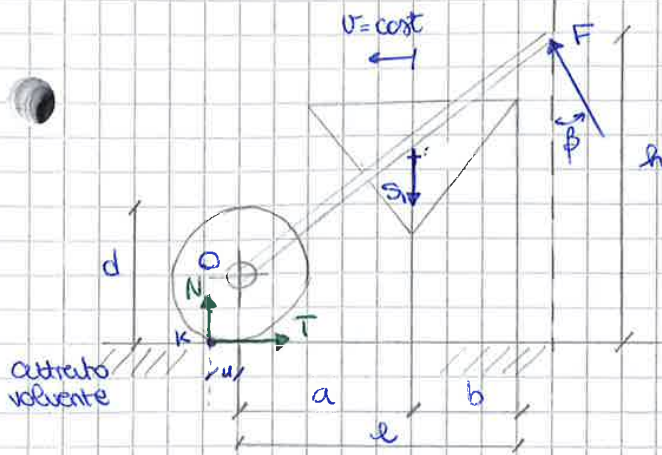
C è la coppia che applico alla madrevite per movimentare un carico Q .

Rendimento del sistema

$$\eta = \frac{P_u \text{ (Potenza utile)}}{P_m \text{ (Potenza media)}} = \frac{Q v'}{C \omega} = \frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha + \varphi)} \quad \begin{aligned} \omega &= \frac{v}{r} \\ F &= \frac{C}{r} \end{aligned}$$

Perché c'è un piano inclinato allora possiamo dire che mentre la madrevite si muove di dx , la vite si muove di dy .

ES 4



- $m_2 = 80 \text{ kg}$
- $Q = m_2 \cdot g = 784,7 \text{ N}$
- $u = 10 \text{ mm}$
- $d_p = 50 \text{ mm}$
- $f = 0,2$
- $l = 1,2 \text{ m}$
- perno O $\left\{ \begin{array}{l} d_p = 50 \text{ mm} \\ f_p = 0,2 \\ l = 1,2 \text{ m} \end{array} \right.$
- $a = 0,7 \text{ m}$
- $b = 0,5 \text{ m}$
- $h = 0,9 \text{ m}$

Trovare F, β ?

Si come c'è l'attrito al perno bisogna lavorare separando il vincolo altrimenti non riusciamo a visualizzare la reazione vincolare. L'attrito al perno lavora sulla reazione vincolare alla cerniera quindi si considera la R_0 risultante non R_x e R_y . Nel momento che c'è attrito volvente, devo spostare in avanti N nel senso del moto.

Equazioni di equilibrio del sistema assemblato.

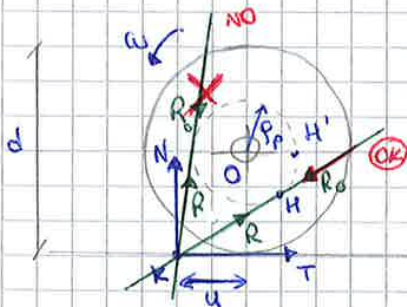
$$\uparrow N - Q + F \cos \beta = 0 \quad (1)$$

$$\rightarrow T - F \sin \beta = 0 \quad (2)$$

$$\curvearrowright -Q(a+u) + F \cos \beta (l+u) + F \sin \beta (h) = 0 \quad (3)$$

3 equazioni in 4 incognite

La quarta equazione la ricaviamo facendo il diagramma di corpo libero sulla ruota, poiché ci forniscono f_p del perno.



$$r_p = r_p \sin \phi_p = 0,00294 \text{ (raggio cerchio di attrito)}$$

$$\phi_p = 11,3^\circ$$

$$\phi_p = \arctg(f_p)$$

Non avendo la massa del perno non possiamo indicarci la P

Dobbiamo fare ora 2 considerazioni: a quale forze risultanti è soggetto il perno?

La retta d'azione delle forze al perno deve essere tangente al cerchio di attrito al perno e passante per K .

La R è la risultante tra N e T , R_0 deve essere uguale e opposta a R per rispettare l'equilibrio del corpo e deve essere opposta ad ω quindi non considero la tangente superiore.

$$\curvearrowright N(u + r_p) = T \frac{d}{2} \quad (4)$$

$$\tan \beta = \frac{(l-a)(u+r_p)}{2(a+u) - h(u+r_p)} = 0,0496 \Rightarrow \beta = 2,84^\circ$$

$$F = Q \frac{(a+u)}{\cos \beta (l+u) + \sin \beta (h)} = 444,66 \text{ N}$$

16.04.2015

FRENI & FRIZIONI

Freni e frizioni sono basati sull'attrito. L'attrito non è solo dissipazione dell'energia ma può avere un ruolo utile in molte applicazioni: le cinghie per esempio permettono la trasmissione del moto (Attrito di Aderenza) nei freni invece permette la dissipazione dell'energia trasformandola in calore permettendo la fermata di un mezzo o autoveicolo. Freni servono per la trasmissione del moto e costituiscono un sistema di sicurezza, sono costituiti da due dischi in contatto tra loro. Il contatto non è puntuiforme ma si parla di contatti estesi.

CONTATTI ESTESI: tra i due freni vi è un'intera superficie in contatto con un'altra e in questi casi occorre conoscere la distribuzione delle pressioni nella zona di contatto.

$$N = \int_A p dA \quad (\text{come una carrucola appoggiata su un piano}); \quad T = f N$$

Quindi noi dobbiamo conoscere la distribuzione delle pressioni nella zona di contatto per poter risalire alla N e alla T tramite il diagramma di corpo libero (nei freni c'è sempre attrito di strisciamento)

Ci sono due ipotesi comunemente considerate:

- (a) Hp della pressione uniforme ($p = \text{cost}$)
- (b) Hp dell'usura o di Reye

Enunciato dell'Hp dell'usura: il volume di materiale asportato nell'unità di tempo per usura è proporzionale al lavoro fatto dalle forze di attrito nella stessa unità di tempo

$$dV = \int dA \delta \quad \text{dove } \delta = \frac{dh}{dt} \text{ è l'usura del materiale nell'unità di tempo, } \delta = \text{spessore materiale asportato}$$

Essendo dV proporzionale alle forze di attrito allora posso scrivere:

$$dV = k dT \frac{dS}{dt} = k dT v_{rel} = k (f p dA) v_{rel} \quad \text{dove } f p dA = dT$$

$$\rightarrow \int dA = k f p v_{rel} \rightarrow \delta = k f p v_{rel} \quad p = \text{pressione di contatto}$$

TIPICI FRENO

- (1) Freni a pattino ad accostamento rigido
- (2) Freni a pattino ad accostamento libero
- (3) Freni a tamburo ad accostamento rigido
- (4) Freni a tamburo ad accostamento libero
- (5) Freni a disco ad accostamento rigido
- (6) Freni a nastro

Sono le tipologie base di freni che trattiamo ma esistono altri tipi di freni

TIPICI FRIZIONI

- (1) Frizione piana
- (2) Frizione piana a dischi multipli
- (3) Frizione conica

Se da A tracciamo una retta troviamo una distribuzione trapezoidale di usura. Questo si riceve perché sappiamo che $N = \int p dA$ e $T = \int fN$ allora nel baricentro della distribuzione trapezoidale troviamo la componente. Nel punto trovato p e N sono.



Se nostro ha le effettive forze T, N perché è quello che si muove.

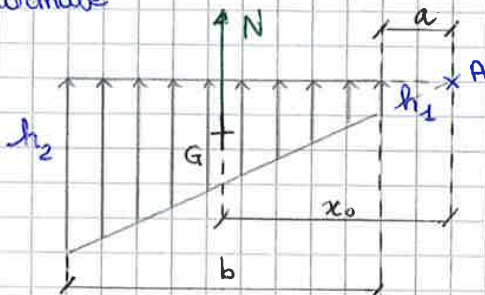
Sul disegno principale le forze T e N sono disegnate per il principio di azione e reazione. La risultante di N e f è R .

Il pattino quindi risulta soggetto ai due forze uguali e opposte di R, R_0 che devono formare una coppia uguale e opposta a C . Quindi facendo l'equilibrio attorno ad O .

1) $C = R d$, $|\vec{R}_0| = |\vec{R}|$, $\vec{R}_0 \parallel \vec{R}$ → In termini di risultanti

2) $C + T h - N x_0 = 0$ → In termini di componenti

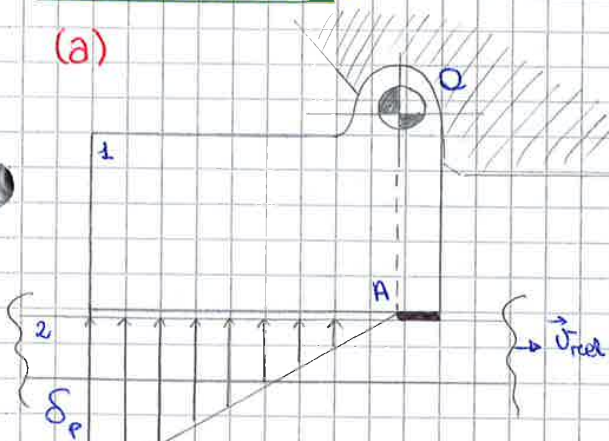
Abbiamo la distribuzione trapezoidale di usura proporzionale alle pressioni, nel baricentro della distribuzione, che ha ascissa x_0 rispetto a O , abbiamo le forze N e T la cui risultante R è inclinata dell'angolo φ rispetto alla normale.



$$x_0 = \frac{2}{3} \frac{(a+b)^3 - a^3}{(a+b)^2 - a^2}$$

CASI PARTICOLARI

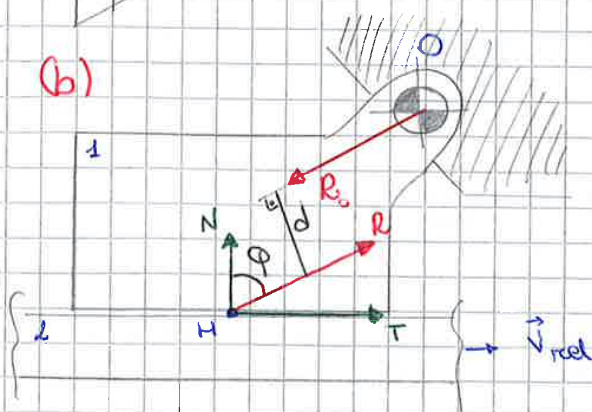
(a)



In questa configurazione il punto A si trova all'interno dell'area a contatto e quindi risulta un diagramma delle pressioni o dell'usura triangolare.

