



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 1835A -

ANNO: 2016

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Gonella Anna

MATERIA: Fenomeni di trasporto - prof. Pisano

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

3/3

fluidodinamica

trasferimento materia e energia e quantità di moto

Bird-Stewart Lightfoot

→ 2002 vers ing'

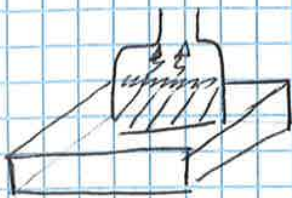
→ 1997 → vers ita - per il corso besta

esame solo scritto

per separare solvente e soluto → congelò il tutto → abbasso la pressione

sotto la tensione di vapore → il solvente sublima

È importante mantenere costante la temperatura



$P_c < P^*$   
pressione  
camera

→ Tensione di vapore

$T_p < T_{max}$

questo processo è endotermico, serve calore fornito dalla base

Sublimando la T scende

Ci sono due trasferimenti di materia sia di calore

Controllo concentrazione gas nell'ambiente in cui conservo frutta

gas = etilene → controllo il processo di maturazione frutta

ciclodestruino



polare fuori

apolare dentro → ci "insecco" l'etilene

↳ In un film polimerico

→ Possiamo regolare il rilascio di etilene

Combinando la T posso modificare la velocità con cui l'etilene

diffonde dalle ciclodestruine attraverso il film

Studio della disposizione di particelle nel polmone

- fluidodinamica del sistema







No inaffamento → corpo pieno

No convezione → corpo solido

parametri  $T_0, T_1$

$\left[\frac{\text{cal}}{\text{s}}\right] = j_q \propto \frac{1}{\gamma}$  → direttamente proporzionale

$j_q \propto \Delta T = (T_0 - T_1)$

$\frac{j_q}{A} = k \frac{\Delta T}{\gamma}$   
 ↳ superficie di scambio

conduttività termica

↑ T ↑ moto vibrazionale

parte dell'E vibrazionale delle molecole a  $T_1$  passa a quelle a  $T_0$

k indice con quale efficacia l'E molecolare viene passata da molecola a molecola

→ dipende dal tipo di materiale

→ dipende da  $T_1$ . Se  $T \uparrow$  la vibrazione è molto forte

→ si trasferisce più energia

se  $k = f(T) \neq \text{cost}$  → profilo di T non è lineare

Se riempio di gas e fluido → moto libero delle molecole (vibrazionale + traslazionale)

↳ stesso meccanismo ma 2 trasferimenti (vibraz. e traslat.)

↳ le molecole non sono fisse

$k = f(T) \rightarrow \uparrow T \uparrow \vec{v} \uparrow$  scambio E

$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{j_q}{A} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} k \frac{\Delta T}{\gamma}$  → flusso;  $j_q$  portata

$J_q = k \frac{dT}{dy}$  → visto lo scambio → ⊕ flusso da alta T a bassa T.

$J_{qy} = -k \frac{dT}{dy}$

$J_{qx} = -k \frac{dT}{dx}$

$J_{qz} = -k \frac{dT}{dz}$

Legge Fourier

$J_q = -k \nabla T$

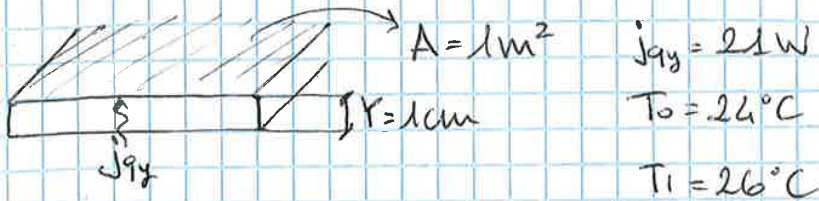
ISOTROPICO

↓  
k cost nello spazio



207

Pomello di materiale plastico  $A = 1 \text{ m}^2$ , spessore  $1 \text{ cm}$ , conduce calore per convezione con  $j_q = 21 \text{ W}$  in regime stazionario. Le due superfici opposte del pomello hanno  $T: T_0 = 24^\circ\text{C}$   $T_1 = 26^\circ\text{C}$   
 Qual è la  $k$  del materiale in  $\frac{\text{cal}}{\text{s cm K}}$ ?



$$\frac{j_q}{A} = j_q = k \frac{dT}{dy} \quad k = \frac{-j_q}{A \frac{dT}{dy}} = \frac{-21}{1 \frac{(24-26)}{1 \cdot 10^{-2}}} \quad \frac{\text{J m}}{\text{s K m}^2} \rightarrow \frac{\text{J}}{\text{s m K}} \quad \checkmark$$

$$\frac{-21}{-2 \cdot 10^{-2}} = 0,105 \frac{\text{J}}{\text{s m K}}$$

lo voglio in  $\frac{\text{cal}}{\text{s cm K}} \rightarrow k = 0,105 \cdot \frac{1}{4,186} \cdot 10^{-2} \rightarrow 2,5 \cdot 10^{-4}$

$$\frac{\text{J}}{\text{s m K}} \cdot \frac{\text{cal}}{\text{J}} \cdot \frac{\text{m}}{\text{cm}} \rightarrow \frac{\text{cal}}{\text{s cm K}}$$



Nella realtà homisciale - il diagramma O-T si può usare ma con accorgimenti

→ condizioni pseudo critiche

↳ danno un'idea del comportamento medio della miscela

$$P_{c,mix} = \sum_{i=1}^N x_i P_{c,i}$$

$\downarrow$   
 fraz. molare →  $P_c$  del componente  $i$

$$T_{c,mix} = \sum_{i=1}^N x_i T_{c,i}$$

$$k_{c,mix} = \sum_{i=1}^N x_i k_{c,i}$$

es) calcolare la  $k$  dell'etano ( $C_2H_6$ ) a  $T_c = 67^\circ C \rightarrow 340 K$   
 e alla  $P_c = 192 \text{ atm}$ . Sapendo che a  $P_1 = 1 \text{ atm}$  e  $T_1 = T_c$  la  
 $k_1(P_1, T_1) = 0,0237 \frac{\text{kcal}}{\text{hmk}}$ , e  $P_2 = 48,2 \text{ atm}$   $T_2 = 305,4 K$

$$P_{r1} = \frac{1}{48,2} = 0,021 \quad T_{r1} = \frac{340}{305,4} = 1,113$$

↳ O-T  $k_{r1} = 0,33 \rightarrow k_c = \frac{0,0237}{0,33} = 0,07 \frac{\text{kcal}}{\text{hmk}}$

$$T_r = 1,114 \quad P_r = \frac{192}{48,2} = 3,98 \xrightarrow{\text{O-T}} k_2 \cong 2,5$$

$$k_r = \frac{k}{k_c} \rightarrow k = k_c \cdot k_r \Rightarrow 2,5 \cdot 0,07 = 0,175 \frac{\text{kcal}}{\text{hmk}}$$

Valore sperimentale  $\rightarrow 0,0675 \frac{\text{kcal}}{\text{hmk}} \rightarrow$  il gas è poliatomico  
 a basso deviazioni da queste curve

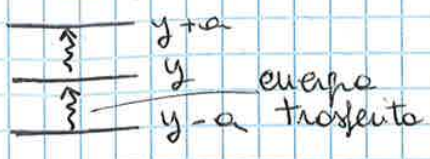


$$J_{qy} = 2 \frac{1}{2} m \bar{u}^2 \Big|_{y-a} - 2 \frac{1}{2} m \bar{u}^2 \Big|_{y+a} = 2 \frac{3}{2} k_b T \Big|_{y-a} - 2 \frac{3}{2} k_b T \Big|_{y+a}$$

Flusso di calore lungo la direzione y (differenza di flusso nel piano y)

→ Somma di tutte le E traslazionali del moto da y-a a y

entrata - uscita = Flusso netto attraverso y



$$J_{qy} = 2 \frac{3}{2} k_b (T|_{y-a} - T|_{y+a}) \rightarrow \text{cerchiamo di ricondurlo al gradiente di temperatura}$$

$$T|_y - T|_{y-a} = a \frac{dT}{dy} \quad T|_{y+a} - T|_y = a \frac{dT}{dy}$$

$$J_{qy} = 2 \frac{3}{2} k_b (T|_y - a \frac{dT}{dy} - T|_y - a \frac{dT}{dy}) = 2 \frac{3}{2} k_b (-2a) \frac{dT}{dy}$$

$$J_{qy} = -\frac{3}{2} k_b \frac{1}{4} n \bar{u} \cdot \frac{2}{3} \lambda \frac{dT}{dy}$$

$$J_{qy} = -\left(\frac{1}{2} k_b \lambda n \bar{u}\right) \frac{dT}{dy} \rightarrow k \text{ (conduttività termica)}$$

$$k = \frac{1}{2} k_b \lambda n \bar{u} = \frac{1}{2} k_b \frac{1}{\frac{12}{\pi} d^2 n} n \sqrt{\frac{8 k_b T}{\pi m}} = \sqrt{\frac{k_b^3 T}{\pi^3 m}} \cdot \frac{1}{d^2}$$

