



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1828A -

ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Bosio Roberto

MATERIA: Appunti di Idraulica - Prof. Ridolfi

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

IDRAULICA

29/9

I fluidi di cui ci occuperemo sono denominati

FLUIDI NEWTONIANI FREDDI.

Col termine "FREDDI" indichiamo che considereremo un range di Temperature molto $[0-40^{\circ}\text{C}]$ in cui dunque potremo assumere che il comportamento dei fluidi NEWTONIANI non venga influenzato dalla Temperatura (θ) e dal GRADIENTE TERMICO.

Fluido: Entità anisotropa o liquida che:

- 1) oppone una resistenza minima alla deformazione
- 2) ha una velocità di deformazione elevata

I fluidi, a differenza dei solidi, oppongono una resistenza alla deformazione che è DIRETTAMENTE PROPORZIONALE alla VELOCITÀ di DEFORMAZIONE!

Nei fluidi la distinzione tra liquidi e gas si fa mediante la resistenza che oppongono a parità di velocità di deformazione:

- GAS \leftrightarrow minore Resistenza
- LIQUIDO \leftrightarrow maggiore Resistenza

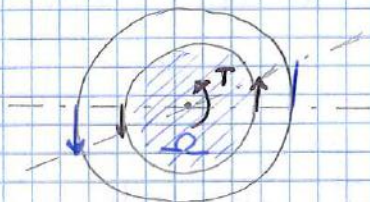
Osservando un fluido a "grande" scala (mm; cm...) possiamo assumere che siamo in presenza di un MEZZO CONTINUO in cui possiamo applicare i concetti di spostamento infinitesimo, integrale ecc...

CARATTERISTICHE del FLUIDO

DENSITÀ (ρ) $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$

La densità è funzione sia della Temperatura che del volume. Possiamo però considerarla costante x l'ipotesi di FLUIDI NEWTONIANI FREDDI che

Se applichiamo una coppia al cilindro + grande notiamo che dopo un po anche quello interno inizia a ruotare.
 Questo avviene perché il liquido ha trasmesso in parte la coppia che agiva sul cilindro esterno.



Chiamiamo T la coppia sul cilindro interno.

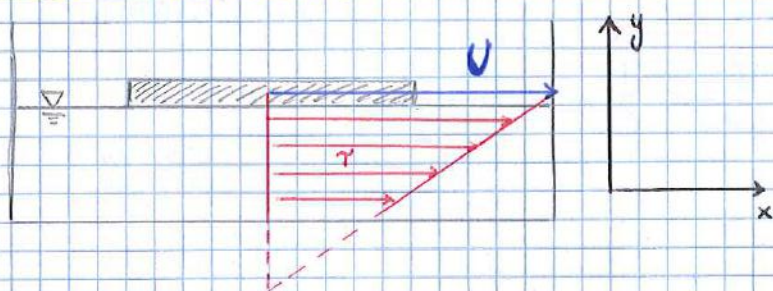
$$T \propto (\text{tipo di liquido}, r, \Delta v, \frac{1}{\Delta r})$$

Δv = differenza di velocità tangenziale tra i due cilindri.

$$T = \mu \cdot r \cdot \left(\frac{\Delta v}{\Delta r} \right) \rightarrow \text{GRADIENTE delle Velocità in direzione } \perp \text{ alla Velocità tangenziale.}$$

$$\frac{T}{r} = \mu \cdot \frac{\Delta v}{\Delta r} \rightarrow \tau = \mu \cdot \frac{dv}{dr} \quad \begin{array}{l} \text{TENSIONI TANGENZIALI in UN FLUIDO} \end{array}$$

Le Tensioni Tangenziali in un fluido sono pari ad una costante tipica di ciascun fluido (VISCOSITÀ) per il gradiente delle velocità lungo l'asse normale alla velocità.



$$\tau = \mu \cdot \frac{dv}{dy}$$

• VISCOSITÀ CINEMATICA (ν)

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \text{Non dipende più dalla massa}$$

NB Non bisogna confondere le due viscosità dinamica con quella cinematica!

$$\mu_{H_2O} \gg \mu_{aria} \quad \nu_{aria} \gg \nu_{H_2O}$$

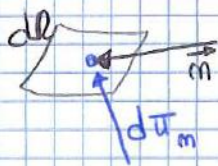
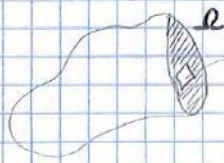
FORZE SU UN FLUIDO

Distinguiamo due tipi di forze:

- DI MASSA
- DI SUPERFICIE

Forze di superficie

Sono tutte quelle forze che agiscono su una qualsiasi superficie di fluido individuabile (intorno a di confine).



$d\pi_m$ = Forza applicata ad un dL orientata secondo \vec{m} .

Chiamo
$$\vec{\phi}_m = \lim_{dL \rightarrow 0} \frac{d\pi_m}{dL}$$

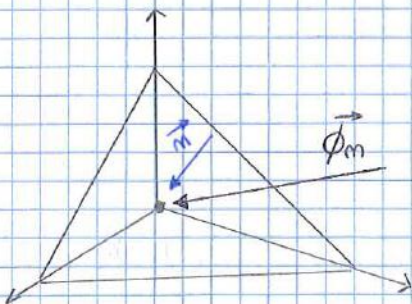
$\vec{\phi}_m$ = sforzo / tensione riferito a una unità di sup orientata secondo \vec{m} .

NB Se cambio orientamento (cambio \vec{m}) allora cambierà anche $\vec{\phi}_m$!!

$$\vec{\phi}_m = \phi_m(x, y, z, \vec{m})$$

La tensione in un punto qualsiasi di un fluido è funzione della posizione ma anche di \vec{m} .

$$\vec{\pi}_m = \int_{\Omega} \vec{\phi}_m dL$$



$$\begin{cases} dL_x = -dL \cos \hat{m}_x \\ dL_y = -dL \cos \hat{m}_y \\ dL_z = -dL \cos \hat{m}_z \end{cases}$$

$\hat{m}_x, \hat{m}_y, \hat{m}_z$ sono i 3 coseni direttori di \vec{m} .

• FORZE di MASSA

Le forze di massa sono $\propto dm$ dunque siccome

$$m = \rho \cdot V \rightarrow dm = \rho \cdot dx dy dz$$

Sono dunque forze infinitesime di 3° ordine e dunque trascurabili rispetto a quelle di superficie che sono infinitesime di 2° ordine.

30/9

STATICA dei FLUIDI

Più nella condizione $\vec{U} = 0$ di conseguenza essendo $\vec{U} = 0$ anche $\gamma = 0$ ovvero in STATICA

NON CI SONO TENSIONI TANGENZIALI!

IL TENSORE è sempre una matrice diagonale dunque e di conseguenza posso scrivere che:

$$\vec{\phi}_m = p \cdot \vec{m}$$

Le equazioni della STATICA valgono per tutti i liquidi che passano per l'ORIGINE del PIANO REOLOGICO.

Siccome non ci sono γ , $\vec{\phi}_m$ ha solo componente NORMALE alla superficie e possiamo scrivere che:

$$|\vec{\phi}_m| = \sigma_m$$

$$\text{Di conseguenza: } \begin{cases} |\phi_x| = \sigma_x \\ |\phi_y| = \sigma_y \\ |\phi_z| = \sigma_z \end{cases}$$

Scampando σ_m lungo i 3 assi possiamo scrivere che:

$$\begin{cases} \sigma_m \cos \hat{m}_x = \sigma_x \cos \hat{m}_x \\ \sigma_m \cos \hat{m}_y = \sigma_y \cos \hat{m}_y \\ \sigma_m \cos \hat{m}_z = \sigma_z \cos \hat{m}_z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sigma_m = \sigma_x \\ \sigma_m = \sigma_y \\ \sigma_m = \sigma_z \end{cases} \rightarrow \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

Ricaviamo così che $\vec{F} \cdot \rho = \text{grad}(p)$ EQUAZIONE della STATICA dei FLUIDI INDEFINITA

OSSERVAZIONI SULL' EQUAZIONE :

1) Se \vec{F} ammette potenziale possiamo scrivere che $\vec{F} = \text{grad}(U)$ di conseguenza :

$$\rho \cdot \text{grad}(U) = \text{grad}(p)$$

Notiamo che $\text{grad}(p) = 0 \iff \text{grad}(U) = 0$ ovvero la pressione rimane costante quando il potenziale della \vec{g} è costante ovvero quando la quota non cambia!!

$$\rightarrow \vec{p}(z) !$$

2) Poiché $\rho = \text{costante}$ $\rho \vec{F} = \text{grad}(p)$ posso scrivere $\vec{F} = \text{grad}\left(\frac{p}{\rho}\right)$

3) A noi interessa il fluido nel suo complesso non nei vari punti che lo compaiono! Integrando sul volume ricaviamo che :

$$\int_V \rho \vec{F} dV = \int_V \text{grad}(p) dV \Rightarrow \int_V \vec{F} dm = \int_V \text{grad}(p) dV$$

$$\vec{F} \cdot dm = d\vec{P} \leftarrow \text{Forza peso}$$

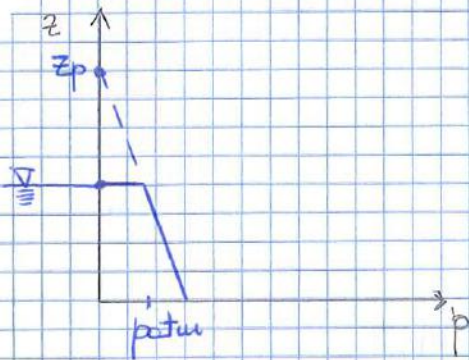
$$\vec{P} = \int_V \text{grad}(p) dV \quad \text{applico Gauss}$$

$$\vec{P} = - \int_{\partial V} p \cdot \vec{n} d\Omega \quad \rightarrow \quad \vec{P} = - \vec{F}_{\text{sup}}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{P} + \vec{F}_c = 0}$$

EQUAZIONE GLOBALE della STATICA dei FLUIDI

Possiamo dunque dire che la pressione in un fluido è pari al suo peso specifico per il suo affondamento rispetto al PCIA.



$$z_p = \frac{p_{atm}}{\gamma}$$

$$z_{p_{H_2O}} = 10,33 \text{ mt}$$

$$z_{p_{Hg}} = 0,73 \text{ mt}$$

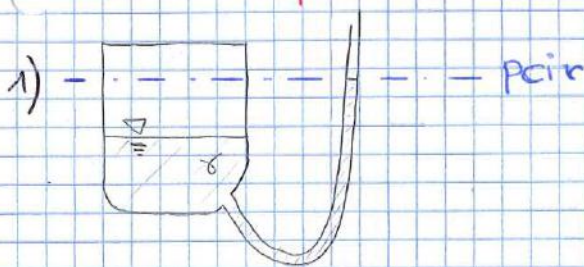
Semplificazione:

Possiamo togliere la atmosferica. $p_r = p - p_{atm}$

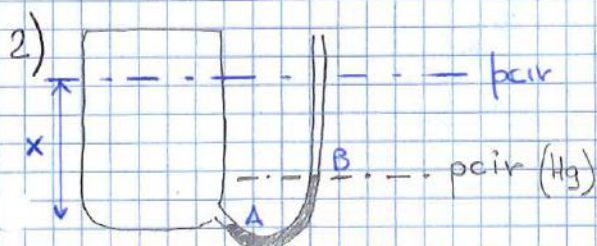
- A questo punto se abbiamo un liquido con un pelo libero esso coincideva con il nuovo piano di pressione RELATIVA = 0 detto PIANO dei CARICHI IDROSTATICI RELATIVI (pcir).