Si chiama **PATTINO PARZIALIZZATO** perché la superficie in nero non lavora.

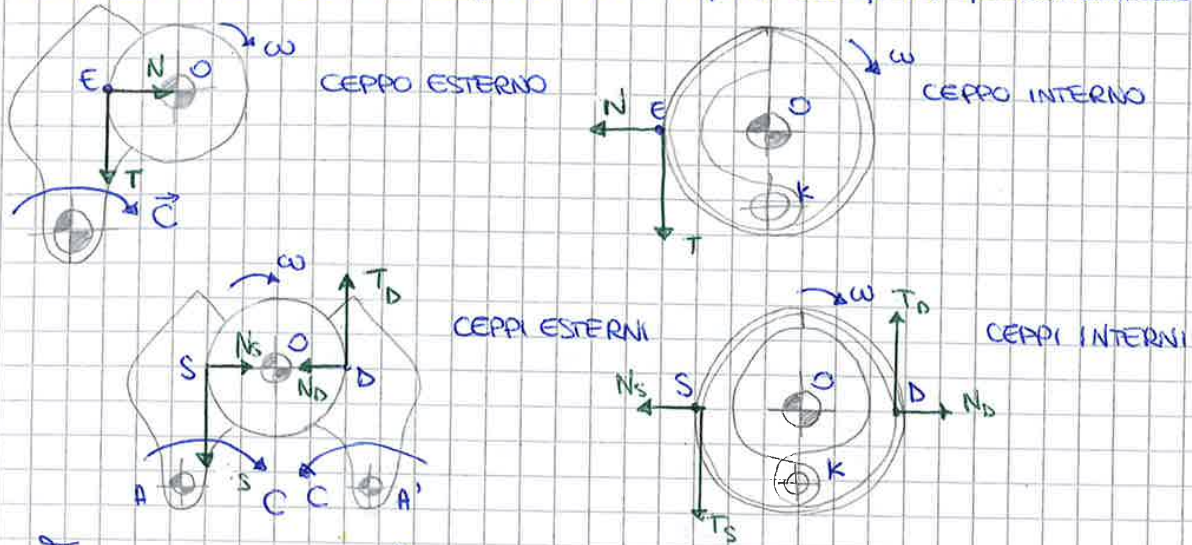
(b)



AUTOIMPUNTAMENTO: In questo caso non riceve la coppia C perché giocando anche solo sui materiali a contatto, quindi nell'angolo φ di attrito di strisciamento potrebbe essere che R inclinata di φ rispetto a N passi sotto la cerniera O e non sopra. In tal modo R e R_0 formano una coppia in grado di autoimpuntare il sistema senza la presenza di C . (utilizzato nei freni d'emergenza)

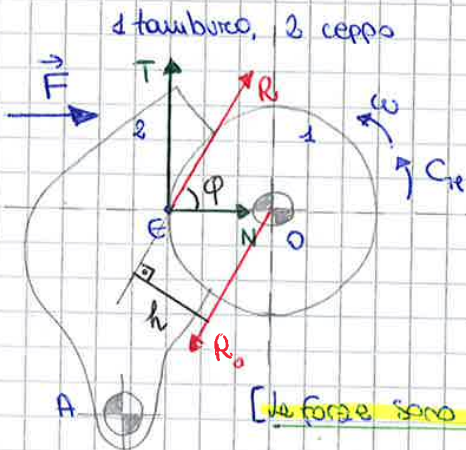
Freni a tamburo

I freni a tamburo sono sempre costruiti da un disco incenterato in una cerniera centrale fissa e sono gli organi da frenare. I tamburi sono dotati di velocità angolare ω e si parte da questo per determinare T



Tutti questi tipi di freno a tamburo disegnati sono ad accostamento rapido.

Freni a tamburo ad accostamento rapido

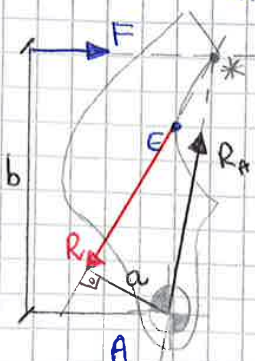


La forza F preme il ceppo sul tamburo a cui è applicata una coppia motrice C_M . Non applico il hp dell'usura, ma facciamo un'approssimazione. **Hp** concentrare N e T nel punto E, mezzercia della zona di contatto tra ceppo e tamburo e prendiamo T tangente al tamburo nel punto E. **R**, risultante di N e T è inclinata di ϕ rispetto alla normale N. **[Le forze sono riferite al tamburo]**

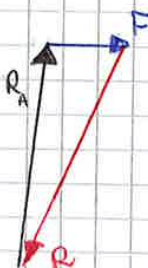
Faccendo l'equilibrio di momento attorno a O trovo:

$$C_M = R h \text{ dove } |\vec{R}| = |\vec{R}_0|, |\vec{R}| \neq |\vec{R}_0|$$

DGL del ceppo:



3° regola degli equilibri: avendo R e F, R_A deve passare per il punto di stella di incontro tra R e F



$$A) \quad Fb - Ra = 0$$

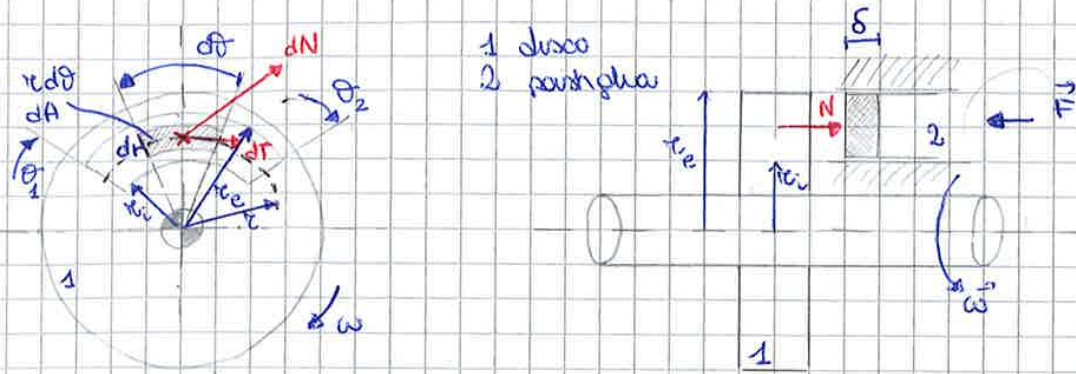
$$T = fN$$

$$R = \frac{T}{\sin \phi}$$

$$F + R + R_A = 0$$

17.04.2015

Freno a disco ad accostamento rigido



Questo tipo di freno è usato in campo automobilistico
 Il disco è l'elemento che ruota e che deve essere fermato.
 La pastiglia è l'elemento che può solo traslare quindi premuta da una forza F contro il disco
 δ è lo spessore di materiale asportato dalla pastiglia nell'unità di tempo e si considera costante

La pastiglia in una vista frontale è un settore circolare di raggio interno r_i e raggio esterno r_e e l'area che ci serve è data da $r_e d\theta dr$ → $dA = r dr d\theta$

In questo caso possiamo utilizzare il'ipotesi dell'uniforme:

$$dN = \delta p dA = k f p dA v_{rel} = k f p dA \omega \cdot r$$

$$\frac{dA}{\text{cost}} = \frac{k f p dA \omega r}{\text{cost}} \quad r \text{ non è costante perché variaz tra } r_i \text{ e } r_e \quad r_i \leq r \leq r_e$$

Quindi la legge delle pressioni di contatto è $p = \frac{k'}{r}$

Si deve ora calcolare l'espressione del momento frenante.

Se si isola la pastiglia si evidenzia la componente N perpendicolare al disco (come quando si ha la cassa su un piano)

$$F = N = \int_A p dA = \int_{r_i}^{r_e} \frac{k'}{r} r dr d\theta = \int_{r_i}^{r_e} k' dr \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta$$

$$\rightarrow F = k' (\theta_2 - \theta_1) (r_e - r_i)$$

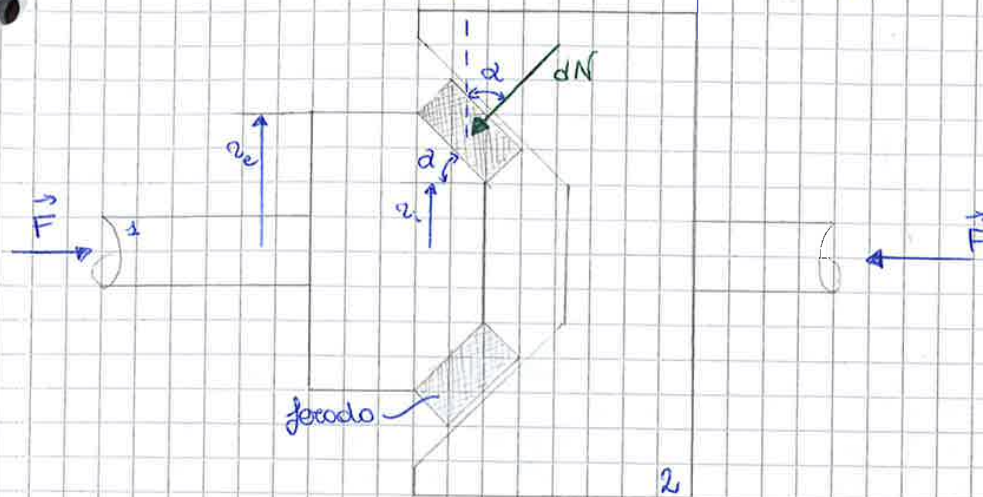
MOMENTO FRENANTE : $M_{fren} = \int_A r dT = \int_A r (f p dA) = \int_A r \left[f \frac{k'}{r} r dr d\theta \right] =$
 $= \int_{r_i}^{r_e} f k' r dr \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = f k' \frac{(r_e - r_i)^2}{2} (\theta_2 - \theta_1) = \frac{f k' (\theta_2 - \theta_1) (r_e - r_i)^2}{2}$
 $\frac{F}{2}$

$M_{frenante} = f F \left(\frac{r_e + r_i}{2} \right)$

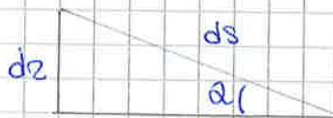
Questa espressione mi permette di calcolare il momento frenante in funzione della FORZA DI AZIONAMENTO

Frizione conica

Questo tipo di frizione rappresenta un altro modo di aumentare il momento trasmesso cambiando però radicalmente la geometria.