→ vale solo nelle nostre ipotesi. Sottostima la dipendenza dalla T

Per renderlo valido generalmente dovremmo passare per la fisica quantistica e risolvere Boltzmann

$$J_{qy} = -\frac{1}{2} k_b \lambda n \bar{u} \frac{dT}{dy}$$

$$k = \sqrt{\frac{k_b^3 T}{\pi^3 m}} \cdot \frac{1}{d^2}$$



Eucken

DA SAPERE

$$k_{mix} = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{x_i k_i}{\sum_{j=1}^N (x_j \phi_{ij})} \right]$$

→ fattore correttivo

→ due molecole diverse  
interagiscono in modo diverso

Se le due molecole sono uguali  $\rightarrow i=j \rightarrow$  vale  $\Omega_k$

$$\phi_{ij} = 1 \text{ per } i=j$$

$$\text{per } i \neq j \quad \phi_{ij} = \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \left(1 + \frac{M_i}{M_j}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[1 + \left(\frac{M_i}{M_j}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{M_i}{M_j}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^2$$

differenza  
di peso  
molecolare

viscosità

Wilke → per molecole simili  
Se sono troppo diverse non basta

$$\mu = \frac{2,66 \cdot 10^{-5} \sqrt{TM}}{\sigma^2 \Omega_k}$$

→ viscosità gas mono/poliatomici APOLARE  
PURE

2D

Calcolare  $k_{ne}$  a  $P_c = 10 \text{ atm}$   $T = 373,2 \text{ K}$

Ne  
 $T = 373,2 \text{ K}$   
 $P = 10 \text{ atm}$

$$k = \frac{1,9891 \cdot 10^{-4}}{\sigma^2 \Omega_k} \sqrt{\frac{T - k}{M - 8/mol}} = \left[ \frac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \text{K}} \right]$$

Tab E2  
 $\Omega_k = 0,821$

allegato 2

$\sigma = 2,789 \text{ \AA} \rightarrow$  tab E1

$\Omega_k \cdot f\left(\frac{T}{K}\right) \rightarrow \frac{\epsilon}{K} [K] \rightarrow \frac{\epsilon}{K} = 35,7 \frac{K}{\epsilon} \rightarrow \frac{373,2}{35,7} = 10,45$

$M = 20,180$

dalla tabella  $\bar{\epsilon} = 1$

$$k = \frac{1,9891 \cdot 10^{-4}}{(2,789)^2 \cdot 0,821} \cdot \sqrt{\frac{373,2}{20,180}} = 1,34 \cdot 10^{-4} \frac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \text{K}}$$



17/3

Conduttività termica di un liquido

BRIDGMAN

molecole liquido approssimate in un reticolo cubico → approssimazione  
 distanza fra le molecole  $a = \left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$a = \left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{1}{3}}$$

↳ volume molecola

E termica trasferita tramite E vibrazionale

Bridgman → passa da vibrazionale a traslazionale

↳ in un liquido l'E si trasferisce come E traslazionale ad elevata velocità

↳ velocità pari a quella del suono nel liquido osservato

$$v_s = \sqrt{\frac{C_p \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)}{C_v \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)}}$$

vel suono ↳ variazione di pressione su  $\partial p$  (densità) e T cost

→ conduttività termica gas monoatomico

$$k = \frac{1}{2} k \cdot n \cdot \bar{u} \cdot \lambda \rightarrow \text{vel media}$$

↳ Bri. è partito da un'eq. simile  $\left. \begin{matrix} P = n \cdot m \\ \tilde{C}_v = \frac{3}{2} \frac{k}{m} \end{matrix} \right\} \text{ riguarda il gas}$

$$k = \frac{1}{2} \frac{3}{m} \frac{k}{m} \frac{n m}{3} \bar{u} \lambda$$

↳

$$k = \frac{1}{3} \rho \tilde{C}_v \bar{u} \lambda \rightarrow \text{per un gas monoatomico}$$

per un liquido? Bri. ha supposto una relazione simile

$$k = \rho \tilde{C}_v \bar{u} a \rightarrow \text{dist fra due molecole adiacenti nel reticolo} = \left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{1}{3}}$$

↳  $\bar{u} = v_s$

→ liq si comporta come un solido ad alta T (è abbastanza vero)

$\tilde{C}_v = 3 \left(\frac{k}{m}\right) \rightarrow \text{Dulong-Petit} \rightarrow \text{valido per i solidi} \rightarrow \text{assumiamo \&eacute; vero anche per i liq.}$   
 $\rho = n \cdot m$



Metalli

prevale il moto libero degli e<sup>-</sup>

Non metalli

prevale il trasferimento Energia vibrazionale

Solidi cristallini

k - dimensione del cristallo

Solidi amorfi

k - orientamento delle molecole

Nei solidi cambia molto da tipo a tipo

Un modello per i solidi metallici deriva dall'analogia fra  $k_{chimica}$  e  $k_{elettrica}$

se la temperatura aumenta, la  $k_{chimica}$  diminuisce circa come la  $k_{elettrica}$

Nei non metalli è l'esatto opposto.

WEIDMANN - FRANZ - LORENTZ

→ Per i metalli

→ Non vale per i superconduttori

→ Piccole variazioni di T portano grandi variazioni L

→ lavora a base T

$\frac{k}{k_e T} \cong \text{cost} \cong L$  cost di Lorentz

$L = 22 \sim 29 \cdot 10^{-9} \frac{V^2}{K^2}$

→ dipende dalla T

→ cambia del 10% ogni 100K



20/3

la conducibilità varia nel caso o seconda di inclusioni di altri solidi. Possò considerare il mio solido eterogeneo come omogeneo per gli scambi termici

$k_{eff}$  calcolata in relazione a

$k_0$  - mezzo omogeneo / continuo

$k_i$  - mezzo eterogeneo / por inclusione geometrica dell'eterogeneità

MAXWELL

$$\frac{k_{eff}}{k_0} = 1 + \frac{3\phi}{\frac{k_i + 2k_0 - 1}{k_i - k_0}}$$

→ Media pesata nel volume delle  $k$  delle por

$\phi$  = frazione in volume di solido occupate dalla fase inclusa  
vale finché  $\phi < \pi/6$

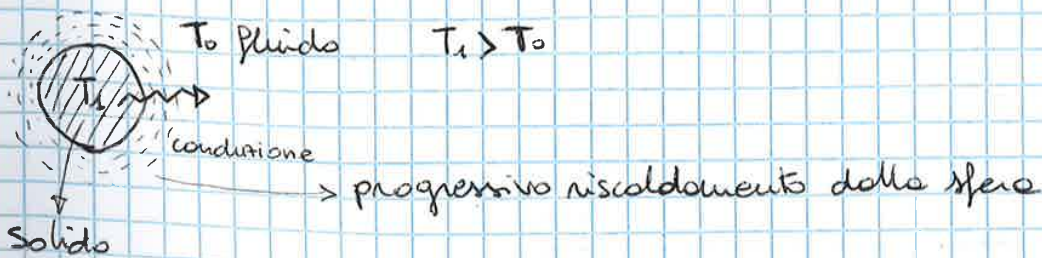
se  $\phi > \pi/6$  → servono correzioni all'eq di Maxwell in base alla natura del materiale e al valore di  $\phi$

Convezione

Conduttione → moto molecolare →  $\vec{v} = 0$

convezione → le molecole, nel loro insieme, si stanno muovendo →  $\vec{v} \neq 0$

- ① convezione forzata
  - ② convezione naturale
- diversi per la causa del moto del fluido
- Forze esterne
  - Scambio termico



$t=0$  → fluido in quiete

se il fluido è un gas → quando il gas si riscalda tende a ridurre la densità





## Raggiamento

E si trasferisce per mezzo di onde elettromagnetiche

Si muovono con  $v = c$  (vel della luce)

↓  
Spostamento istantaneo (per le distanze considerate)

↓  
Indipendente delle distanze

↓  
Si possono diffondere nel vuoto

↓  
No materia

Velocità di trasporto è funzione della 4<sup>a</sup> potenza di T

molecole → ricevono E → vanno in uno stato di sovraeccitazione

→ si spostano ad un altro stato

in un materiale → trasferimento di E alla molecola adiacente.