- Possiamo quindi dire che la pressione relativa in un fluido è pari al suo peso specifico per il suo affondamento rispetto al PCIR.

METODI PER MISURARE LA PRESSIONE



Usando un semplice tubo collegato al serbatoio. Se le pressioni sono però molto alte serve un tubo molto alto!

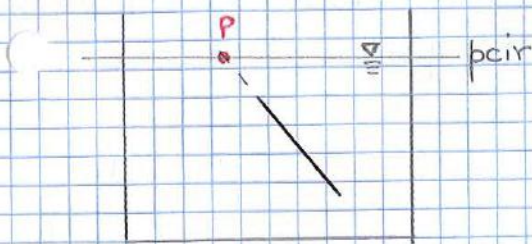


$$p_A = \gamma_H \cdot h_A$$

Siccome in A il meniscolo è in equilibrio col fluido

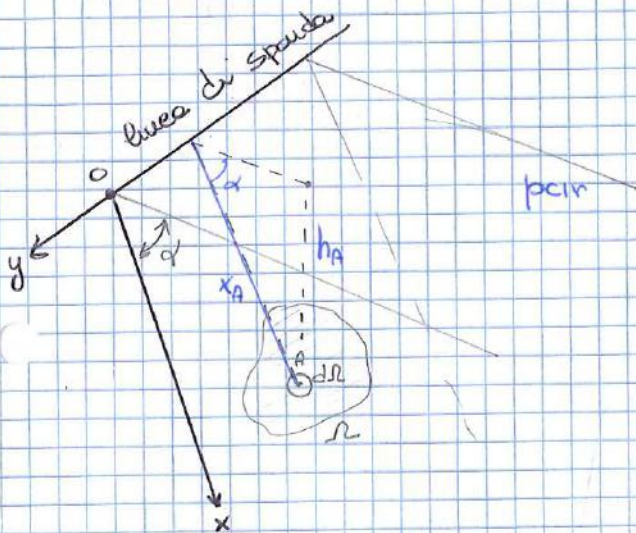
$$\gamma_H \cdot h_A = \gamma \cdot x \rightarrow x = h_A \cdot \frac{\gamma_H}{\gamma}$$

SPINTA SULLE SUPERFICIE



$P =$ LINEA di SPONDA

l'intersezione tra $pcir$ e il piano che contiene la superficie è detta LINEA o RETTA di SPONDA.



Essendo in statica la spinta sarà \perp alla superficie visto che $\gamma = 0$

Fisso un SR con O
 $y \equiv$ con linea di sponda
 $x \equiv$ altra generatrice del piano.

$$\left. \begin{aligned} \phi_A &= \delta \cdot h_A \\ h_A &= x_A \sin \alpha \end{aligned} \right\} \rightarrow \delta \cdot x_A \sin(\alpha) = p_A$$

$$dS = \phi_A \cdot dR = (x_A \sin \alpha) \delta \cdot dR$$

Integrando sull'intera superficie Ω nuovo

$$\int_{\Omega} x \sin \alpha \delta \, dR = \delta \sin \alpha \int x \, dR = \delta \sin \alpha \vec{M}_y$$

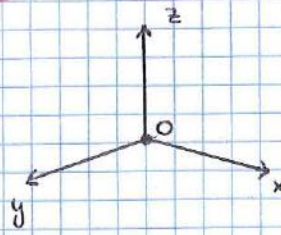
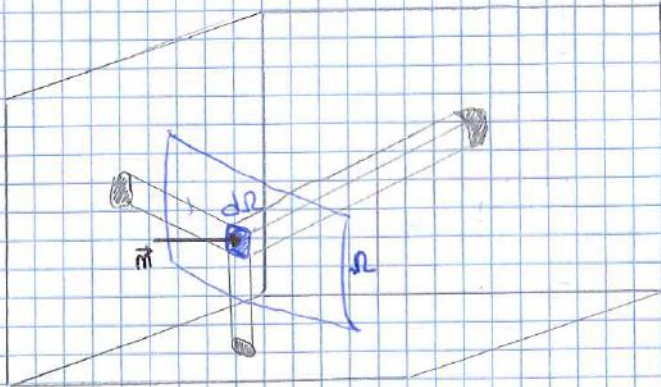
Ricordando che il MOMENTO STATICO è pari a $x_G \cdot \Omega$ posso scrivere che:

$$S = \delta \cdot x_G \cdot \sin \alpha \cdot \Omega \rightarrow \boxed{S = \delta \cdot h_G \cdot \Omega}$$

La spinta su una superficie piana è pari alla pressione nel baricentro per la superficie.

SPINTE SULLE SUPERFICIE CURVE

1/40



$$dS = p \cdot dL = h \delta dL \vec{m}$$

$$\begin{cases} dS_x = p \cdot dL \cos \hat{m}_x = p \cdot dL_x = h \delta dL_x \\ dS_y = p \cdot dL \cos \hat{m}_y = p \cdot dL_y = h \delta dL_y \\ dS_z = p \cdot dL \cos \hat{m}_z = p \cdot dL_z = h \delta dL_z \end{cases}$$

$$S_x = \int_{-L_x} h \delta dL_x$$

Dalla formula si evince che la componente lungo la direzione x equivale alla spinta che si genererebbe su una superficie piana corrispondente alla proiezione della sup. curva sul piano yz .

Analizzando y e z ricaviamo:

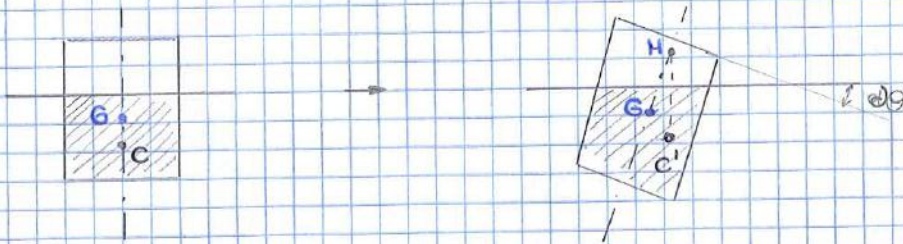
$$S_y = \int dL_y h \delta dL_y$$

$$S_z = \int dL_z h \delta dL_z$$

S_z corrisponde al peso del volume d'acqua / fluido che c'è sopra la superficie!

Come determinare \vec{GM}

Ipotesi una lieve oscillazione $d\theta$



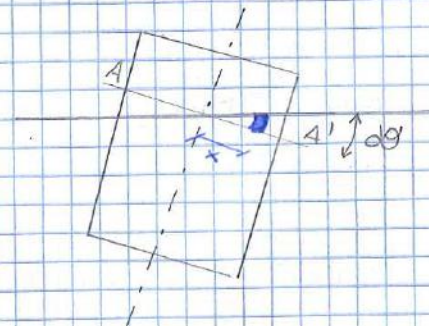
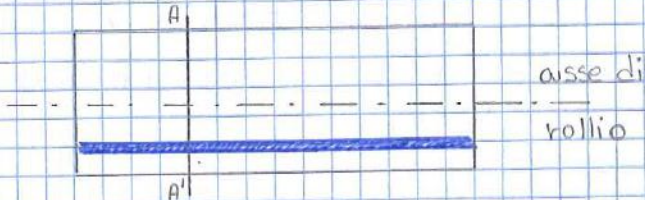
Calcoliamo il braccio della coppia $\rightarrow b = \bar{GM} \cdot \sin d\theta$
 per l'ipotesi delle piccole oscillazioni $\sin(d\theta) = d\theta$

$$b = \bar{GM} \cdot d\theta$$

$$\text{COPPIA} : (\delta V_c) \bar{GM} d\theta = M_G$$

Possiamo vedere la coppia come una reazione provocata dall'immersione di una porzione di barca da un lato e dall'emersione di una stessa porzione dal lato opposto.

VISTA dall'ALTO



$$dV = dR \cdot x \cdot d\theta \quad dF = \delta dV = \delta x \cdot dR \cdot d\theta$$

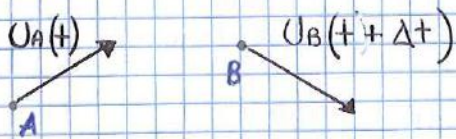
$$dM = dF \cdot x = \delta x^2 \cdot dR \cdot d\theta$$

$$M_{\text{rot}} = \int dM = \int x^2 \delta \cdot dR \cdot d\theta = \delta \cdot d\theta \int x^2 \cdot dR = \delta \cdot d\theta \cdot I_{\text{ref}}$$

$$\rightarrow \delta V_c \cdot \vec{GM} \cdot d\theta = \delta \cdot d\theta \cdot I_{\text{ref}} \rightarrow \boxed{GM = \frac{I_{\text{ref}}}{V_c}}$$

Il problema fondamentale nel METODO EULERIANO sta nel fatto che non posso esprimere l'ACCELERAZIONE \vec{A} come derivata di \vec{U} rispetto al tempo.

Ciò è dovuto al fatto che qui non seguo più una particella ma bensì suo punto e osservo come varia \vec{U} attorno al punto; ma allora l'accelerazione non sarebbe di nessuno visto che in t_0 nel punto c'è una particella e nell'istante t^* ce n'è un'altra.