Questo è un modello molto semplificato. In questo caso se parlo di cono: abbiamo il cono 1 che nella frizione piana corrisponde al piatto 1 che riporta il forodo su una superficie conica inclinata dell'angolo α rispetto all'orizzontale (in alcuni esercizi l'angolo α è l'angolo di inclinazione rispetto alla verticale quindi si scambiano \sin e \cos). La superficie di contatto diventa un piano inclinato ds inclinato dell'angolo α rispetto all'orizzontale quindi dN , forza che nasce dalle pressioni di contatto e' a sua volta inclinata dell'angolo α rispetto alla verticale.



$$dA = 2\pi r ds = 2\pi r \frac{dz}{\sin \alpha}$$

$$z_i \leq r \leq z_e$$

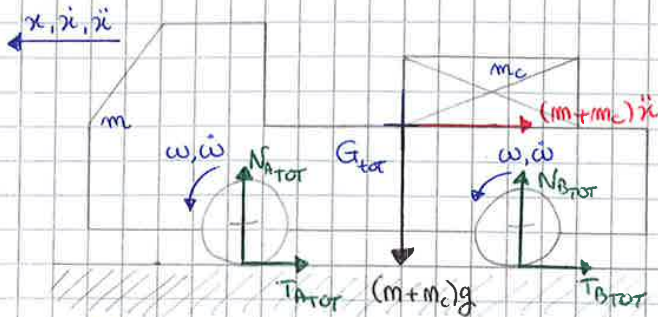
$$M_{\text{frizione conica}} = \left(\frac{f}{\sin \alpha} \right) F \left(\frac{r_e - r_i}{2} \right) \quad F = \text{forza di serraggio}$$

Il fattore $\frac{f}{\sin \alpha}$ porta ad un aumento del momento trasmesso dalla frizione

Quindi la frizione conica trasmette momento maggiore ma è più compatta, cioè riduce gli ingombri rispetto alla frizione piana a dischi multipli. Essa però richiede costi di produzione maggiori.

L'angolo α non può essere molto piccolo perché in fase di inserimento nascono delle forze tangenziali di attrito, che non sono quelle che trasmettono il moto ma sono solo quelle di inserimento di un cono dentro e' altro, e questo riguarda sia l'innesco che il disinnesco della frizione. Quindi per avere un disinnesto immediato è necessario che l'angolo α non sia troppo piccolo.

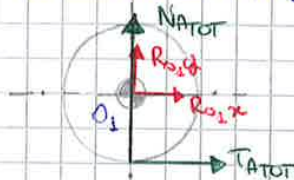
de forze scorriate generano un momento frenante sul tamburo perché è proprio premendo il ceppo contro il tamburo si riesce a fermare il veicolo. Quindi T_s e T_o producono il momento frenante. Se dal diagramma di corpo libero del sistema totale riesco a ricavare il valore delle coppie frenanti delle ruote posteriori posso ottenere informazioni in più sul freno.



Non avendo la massa delle ruote non si considera né il peso né l'inerzia. Avendo l'auto con due ruote anteriori e due ruote posteriori si parla di N_{ATOT} , T_{ATOT} , N_{BTOT} , T_{BTOT} .

$$\begin{aligned} \rightarrow & (m + m_c) \ddot{x} + T_{ATOT} + T_{BTOT} = 0 \quad (*) \\ \uparrow & N_{ATOT} + N_{BTOT} - (m + m_c)g = 0 \end{aligned}$$

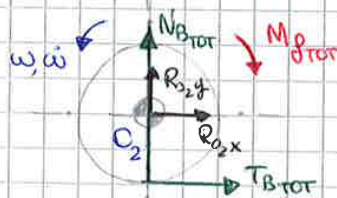
Facciamo il diagramma di corpo libero delle ruote anteriori (trascurando la massa).



$$\overset{+}{\curvearrowleft} O_1 \quad T_{ATOT} \cdot \frac{d}{2} = 0 \rightarrow T_{ATOT} = 0$$

Non ci sono coppie esterne applicate, non c'è attrito al perno o attrito volante, non c'è inerzia.

Diagramma di corpo libero delle ruote posteriori (trascurando la massa).



Momento frenante totale (riferito entrambe le ruote)

$$\overset{+}{\curvearrowleft} O_2 \quad M_{fTOT} - T_{BTOT} \cdot \frac{d}{2} = 0$$

Però noi vogliamo il momento frenante su una ruota

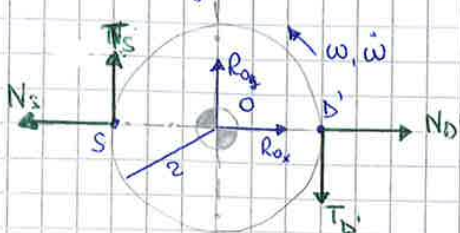
$$\rightarrow M_{frenante \text{ 1 ruota}} = \frac{M_{frenante \text{ TOT}}}{2} = T_{BTOT} \cdot \frac{d}{4}$$

Sostituisco i valori trovati tramite i DCL delle due ruote in (*)

$$T_{BTOT} = -(m + m_c) \ddot{x}$$

$$M_{frenante \text{ 1 ruota}} = -(m + m_c) \ddot{x} \cdot \frac{d}{4} = 2400 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Adesso facciamo il DCL del tamburo:

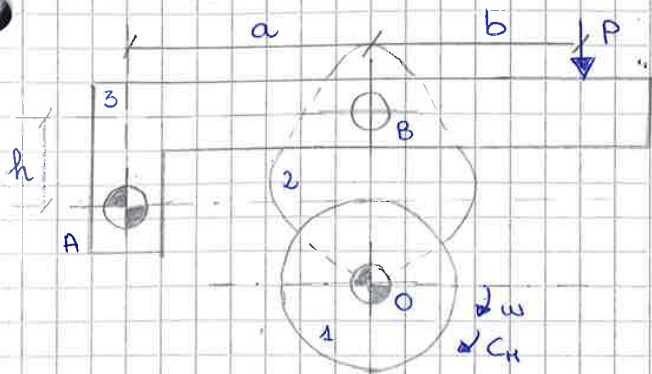


Partiamo dalle azioni tangenziali di attrito di strisciamento perché devono essere opposte a ω però sono diverse tra loro. Per studiare il freno parto dall'elemento in moto!

Non aggiungo $M_{frenante}$ nel DCL del tamburo perché è già presente sul tamburo ed è dato dalle azioni tangenziali T_s, T_D' .

Esercizi

Freno a ceppi ad accostamento libero

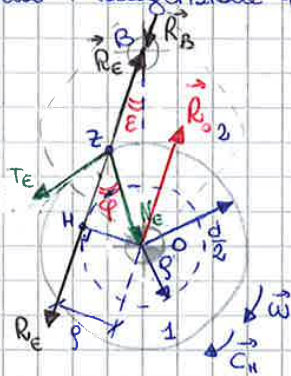


(Si trascurano i pesi)

- $P = 98,1 \text{ N}$
- $f = 0,4$
- $d_a = 0,6$
- $a = 15 \text{ cm}$
- $b = 30 \text{ cm}$
- $d = 22 \text{ cm}$ (diametro tamburo)
- $h = 5 \text{ cm}$
- $(\omega = \text{cost}) \quad ? C_H, R_A, R_O, R_B$

1 tamburo, 2 ceppo, 3 leva su cui è applicato un carico P
 Calcolare la coppia motrice C_H per mantenere il sistema a velocità costante e le reazioni vincolari in O, A, B

Diagramma di corpo libero del tamburo: nel caso dei freni si deve frenare perché essendo in movimento ci fornisce il verso corretto della T tangenziale opposta a ω .



Si costruisce il raggio del cerchio di attrito al perno

$$z = 2 \sin \varphi = \text{raggio di attrito al perno}$$

$$\varphi = \arctg f = 21,8^\circ$$

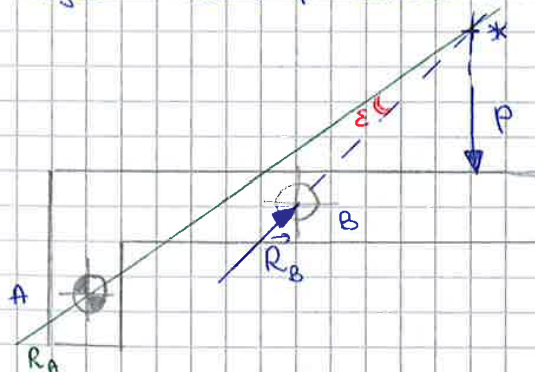
$$z = 0,041 \text{ m}$$

$$z = \frac{d}{2}$$

R_E è la reazione di attrito al perno opposta a ω e tangente al cerchio di attrito.

R_B è uguale e opposta a R_E per l'equilibrio sul ceppo.