Quando si arriva all'ultimo stato, le molecole esterne hanno troppa E → Se ne sbarcano tramite onde

Il contenuto energetico dell'onda elettromagnetica è legato alla  $\lambda$

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

vel della luce  
frequenza

legge di Planck → fotone: onda ridotta a singola particella

$$E_{\text{fotone}} \rightarrow E_f = h \nu$$

$h$  costante di Planck

A seconda del tipo di Energia emessa dal materiale ho diverse lunghezze d'onda

Corpo trasparente → investito da un'onda elettromagnetica: in parte assorbe in parte riflette in parte attraversa

Corpo opaco → Non viene attraversato dalle radiazioni elettromagnetiche

corpo nero → assorbe tutto l'onda ( $a_b = 1$ )





$$\begin{cases} 1 = \text{cavità} \\ 2 \neq b \\ T_1 = T_2 \end{cases}$$

\* b = corpo nero

$$a_2 q^{(cav)} = q^{(e)}$$

Il corpo 2 assorbe una frazione delle q emessa dal corpo 1

Il corpo 2 emette  $q^{(e)}$  pari alla q assorbita perché  $T_1 = T_2$

$$1) q^{(cav)} = q_b^{(e)}$$

$$2) a_2 \cdot q^{(cav)} = q^{(e)} \rightarrow a_2 \cdot q_b^{(e)} = q^{(e)}$$

$$a_2 = \frac{q^{(e)}}{q_b^{(e)}} = \epsilon_2 \Rightarrow \epsilon_2 = a_2$$

### Torricelli e Boltzmann - Stefan

$$q_b = \sigma T^4$$

$$\sigma = 5,67051 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{K}^4$$

↳ energia nell'unità di tempo [ $\text{W/m}^2$ ]

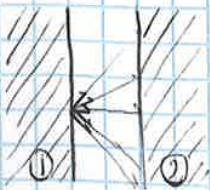
$$q_i^{(e)} = \epsilon_i \cdot \sigma T_i^4 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{corpo grigio} \\ \text{se ho più corpi} \rightarrow \text{Somma} \end{array} \right.$$

$$q_i^{(a)} = a_i \cdot \sigma T_i^4$$

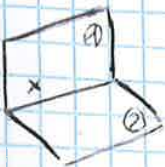
↳ dipende dalla geometria del corpo

Portare concetto  $\rightarrow$  FATTORE DI VISTA F  $\rightarrow F_{i \rightarrow j}$

↳ frazione di rad. emessa dal corpo i che possono raggiungere con cammino diretto il corpo j



$F_{1 \rightarrow 2} = 1$  Ogni radiazione da 1 raggiunge 2 e viceversa



① | ②

↳ dipende dalle proporzioni:

se una  $\rightarrow 0 < F_{1 \rightarrow 2} < 1 \leftarrow$  se una sup va a  $\infty$   
 sup 2 annulla

↳ nelle realtà non sempre è immediato

↳ si semplifica

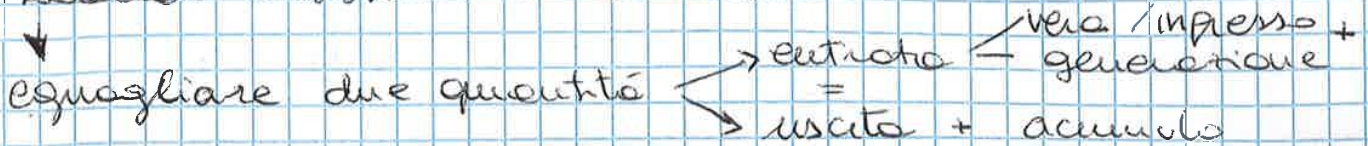


27/3

Bilanci locali di proprietà

- Modelli matematici per descrivere dei fenomeni  
calcoli progettuali → calcoli per meglio descrivere i fenomeni

→ Associare il sistema ad un volume



Bilanci di proprietà estensive



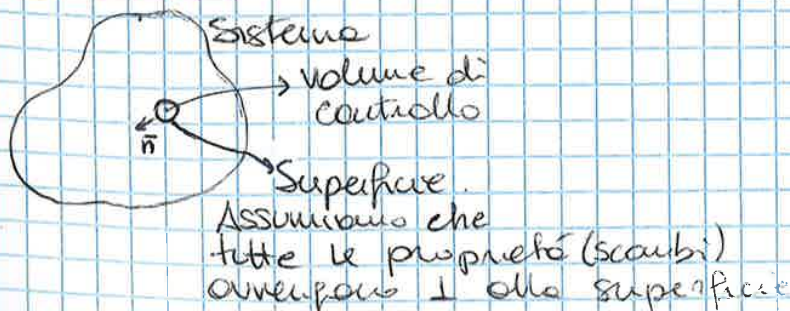
Bilancio proprietà locali

- Volume arbitrario  
indefinitamente piccolo
- cosa accade all'interno
- ex per il profilo di temperatura  
interna

Bilancio proprietà integrali / globali

- Volume globale del sistema
- relazione entrata - usata
- come avviene lo scambio
- ex per trovare  $\Delta E$  scambiata con  
l'esterno (potrei usare il lavoro  
ma è più complesso)

Bilanci locali



4 categorie in base allo sup.

- Sist. chiuso → NO scambio materia con l'esterno
- Sist. aperto → Sì scambio materia
- Sist. isolato → NO scambio E termica
- Sist. non isolato → Sì scambio E termica



# 1 Obiettivo del modello

## 2 Ipotesi semplificative → ci sono fenomeni trascurabili?

- Se c'è un fluido → mezzo continuo → riferimento al volume. Esso è campo, to ugualmente in tutti i punti con le proprietà medie delle molecole.
- meccanismi di trasferimento (ve verificato)
- isotropia delle proprietà di trasferimento (ve verificato)
- f(T) delle proprietà: qual è la dipendenza dalla T delle prop? E la variazione di T del sistema? (dip. parte → ΔT piccolo → trascurabili)

## 3 Volume di controllo

### 4 Sistema di riferimento

2 tip: a seconda di come osservi

- Lagrangiano: l'osservatore si muove solidalmente con il corpo in movimento.

⇒ fluido in movimento

- le coordinate spaziali sono variabili dipendenti dalla posizione iniziale e dal TEMPO
- ↳ si usa per descrivere i moti relativi

- Euleriano: Sistema di riferimento fisso → osservatore fisso osserva il corpo/fluido che si muove

- Coordinate spaziali sono variabili **INDIPENDENTI**

## 5 Scrivo le equazioni di bilancio

Devo considerare tutte le proprietà estensive

$$e + g = u + a$$

$e$ : entità generata  
 $g$ : entità generata nel transf. entità  
 $u$ : entità usata  
 $a$ : proprietà nel tempo

$$(e - u) + g = a$$

flusso netto

$V$  = volume di controllo     $S$  = sup di controllo     $\vec{v}$  = vel del fluido in moto (moto d'insieme)  
 $\hat{E}$  = energia per unità di massa ( $\rho \hat{E}$  = E per unità di volume)     $\rho$  = densità fluido/molecola  
 $J_{q,c}$  = flusso di energia termica per conduzione     $J_{q,r}$  = flusso per irraggiamento



31/3

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{E}) + \underbrace{\vec{\nabla}(\rho \vec{E} \cdot \vec{v}) + \vec{\nabla} \vec{J}_c + \vec{\nabla} \vec{J}_v}_{u-e} - e_g = 0$$

per NOI

↳ Set di eq. diff. ordinarie

Condizioni al contorno

• Flusso di energia termica  $J$  oppure la temperatura sulle sup omogenee

1)  $T|_{x=x_0} = T_{0x}$

$T|_{y=y_0} = T_{0y}$

$T|_{z=z_0} = T_{0z}$

2) Definisco il calore sulle sup delimitate

$J|_{x=x_0} = J_{0x}$

$J|_{y=y_0} = J_{0y}$

$J|_{z=z_0} = J_{0z}$

3) Ipotesi continuità della  $T$  o della  $J$  in corrispondenza delle sup

$T|_{x=x_0^-} = T|_{x=x_0^+} \quad J|_{x=x_0^-} = J|_{x=x_0^+}$

Valo anche per le altre ( $y$  e  $z$ )

4) esiste una sup di interfaccia (due pos. diverse o due materiali diversi)

legge del raffreddamento di Newton (eq. per definire  $h$ )

$J$  all'interfaccia  $\rightarrow j_0 = h (T - T_{ext}) A$

$j_0$  = velocità cui l'energia parte dalla sup di interfaccia

$h$  = coefficiente di scambio di calore

$(T - T_{ext})$  = forza spingente  $\rightarrow$  differenza di  $T$  fra le due pos.