Con Lagrange:

$$\vec{A} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{U_B(t+\Delta t) - U_A(t)}{\Delta t} = \frac{\partial U}{\partial t}$$

Con l'approccio Euleriano servono alcune piccole accorgimenti:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{U_B(t+\Delta t) - U_B(t) - U_A(t) + U_B(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{U_B(t+\Delta t) - U_B(t)}{\Delta t} + \frac{U_B(t) - U_A(t)}{\Delta t} \right) = \\ &= \frac{\partial U}{\partial t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{U_B(t) - U_A(t)}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) \\ &= \frac{\partial U}{\partial t} + \left| \frac{\partial U}{\partial s} \right| |\vec{U}| \end{aligned}$$

$$\vec{A} = \frac{\partial U}{\partial t} + |\vec{U}| \cdot \frac{\partial U}{\partial s}$$

ACCELERAZIONE EULERIANA
indicata anche come
 $\frac{DU}{Dt}$ (derivata sostanziale)

Questo tipo di derivata si può applicare a qualunque grandezza!

$$\frac{D(\cdot)}{Dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + |\vec{U}| \cdot \frac{\partial(\cdot)}{\partial s}$$

TIPICI di MOTO in UN FLUIDO

► MOTO VARIO : Significa che abbiamo una dipendenza sia dallo spazio che dal tempo del campo di moto.

$$\vec{U} = U(x, y, z, t)$$

► MOTO PERMANENTE : Il campo di Moto non è influenzato dal tempo.

$$\vec{U} = U(x, y, z)$$

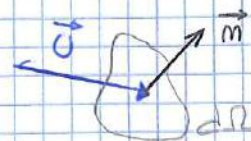
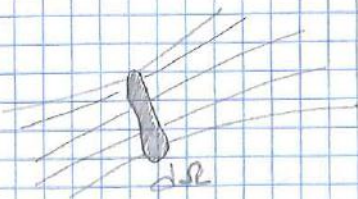
► MOTO UNIFORME : Il campo di Moto non cambia lungo una traiettoria.

► MOTO PIANO : Il campo di Moto dipende solo da due coordinate spaziali.

LA PORTATA

Consideriamo all'interno di un fluido una curva chiusa, essa individua una superficie infinitesimale dS .

Ad un generico istante t^* individua tutte le LINEE di CORRENTE che attraversano la mia superficie. Individua in questo modo quello che viene chiamato TUBO di FUSO.



Consideriamo la componente normale a dS di \vec{U} .
 $\vec{U}_m = \vec{U} \cdot \vec{m}$ questa componente è quella che contribuisce a far scorrere il fluido attraverso la superficie.

Definiamo la PORTATA INFINITESIMA come

$$dQ = \vec{U}_m \cdot dS = \vec{U} \cdot \vec{m} \cdot dS$$

$$j) - \frac{\partial p_v}{\partial y} dx dy dz dt$$

$$k) - \frac{\partial p_w}{\partial z} dx dy dz dt$$

Combinando in forma vettoriale ricaviamo che il bilancio uscente/entrante è

$$- \left(\frac{\partial p_u}{\partial x} + \frac{\partial p_v}{\partial y} + \frac{\partial p_w}{\partial z} \right) dx dy dz dt = \boxed{-\operatorname{div}(\rho \vec{U}) dx dy dz dt}$$

A questo punto eguagliamo il bilancio di massa con la variazione di massa in dV .

$$dm = \rho dx dy dz = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt$$

$$\rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt = -\operatorname{div}(\rho \vec{U}) dx dy dz dt$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{U}) = 0} \quad \text{EQUAZIONE DI CONTINUITÀ (PRINCIPIO di CONSERVAZIONE della MASSA)}$$

Osservando l'equazione abbiamo che la variazione della densità nel tempo dev'essere equilibrata dalla $\operatorname{div}(\rho \vec{U})$.

Questa formula vale per ogni punto del fluido.

Diunque ρ ed \vec{U} non sono totalmente indipendenti tra loro !!

► Nel caso di fluido incomprimibile $\rho = \text{cost}$

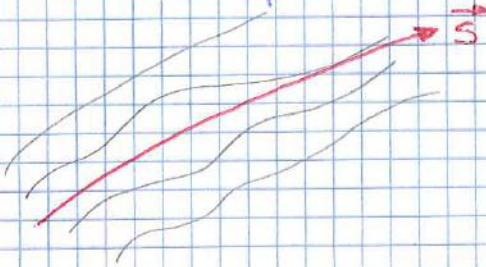
$$\rightarrow \operatorname{div}(\vec{U}) = 0$$

NB Quando un campo di moto \vec{U} rispetta l'equazione di CONTINUITÀ si dice che il campo è SOLENOIDALE.

IL MOTO UNIFORME

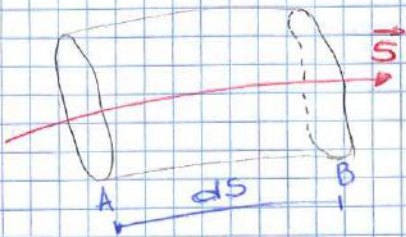
Quando un fluido si muove secondo un MOTO UNIFORME viene anche detto CORRENTE

Un fluido si muove lungo una CORRENTE quando tutte le particelle si muovono nella stessa direzione. Possiamo quindi individuare una DIREZIONE PRINCIPALE.



\vec{S} = DIREZIONE PRINCIPALE

In tali casi posso esprimere il valore di PORTATA, VELOCITÀ MEDIA e SEZIONE TRASVERSALE in funzione di \vec{S} e t .



Consideriamo un volume di fluido racchiuso da due sezioni trasversali A e B e di lunghezza ds .

Consideriamo la massa che in un intervallo dt entra da A e esce da B .

$$\rho \cdot Q \cdot dt = \text{massa entrante da } A$$

$$\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial s} ds\right) \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial s} ds\right) dt = \text{massa uscente da } B$$

$$\rho Q \partial t - \left(\rho Q + \frac{\partial \rho Q}{\partial s} ds\right) dt = -\frac{\partial}{\partial s} (\rho Q) ds dt$$

Per la conservazione della massa

$$-\frac{\partial}{\partial s} (\rho Q) ds dt = \frac{\partial}{\partial t} (\rho) dV \quad dV = \rho_t \cdot ds$$

$$-\frac{\partial}{\partial s} (\rho Q) ds dt = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \rho_t) ds dt$$

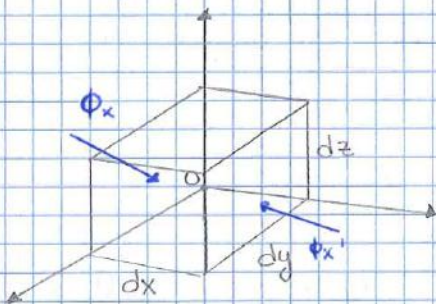
PRINCIPIO di CONSERVAZIONE della QUANTITÀ di MOTO nei FLUIDI

7/10

Il principio si può esprimere per i solidi e per i fluidi come $\vec{R} = m\vec{A}$ in quanto secondo definizione

$$\vec{R} = m \cdot \frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{d}{dt} (m \cdot \vec{U}) \quad \text{(conservato)}$$

Dobbiamo scrivere questa equazione per un fluido. Consideriamo come al solito un volume infinitesimo di fluido.



$$dm = \rho dV = \rho dx dy dz$$

$$A = \frac{DU}{Dt}$$

$$\phi_{x'} = \phi_x + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} dx$$

Calcoliamo inizialmente le forze di massa agenti sul fluido.

$$\text{FORZA di MASSA} = \vec{F} \cdot dm = \vec{F} \cdot \rho dx dy dz$$

Calcoliamo ora le forze di superficie. Partiamo dalla direzione x.

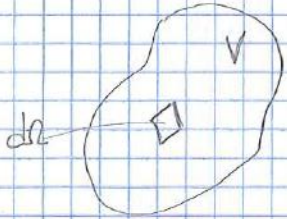
$$\vec{\phi}_x \cdot dy dz - \left(\phi_x + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} dx \right) dy dz = \vec{F}_c \cdot dx$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{i}) & - \frac{\partial \phi_x}{\partial x} dy dz dx \\ \hat{j}) & - \frac{\partial \phi_y}{\partial y} dx dz dy \\ \hat{k}) & - \frac{\partial \phi_z}{\partial z} dx dy dz \end{aligned} \right\}$$

$$\vec{F}_c = \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi_z}{\partial z} \right) dx dy dz$$

$$\vec{R} = F_{massa} + F_c$$

Risolvendo il sistema si viene in possesso di una enorme quantità di informazioni relative ad ogni singolo punto del fluido.



A noi interessa però avere un'informazione globale riferita all'intera massa di fluido, non alle singole informazioni puntiformi.

Integrando sul volume di fluido andiamo ad estrapolare solo più le informazioni che ci noi interessano.

Ci si denano i vari pezzi dell'integrale:

$$\bullet \int_V \rho \cdot \vec{F} dV \quad (\text{I})$$

$$\bullet \int_V \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi_z}{\partial z} \right) dV \quad \rightarrow \text{Applichiamo il Teorema di GREEN}$$

$$= - \int_{\Omega} \vec{\phi} \cdot \vec{m} d\Omega = - \int_{\Omega} (\phi_x \cos \hat{m}_x + \phi_y \cos \hat{m}_y + \phi_z \cos \hat{m}_z) d\Omega$$

$$= - \int_{\Omega} \vec{\phi} \cdot \vec{m} d\Omega \quad (\text{II})$$

Applicando Green, ci otteniamo che ciò che avviene all'interno è irrilevante, ciò che importa è \$\Omega\$!

Scriviamo un attimo cosa significa \$\rho \cdot \vec{A}\$.

$$\begin{aligned} \rho \cdot \vec{A} &= \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ &= \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned}$$

Per le proprietà delle derivate

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial (\rho u^2)}{\partial x} - \dot{u} \cdot \frac{\partial \rho u}{\partial x}$$

$$\vec{P} + \vec{I} + \vec{H} + \vec{F}_c = 0$$

EQUAZIONE GLOBALE della DINAMICA dei FLUIDI

Esso afferma che in un qualunque FLUIDO le forze peso, di inerzia locale, il flusso della Q di moto e le FORZE al CONTORNO si equilibrano sempre!

NB

Di \vec{H} basta conoscere come avviene sul contorno, non ci interessa ciò che avviene all'interno del volume.

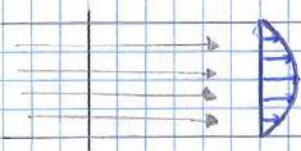
Analogo discorso per le forze di superficie, ci interessa solo ciò che avviene sulla superficie!

L'unico termine complesso da calcolare è che implica la conoscenza di ciò che accade nel volume e la \vec{I} . Ma se ci poniamo nel caso di MOTO PERMANENTE o comunque se possiamo ipotizzare che per un certo periodo di tempo il comportamento del fluido è indipendente del tempo $\rightarrow \frac{d}{dt}(\cdot) = 0$

Quindi \vec{I} si azzerava.