Diagramma di corpo libero della leva:



R_B uguale e opposta alla R_E sul ceppo.

$$\triangle BOH: f = \tan \varepsilon = BO \sin \varepsilon \rightarrow \varepsilon = 14,8^\circ$$

$$BO = h + \frac{d}{2} = 0,16 \text{ m}$$

Sul tamburo:

$$\sum \tau = C_H - R_E z = 0$$

$$C_H = 13,71 \text{ N}$$

Sul ceppo:

$$|\vec{R}_E| = |\vec{R}_B| \rightarrow R_E = 334,43 \text{ N}$$

Sulla leva:

$$\sum \tau = P(a+b) + (R_B \sin \varepsilon)h - (R_B \cos \varepsilon)b = 0$$

$$\rightarrow R_B = 334,43 \text{ N}$$

Spazio di frenata: $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \ddot{x} t^2$
 partito da uno spazio nullo

Nota $t_{f2} \rightarrow x^* = 46,31 \text{ m}$

Equilibrio del cavello:

$\uparrow^+ R_1 + R_2 + N - P = 0$

$\rightarrow^+ T + m \ddot{x} = 0 \quad T = -m \ddot{x} = -(1500)(-3) = 4500 \text{ N}$

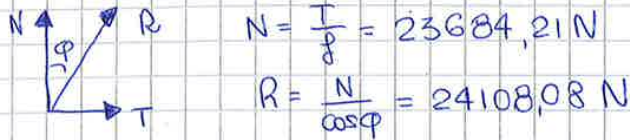
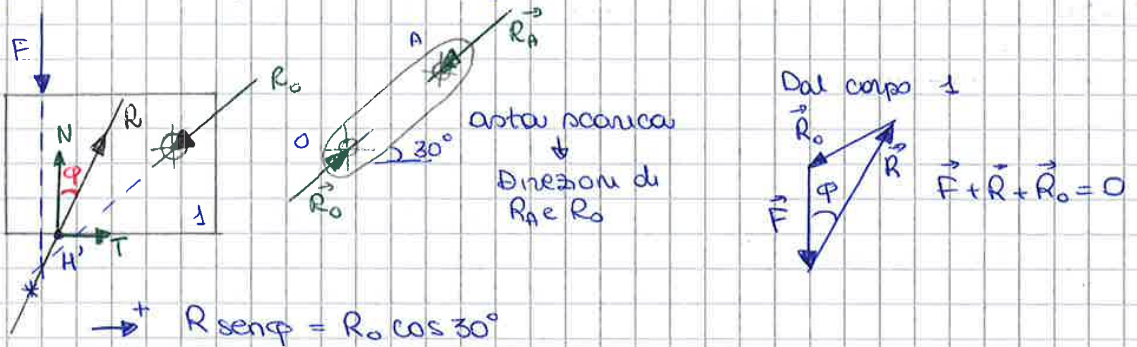


Diagramma di corpo libero del freno:

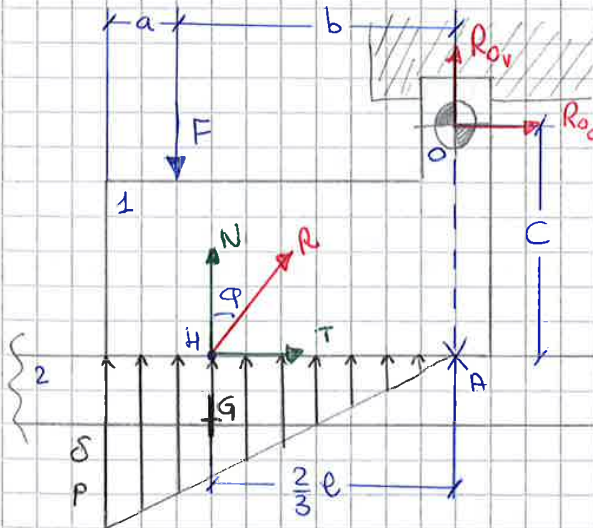


$\rightarrow^+ R \sin \varphi = R_0 \cos 30^\circ$

$\uparrow^+ -F + R \cos \varphi - R_0 \sin 30^\circ = 0 \rightarrow F = 21085,63 \text{ N}$

$R_0 = R \frac{\sin \varphi}{\cos 30^\circ} = 5197,31 \text{ N}$

Freno a patino ad accostamento rigido



- $a = 50 \text{ mm}$
- $b = 175 \text{ mm}$
- $C = 75 \text{ mm}$
- $\mu = 0,1$
- $F = 500 \text{ N}$

$l = a + b = 225 \text{ mm}$
 $\frac{2}{3} l = d = 150 \text{ mm}$

Calcolare T e R_0

Distribuzione triangolare delle pressioni.

Equilibrio del patino

$\rightarrow^+ T + R_{0o} = 0 \quad (1)$

$\uparrow^+ N - F + R_{0v} = 0 \quad (2)$

$\circlearrowleft Fb - Nd + TC = 0 \quad (3)$

$T = \mu N \quad (4)$

$T = 61,4 \text{ N}$

$N = 614 \text{ N}$

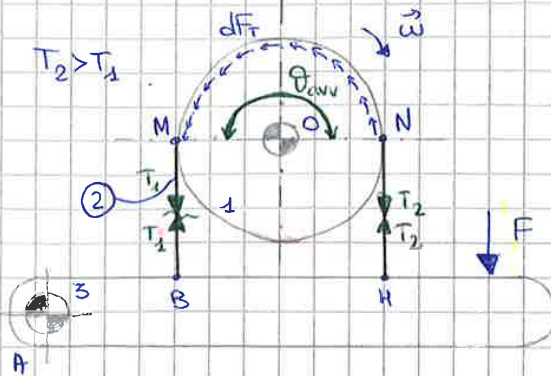
$R_{0v} = 114 \text{ N}$

$R_{0o} = 61,4 \text{ N}$

$R_0 = \sqrt{R_{0o}^2 + R_{0v}^2} = 129,48 \text{ N}$

24.04.2015

FRENO A NASTRO



- 1: tamburo
- 2: nastro (flessibile)
- 3: leva.

Se tamburo 1 viene avvolto dal nastro 2, in genere di natura metallica la cui parte interna, quella rivolta verso il tamburo ha un alto coefficiente di attrito. Il nastro viene vincolato alla leva 3 in B e H, uccernizzata in A.

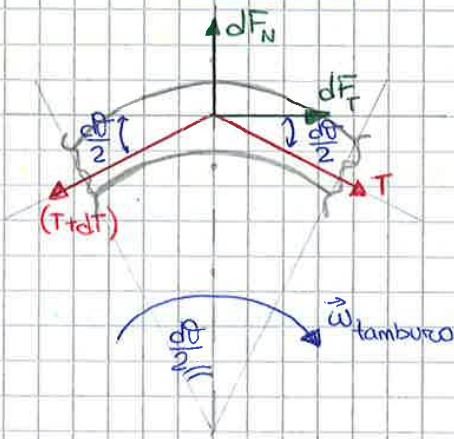
Nella configurazione rappresentata, l'angolo di avvolgimento del nastro copre tutto l'arco MN.

Se carichiamo la leva 3 tramite una forza F che viene fatta ruotare attorno ad A, il nastro viene serrato sul tamburo e si generano delle forze tangenziali di attrito di strisciamento opposte al moto del tamburo dF che rallentano e frenano il tamburo.

Il nastro lavora solo a trazione, quindi tagliando virtualmente il nastro vediamo azioni che escono dal mancone che abbiamo tagliato.

Chiamiamo T_1 e T_2 le tensioni sviluppate dai nastro e notiamo che T_2 , avendo la tensione che si oppone a ω è quella maggiore.

Equazioni del flessibile



Isoliamo un tratto di nastro infinitesimo. Poiché il nastro si avvolge sul tamburo abbiamo un angolo infinitesimo $d\theta$ di semiapertura del tratto di nastro.

Tra nastro e tamburo vengono scambiate forze di attrito di strisciamento.

dF_f e dF_N sono opposte al moto sul tamburo quindi per il principio di azione e reazione sul nastro dF_f e dF_N sono uguali e opposte a quelle sul tamburo.

La tensione T è un'azione interna al flessibile. Essendo su un tratto infinitesimo, la tensione sul nastro opposta a ω sarà maggiore quindi la indichiamo con $(T+dT)$

Equazioni di equilibrio sul nastro:

$$\rightarrow^+ dF_f + T \cos \frac{d\theta}{2} - (T+dT) \cos \frac{d\theta}{2} = 0 \quad (1)$$

$$\uparrow^+ dF_N + T \sin \frac{d\theta}{2} - (T+dT) \sin \frac{d\theta}{2} = 0 \quad (2)$$

$$dF_f = \int dF_N \quad (3) \text{ equazione di attrito di strisciamento.}$$

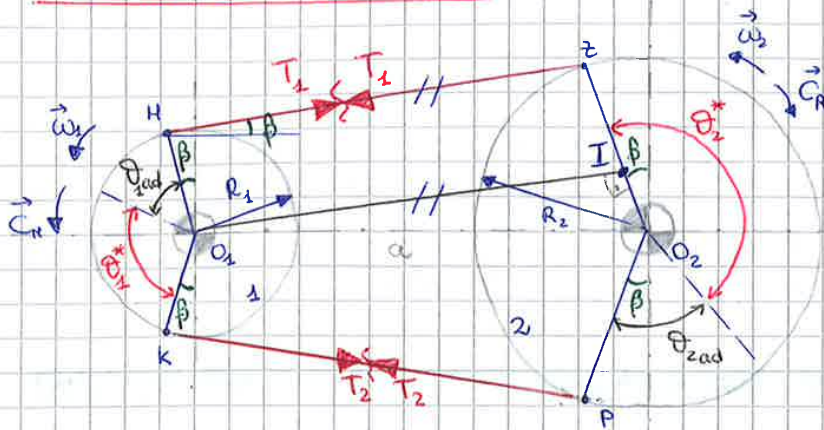
L'angolo $d\theta$ è un angolo infinitesimo $\rightarrow \sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}$, $\cos \frac{d\theta}{2} \approx 1$