$\downarrow$   $\downarrow$   
 $\rightarrow$  interfaccia

$A$  = Sup. interfaccia di scambio

$\rightarrow$  trascuriamo il modo in cui viene scambiata l'energia termica

$h \rightarrow$  dipende dalla forza spingente e da  $A$



$$u-e = q \quad \frac{(\cancel{2\pi r L}) J_c|_{r+\Delta r} - (\cancel{2\pi r L}) J_c|_r}{\Delta r} = \cancel{Q_G} \frac{(\cancel{2\pi r L} \Delta r)}{\Delta r}$$

$r$ : variabile  $\Delta r \rightarrow$  ben definito

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{(r J_c)|_{r+\Delta r} - (r J_c)|_r}{\Delta r} = Q_G - r$$

$$\frac{d(r J_c)}{dr} = Q_G - r$$

$$\int d(r J_c) = \int (Q_G - r) dr$$

$$r J_c = Q_G \frac{r^2}{2} + C_1$$

$$J_c = Q_G \frac{r}{2} + \frac{C_1}{r} \rightarrow \text{diamo una condizione di contorno}$$

$$\left. \begin{array}{l} r=0 \rightarrow J_c \neq \infty \\ \text{se metto } r=0 \text{ nell'eq, } J_c \rightarrow \infty \Rightarrow C_1 \text{ deve essere } = 0 \end{array} \right\}$$

Il flusso al centro  $= 0 \rightarrow$  in  $r=0$  ci sarà un max/min di  $T$

$J_c = Q_G \frac{r}{2}$  devo esprimerlo meglio. Voglio il comportamento di  $T$

Fourier  $J = -k \nabla T$

Abbiamo solo 1 direzione:  $J_r = -k \frac{dT}{dr}$

$$-k \frac{dT}{dr} = Q_G \frac{r}{2} \rightarrow -k \int dT = \frac{Q_G}{2} \int r dr \rightarrow -k T = \frac{Q_G}{4} r^2 + C_2$$

se  $r=R \rightarrow T=T_0$

$$-k T_0 = \frac{Q_G}{4} R^2 + C_2 \rightarrow C_2 = -k T_0 - \frac{Q_G}{4} R^2 \Rightarrow -k T = \frac{Q_G}{4} r^2 - k T_0 - \frac{Q_G}{4} R^2$$

$$T = T_0 + \frac{Q_G}{4k} R^2 \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) \rightarrow \text{profilo di temperatura}$$

$$T_{\max} \rightarrow T|_{r=0} = T_0 + \frac{Q_G}{4} \frac{R^2}{k}$$



Filo di rame con  $R = 2\text{mm}$   $L = 5\text{m}$ . Calcola la  $V$  applicata che produce un aumento di  $T$  per  $\Delta T|_{\text{max}} = 10^\circ\text{C} = (T|_{r=0} - T|_{r=R})$

$T_0 = 20^\circ\text{C}$ . Supponendo che le  $\Delta T$  nel filo siano limitate

$$L(\text{cm}) = 2,23 \cdot 10^{-8} \frac{V^2}{k^2} \quad (\text{dato a } T_0)$$

↓  
numero  
lorentz

$$\circ V = RI$$

$$\circ R = \frac{L}{ke}$$

$$\circ T = T|_{r=R} + \frac{J_g R^2}{4k} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

$$\circ J_g = \frac{I^2}{ke}$$

$$\rightarrow V = RI = \frac{L}{ke} I \rightarrow I = \frac{ke V}{L} \rightarrow I^2 = \frac{ke^2 V^2}{L^2}$$

$$J_g = \frac{ke^2 V^2}{L^2 ke} = ke \frac{V^2}{L^2}$$

$$T_{r=0} = T_0 + \frac{J_g R^2}{4k}$$

$$\Delta T = 10 = \frac{J_g R^2}{4k}$$

$$\Delta T = \frac{R^2}{4k} ke \frac{V^2}{L^2} \rightarrow V = \sqrt{\frac{\Delta T 4k L^2}{R^2 ke}} \rightarrow V = \frac{2L}{R} \sqrt{\frac{\Delta T k T_0}{ke T_0}} \rightarrow L(T_0)$$

Sostituisco valori

$$V = 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 10^3 \sqrt{10 \cdot 2,3 \cdot 10^{-8} \cdot 293} = 40\text{V}$$

$$V = 40\text{V}$$



Ci sono più materiali  $\rightarrow$  come ne tempo conto?

Ip. 1  $\rightarrow$  3 solidi  $\rightarrow$  stesso meccanismo (condutt. nella stessa direzione)  
 $\rightarrow$  stesso volume di controllo

$$a + u = e + q \xrightarrow{E_0} (NH \Delta x)$$

$$\frac{d}{dt} (pV \hat{C}_p (T - T^*)) + J_{qc,x} (NH) |_{x+\Delta x} = J_{qc,x} (NH) |_x + \frac{1}{NH \Delta x}$$

$$p \hat{E} - V = p V \hat{H} = p V \hat{C}_p (T - T^*)$$

$\hat{H} \downarrow \hat{H}^*$

$$\hat{U} + \hat{K} \xrightarrow{E_0}$$

$$\hat{U} = \hat{H} + pV \rightarrow \text{solido} \rightarrow \hat{U} \cong \hat{H} \rightarrow d\hat{U} = d\hat{H} \Rightarrow \hat{H} = \hat{H}(T, p)$$

$$d\hat{H} = \underbrace{\left(\frac{\partial \hat{H}}{\partial T}\right)_p}_{\hat{C}_p} dT + \underbrace{\left(\frac{\partial \hat{H}}{\partial p}\right)_T}_{=0 \text{ isodidismo incompressibili}} dp$$

$d\hat{H} = \hat{C}_p dT$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (pV \hat{C}_p (T - T^*)) + J_{qc,x} |_{x+\Delta x} - J_{qc,x} |_x = 0$$

$\hookrightarrow$  No accumulo il flusso è costante

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{J_{qc,x} |_{x+\Delta x} - J_{qc,x} |_x}{\Delta x} = 0 \rightarrow \frac{dJ_{qc,x}}{dx} = 0 \rightarrow J_{qc,x} = C_1 = J_0 \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases}$$

Ⓐ e Ⓑ = ?    Ⓐ  $J_{x=x_0} = J_0 = h_0 (T_a - T_b) \rightarrow T |_{x=x_0}$

Ⓑ  $J_{x=x_3} = J_0 = h_3 (T_3 - T_b) \rightarrow T |_{x=x_3}$

$J = U(T_a - T_b)$

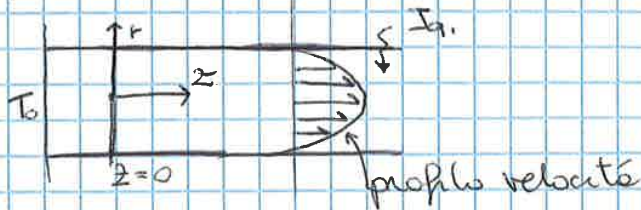
$$\begin{cases} J_{qc,x} = J_0 \\ -k \frac{dT}{dx} = J_0 \end{cases} \rightarrow \int_{T_0}^{T_1} dT = -\frac{J_0}{k_{01}} \int_{x_0}^{x_1} dx \rightarrow (T_1 - T_0) = -\frac{J_0}{k_{01}} (x_1 - x_0) \rightarrow (T_0 - T_1) = \frac{J_0}{k_{01}} (x_1 - x_0)$$

devo volutamente attraversare i vari materiali



Trasferimento di Energia in un condotto con fluido viscoso (liq) avente proprietà fisiche  $\rho, \mu, k, c_p = \text{cost}$  e alla  $T$ .  
 Il fluido scende in moto laminare (no vortici)

$R$  raggio direzione  $z$



per  $z < 0$   $T = \text{cost} = T_0$

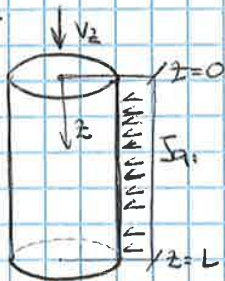
per  $z > 0$   $T = \text{aumenta}$   $\rightarrow$  la parte del tubo è assorbita da un flusso di calore costante  $I_{q1}$ .

$\vec{v}_z$  cambia in direzione radiale pressione o manutenzione

$$\vec{v}_z(r) = v_{z, \text{max}} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \quad v_{z(r) \text{max}} = \frac{(P_0 - P_L) R^2}{4\mu L}$$

trovare il profilo di temperatura all'interno del tubo in direzione radiale e assiale

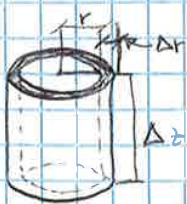
17/4



$$v_z = v_{z, \text{max}} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

$$T = ? \rightarrow T(r, \theta, z) = ?$$

$$v_z = v_{z, \text{max}} = \frac{(P_0 - P_L) R^2}{4\mu L}$$



$$T(r, \theta, z) = T(r, z) \text{ non varia angolarmente}$$

Condizioni stazionarie  $a=0$

Dissipazione viscosa trascurabile (moto laminare!)  $q=0$

Convezione solo lungo  $z$

$$\frac{q}{\epsilon_0} + u - v - \frac{q}{\epsilon_0} = 0$$



## Trasporto di calore all'interfaccia sol/liq e fluido/fluido

2 approcci

→ Bilanci locali di proprietà → considero le 2 fasi separatamente e le unisco con opportune considerazioni sull'interfaccia (condizioni di continuità) ①

→ Approccio più semplice: ②

⇒ coefficienti globali di scambio

$$I_q = h(T_1 - T_2)$$

1 e 2 sono le fasi

$$j_q = hA(T_1 - T_2)$$

↳ non abbiamo info del campo vero nello spazio

↳ non è accurato quanto il metodo ①

① è rapido ② devo conoscere

$h$  tiene conto dei vari meccanismi di scambio

↓  
la sua definizione varia per ogni sistema

↓  
è specifico del sistema in esame e delle condizioni in cui opera

$$h = f(\rho, \mu, \hat{c}_p, k, \text{parametri geometrici})$$

→ Misura di  $h$  e poi la uso nella progettazione ma deve essere un progetto nello scenario in cui ho misurato  $h$   
↳ si usa poco

→ Espressione matematica per  $h$  → posso usare  $h$  in diversi scenari → uso i bilanci ...