EQUAZIONE GLOBALE delle CORRENTI

Consideriamo una sezione TANGENZIALE alla corrente e come superficie di riferimento una sezione TRASVERSALE alla corrente.



$$|\vec{U}| = \vec{U} \cdot \vec{m}$$

$$\vec{H} = \int_{\Omega} \rho U \vec{m} d\Omega = \int_{\Omega} \rho U^2 \vec{m} d\Omega$$

Essendo ρ ed \vec{m} due costanti possiamo portarli fuori dall'integrale.

$$\vec{H} = \rho \vec{m} \int_{\Omega} U^2 d\Omega$$

DINAMICA dei FLUIDI IDEALI

Sono fluidi che non generano mai γ anche con δ elevati!

Vengono studiati perché esistono dei casi in cui benché un fluido non sia ideale si comporta come tale.

Sono tutti i casi in cui le γ sono molto piccole e quindi trascurabili!

NB Un FLUIDO IDEALE è ISOTROPO $\rightarrow \vec{\phi}_m = p \cdot \vec{m}$

Diunque $\phi_x = p \hat{i}$ $\phi_y = p \hat{j}$ $\phi_z = p \hat{k}$

Riscriviamo l'equazione indefinita della dinamica dei fluidi.

$$\rho(\vec{F} - A) = \text{grad}(p)$$

EQUAZIONE della DINAMICA
dei FLUIDI IDEALI IN FORMA
INDEFINITA
(EQUAZIONE di EULERO)

In questo caso le incognite sono solo più 5 (ρ, u, v, w, p) ed ho anche 5 equazioni.

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\vec{F}_x - A) = \text{grad}(p) \\ \rho(\vec{F}_y - A) = \text{grad}(p) \\ \rho(\vec{F}_z - A) = \text{grad}(p) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{grad}(\rho \vec{U}) = 0 \\ \rho = \text{cost} \end{array} \right.$$

Queste equazioni purtroppo non sono tutte lineari a causa della presenza di \vec{A} in cui la DERIVATA SUBSTANZIALE non è un'operazione lineare

Osservazioni

- Esiste sempre 1 direzione (la BINORMALE) lungo la quale in ogni istante si conserva il CARICO PIEZOMETRICO.
- Se la traiettoria è CURVILINEA ($r = \infty$) allora anche lungo la NORMALE si ha CONSERVAZIONE di h .
- Sul PIANO OSCULTORE si conserva il CARICO PIEZOMETRICO se la traiettoria è CURVILINEA.

Dunque abbiamo ricavato che la pressione p su tale piano segue un andamento idrostatico.

► Analizziamo dunque ora la componente tangenziale

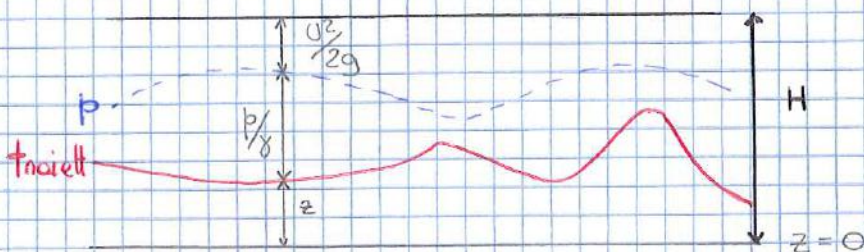
$$\frac{d}{ds} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) + \frac{d}{ds} \left(\frac{U}{g} \right) + \frac{d}{ds} \left(\frac{U^2}{g} \right) = 0$$

$$\rightarrow \frac{d}{ds} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} \right) = 0$$

$$\rightarrow \boxed{z + \frac{p}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} = H = \text{cost}} \quad \text{CARICO TOTALE} \quad \#$$

lungo una traiettoria il CARICO TOTALE si conserva in un fluido ideale.

INTERPRETAZIONE GRAFICA del TEOR. di BERNULLI



Possiamo notare che sotto i 3 termini del teorema di Bernoulli si nascondono 3 forme di energia!

$z \rightarrow$ Energia Potenziale per unità di massa

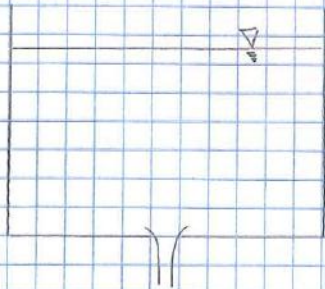
APPLICAZIONI del TEOREMA di BERNULLI

8/10

Studiamo alcuni casi di FORTOMETRIA ovvero quando si vuole studiare il flusso di un fluido (VENA EFFLUENTE) da un foro (LUCO).

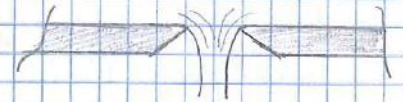
Il caso più semplice da calcolare è la PORTATA della VENA EFFLUENTE.

1° CASO



Le luci devono sempre essere al spigolo vivo per non perturbare il fluido!

Fano sempre circolare !!



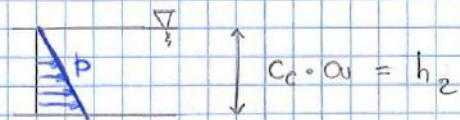
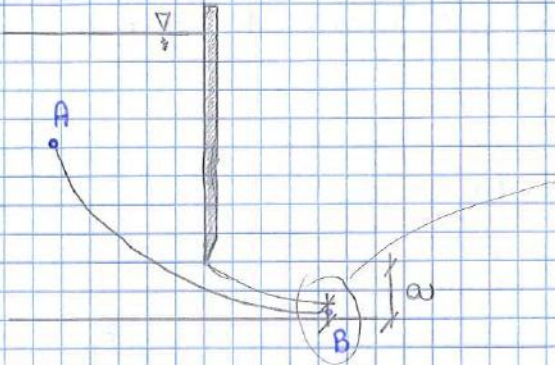
Le particelle di fluido compiono una traiettoria curva in prossimità del foro perché se cadessero verticalmente avrebbero uno spigolo ($r=0$) ma quindi significherebbe avere un'accelerazione radiale infinita !!

Si partiamo nelle ipotesi del Teorema di Bernoulli ed inoltre ci partiamo in condizioni di stazionarietà ipotizzando che il volume V sia molto maggiore della portata che esce e quindi le particelle all'interno del volume non risentono dei cambiamenti.

Possiamo ipotizzare che siamo in un FLUIDO IDEALE perché per l'ipotesi di prima per la stazionarietà \vec{u} all'interno del fluido $= 0 \rightarrow \gamma = 0$ mentre in prossimità del foro abbiamo delle accelerazioni e quando un fluido accelera tende a dissipare poca energia $\rightarrow \gamma \approx 0 \rightarrow$ FLUIDO IDEALE

$$Q = U_B \cdot \Omega_c = 0,6 \cdot \sqrt{2gh} \cdot \frac{\pi d^2}{4}$$

2° CASO



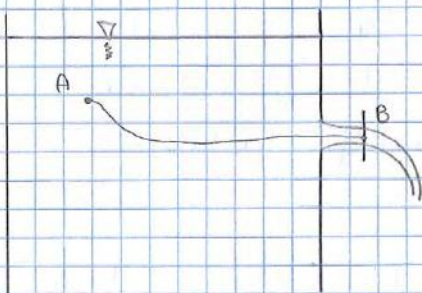
$$H_A = H_B \rightarrow \underbrace{z_A + \frac{p_A}{\rho}}_h + \frac{U_A^2}{2g} = \underbrace{z_B + \frac{p_B}{\rho}}_{h_2} + \frac{U_B^2}{2g}$$

$$h + 0 = c_c \cdot \Omega + \frac{U_B^2}{2g}$$

$$U_B = \sqrt{2g(h - c_c \cdot \Omega)}$$

Analogamente al caso 1 ricaviamo che per U_B non varia mai e cost lungo tutta la sezione contratta.

3° caso

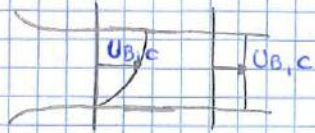


$$z_A + \frac{p_A}{\rho} + \frac{U_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\rho} + \frac{U_B^2}{2g}$$

$$h = z_B + \frac{p_B}{\rho} + \frac{U_B^2}{2g}$$

Non possiamo più dire che in B la pressione segue un andamento idrostatico infatti essendo aperta la pila al contatto con l'atmosfera $p=0$ ma allora per l'eq dell'conservazione del CARICO PIEZOMETRICO:

$$z_B + 0 = \text{cost} \rightarrow z_B = \text{cost}$$



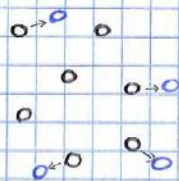
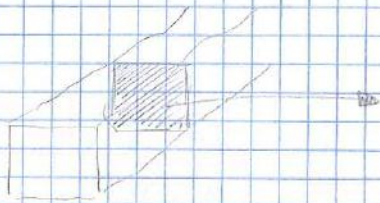
$$U_{B,c} = \sqrt{2g(h - z_c)}$$

$$Q = U_{B,c} \cdot l_c = \sqrt{2g(h - z_c)} \cdot C_c \cdot \frac{U_d^2}{4}$$

► PIV

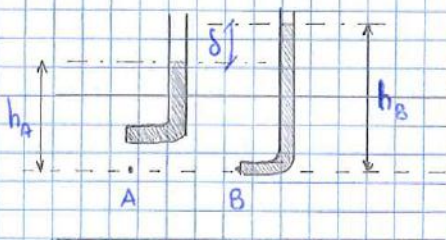
Consiste nello scattare un flash laser ad una sezione di fluido. Segue un secondo sotto una proiezione di secondo dopo il primo.

I due scatti individuano delle particelle nel fluido, osservandone lo spostamento sul piano dello scatto possiamo determinare la velocità di ciascuna particella che si è mossa sul piano.



$$\vec{U} = \frac{ds}{dt}$$

► TUBO di PITOT



Ci poniamo in un tubo, i due tubicini curvi contengono del fluido che non scivola nel tubo e che non è fermo in equilibrio.

Di conseguenza $\vec{U}_B = 0$.

Considerando ora una particella A che da dove si trova giunge in B, a questo punto necessariamente la sua velocità sarà nulla per qualche istante prima di riuscire a scansionare il "blocco".

Tale zona è detta ZONA DI RISTAGNO.

Possiamo applicare il teorema di Bernoulli perché rispettiamo tutte le sue ipotesi:

- FLUIDO IDEALE siccome il tratto \bar{AB} si può assumere molto breve possiamo assumere che le dissipazioni siano pressoché nulle!

EQUAZIONE di BERNULLI in FORMA GLOBALE per le CORRENTI



Consideriamo un $d\Omega$ della sezione della corrente.



Siamo sotto le ipotesi di Bernoulli ovvero $\frac{d}{dt} = 0$ MOTO PERMANENTE.