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore

$$dF_f + T - T - dT = 0 \quad (1)$$

$$dF_N - T \frac{d\theta}{2} - T \frac{d\theta}{2} - \cancel{\frac{dT d\theta}{2}} = 0 \quad (2) \text{ infinitesimo di ordine superiore}$$

TRASMISSIONE A CINGHIA



- 1: puleggia motrice
- 2: puleggia condotta
- $\theta_{ad,1,2}$: angolo di aderenza sulla puleggia 1,2
- $\theta_{sl,1,2}^*$: angolo di scivolamento sulla puleggia 1,2

$T_1 > T_2$

La cinghia (piana o trapezia) preleva il moto dalla puleggia motrice e lo trasmette alla puleggia condotta

① $\theta_{avv_1}(HK) = \theta_{ad_1} + \theta_{sl_1}^*$, $\theta_{avv_1} = \pi - 2\beta$

② $\theta_{avv_2}(PZ) = \theta_{ad_2} + \theta_{sl_2}^*$, $\theta_{avv_2} = \pi + 2\beta$

L'angolo di aderenza precede sempre l'angolo di strisciamento nel senso del moto

Per costruzione $HZ \parallel O_1I$

In $\triangle O_1O_2I$: $IO_2 = O_1O_2 \sin\beta$ { $IO_2 = R_2 - R_1 = O_2Z - IZ$
{ $O_1O_2 = a$

$\rightarrow (R_2 - R_1) = a \sin\beta$, $\beta = \arcsin \left[\frac{R_2 - R_1}{a} \right]$

Equazione dei flessibili sulle cinghie

$\frac{T_1 - qv^2}{T_2 - qv^2} = e^{f\theta^*}$

v = velocità della cinghia
 q = massa per unità di lunghezza della cinghia

(f) se cinghia trapezia)

A numerazione si deve sempre essere la tensione maggiore. Se non ci viene fornito il termine q , dobbiamo trascurare qv^2 ricadendo così nell'equazione dei flessibili nel caso del freno a nastro.

$v = v_0 \left(1 + \frac{T}{ES} \right)$

v_0 = velocità cinghia a tensione nulla (ideale)
 E = modulo elastico
 S = sezione trasversale della cinghia

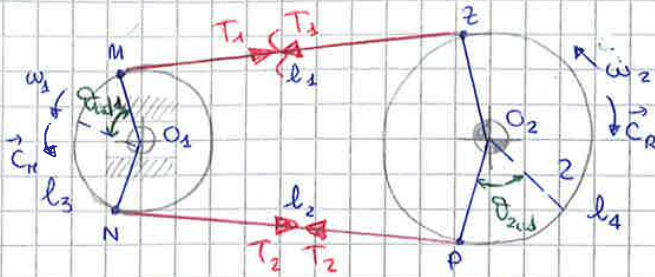
Rendimento di una trasmissione a cinghie

$\eta = \frac{P_u}{P_e} = \frac{C_R \omega_2}{C_H \omega_1}$ $C_R = (T_1 - T_2)R_2$ $\rightarrow \eta = \frac{(T_1 - T_2)R_2 \omega_2}{(T_1 - T_2)R_1 \omega_1} = \frac{R_2 \omega_2}{R_1 \omega_1}$

Nel tratto dove viene trasmesso il moto, la cinghia assume la stessa velocità della puleggia

$\rightarrow \eta = \frac{v_2}{v_1}$ $v_2 = R_2 \omega_2$ $\rightarrow \eta = \frac{v_0 \left(1 + \frac{T_2}{ES} \right)}{v_0 \left(1 + \frac{T_1}{ES} \right)}$
 $v_1 = R_1 \omega_1$

FORZAMENTO INIZIALE

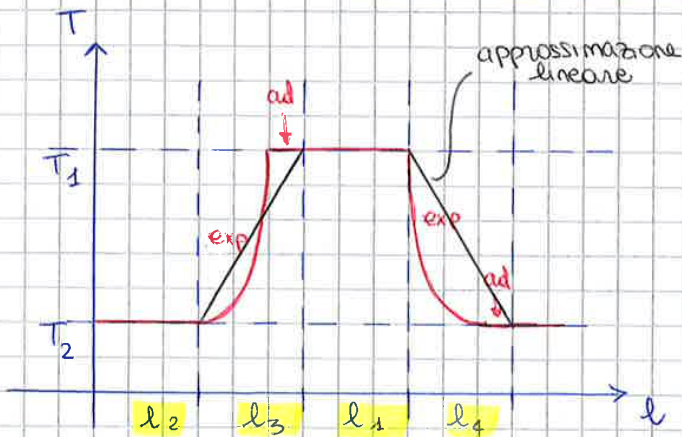


l_3, l_4 sono gli archi di avvolgimento

$$T_1 > T_2$$

Allontanando O_1 da O_2 si può mettere in tensione la cinghia. Questo sistema è obbligatorio per le cinghie trapezoidali poiché data la loro geometria bisogna per forza avere la possibilità di avvicinamento le due pulegge per montare la cinghia.

Diagramma dell'andamento delle tensioni lungo la cinghia



l_2 : agisce solo la tensione T_2
 l_3 : la tensione sale con andamento esponenziale da T_2 a T_1 secondo l'equazione dei flessibili, sempre in l_3 c'è anche un tratto di aderenza.

l_1 : agisce solo la tensione T_1
 l_4 : la tensione scende in modo esponenziale da T_1 a T_2 e poi c'è il tratto di aderenza.

I tratti esponenziali sono quelli che rappresentano l'equazione dei flessibili. I tratti esponenziali possono essere approssimati con un andamento lineare.

$$T_0 = \frac{T_1 + T_2}{2} \quad \text{Tensione di forzamento iniziale}$$

FUNI

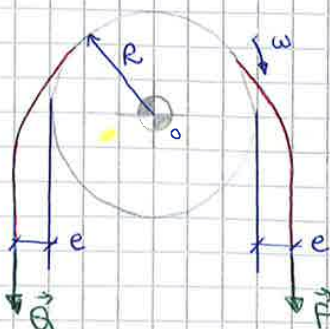
- (1) TREFOLI: più fili avvolti a elica
- (2) FUNI A PIÙ TREFOLI: più trefoli avvolti a elica. Le funi a più trefoli hanno maggiore resistenza.



} Funi metalliche

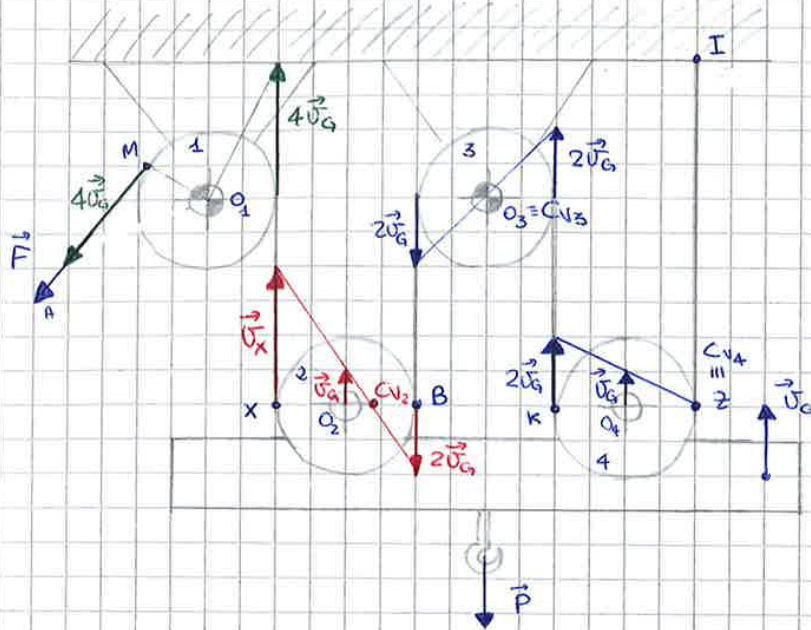
Rigidità della fune

- (1) Rigidità elastica (e): legata all'incapacità di flessibilità della fune.



Quando nei dati degli esercizi ho la rigidità elastica "e" della fune, rispetto al caso ideale, in cui si ha il tratto perfettamente verticale della fune, mi scosto in ingresso e in uscita della rigidità "e".

PARANCI DI SOLLEVAMENTO



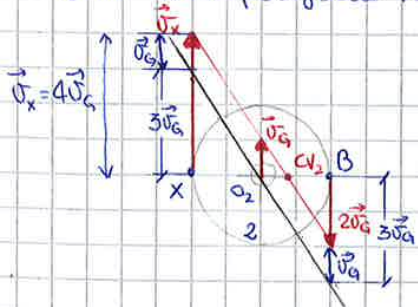
Hp: - carrucole con attrito al perno e rigide sulle fune e e_1, e_2
 - carrucole con ρ_c uguale tra loro

- 1,3 pulegge a centro fisso
- 2,4 pulegge a centro mobile

Le pulegge 2 e 4 sono avvolte dalla fune e agganciate alla trave orizzontale che si chiama bozzello a cui è agganciato il carico P. Se applico una forza \vec{F} nel punto A di trazione, faccio avvolgere la fune sulle pulegge e il bozzello insieme alle pulegge 2 e 4 tende verso l'alto con una velocità \vec{v}_g .