$h$  è spesso già espresso da altri bilanci impostati. Se il mio sistema è simile a quelli in letteratura, posso usare quelle  $h$ .

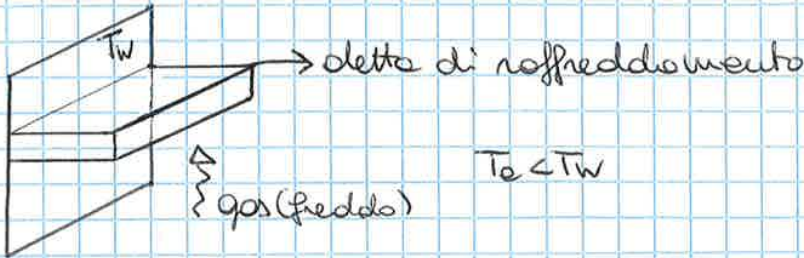
I risultati hanno imperfezioni trascurabili. Per collegare essi si aggiungono coefficienti sperimentali



21/4

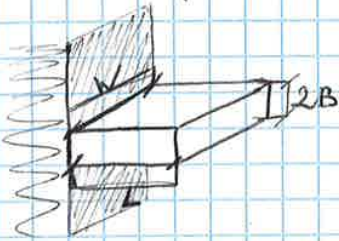
es

Raffreddare una superficie solida



Calcolare la perdita di calore da un'detta rettangolare che opera a  $T_e = 176^\circ\text{C}$   $T_w = 260^\circ\text{C}$   $k = 86 \frac{\text{kcal}}{\text{m} \cdot \text{h} \cdot ^\circ\text{C}}$

$h = 585 \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2 \cdot \text{h} \cdot ^\circ\text{C}}$   $L = 61\text{mm}$   $W = 305\text{mm}$   $B = 4,05\text{mm}$



determinare un'espressione per  $\eta = \frac{\text{calore effettivamente scambiato dall'detta}}{\text{calore scambiato se } T = T_w}$

$$\eta = \frac{h A (T_w - T_e)}{h A (T_w - T_e)}$$

$q = A h (T_w - T_e) \cdot \eta$   
 → è l'incognita

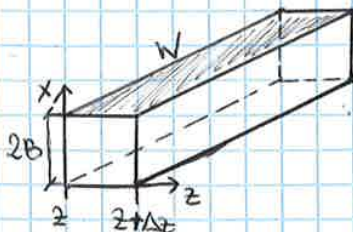
Introduco delle variabili adimensionate

$\theta = \frac{T - T_e}{T_w - T_e}$   $N = \sqrt{\frac{h \cdot L^2}{k \cdot B}}$   $\xi = \frac{z}{L}$   $A = L \cdot W$



ipotesi semplificative

$a = 0 \left\{ \begin{array}{l} T = f(z) \text{ (inerte variazioni lungo } x \text{ e } y) \\ J_{qx} = h(T - T_e) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} J_{qz} = -k \frac{dT}{dz} \\ z = 0 \rightarrow T = T_w \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} k = \text{cost} \end{array} \right.$





$$\left\{ \frac{d\theta}{dz} = C_1 Ne^{Ns} - C_2 Ne^{-Ns} \quad \textcircled{A} \right.$$

$$\left\{ 1 = C_1 + C_2 \rightarrow \sum_0 \theta = 1 \quad \textcircled{B} \right.$$

$$\left\{ 0 = C_1 Ne^N - C_2 Ne^{-N} \rightarrow \sum_1 \theta = 0 \quad \textcircled{C} \right.$$

→ ① + ② →

$$C_1 = 1 - C_2 \quad ; \quad Ne^N - C_2 Ne^N - C_2 Ne^{-N} = 0$$

$$C_2 = \frac{Ne^N}{(e^N - e^{-N})N} \rightarrow C_1 = \frac{e^N + e^{-N} - e^N}{e^N + e^{-N}} = \frac{e^{-N}}{e^N + e^{-N}} \quad C_1 \text{ e } C_2 \rightarrow \textcircled{D}$$

$$\theta = \frac{e^{-N}}{e^N + e^{-N}} e^{Ns} + \frac{e^N}{e^N + e^{-N}} e^{-Ns} \quad \Delta$$

$$\theta = \frac{1}{e^N + e^{-N}} \frac{[e^{N(1-z)} + e^{-N(1-z)}]}{2} \rightarrow \theta = \frac{1}{\cosh(N)} \cdot \cosh(N(1-z))$$

$$M = \frac{\int_0^W \int_0^L h(T - T_a) dz dy}{\int_0^W \int_0^L h(T_w - T_a) dz dy} = \frac{W \int_0^L h(T - T_a) dz}{W \int_0^L h(T_w - T_a) dz} = \frac{\int_0^L \frac{T - T_a}{T_w - T_a} dz}{\int_0^L dz}$$

$$dz = L dz \quad z=0 \rightarrow 0 \quad z=L \rightarrow 1$$

$$M = \frac{\int_0^1 \theta dz}{\int_0^1 dz} \rightarrow M = \frac{\int_0^1 \theta dz}{1} \rightarrow M = \int_0^1 \theta dz$$

$$M = \int_0^1 \frac{1}{\cosh(N)} \cdot \cosh(N(1-z)) dz \Rightarrow M = \left[ \frac{\sinh(N(1-z))}{\cosh(N)(N(-1))} \right]_0^1$$

$$\sinh(0) = 0 \rightarrow M = 0 - \frac{\sinh(N)}{\cosh(N)(-N)} \rightarrow M = \frac{\operatorname{tgh}(N)}{N}$$

$$j_q = Ah(T_w - T_a) \cdot M \rightarrow j_q = 2h(T_w - T_a)WL M$$

$$j_q = 2 \cdot 585 \cdot (260 - 176) (305 \cdot 10^{-3}) (61 \cdot 10^{-3}) M$$

$$M = \frac{\operatorname{tgh}(N)}{N} \quad ; \quad N = \sqrt{\frac{hL^2}{k_B}} = \sqrt{\frac{58(61 \cdot 10^{-3})^2}{86(4,05 \cdot 10^{-3})}} = 3,53$$

$$j_q = 516 \frac{\text{kcal}}{\text{h}}$$



$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{(r^2 J_{qc r})|_{r+\Delta r} - (r^2 J_{qc r})|_r}{\Delta r} = 0$$

$$\frac{d}{dr} (J_{qc r} r^2) = 0 \rightarrow J_{qc r} r^2 = C_1 \rightarrow \text{Forme}$$

$$-k r^2 \frac{dT}{dr} = C_1 \rightarrow \int dT = -\frac{C_1}{k} \int \frac{dr}{r^2} \rightarrow T = -\frac{C_1}{k} \left(-\frac{1}{r}\right) + C_2$$

$$\begin{cases} T = \frac{C_1}{k} \cdot \frac{1}{r} + C_2 \\ r = R \quad T = T_R \\ r = \infty \quad T = T_\infty \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_2 = T_\infty \quad r \rightarrow \infty \\ T_R = \frac{C_1}{k} \frac{1}{R} + T_\infty \rightarrow C_1 = (T_R - T_\infty) k R \end{cases}$$

$$T = \frac{(T_R - T_\infty) k R}{k} \cdot \frac{1}{r} + T_\infty \rightarrow T - T_\infty = (T_R - T_\infty) \left(\frac{R}{r}\right) \quad (1)$$

$$\begin{cases} J_{qc r}|_{r=R} = -k \frac{dT}{dr}|_{r=R} \\ J_{qc r}|_{r=R} = \frac{C_1}{R^2} \end{cases} \quad (2)$$

$$C_1 = (T_R - T_\infty) k R$$

$$\begin{cases} J_{qc r}|_R = (T_R - T_\infty) k \frac{R}{R^2} \\ J_{qc r}|_R = h (T_R - T_\infty) \end{cases} \rightarrow \frac{(T_R - T_\infty) k}{R} = h (T_R - T_\infty) \quad h = \frac{k}{R} \quad (3)$$

$$Nu = \frac{h(2R)}{k} = \frac{k(2R)}{kR} = 2 \quad (4)$$

Vale solo per il fluido in quiete.