Essendo in un caso di MOTO PERMANENTE Q è un INVARIANTE lungo il tubo di flusso.

$\delta \cdot \partial Q =$ Peso che porta il tubo di flusso nell'unità di tempo.

Scriviamo ora la formula aggiungendovi H .

$$\delta \partial Q \cdot H = \partial \vec{P} \quad \leftarrow \text{POTENZA che transita per il TUBO di FLUSSO}$$

Anch'esso è una quantità invariante visto che ∂Q e δ sono costanti nel tempo e H si conserva lungo la traiettoria.

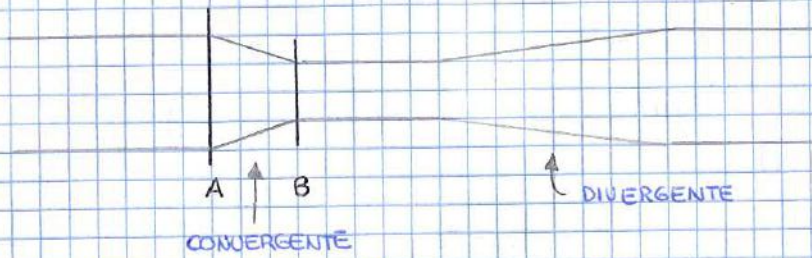
Se integriamo ricaviamo che:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \int_P dP = \int_Q \delta H \partial Q = \int_{\Omega} \delta H \cdot U d\Omega = \int_{\Omega} \delta \left(z + \frac{P}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} \right) U d\Omega \\ &= \delta \left[\int_{\Omega} \left(z + \frac{P}{\gamma} \right) U d\Omega + \int_{\Omega} \frac{U^3}{2g} d\Omega \right]. \end{aligned}$$

Lungo una sezione trasversale h si mantiene COSTANTE dunque riscriviamo l'equazione

$$\vec{P} = \delta \left[\left(z + \frac{P}{\gamma} \right) Q + \int_{\Omega} \frac{U^3}{2g} d\Omega \right]$$

IL VENTURIMETRO

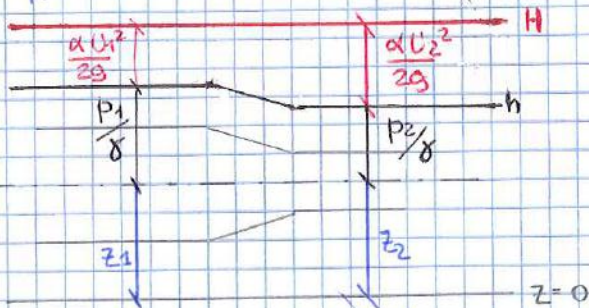


Consiste in un particolare condotto in cui possiamo assumere il fluido come una CORRENTE.

In tale condotto vi è poi un CONVERGENTE che riduce la sezione del tubo.

Possiamo comunque usare Bernoulli in quanto siamo in condizioni stazionarie, con fluido incomprimibile, campo gravitazionale e siccome nel convergente il fluido deve accelerare avremo delle $\gamma \neq 0$ e dunque è come fosse un fluido ideale!

Applichiamo l'EQUAZIONE GLOBALE di BERNULLI.



Come si nota dal disegno possiamo scrivere che

$$S = h_1 - h_2 \quad \text{ma anche} \quad S = \frac{\alpha U_2^2}{2g} - \frac{\alpha U_1^2}{2g}$$

Siccome poi siamo in condizioni stazionarie

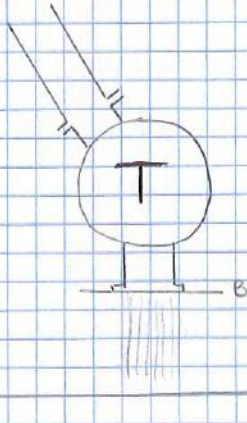
$$U_1 = \frac{Q_1}{\Omega_1} \quad \text{e} \quad U_2 = \frac{Q_2}{\Omega_2}$$

$$S = \alpha \left(\frac{U_2^2 (\Omega_2 \Omega_2)}{2g} - \frac{U_1^2 (\Omega_1 \Omega_1)}{2g} \right)$$

CENTRALI IDROELETTRICHE

Il nostro scopo è quello di cedere il fluido (ACQUA) all'ambiente in modo che abbia il minor quantitativo di energia possibile perché ciò significa che tutta l'energia pensata viene "assorbita" dalle turbine!

1° caso



d'acqua viene gettata nel fiume a valle

$$H_B = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{U_B^2}{2g} \alpha$$

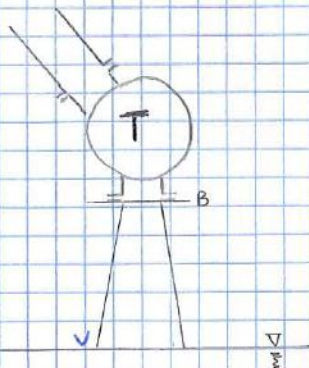
Più nel caso di una corrente a contatto da ambo i lati con l'aria dunque in condizioni idrostatiche $p_A = p_B = 0$!

$$H_B = z_B + \frac{U_B^2}{2g} \alpha$$

Considerando come una corrente il flusso d'acqua avvenuto che a valle $H_v = H_B$ dunque:

$$H_v = z_B + \frac{U_B^2}{2g} \alpha$$

2° caso



d'acqua viene scaricata a valle mediante un divergente.

$$H_v = z_v + \frac{p_v}{\gamma} + \frac{U_v^2}{2g} \alpha$$

$$z_v = 0 \quad p_v = 0$$

$$H_v = \frac{U_v^2}{2g} \alpha$$

EQUAZIONE DELLA DINAMICA DEI FLUIDI NEWTONIANI (Navier-Stokes)

$$\rho(\vec{F}-\vec{A}) = \text{grad}(p) - \mu \nabla^2 \vec{U} - \frac{1}{3} \text{grad}(\text{div}(\vec{U})) \mu$$

Nei casi da noi analizzati l'equazione si semplifica un po' in quanto $\rho = \text{cost}$, dunque per il PRINCIPIO di CONSERVAZIONE della massa:

$$\frac{d\rho}{dt} + \text{div}(\rho \vec{U}) = 0 \Rightarrow \rho \text{div}(\vec{U}) = 0 \Rightarrow \text{div}(\vec{U}) = 0$$

$$\rho(\vec{F}-\vec{A}) = \text{grad}(p) - \mu \nabla^2 \vec{U}$$

OSSERVAZIONI:

Rispetto all'equazione di EULERO per i fluidi ideali compare un termine nuovo legato alla viscosità e al CAMPO di MOTO.

Il ∇^2 di qualcosa indica la diffusione di quel qualcosa rispetto allo spazio.

Nel nostro caso è applicato ad \vec{U} e ciò significa che il termine $-\mu \cdot \nabla^2 \vec{U}$ tende ad opporsi alla formazione dei gradienti di velocità all'interno del fluido e ciò che lo permette μ è proprio la viscosità μ .

Appare dunque evidente che questo termine scompare solo in presenza di un gradiente di velocità!

∇^2 è un operatore lineare $\nabla^2(a+b) = \nabla^2 a + \nabla^2 b$

RICAPITOLANDO le EQUAZIONI

NOIIE	FORMA INDEFINITA	FORMA INTEGRALE
STATICA	$\rho \vec{F} = \text{grad}(p)$	$\vec{P} + \vec{F}_c = 0$
GENERALE	$\rho(\vec{F}-\vec{A}) = \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi_z}{\partial z}$	$\vec{P} + \vec{I} + \vec{H} + \vec{F}_c = 0$
EULERO	$\rho(\vec{F}-\vec{A}) = \text{grad}(p)$	$\vec{P} + \vec{I} + \vec{H} + \vec{u} = 0$
STOKES	$\rho(\vec{F}-\vec{A}) = \text{grad}(p) - \mu \nabla^2 \vec{u}$	$\vec{P} + \vec{I} + \vec{H} + \vec{u} - \vec{T} = 0$

Nei fluidi viscosi le \vec{F}_c si sono tramutate in forze \vec{u} normali e forze \vec{T} tangenziali.

Notiamo però che $\vec{T} = -\mu \int \frac{du}{dn} d\Omega$ esiste solo se c'è un gradiente di velocità lungo la normale alla superficie !!

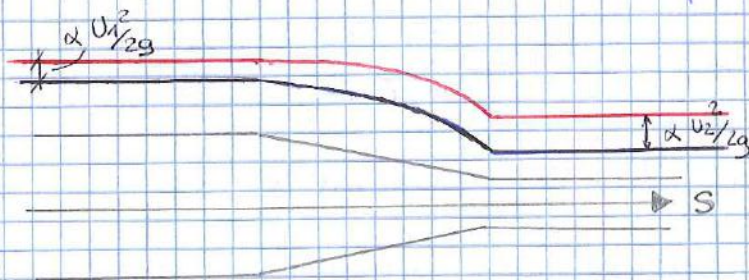
Anche il profilo delle velocità subisce delle modifiche a causa della viscosità μ .
 Le particelle al contatto col tubo infatti avranno una velocità nulla, ma essendo una portata d'acqua comunque esente una velocità media > 0 e di conseguenza avremo un profilo parabolico, le particelle al centro viaggiano più veloci perché non risentono delle tensioni tangenziali che trascurano sui bordi.

Definiamo DISSIPAZIONE di ENERGIA il termine $\frac{\partial H}{\partial s}$.

Chiamo $i = - \frac{\partial H}{\partial s}$ PENDENZA MOTRICE

Essa rappresenta l'energia necessaria a tenere in moto il fluido nel tubo.

NB L'andamento di i non sempre è di tipo lineare!
 Se infatti il tubo è un convergente ad esempio avremo un andamento parabolico!



$$i = - \frac{\partial H}{\partial s} \quad \int_0^s \int_0^s - \frac{\partial H}{\partial s} \partial s \Rightarrow H(s) = H_0 - \int_0^s i(\Delta) \partial s$$

Nel caso particolare in cui i non dipende da s avremo:

$$H(\Delta) = H_0 - i \cdot \Delta$$

$$\vec{T} = \gamma \Omega \left(\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} + z_1 - z_2 \right) = \gamma \Omega (h_1 - h_2)$$

Ma $(h_1 - h_2) = i \cdot l$ siccome $p_{cir} \parallel p_{ct}$
 dunque avremo che:

$$\vec{T} = \gamma \Omega i l$$

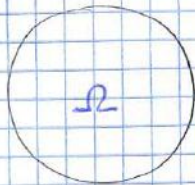
Spesso utilizziamo un altro termine γ che rappresenta il rapporto tra \vec{T} ed il perimetro di tutto il cilindro considerato.

$$\gamma = \frac{T}{l \cdot p} = \frac{\gamma \Omega i l}{l \cdot p} = \frac{\gamma \Omega i}{p} = i \gamma \left(\frac{\Omega}{p} \right) \rightarrow R$$

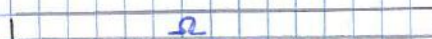
R = RAGGIO IDRAULICO

$\vec{T} = i \gamma R$ Tensione applicata sul bordo del tubo per una lunghezza unitaria.