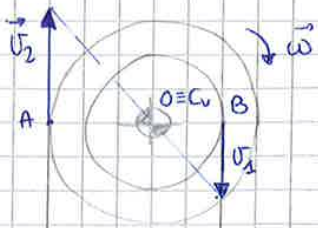
(3) ANALISI CINEMATICA:

- La puleggia 4 è collegata al ramo di fune IZ fisso. Tirando con la forza \vec{F} , la puleggia rotola senza slittare sulla parte fissa IZ facendo salire il bozzello. Sul punto z abbiamo quindi la condizione di punto rotolamento $\rightarrow z \equiv C_{v4}$. Il centro della puleggia 4 si muove con la stessa velocità \vec{v}_g del bozzello. Abbiamo quindi una distribuzione lineare di velocità fatta rispetto al C_{v4} (punto a velocità nullo) per cui il punto k si muove con velocità $2\vec{v}_g$ essendo lontano dal C_{v4} $2r$ (diametro).
- La velocità $2\vec{v}_g$ si trasmette inalterata alla puleggia 3 che essendo a centro fisso ha $O_3 \equiv C_{v3}$. Abbiamo qui una distribuzione lineare di velocità simmetrica rispetto al centro. Quindi sia in ingresso sia in uscita la puleggia 3 ha velocità $2\vec{v}_g$.
- Nel punto B della puleggia 2 la velocità è $2\vec{v}_g$, in O_2 la velocità è uguale a quella del bozzello \vec{v}_g mentre la velocità d'uscita è \vec{v}_x . Il C_{v2} non è né sulla periferia né sul centro. Per calcolare \vec{v}_x non è necessario calcolare la posizione di C_{v2} . Traccio una retta parallela alla distribuzione reale di velocità passante per il centro O_2 trasladando quindi delle quantità \vec{v}_g . In questo modo la velocità di ingresso vale $3\vec{v}_g$. Essendo la distribuzione trasladata simmetrica rispetto a O_2 anche la velocità d'uscita dal punto x è $3\vec{v}_g$. Avendo trasladato la distribuzione di velocità di una quantità \vec{v}_g , la velocità \vec{v}_x sarà uguale a $4\vec{v}_g$.



- la velocità $4\vec{v}_g$ si trasmette inalterata alla puleggia 1. Essendo la puleggia 1 a centro fisso, la velocità in uscita sarà di nuovo $4\vec{v}_g$ nel punto M
- $\rightarrow \vec{v}_A = n \vec{v}_g$, $n =$ numero rami di fune agganciati al bozzello.

• Calcolo v_s :



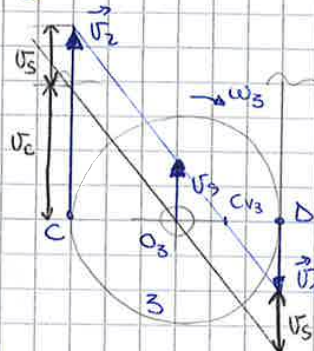
$$v_1 = \omega \frac{d}{2} = 0,628 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \omega \frac{D}{2} = 0,785 \text{ m/s}$$

$$\begin{cases} v_c = v_2 - v_s \\ v_d = v_1 + v_s \end{cases}$$

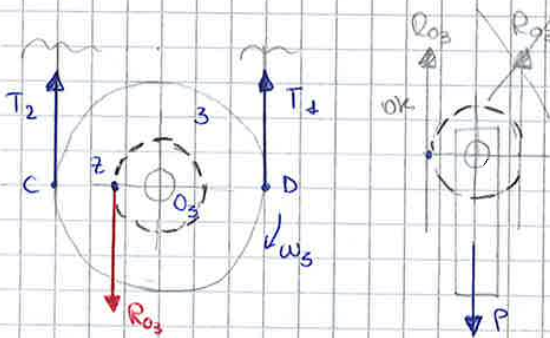
$$\rightarrow v_d = v_c \Rightarrow v_1 + v_s = v_2 - v_s$$

$$v_s = \frac{v_2 - v_1}{2} = 0,0785 \text{ m/s}$$



perché essendo la distribuzione piana per il centro le due velocità devono essere uguali perché simmetriche al O_3

• Equilibrio:



Per analizzare l'equilibrio della puleggia 3 bisogna separarla dalla leva a cui è applicato il carico P per evidenziare il cerchio al perno. La reazione vincolare del cerchio al perno deve essere una forza verticale opposta a P e diretta verso l'alto, però ci sono due possibili R_{03} . Dal tamburo però vediamo che essendo che R_{03} deve essere anche opposta a ω_s e opposta a T_1 e T_2

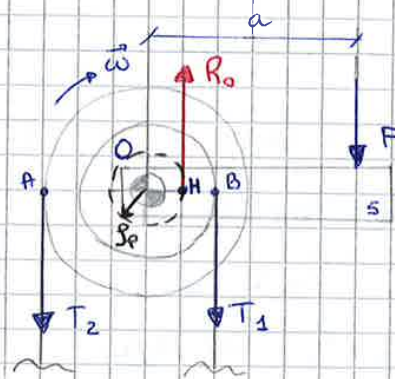
$$\uparrow^+ T_1 + T_2 = P \quad \uparrow^+ P = R_{03}$$

$$\text{D)} \quad -T_2(d_3) + R_{03} \left(\frac{d_3}{2} + p_p \right) = 0$$

$$T_1 = 2365 \text{ N}$$

$$T_2 = 2539 \text{ N}$$

In questo caso la leva S non la separiamo dalla puleggia perché è incernierata ad essa e quindi formano un corpo unico. La reazione R_0 dell'attacco al perno sarà quindi tg al cerchio di attacco al perno, opposta a ω e opposta a T_1 e T_2 .



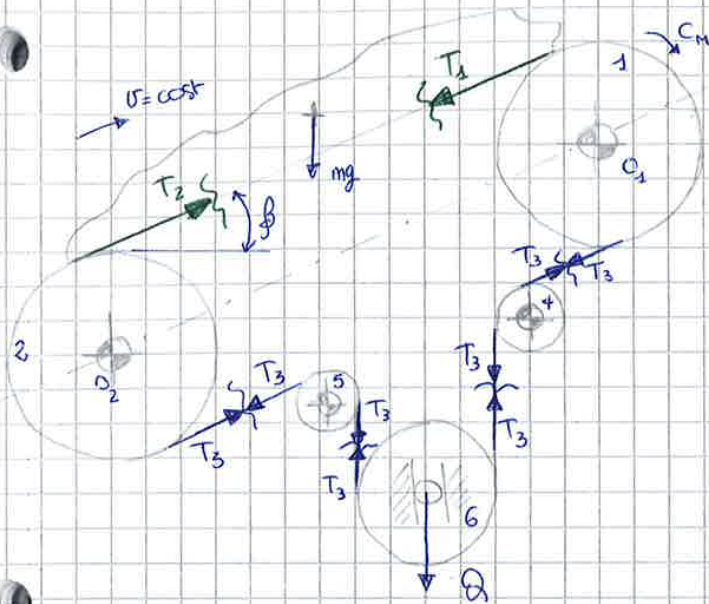
$$\text{H)} \quad -F(a - p_p) - T_1 \left(\frac{d}{2} - p_p \right) + T_2 \left(\frac{D}{2} + p_p \right) = 0$$

$$F = \frac{T_2 \left(\frac{D}{2} + p_p \right) - T_1 \left(\frac{d}{2} - p_p \right)}{(a - p_p)} = 407,93 \text{ N}$$

Rendimento del sistema

$$\eta = \frac{P_u}{P_e} = \frac{P v_s}{(F a) \omega} = 0,6 \quad [F a = \text{coppia motrice}]$$

NASTRO TRASPORTATORE



$$m = \rho L = 400 \text{ kg}$$

$$\vartheta_{1avv} = 200^\circ = 3,49 \text{ rad}$$

$$d = 0,4$$

$$v = 1,5 \text{ m/s}$$

$$d = 0,6 \text{ m}$$

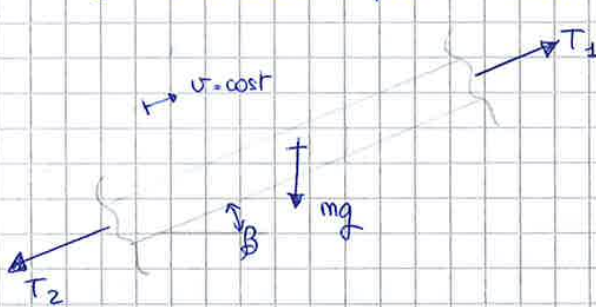
$$L = 20 \text{ m}$$

$$\beta = 12^\circ$$

$$? P_{M1}$$

$$? \vartheta_{MIN}$$

$T_1 \neq T_2$ perché in mezzo è presente il peso mg
 $T_2 = T_3$ perché si può trascurare C_R



$$T_1 - T_2 - mg \sin \beta = 0$$

$$\textcircled{1} (T_1 - T_2) = mg \sin \beta = 815,84 \text{ N}$$

$$P_u = (mg \sin \beta) v = 1223,77 \text{ W}$$

$$C_R = 0 \rightarrow \text{no attriti}$$

$$\Rightarrow P_M = P_u = 1223,77 \text{ W}$$

Il ϑ minimo è il peso minimo da applicare alla puleggia 6 per mantenere in tensione il sistema

ϑ_{MIN} è legato alla condizione di scorrimento totale sulla puleggia motrice

$$\vartheta_{MIN} \rightarrow \vartheta_{1avv} = \vartheta_1^*$$

$$\uparrow^+ 2T_3 = \vartheta_{MIN}$$

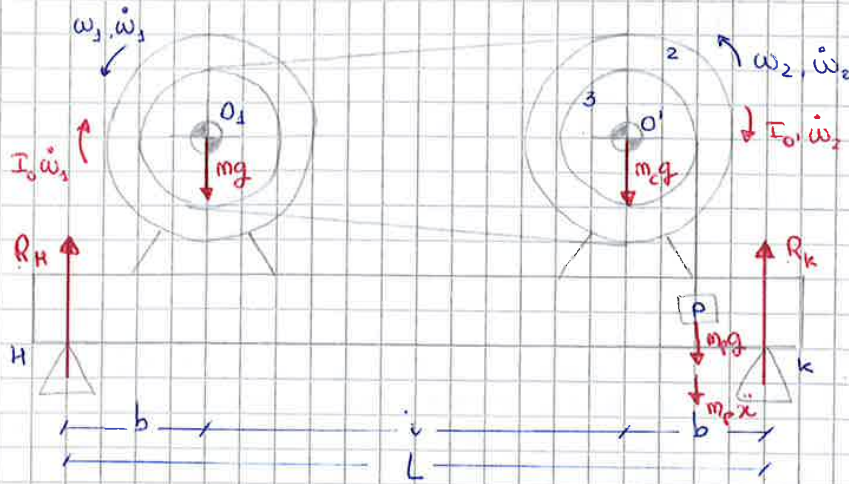
Equazione dei flessibili $\frac{T_1}{T_2} \approx e^{\mu \vartheta_1^*} = e^{\mu \vartheta_{1avv}^*} \textcircled{2}$

$$0 \rightarrow C_R = (T_1 - T_2) \frac{d}{2} \quad T_2 = T_3$$

Da $\textcircled{1}$ e $\textcircled{2}$ ricavò T_1 e T_2

$$T_2 = 268,46 \text{ N}$$

$$\Rightarrow \vartheta_{MIN} = 2T_2 = 536,92 \text{ N}$$



Non mettiamo la coppia motrice perché è un'azione interna scambiata tra tamburo e puleggia 1. Indichiamo solo le forze esterne.