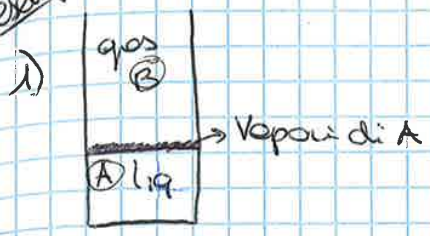
Per un fluido non in quiete  $\rightarrow Nu \neq 2 \rightarrow Nu = 2 + f(Re, Pr)$







esemp

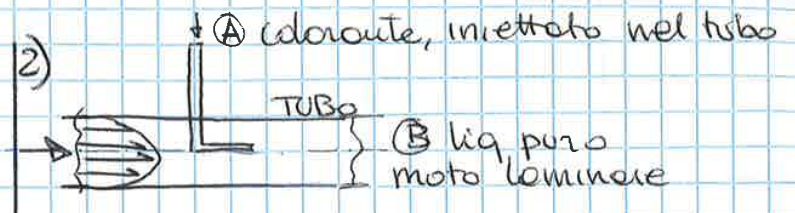


Solo diffusione

Per trasporto molecolare, B contro diffonde in A

A ↑ per evaporazione e per spostamento da alta concentrazione a bassa concentrazione

B ↓ da alta concentrazione a bassa concentrazione



A trasportato → per moto d'insieme  
 ↓  
 convezione

ma non solo!

c'è diffusione radialmente

convezione assiale + diffusione radiale

Diffusione

- sistema con almeno 2 componenti
- provocata da gradiente di concentrazione + altre forze spingenti
- le singole specie si muovono in maniera diversa fra loro e dalla miscela
- moto molecolare caotico che tende a uniformare le caratteristiche (es. concentrazione)

miscelate: variabili molliche      miscelate: variabili molari

Velocità di trasporto massica: massa i trasferita nell'unità di tempo e superficie

$\vec{n}_i = \rho_i \vec{v}_i$      $\left[ \frac{kg}{m^3} \right] \cdot \left[ \frac{m}{s} \right] = \left[ \frac{kg}{m^2 s} \right]$      $n_i \rightarrow$  convettivo + diffusivo

Velocità di trasporto molare: moli i trasferite nell'unità di tempo e superficie

$\vec{N} = C_i \vec{v}_i$      $\left[ \frac{mol}{m^3} \right] \cdot \left[ \frac{m}{s} \right] = \left[ \frac{mol}{m^2 s} \right]$

Velocità per sistemi Eulerei, fissi nello spazio

Se uso un sistema di riferimento lagrangiano:

$\vec{V}$  = velocità locale della miscela → media delle velocità delle componenti della miscela

$\vec{v}$  = media ( $\vec{v}_i$ ) → media ponderale locale della miscela



$$\sum_{i=1}^n \vec{n}_i \neq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \vec{j}_i = 0$$

Dimostriamo  $\sum_{i=1}^n \vec{j}_i = 0$

$$\sum_{i=1}^n \vec{n}_i = \vec{n}_{tot} = \sum_{i=1}^n (\vec{j}_i + w_i \sum_{k=1}^n \vec{n}_k) = \sum_{i=1}^n \vec{j}_i + \sum_{i=1}^n (w_i \sum_{k=1}^n \vec{n}_k)$$

$$\vec{n}_{tot} = \sum_{i=1}^n \vec{j}_i + \vec{n}_{tot} \sum_{i=1}^n w_i \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1$$

$$\vec{n}_{tot} = \vec{n}_{tot} + \sum_{i=1}^n \vec{j}_i \rightarrow \sum_{i=1}^n \vec{j}_i = 0$$

8/5

$$\vec{n}_i = \vec{j}_i + w_i \sum_{i=1}^n \vec{n}_i \quad p_i \vec{n}_{tot} \Rightarrow p_i \vec{v}$$

- $\vec{j}_i$  {
1. Temperatura
  2. Concentrazione
  3. Pressione totale
  4. Forze esterne
- } → Diffusione ordinaria

### 1. Diffusione termica - Effetto Soret

C'è un gradiente di temperatura e le diverse specie della miscela si comportano in modo diverso in presenza di esso. Le molecole delle varie miscele si muovono con velocità medie diverse da specie a specie (dipende da dimensioni, massa ecc.). In genere la diffusione termica si trascura quasi sempre rispetto alle altre. Si considera solo in casi in cui bisogna dividere i vari fluidi di miscela. (es. distillazione)

### 2. Diffusione per concentrazione

C'è un gradiente di concentrazione perché dovuto alla presenza di condizioni diverse all'interno del volume. È legato al moto caotico delle molecole.

### 3. Diffusione per pressione totale (es. centrifugazione)

C'è un gradiente di concentrazione totale. Le varie specie in miscela si muovono diversamente a causa della geometria della molecola.



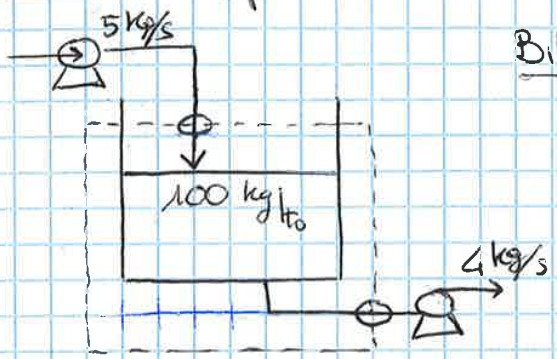
# Bilanci di materia

→ locali ← totali  
per componenti

→ integrali ← totali  
per componenti

## Bilancio integrale

es// Serbatoio alimentato da una pompa d'ingresso che fornisce 5 kg/s. Una pompa estrae 4 kg/s. All'inizio non esce liquido. A  $t = t_0$  le pompe vengono accese. Quanta acqua è presente a  $t = t_1$  dopo un  $\Delta t = t_1 - t_0 = 300s$ ?



Bilancio integrale → voglio sapere la variazione di liquido fra serbatoio e ambiente

- Bilancio integrale
- Volume di controllo → serbatoio
- eq. di bilancio → totale  
componente  
entirebbe

## Ipotesi semplificative

- Il liquido non evapora
- Il liquido è puro
- densità del liquido costante

$$a + u = e + g$$

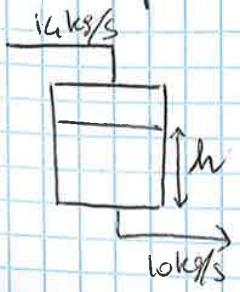
$\underline{g=0}$

$$a = \frac{dm}{dt} \quad u = \dot{m}_u \quad e = \dot{m}_e$$

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m}_e - \dot{m}_u \rightarrow \int_{t_0}^{t_1} dm = (\dot{m}_e - \dot{m}_u) \int_{t_0}^{t_1} dt$$

$$m|_{t_1} - m|_{t_0} = (\dot{m}_e - \dot{m}_u)(t_1 - t_0) \rightarrow m_{t_1} = m_{t_0} + (\dot{m}_e - \dot{m}_u)\Delta t = 100 + (5 - 4)300 = 400 \text{ kg}$$

es// Portata uscente di 14 kg/s, entrante di 14 kg/s. Serbatoio cilindrico con sezione di base di 1m<sup>2</sup>. Con che velocità si alza il livello h del liquido nel serbatoio?  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$   $S = 1 \text{ m}^2$



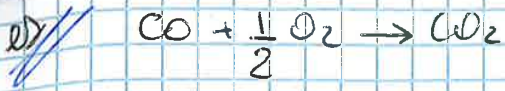
$\frac{dh}{dt} = ?$  Bilancio integrale totale  $\dot{m}_u = \text{vel del liquido l'esterno}$

$$\frac{dm}{dt} + \dot{m}_u = \dot{m}_e + \frac{g}{g} = 0 \quad \frac{d(\rho V)}{dt} \rightarrow \frac{d(\rho S h)}{dt} \rightarrow \frac{\rho S dh}{dt} = \dot{m}_e - \dot{m}_u$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\dot{m}_e - \dot{m}_u}{\rho S} = \frac{14 - 10}{1000 \cdot 1} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$$

$\left[ \frac{\text{kg m}^3}{\text{s kg m}^2} \right]$

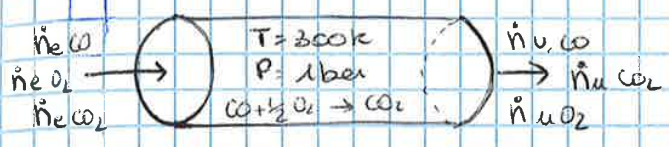




$\dot{n}_{e CO} \rightarrow 10 \frac{\text{kmol}}{\text{h}}$      $\dot{n}_{e O_2} \rightarrow 7 \frac{\text{kmol}}{\text{h}}$      $\dot{n}_{u \text{ tot}} \rightarrow 12 \frac{\text{kmol}}{\text{h}}$