OSSERVAZIONI su R



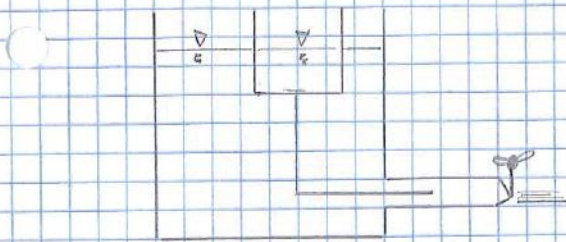
Sezione più efficiente



Sezione meno efficiente

L'ESPERIENZA di REYNOLDS

20/10



Si usano 2 contenitori come in figura: uno con dell'acqua e uno con dell'acqua colorata e che getta con un ago un

filo di acqua colorata nel tubo dell'acqua normale.

La portata è regolata con un rubinetto.

Aperto poco il rubinetto vediamo fluire l'acqua e notiamo che il filo d'acqua colorata non si miscela con l'altra acqua. Siamo quindi in un caso di moto LAMINARE.

Aumentando la portata ovvero la U del fluido notiamo che ad un certo punto il fenomeno cambia e il fluido colorato e l'altro si mescolano siamo quindi in un moto TURBOLENTO.

IL PARAMETRO che ci definisce se il nostro fluido è in MOTO TURBOLENTO o LAMINARE è il NUMERO di REYNOLDS (Re).

$$Re = \frac{U \cdot l \cdot \rho}{\mu}$$

NUMERO di REYNOLDS per un FLUIDO QUALSIASI

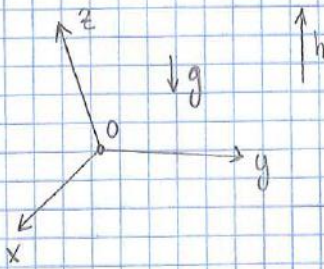
l = scala delle MISURE e dipende quindi del sistema che stiamo analizzando!

Nel nostro caso l = Diametro del tubo!

OSSERVAZIONE: Nota che ciò che è importante in un fluido non è μ ma bensì ν infatti

$$Re = \frac{U l}{\nu}$$

Ci poniamo in un SR generico e chiamo h la direzione verticale.



$$\rho(F-A) = \text{grad}(p) - \mu \nabla^2 \vec{U}$$

Divido tutto per ρ e ricordo che

$$F = -\text{grad}(-gh) = \text{grad}(gh)$$

$$(F-A) = \frac{1}{\rho} \text{grad}(p) - \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{U}$$

Scrivo l'equazione lungo l'asse \hat{x} .

$$g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{D U}{D t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{U}$$

Sostituisco le variabili con quelle adimensionali!

$$g \cdot \frac{e \partial \tilde{h}}{e \partial \tilde{x}} - \frac{U_0}{\frac{\rho}{U_0}} \cdot \frac{D \tilde{U}}{D \tilde{t}} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\rho U_0^2}{e} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 (U_0 \tilde{U})}{\partial (\tilde{x} e)^2}$$

$$g \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} - \frac{U_0^2}{e} \frac{D \tilde{U}}{D \tilde{t}} = \frac{U_0^2}{e} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\mu U_0}{\rho e^2} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^2}$$

Moltiplico tutto per $\frac{e}{U_0^2}$

$$\frac{e}{U_0^2} g \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} - \frac{D \tilde{U}}{D \tilde{t}} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} - \underbrace{\left(\frac{1}{U_0 e} \cdot \frac{\mu}{\rho} \right)}_{\frac{1}{Re}} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^2}$$

Avevo adimensionalizzato le variabili dividendo per la scala tipica del problema, abbiamo ricavato un'equazione in cui si possono facilmente assimilare tra loro problemi anche totalmente diversi tra loro!!

IL MOTO LAMINARE

CASO di CORRENTE CILINDRICA in MOTO UNIFORME

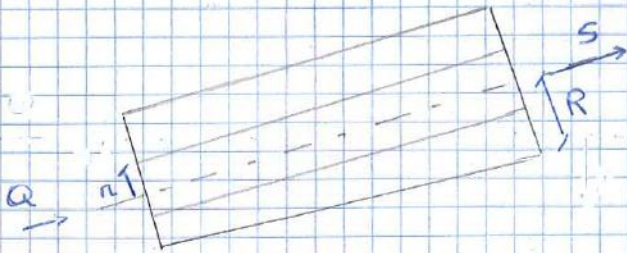
Abbiamo già definito le tensioni tangenziali generate sul perimetro del tubo come

$$\tau_0 = \delta i R$$

$$\text{in questo caso } R = \frac{Q}{P} = \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2}$$

$$\tau_0 = \delta i \pi \frac{r}{2}$$

Ci domandiamo se e come variano le tensioni interne al fluido.



Proietta l'equazione integrale di STOKES lungo \vec{s} e considero un

cilindretto di raggio r .

$$U_s = p_1 \cdot \pi r^2 - p_2 \pi r^2 = \pi r^2 (p_1 - p_2)$$

$$I = 0$$

$$P_s = \delta \pi r^2 \cdot L \cdot \sin \alpha = \delta \pi r^2 \cdot L \cdot \frac{z_1 - z_2}{L} = \delta \pi r^2 (z_1 - z_2)$$

$$M_e = M_u \rightarrow M_e - M_u = 0$$

Dunque possiamo scrivere che

$$\delta \pi r^2 (z_1 - z_2) + \pi r^2 (p_1 - p_2) - T_s = 0$$

$$T_s = \delta \pi r^2 \left(z_1 + \frac{p_1}{\delta} - z_2 + \frac{p_2}{\delta} \right)$$

$$\vec{T}_s = \delta \pi r^2 \underbrace{(h_1 - h_2)}_{i \cdot L}$$

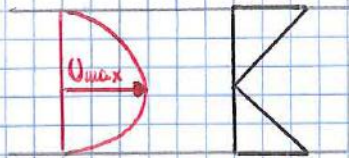
$$-\mu \frac{\partial u}{\partial r} 2\pi r L = \delta i^2 \pi^2 L \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial r} = -\pi \frac{\delta i^2}{2\mu}$$

$$u(r) = -\frac{\delta i^2}{4\mu} r^2$$

PROFILO della VELOCITÀ nel
TUBO se conosco i !

$$u(r) = \int_r^R \frac{\partial u}{\partial r} dr = \frac{\delta i^2}{2\mu} (R^2 - r^2) = \frac{\delta i^2}{2\mu} \left(\frac{D^2}{4} - r^2 \right)$$

Il profilo di velocità nel tubo è una PARABOLOIDE
se siamo in una CORRENTE CILINDRICA in moto
UNIFORME!



$$u_{max} = \frac{\delta i^2}{4\mu} \cdot \frac{D^2}{4} = \frac{\delta i^2 D^2}{16\mu}$$

$$u_{med} = \frac{u_{max}}{2} = \frac{\delta i^2 D^2}{32\mu}$$

$$Q = u_{med} \cdot \Omega = \frac{\delta i^2 D^2}{32\mu} \cdot \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\delta i^2 D^4 \pi}{128\mu}$$

$$i = \frac{128\mu Q}{\delta D^4 \pi}$$

Abbiamo trovato un modo
per vedere da cosa dipende i !

OSSERVAZIONI:

Una lieve riduzione di D provoca un enorme
aumento di i dovuto al fatto che i è inversa-
mente proporzionale al diametro alla quarta del
tubo.

Quindi se dimezzo D al posto di Q
 i aumentano di 16 volte!

Simplifichiamo l'equazione e considero la direzione x.

Ritorno inoltre che $\vec{F} = -\text{grad}(gh)$

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \text{grad}(gh)$$

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{d}{dx} (p + \rho gh) \Rightarrow \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{d}{dx} (p + \delta h)$$

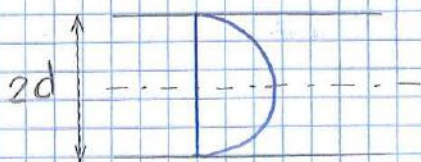
$$\Rightarrow \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\delta} \frac{d}{dx} \left(h + \frac{p}{\delta} \right)$$

$$\Rightarrow \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - \frac{i}{\delta} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - \frac{i}{\delta \mu}}$$

Ritroviamo che $\frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{i}{\delta \mu} y + c_1$

$$u(y) = \int_y^d - \frac{i}{\delta \mu} y \, dy = - \frac{i}{\delta \mu} \frac{1}{2} (d^2 - y^2)$$

Abbiamo ricavato il profilo di velocità del fluido tra le lamine. PARABOLOIDE.



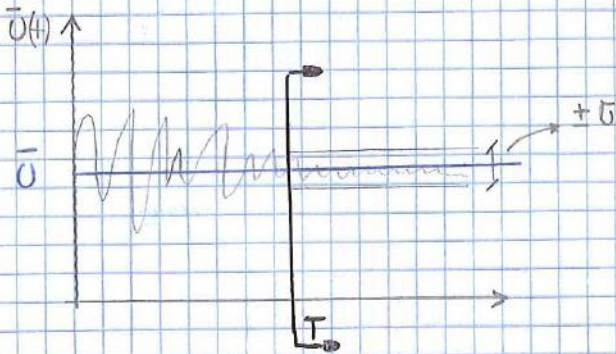
$$u_{\text{max}} = + \frac{i}{2\delta \mu} d^2$$

$$u_{\text{med}} = \frac{2}{3} u_{\text{max}} = \frac{i}{3\delta \mu} \cdot \frac{2}{3} d^2$$

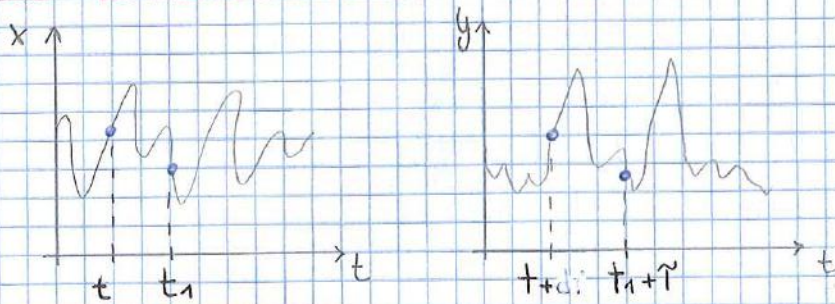
$$u_{\text{med}} = \frac{i}{3\delta \mu} d^2$$

Possiamo però giungere ad un intervallo T in cui \bar{u} oscilla con un'ampiezza superiore alla precisione da noi voluta!