$$\uparrow R_H + R_k = (m + m_c + m_p)g + m_p \ddot{x}$$

$$\downarrow R_H l - mg(L - b) - m_c g b + m_p (g + \ddot{x})(b - \frac{d_t}{2}) + I_0 \dot{\omega}_1 + I_0 \dot{\omega}_2 = 0$$

$$R_H = 967,78 \text{ N}$$

$$R_k = 5906,18 \text{ N}$$

$T_0 =$ forzamento iniziale $T_0 = \frac{T_1 + T_2}{2}$

$$\alpha = \arcsin \left[\frac{\frac{d_2}{2} - \frac{d_1}{2}}{i} \right] = 12,02^\circ$$

Per Hp dell'esercizio $\vartheta_1^* = \frac{\vartheta_{1,avv}}{2}$, $\vartheta_{1,avv} = \pi - 2\alpha = 2,72 \text{ rad}$

$$\rightarrow \vartheta_1^* = 1,36 \text{ rad}$$

Equazione dei flessibili

$$\frac{T_1 - q_0^2}{T_2 - q_0^2} \approx e^{\beta \vartheta_1^*}$$

↳ lo trascuriamo

Essendo la cinghia trapezoidale $\beta' = \frac{\beta}{\sin \beta}$

$$T_1 - T_2 = 4762 \text{ N}$$

$$\rightarrow T_1 = 7322 \text{ N}$$

$$T_2 = 2560 \text{ N}$$

$$T_0 = \frac{T_1 + T_2}{2} = 4941 \text{ N}$$

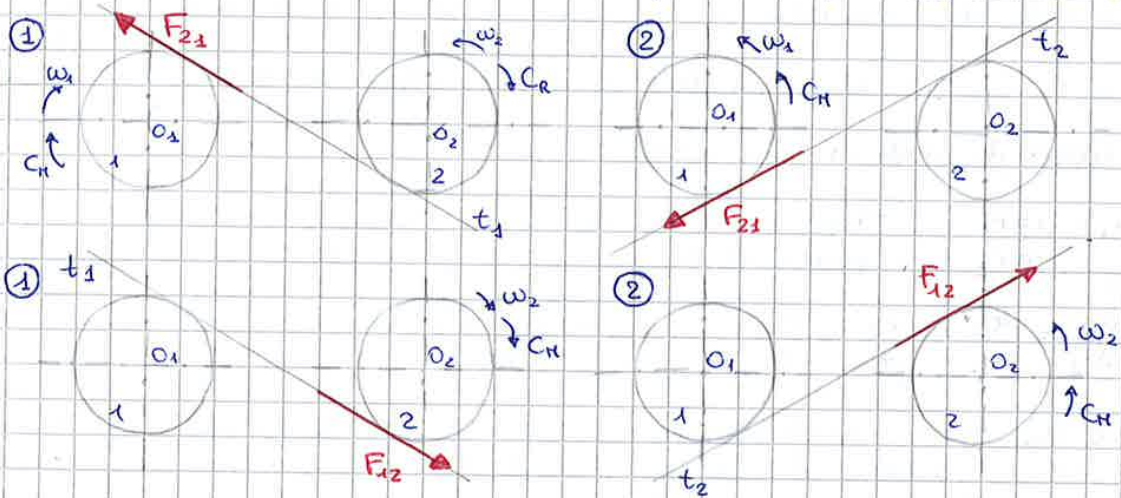
Un altro modo per generare un'evolvente di cerchio è quello di prendere una retta e farla ruotare senza strisciare sulla circonferenza partendo dal punto A e le successive posizioni di A sulla retta che ruota sulla circonferenza originano l'evolvente di cerchio.
 A = origine dell'evolvente

I denti a contatto (delle ruote dentate) sono profili coniugati tracciati in rotazione dalle circonferenze primitive.

Proprietà dei profili coniugati: Hanno la stessa componente normale di velocità. Esiste una velocità di strisciamento.

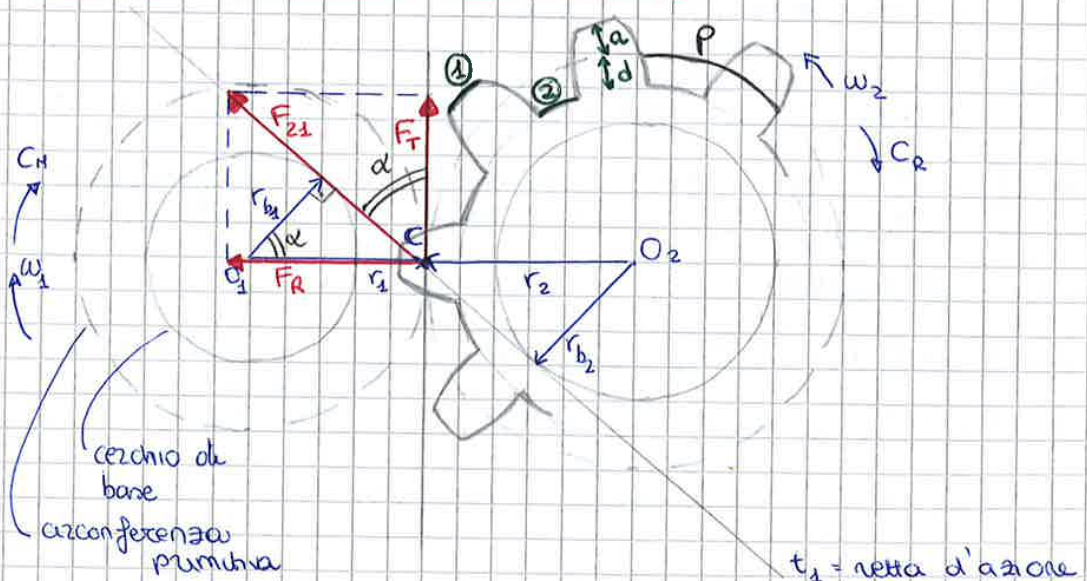
Tangenti ai cerchi di base = rette di azione

Lungo le rette di azione è scambiata la forza tra le ruote. Dai cerchi di base abbiamo anche due tangenti esterne che però non permettono di essere contemporaneo per entrambe le ruote:



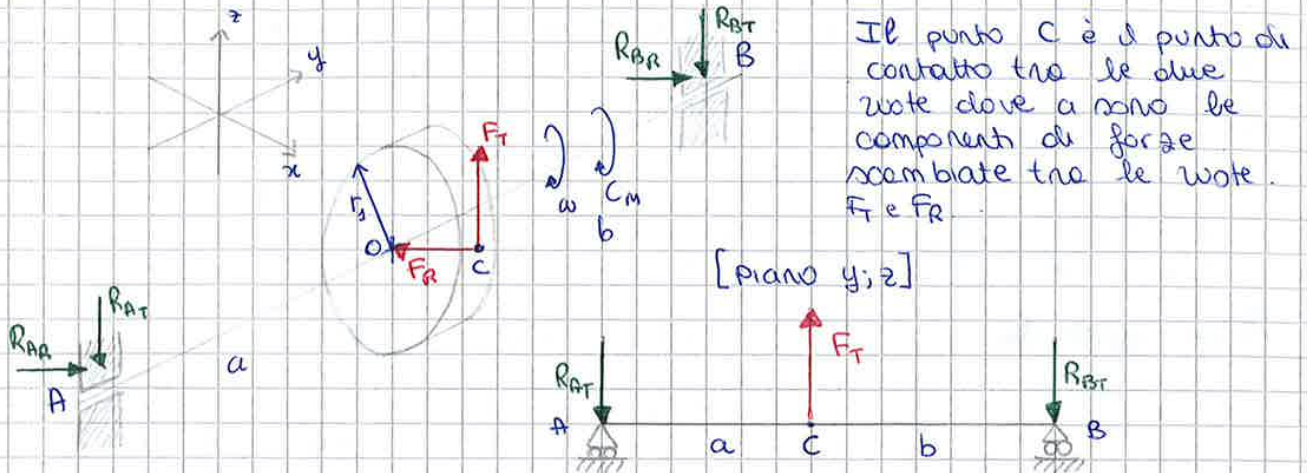
Si sceglie la tangente in base a quale ruota è la ruota motrice e in quale verso gira. Le forze lungo le tangenti ai cerchi di base devono essere opposte alla ω motrice.