Tenore di  $CO_2$  nelle corrente uscente  $P_{CO_2, u} = ? \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

$T = 300 \text{ K}$      $P_{\text{tot}} = 1 \text{ bar}$      $M_{CO_2} = 44 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$



$\frac{dn}{dt} = \dot{n}_e - \dot{n}_u + \sum_{i=1}^j \dot{V}_i \xrightarrow{\text{Sto}} 0 = (\dot{n}_{e CO} + \dot{n}_{e O_2}) - (\dot{n}_u) + \sum_{i=1}^j \dot{V}_i$

conditions Stationary  $(10 + 7) - (12) + \sum (-1 + 1 - 1/2) = 0 \quad \sum = 10 \frac{\text{kmol}}{\text{h}}$

Bilancio  $CO_2$   $\frac{dn_{CO_2}}{dt} = \dot{n}_{e CO_2} - \dot{n}_{u CO_2} + \sum \dot{V}_{CO_2}$

$0 = 0 - \dot{n}_{u CO_2} + \sum \dot{V}_{CO_2} \rightarrow \dot{n}_{u CO_2} = 10 \frac{\text{kmol}}{\text{h}}$

$X_{CO_2} = \frac{\dot{n}_{u CO_2}}{\dot{n}_u} = \frac{5}{6}$      $CO_2 = X_{CO_2} \frac{P}{RT} \rightarrow P = ? \rightarrow \text{tutto per } M_{CO_2}$

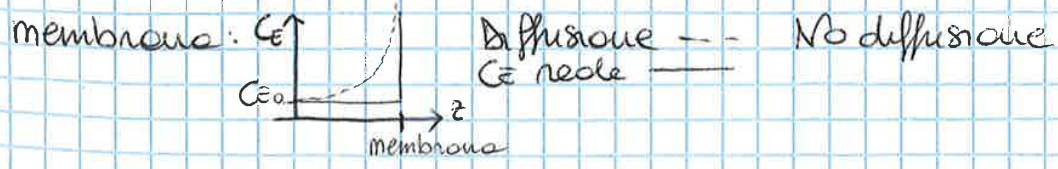
$P = 10^5 \text{ Pa}$      $R = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}$      $T = 300 \text{ K}$      $M = 44 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \rightarrow P = 1470 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$

Devo esplicitare i meccanismi: quando qualita' entrate e uscite

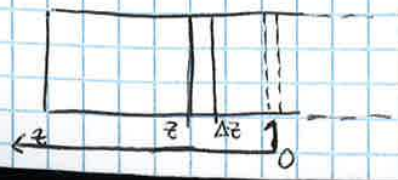


membrana semipermeabile: permeabile a reagenti eutima e prodotti, impermeabile all'eutima ad accumularsi

L'eutima non reagisce, funge da coibente. Il tutto si muove da destra verso sinistra per diffusione



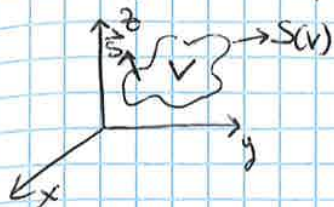
Volutare la concentrazione dell'eutima nel reattore





## Equazione generalizzata per il trasferimento di materia

Per l'energia non potremmo definirli perché serve la quantità di moto



i trasferimenti avvengono lungo il vettore  $\vec{S}$  alla superficie

$V$  = volume di controllo

Componente A

Termini mossi, ma si può fare anche con i moli

$$a + u = g + e$$

$$\hookrightarrow \frac{d(m_A)}{dt} + \dot{m}_{inA} - \dot{m}_{exA} - \dot{m}_{gA} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho_A dV \quad \int_{S(V)} \underbrace{\vec{n}_A \cdot \vec{S}}_{\rho_A \vec{v}_A} dS \rightarrow \int_{S(V)} \rho_A \vec{v}_A \cdot \vec{S} dS \rightarrow \int_V \nabla \cdot (\rho_A \vec{v}_A) dV$$

$$\dot{m}_{gA} = \int_V r_A dV \quad r_A \rightarrow \left[ \frac{\text{mola}}{\text{m}^3 \text{s}} \right] \rightarrow \text{velocità generazione per unità di volume di A}$$

$$\int_V \left[ \frac{d\rho_A}{dt} + \nabla \cdot (\rho_A \vec{v}_A) - r_A \right] dV = 0$$

$$\frac{d\rho_A}{dt} + \nabla \cdot (\rho_A \vec{v}_A) - r_A = 0$$

$$\rho_A \vec{v}_A = \vec{n}_A = \vec{j}_A + w_A \vec{n} = \underbrace{-D_{AB} \nabla \rho_A}_{\text{diffusività}} + w_A \rho \vec{v}$$

$$\frac{d\rho_A}{dt} + \nabla \cdot (-D_{AB} \nabla \rho_A + \rho_A \vec{v}) - r_A = 0$$

$$\frac{d\rho_A}{dt} + \nabla \cdot (\rho_A \vec{v}) = r_A + D_{AB} \nabla^2 \rho_A \rightarrow \text{eq. generale. Posso non cercare il volume di controllo infinitesimo!}$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \left[ \frac{\partial (\rho_A \vec{v}_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho_A \vec{v}_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho_A \vec{v}_z)}{\partial z} \right] = r_A + D_{AB} \left[ \frac{\partial^2 \rho_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho_A}{\partial z^2} \right]$$



$$(1 - X_A) N_{Ar} = J_{Ar} \rightarrow N_{Ar} = \frac{J_{Ar}}{1 - X_A}$$

Systema diluito  $\Rightarrow X_A \ll 1 \rightarrow 1 - X_A \approx 1 \Rightarrow N_{Ar} = J_{Ar}$

$$N_{Ar} = J_{Ar} = -D_{AB} \frac{dC_A}{dr} \rightarrow -r D_{AB} \frac{dC_A}{dr} = C_1$$

$$\int dC_A = -\frac{C_1}{D_{AB}} \int \frac{dr}{r} \rightarrow C_A = -\frac{C_1}{D_{AB}} \ln(r) + C_2$$

$$\left\{ \begin{aligned} C_{A0} &= -\frac{C_1}{D_{AB}} \ln(r_0) + C_2 \\ 0 &= -\frac{C_1}{D_{AB}} \ln(r_2) + C_2 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} C_{A0} &= -\frac{C_1}{D_{AB}} \ln(r_0) + C_2 \\ 0 &= -\frac{C_1}{D_{AB}} \ln(r_2) + C_2 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} C_2 &= \frac{C_1}{D_{AB}} \ln(r_2) \rightarrow C_{A0} \frac{\ln(r_2)}{\ln(r_2/r_0)} \\ C_{A0} &= -\frac{C_1}{D_{AB}} \ln(r_0) + \frac{C_1}{D_{AB}} \ln(r_2) \rightarrow C_1 = \frac{C_{A0} D_{AB}}{\ln(r_2/r_0)} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} C_2 &= \frac{C_1}{D_{AB}} \ln(r_2) \rightarrow C_{A0} \frac{\ln(r_2)}{\ln(r_2/r_0)} \\ C_{A0} &= -\frac{C_1}{D_{AB}} \ln(r_0) + \frac{C_1}{D_{AB}} \ln(r_2) \rightarrow C_1 = \frac{C_{A0} D_{AB}}{\ln(r_2/r_0)} \end{aligned} \right.$$

$$C_A = -\frac{C_{A0}}{\ln(r_2/r_0)} \ln(r) + \frac{\ln(r_2)}{\ln(r_2/r_0)}$$

$$\frac{C_A}{C_{A1}} = \frac{\ln(r_2/r_0)}{\ln(r_0/r_2)}$$

$$r N_{Ar} \Big|_{r_2} = C_1 = \frac{C_{A0} D_{AB}}{\ln(r_2/r_0)}$$

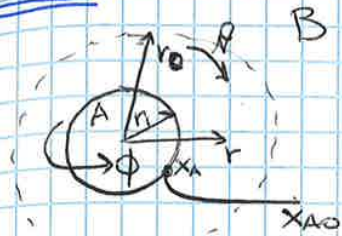
$$\rightarrow r_2 N_{Ar} \Big|_{r_2} \rightarrow N_{Ar} \Big|_{r_2} = \frac{C_{A0} D_{AB}}{\ln(r_2/r_0)} \cdot \frac{1}{r_2}$$

$$\dot{n}_{Ar} \Big|_{r=r_2} = N_{Ar} \Big|_{r=r_2} \cdot 2\pi L r_2 \Rightarrow \frac{C_{A0} D_{AB} 2\pi L}{\ln(r_2/r_0)} = \dot{n}_{Ar} \Big|_{r_2}$$

$$\left[ \frac{\text{mola}}{\text{s}} \right]$$



**ES 3**



- $x_{A0} = \text{cost uniforme}$
- Condizioni stazionarie  $R_A = 0$
- $\begin{cases} r=r_1 & x_A = x_{A1} \\ r=r_0 & x_A = x_{A0} \end{cases}$