Ovvero considerando un T sufficientemente grande avremo che $\bar{u}(t)$ è lineare per noi!



La CORRELAZIONE di 2 VARIABILI

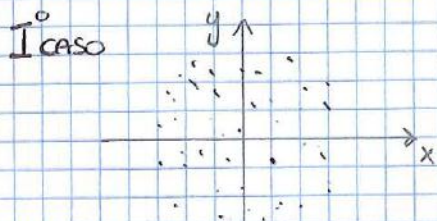


Consideriamo due generiche variabili $x(t)$ e $y(t)$.

Eseguiamo misure come indicato in figura:

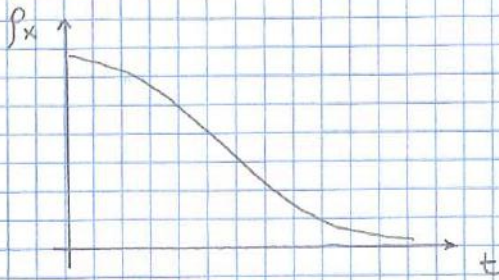
$x(t)$ e $y(t+\tau)$ per $x(t_1)$ e $y(t_1+\tau)$

Avremo quindi delle coppie di valori xy che possiamo mettere in un grafico.



DISTRIBUZIONE SFERICA

Non esiste alcuna correlazione tra il valore di un generico $x(t^*)$ e di $y(t^*+\tau)$



$$J = \int_0^{+\infty} p(\tau) dt$$

SCALA
INTEGRALE

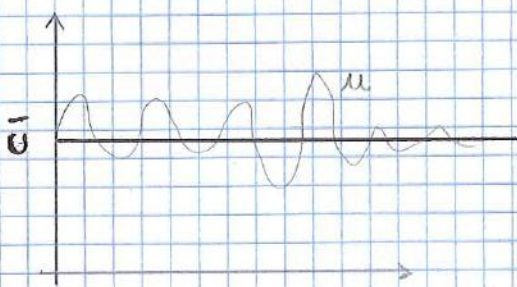
"J" indica quanto memoria c'è nel sistema, ovvero inerenza del sistema.

Maggiore è "J", maggiore sarà la possibilità di previsione sui tempi lunghi.

TORNIAHO A RAYNOLDS

Ipotizza di chiamare una variabile \tilde{U} come \bar{U} con:

$$\tilde{U} = \bar{U} + u$$



$$\bar{U} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} U(t) dt$$

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(t) dt = 0$$

u sono gli scarti e $\bar{u} = 0$.

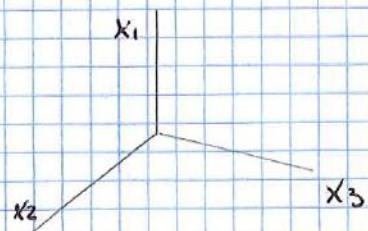
Ricordo l'equazione di continuità che per $\rho = \text{cost}$

$$\text{div}(U) = 0$$

Riscriviamo STONES

$$\rho(F - \tilde{A}) = \text{grad}(\tilde{p}) - \mu \nabla^2 \tilde{U}$$

$$\tilde{U} = (u_1, u_2, u_3)$$



DECOMPOSIZIONE di REYNOLDS

$$\tilde{U}_i = \bar{U}_i + u_i$$

$$\frac{\partial (\bar{U}_i + u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{U}_i + u_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{U}_i + \bar{u}_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{U}_i)$$

$\bar{u}_i = 0$ perché per come abbiamo definito \bar{U} , gli u_i sono gli scarti turbolenti e quindi hanno media 0.

Riscriviamo i pezzi di NAVIER STOKES usando la decomposizione di Reynolds.

$$\bullet \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial t} = \frac{\partial (\bar{U}_i + u_i)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\bar{U}_i + 0) = \frac{d}{dt} (\bar{U}_i)$$

$$\bullet \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dx_i} (\bar{p} + p) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dx_i} (\bar{p})$$

$$\bullet \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{U}_i + u_i) = \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (\bar{U}_i) = \nu \nabla^2 \bar{U}_i$$

$$\bullet u_j \cdot \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} = (\bar{u}_j + u_j) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{U}_i + u_i) =$$

$$= (\bar{u}_j + u_j) \cdot \frac{d}{dx_j} (\bar{U}_i + u_i)$$

$$= \bar{u}_j \frac{d \bar{U}_i}{dx_j} + \bar{u}_j \frac{d u_i}{dx_j} + u_j \frac{d \bar{U}_i}{dx_j} + u_j \frac{d u_i}{dx_j}$$

L'EQ. di STOKES si può riscrivere come:

$$\frac{D\bar{u}_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij}) - g \delta_{i3}$$

$$\text{dove } \tau_{ij} = \bar{p} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{u_i u_j}$$

OSSERVAZIONI:

La variazione di velocità media lungo una traiettoria è influenzata da:

- gravità ($g \delta_{i3}$)

- sforzi τ provocati da:

- gradienti di pressione \bar{p}

- forze tangenziali provocate da μ e da un gradiente di velocità

- forze tangenziali dovute agli sforzi di REYNOLDS ($\rho \overline{u_i u_j}$)

$$\rho \overline{u_i u_j} = \rho \begin{bmatrix} \overline{u_1^2} & \overline{u_1 u_2} & \overline{u_1 u_3} \\ \overline{u_2 u_1} & \overline{u_2^2} & \overline{u_2 u_3} \\ \overline{u_3 u_1} & \overline{u_3 u_2} & \overline{u_3^2} \end{bmatrix}$$

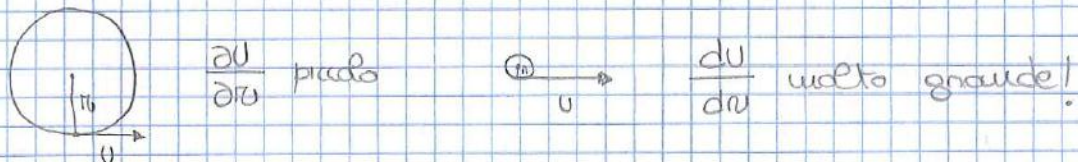
ENERGIA

L'energia che noi forniamo per mettere in moto il fluido viene trasferita dal moto medio a quello TURBOLENTO.

In sostanza il moto turbolento "vive" assorbendo energia al moto medio.

Fino alle scale più piccole infatti non si hanno dissipation in quanto i gradienti della \bar{u} sono piccoli!

Qui invece abbiamo enormi gradienti e dunque nascono tensioni tangenziali opposte al vertice che dissipano l'energia.



LE SCALE e LE UNITÀ di MISURA

Tutte le grandezze e le unità di misura che noi conosciamo e usiamo provengono da una tenuta di grandezze principali che per noi è $[L, T, M]$ e le relative unità di misura sono tipicamente biologiche.

Ci sorge però il dubbio che esistano altre tenute principali che renderebbero molto più semplice la descrizione di un problema.

Individuiamo una nuova tenuta $[Q_1, Q_2, Q_3]$, ovviamente Q_1, Q_2, Q_3 dovranno essere 3 grandezze che rispetto delle date caratteristiche ovvero devono essere LINEARMENTE INDIPENDENTI !!

Definiamo le DIMENSIONI di una grandezza come gli esponenti rispetto alla tenuta principale scelta.

Ad esempio :

$$U = [L^1, T^{-1}, M^0]$$

$$\text{Sup} = [L^2, T^0, M^0]$$

TEOREMA di BUCKINGHAM & TEOREMA II.

Sia $y = f(Q_1, Q_2, \dots, Q_m)$ un'equazione $m+1$ dimensionale.

Il Teorema II afferma che scegliendo 3 grandezze da cui dipende f e che rispetto la richiesta $\det | \dots | \neq 0$ allora normalizzando Y rispetto al nuovo SR ricaviamo:

$$\frac{Y}{Q_1^\alpha Q_2^\beta Q_3^\gamma} = f \left(Q_1, Q_2, Q_3, \underbrace{\frac{Q_4}{Q_1^{\alpha_4} Q_2^{\beta_4} Q_3^{\gamma_4}}}_{\pi_4}, \dots, \underbrace{\frac{Q_m}{Q_1^{\alpha_m} Q_2^{\beta_m} Q_3^{\gamma_m}}}_{\pi_m} \right)$$

Questa nuova scritta rappresenta y nel nuovo SR $[Q_1, Q_2, Q_3]$.

$$\frac{Y}{Q_1^\alpha Q_2^\beta Q_3^\gamma} = f(\pi_4, \pi_5, \pi_6, \dots, \pi_m, Q_1, Q_2, Q_3)$$

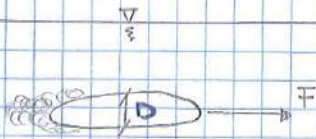
TESI \rightarrow Nel nuovo SR l'equazione è a $(m+1) - 3$ dimensioni!

Notiamo inoltre che Q_1, Q_2, Q_3 possono cambiare in tal caso:

- se s_x dell'uguale abbiamo un valore adimensionale
- se D_x dell'uguale cambiano Q_1, Q_2 e Q_3 dunque l'unica soluzione valida affinché l'uguaglianza non sia compromessa è che f non dipenda da Q_1, Q_2 e Q_3

\rightarrow 3 dimensioni in meno.

APPLICAZIONE del TEOREMA Π



$$\vec{F} = F(\rho, \mu, U_0, D, L, \tau)$$

τ = rugosità del corpo

Queste grandezze contemplano tutte e 3 le grandezze del SI (L, M, T).

Scelgo 3 grandezze per cui det. |dimensioni| $\neq 0$ ovvero (ρ, U_0, D)

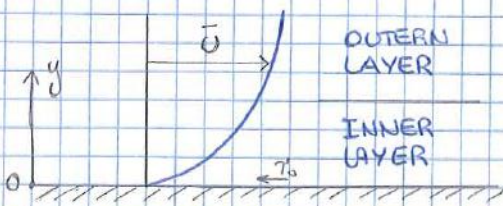
$$\frac{F}{\rho^1 D^2 U_0^2} = f\left(\frac{\mu}{\rho U_0 D}, \frac{L}{D}, \tau\right)$$

Riconosciamo $\frac{\mu}{\rho U_0 D} = \frac{1}{Re}$ dunque otteniamo:

$$\frac{F}{\rho^1 D^2 U_0^2} = f\left(\frac{1}{Re}, \frac{L}{D}, \tau\right) \quad \text{nel sistema di rif. } (\rho, D, U_0).$$

CORRENTE CHE SCORRE A CONTATTO CON UNA SUPERFICIE LISCIA

LA TEORIA di MILLIKAN



Millikan ipotizza l'esistenza di uno strato vicino alla superficie che chiamo INNER LAYER.