RUOTE DENTATE CILINDRICHE A DENTI DIRITTI



Reazioni sui supporti

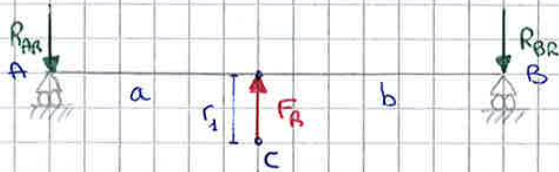
Le ruote girano attorno agli alberi che vengono sostenuti dai cuscinetti di cui dobbiamo calcolare le reazioni.



$$\uparrow^+ F_T = R_{AT} + R_{BT}$$

$$\curvearrowright^+ -R_{BT}(a+b) + F_T a = 0$$

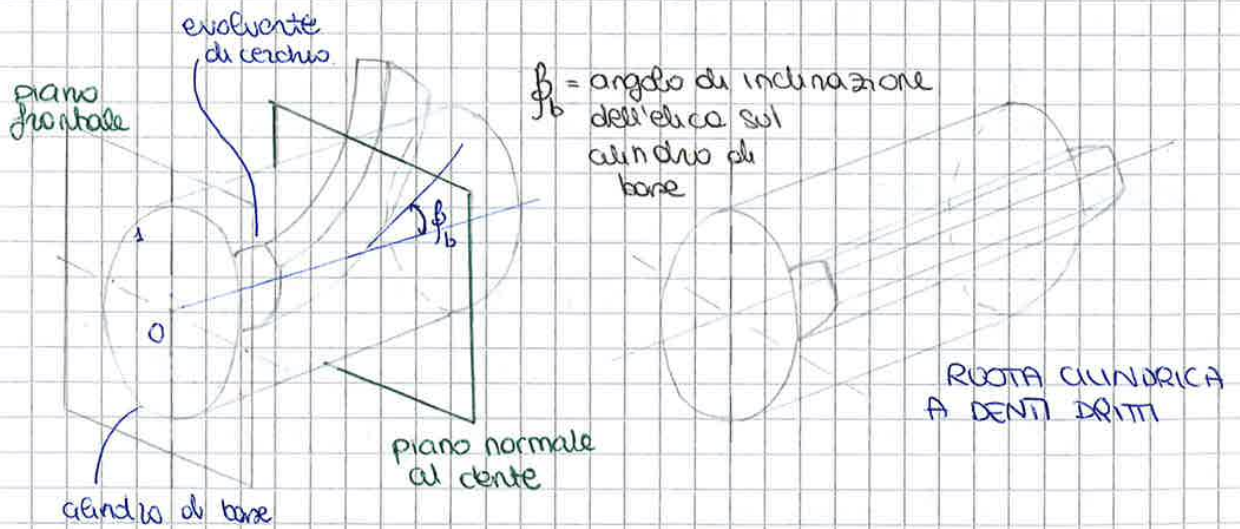
[piano x; y]



$$\uparrow^+ F_R = R_{AA} + R_{BB}$$

$$\curvearrowright^+ F_{RA} - R_{BB}(a+b) = 0$$

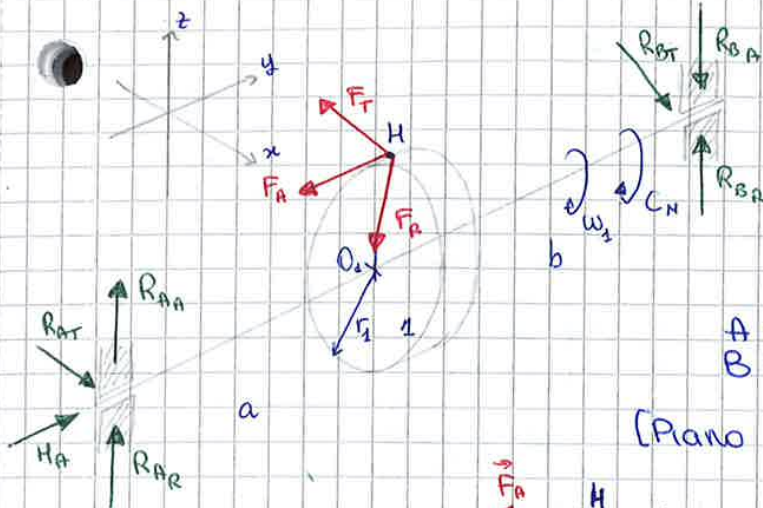
RUOTE DENTATE CILINDRICHE A DENTI ELICOIDALI



Il dente nelle ruote dentate cilindriche a denti elicoidali viene svervolato a un'elica.

Il proporzionamento modulare si fa nel piano normale al dente

Reazioni sui supporti

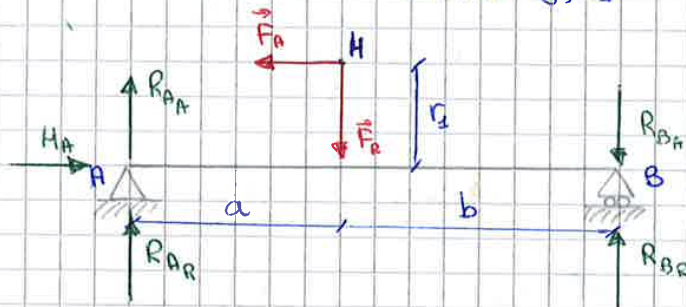


Nel caso delle ruote a denti elicoidali bisogna tener conto del fatto che essendo una componente assiale l'albero tende a muoversi assialmente.

Quindi uno dei due supporti diventa assiale-radiale.

A : supporto radiale - assiale
B : supporto radiale

[Piano y; z]



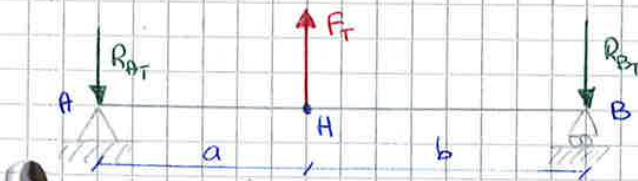
H_A e F_A generano una coppia antioraria allora sul supporti nasce una coppia di forze orarie che è opposta a H_A e F_A .
Le due forze sono R_{Ar} R_{Ba}

$$\begin{cases} |F_A| = |H_A| \\ |R_{Ar}| = |R_{Ba}| = \frac{|F_A| r_2}{(a+b)} \end{cases}$$

$$\uparrow^+ R_{Ar} + R_{Ba} = F_R$$

$$\uparrow^+ A) -F_R a + R_{Ba} (a+b) = 0$$

[Piano x; y]



$$\uparrow^+ F_T = R_{Br} + R_{Bt}$$

$$\uparrow^+ A) -R_{Br} (a+b) + F_T a = 0$$

Supporto A :

$$\begin{cases} |H_A| = |F_A| \\ R_A = \sqrt{(R_{Ar} + R_{Ar})^2 + (R_{At})^2} \end{cases}$$

Supporto B :

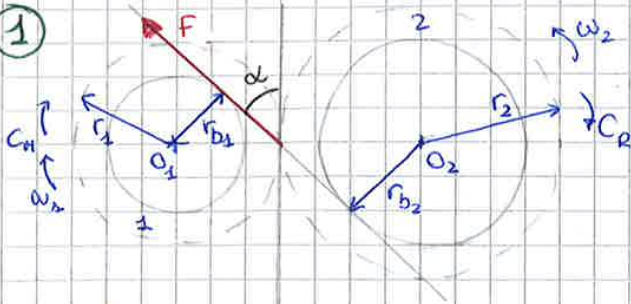
$$R_B = \sqrt{(R_{Br} - R_{Bt})^2 + (R_{Bt})^2}$$

perchè sono discordi

Queste sono le formule da utilizzare negli esercizi.

Esercitazione 7

①



$\omega_1 = 70 \text{ rad/s}$
 $\omega_2 = 40 \text{ rad/s}$
 $\alpha = 20^\circ$
 $z_1 = 10$
 $r_1 = 100 \text{ mm}$
 $W_1 = 2000 \text{ W}$
 $\eta = 1$

- ? m
- ? i
- ? r_2
- ? $a = O_1O_2$
- ? z_2
- ? F_{21}

$$m = \frac{P}{\pi} = \frac{2\pi r_1}{z_1} = 20 \text{ mm}$$

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{70}{40} = 1,75$$

$$r_2 = i r_1 = 175 \text{ mm}$$

$$a = O_1O_2 = r_1 + r_2 = 275 \text{ mm}$$

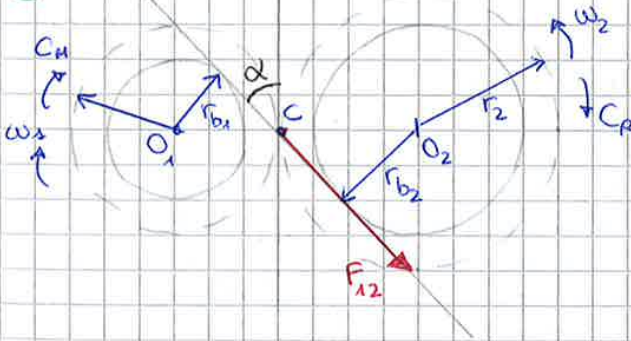
$z_2 = i z_1 = 17,5 \rightarrow 18$ Il numero di denti deve essere sempre intero quindi lo approssimiamo sempre all'intero superiore

$$O_1 \curvearrowright + C_M = F_{21} r_{b1} \quad r_{b1} = r_1 \cos \alpha$$

$$C_M = F_{21} r_1 \cos \alpha \quad C_M = \frac{W_1}{\omega_1} = 29 \text{ Nm}$$

$$\rightarrow F_{21} = \frac{C_M}{r_1 \cos \alpha} = 309 \text{ N}$$

②



$C_M = 30 \text{ Nm}$
 $\eta = 1$
 $z_1 = 13$
 $i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = 3$
 $m = 4 \text{ mm}$
 $\alpha = 20^\circ$
 $a = 100 \text{ mm}$
 $b = 50 \text{ mm}$
 $\omega_1 = 20 \text{ rad/s}$

- ? z_2
- ? r_1, r_2
- ? C_R
- ? F_{12}
- ? $R_C R_D$
- (reazioni ai supporti)

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_2}{r_1} = 3 \quad z_2 = i z_1 = 39$$

$$m = \frac{2r_1}{z_1} = \frac{2r_2}{z_2} \Rightarrow r_1 = \frac{m z_1}{2} = 26 \text{ mm}$$

$$r_2 = \frac{m z_2}{2} = 78 \text{ mm}$$

$$\eta = \frac{C_R \omega_2}{C_M \omega_1} = \frac{C_R}{C_M i} \rightarrow C_R = \eta i C_M = 90 \text{ Nm}$$

$$O_2 \curvearrowright + C_R = F_{12} r_{b2} = F_{12} r_2 \cos \alpha \rightarrow |F_{12}| = |F_{21}| = 1227,89 \text{ N}$$