•  $x_{A1}$  è uniforme sulla superficie sferica

Dimostrare che  $r^2 N_{Ar} = r_1^2 N_{Ar}|_{r_1} = C_1$

•  $N_A \begin{cases} N_{Ar} = 0 \\ N_{A\phi} = 0 \\ N_{Ar} \neq 0 \end{cases}$

Film  $(r_0 - r_1)$ : il gas è stagnante (B è in quiete)

Posso considerare il volume della goccia costante. Se non potessi dire questo avrei una condizione non stazionaria

• Volume goccie = cost =  $f(t) = \text{cost}$

29/5

•  $\Delta_{AB} = \text{costante}$  rispetto a T e concentrazione

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + \left( \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 N_{Ar}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (N_{Ar} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial N_{A\phi}}{\partial \phi} \right) = R_A \Big|_{r=0}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 N_{Ar}) = 0 \quad r^2 N_{Ar} = C_1 = r_1^2 N_{Ar}|_{r=r_1}$$

$$N_{Ar} = J_{Ar} + x_A (N_{Ar} + N_{B,r}) \rightarrow N_{Ar} = \frac{J_{Ar}}{1-x_A} = \frac{-\Delta_{AB}}{1-x_A} \cdot \frac{dC_A}{dr} \rightarrow \frac{C_1}{dr}$$

$$-\frac{r^2 \Delta_{AB} C}{1-x_A} \frac{dx_A}{dr} = C_1 \rightarrow \int \frac{dx_A}{1-x_A} = -\frac{C_1}{\Delta_{AB} C} \int \frac{1}{r^2} dr$$

$$-\ln(1-x_A) = \frac{C_1}{\Delta_{AB} C} \frac{1}{r} + C_2 \quad \begin{cases} r=r_1 & x_A = x_{A1} \\ r=r_0 & x_A = x_{A0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\ln(1-x_{A1}) = \frac{C_1}{\Delta_{AB} C} \frac{1}{r_1} + C_2 \\ -\ln(1-x_{A0}) = \frac{C_1}{\Delta_{AB} C} \frac{1}{r_0} + C_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_2 = -\ln(1-x_{A1}) - \frac{C_1}{\Delta_{AB} C} \frac{1}{r_1} \\ -\ln(1-x_{A0}) = \frac{1}{\Delta_{AB} C} \frac{C_1}{r_0} - \ln(1-x_A) - \frac{C_1}{\Delta_{AB} C} \frac{1}{r_1} \end{cases}$$

$$\ln \left( \frac{1-x_{A1}}{1-x_{A0}} \right) \cdot \Delta_{AB} C = C_1 \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right) \rightarrow -\frac{(r_0 - r_1)}{r_1 r_0}$$

$$C_1 = \ln \left( \frac{1-x_{A0}}{1-x_{A1}} \right) \cdot \frac{r_1 r_0 \Delta_{AB} C}{r_0 - r_1}$$



$$\vec{N}_A = \begin{cases} N_{Az} \neq 0 \\ N_{Ax} = 0 \\ N_{Ay} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r N_{Az} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{Az}}{\partial r} + \frac{\partial N_{Az}}{\partial z} \right) = R_A$$

$$\frac{dN_{Az}}{dz} = -k C_A$$

$$N_{Az} = J_{Az} + x_A (N_{Az} + N_{Bz} + N_{Cz})$$

Inquiete trascurabile per ipotesi

$$N_{Az} = \frac{J_{Az}}{1-x_A} \rightarrow N_{Az} = J_{Az} = -J_{AB} \frac{dC_A}{dz}$$

$x_A \ll 1 \Rightarrow 1-x_A \approx 1$

$$-J_{AB} \frac{d^2 C_A}{dz^2} = -k C_A$$

$$\frac{d^2 C_A}{dz^2} - \frac{k}{J_{AB}} C_A = 0 \quad \begin{cases} C_A = C_{A0} \zeta \rightarrow dC_A = C_{A0} d\zeta \rightarrow d^2 C_A = C_{A0} d^2 \zeta \\ z = \zeta L \rightarrow dz = L d\zeta \rightarrow dz^2 = L^2 d\zeta^2 \end{cases}$$

$$\frac{C_{A0}}{L^2} \frac{d^2 \zeta}{d\zeta^2} - \frac{k}{J_{AB}} C_{A0} \zeta = 0$$

$$\frac{d^2 \zeta}{d\zeta^2} - \frac{k L^2}{J_{AB}} \zeta = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \zeta}{d\zeta^2} = \varphi^2 \zeta = 0$$

$\varphi^2$

$$\int z=0 \quad C_A = C_{A0} \rightarrow \zeta = 0 \quad \zeta = 1$$

$$\int z=L \quad \frac{dC_A}{dz} = 0 \rightarrow \zeta = 1 \quad \frac{d\zeta}{d\zeta} = 0 \quad \text{flusso di A sul fondo è nullo}$$

$y = c e^{\lambda x}$  soluzione tipo

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{a dy}{dx} + by = 0 \rightarrow \lambda^2 + \varphi^2 = 0 \quad b = -\varphi^2 \quad a = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \varphi \Rightarrow \zeta = C_1 e^{+\varphi \zeta} + C_2 e^{-\varphi \zeta}$$

Condizioni al contorno

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ \frac{d\zeta}{d\zeta} = 0 \rightarrow \frac{d\zeta}{d\zeta} = C_1 \varphi e^{\varphi} + C_2 e^{-\varphi} (-\varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\zeta}{d\zeta} = C_1 \varphi e^{\varphi} - C_2 \varphi e^{-\varphi} \\ C_2 = 1 - C_1 \end{cases}$$

ricavo  $C_1$  e  $C_2$   $C_1 = \frac{e^{-\varphi}}{e^{-\varphi} + e^{\varphi}} \quad C_2 = \frac{e^{\varphi}}{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}$

$$\zeta = \frac{\cosh(\varphi(\zeta-1))}{\cosh(\varphi)} \quad \cosh(\varphi) = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}$$



Vogliamo arrivare alla forma  $j_{xy} = -J_{AA^*} \cdot \rho \frac{dW_A}{dy}$

$$W_A|_{y-a} = W_A|_y - a \frac{dW_A}{dy}$$

$$W_A|_{y+a} = W_A|_y + a \frac{dW_A}{dy}$$

$$j_{xy} = \frac{1}{4} \rho \bar{u} (W_A|_{y-a} - W_A|_{y+a}) = \frac{1}{4} \rho \bar{u} (W_A|_y - a \frac{dW_A}{dy} - W_A|_y - a \frac{dW_A}{dy}) =$$

$$= -\frac{1}{4} \rho \bar{u} (2 \cdot \frac{2}{3} \lambda \frac{dW_A}{dy}) \Rightarrow j_{xy} = -\frac{1}{3} \rho \bar{u} \lambda \frac{dW_A}{dy} = -J_{AA^*} \rho \frac{dW_A}{dy}$$

$$J_{AA^*} = \frac{1}{3} \bar{u} \lambda \Rightarrow J_{AA^*} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8 k_B T}{\pi m_A}} \frac{1}{\sqrt{2} d_A^2 \pi n}$$

Questa equazione ha delle limitazioni.

Se ho due masse A, B diverse

$$J_{AB} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{8 k_B T}{\pi}} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right)} \frac{1}{\pi \left( \frac{d_A + d_B}{2} \right)^2 n}$$

Modello alternativo Chapman-Enskog

$$J_{AB} \cdot C = 2,2646 \cdot 10^{-5} \sqrt{T \left( \frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right)} \cdot \frac{1}{\sigma_{AB}^2 \Omega_{D,AB}}$$

$$\left[ \frac{cm^2}{s} \right]$$

potenziale  
d'interazione

$$\Omega_{D,AB} = f \left( \frac{k_B T}{\epsilon_{AB}} \right)$$

## Diffusività nei liquidi:

liquido  $\approx$  fluido ad alto densità  $\rightarrow$  molte interazioni

### Modello Stokes-Einstein

$\hookrightarrow$  Diffusione  $\approx$  modello di forze

(A) soluto (B) solvente (A)  $\rightarrow$  m.a da r.a

Sfere solide immerse in un liquido

$$m_A \frac{dV_A}{dt} = \sum (F_i) \left\{ \begin{array}{l} \text{gravità} \\ \text{Archimede} \end{array} \right\} \text{trascurabili}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{① trascinamento / Stokes} \\ \text{② spingente, per trasporto di materia} \end{array} \right.$$

① è legato all'attrito viscoso

② è una forza imposta per descrivere il trasporto di materia