In questa zona ipotizza che la velocità media \bar{U} in un punto sia funzione di altre grandezze.

$$\bar{U} = \bar{U}(y, \rho, \mu, \tau_0) \quad \tau_0 \text{ indica lo sforzo che si compie per muovere il fluido.}$$

Nota che ρ e τ_0 contemplano la massa mentre \bar{U} è una grandezza cinematica in cui la

Scelgo U^* , δ e applico il teorema di π .

$$\frac{U}{U^*} = F\left(\frac{y}{\delta}\right) = F\left(\xi\right)$$

OVERLAP LAYER

Millikan immagina che esista una zona di sovrapposizione dei due strati, in cui si hanno entrambi i vantaggi, non abbiamo né l'influenza di δ né di μ .

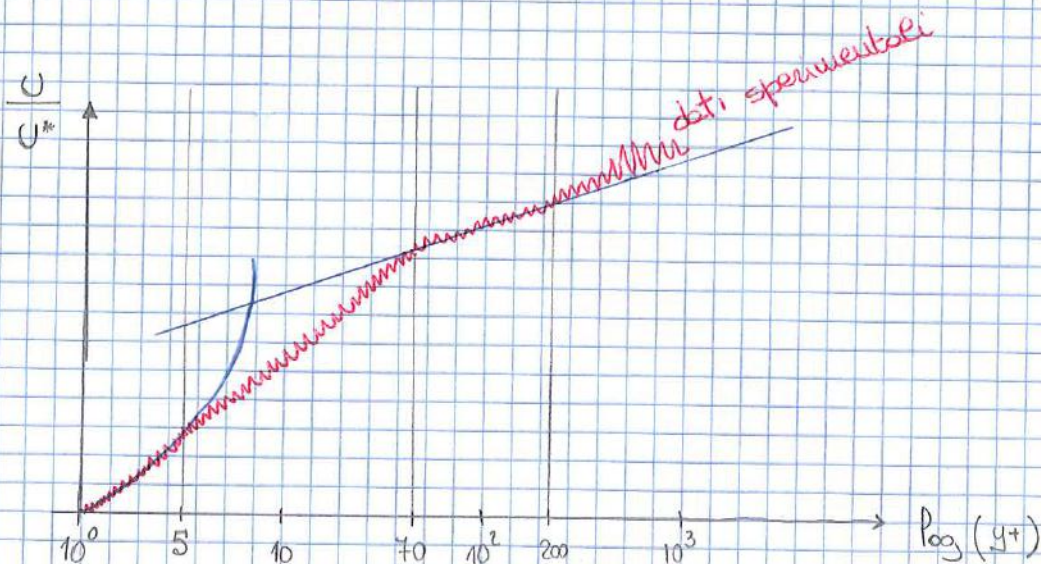
$$\left. \frac{dU}{dy} \right|_{\text{INNER}} = \left. \frac{dU}{dy} \right|_{\text{OUTER}}$$

$$U^* \cdot \frac{dF}{dy+} \cdot \frac{U^*}{\nu} = U^* \frac{dF}{d\xi} \cdot \frac{y}{\delta}$$

$$\frac{dF}{dy+} \cdot \frac{U^*}{\nu} = \frac{dF}{d\xi} \cdot \xi \quad \rightarrow \quad \frac{dF}{dy+} \cdot dy+ = \frac{dF}{d\xi} \xi = \frac{1}{k}$$

$$\rightarrow \frac{dF}{d\xi} \xi = \frac{1}{k} \quad \rightarrow \quad F(\xi) = \frac{1}{k} \ln(\xi) + C_1$$

$$\rightarrow \frac{dF}{dy+} dy+ = \frac{1}{k} \quad \rightarrow \quad F(y+) = \frac{1}{k} \ln(y+) + C_2$$



3/14

APPLICHIAMO L'OPERATORE MEDIA all'equazione globale della dinamica

$$\vec{P} + \vec{F}_c + \vec{I} + \vec{M}_e - \vec{M}_u = 0$$

Applichiamo l'operatore media ad ogni termine :

$$\bullet \overline{\vec{P}} = \vec{p}$$

$$\bullet \overline{\vec{F}_c} = \int_{\Omega} \vec{\phi}_m d\Omega \quad \vec{\phi}_m = \vec{\phi}_m + \vec{\phi}_m'$$

$$\overline{\vec{F}_c} = \overline{\int_{\Omega} (\vec{\phi}_m + \vec{\phi}_m') d\Omega} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \left[\int_{\Omega} \vec{\phi}_m + \vec{\phi}_m' d\Omega \right] dt$$

Si come per nostra scelta Ω non dipende da t

$$\overline{\vec{F}_c} = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \vec{\phi}_m + \vec{\phi}_m' dt \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \vec{\phi}_m dt + \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \vec{\phi}_m' dt \right] d\Omega$$

$$\overline{\vec{F}_c} = \int_{\Omega} \vec{\phi}_m d\Omega$$

$$\bullet \overline{\vec{I}} = \int_V \frac{\partial(\rho \vec{U})}{\partial t} dV = \rho \int_V \frac{\partial(\vec{U} + \vec{U}')}{\partial t} dV =$$

$$= \frac{1}{T} \rho \int_t^{t+T} \left(\int_V \frac{\partial(\vec{U} + \vec{U}')}{\partial t} dV \right) dt = \rho \int_V \left[\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{\partial(\vec{U} + \vec{U}')}{\partial t} dt \right] dV$$

$$= \rho \int_V \left[\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} dt + \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{\partial \vec{U}'}{\partial t} dt \right] dV =$$

$$\vec{I} = \rho \int_V \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} dV$$

$$\bullet \overline{\vec{M}} = \int_{\Omega} \rho \vec{U} \vec{v}_m d\Omega = \rho \int_{\Omega} (\vec{U} + \vec{U}') (\vec{v}_m + \vec{v}_m') d\Omega$$

$$= \rho \int_{\Omega} \vec{U} \vec{v}_m d\Omega + \rho \int_{\Omega} \vec{U} \vec{v}_m' d\Omega + \rho \int_{\Omega} \vec{U}' \vec{v}_m d\Omega + \rho \int_{\Omega} \vec{U}' \vec{v}_m' d\Omega$$

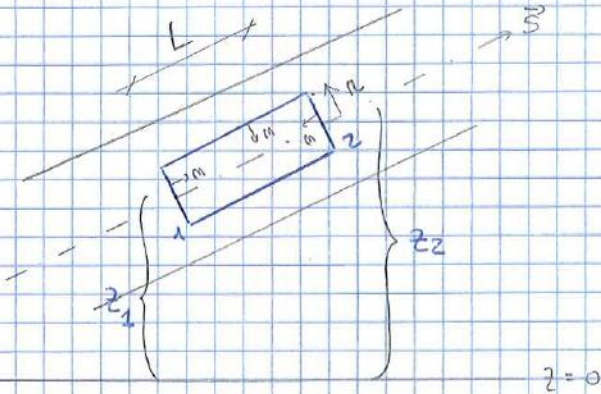
①

②

③

④

ANDAMENTO DELLE TENSIONI TANGENZIALI IN MOTO TURBOLENTO



Consideriamo una corrente cilindrica in moto turbolento e diciamo che il moto è uniforme quando la \$\bar{u}\$ è costante nel tempo lungo la sezione del tubo.

Applichiamo la formula globale della dinamica del MOTO MEDIO al cilindretto di raggio \$r\$ e lunghezza \$L\$.

Proiettiamo poi l'equazione lungo la direzione \$\vec{s}\$

$$-\delta \tau r^2 L \sin \alpha + \tau r^2 (p_1 - p_2) - \mu \int \frac{\partial \bar{u}}{\partial m} d\Omega \cos \alpha + \vec{H} + \vec{H}' = 0$$

Per la simmetria del problema \$\frac{\partial \bar{u}}{\partial m}\$ è uguale su tutta la superficie laterale!

$$-\delta \tau r^2 L \frac{z_2 - z_1}{L} + \tau r^2 (p_1 - p_2) - \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial m} \int_{\Omega} d\Omega \cos \alpha + 0 + \vec{H}' = 0$$

①

$$\textcircled{1} \rightarrow \vec{H}' = \int_{\Omega} \rho \bar{u}' \bar{v}' d\Omega \cos \alpha \quad \vec{u}' = (u', v') \quad \bar{v}' = -v'$$

$$\vec{H}' = - \int_{\Omega} \rho \bar{u}' \bar{v}' d\Omega$$

$$-\delta \tau r^2 (z_2 - z_1) + \tau r^2 (p_1 - p_2) + \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} 2\pi r L - \rho \int \bar{u}' \bar{v}' d\Omega = 0$$

Per la simmetria del problema anche \$\bar{u}' \bar{v}'\$ è costante su tutta la \$\Omega\$ dunque su 1 e 2 si annullano e avremo:

$$-\delta \tau r^2 \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} - z_2 - \frac{p_2}{\gamma} \right) + \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} 2\pi r L - \rho \bar{u}' \bar{v}' 2\pi r L = 0$$

predominante la componente di REYNOLDS.

ESPRESSIONE di "i" in un tubo CIRCOLARE

$$i = i(\rho, \mu, Q, U, D, E) \quad E = \text{spessore tubo}$$

Applichiamo il teorema di Π e sappiamo che "i" si può rappresentare su di un piano in cui compaiono due grandezze:

$$\bullet \lambda = \text{INDICE di RESISTENZA} = \frac{i \cdot D}{\frac{U^2}{2g}} = \frac{2g \cdot i \cdot D}{U^2}$$

$$\bullet Re = \text{numero di REYNOLDS} = \frac{\rho U D}{\mu}$$

• In una condotta cilindrica in moto LAMINARE avevamo ricavato le seguenti equazioni:

$$U = \frac{1}{32} \frac{\delta i}{\mu} D^2 \quad \Rightarrow \quad i = \frac{32 U \mu}{\delta D^2}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2g \cdot 32 U \mu D}{\rho \delta D^2 U^2} = 64 \cdot \frac{\mu}{\rho D U} = 64 \frac{1}{Re}$$

• In una condotta laminare tra due lastre infinite

$$U = \frac{1}{3} \frac{i \delta}{\mu} R^2$$

$$\text{Nel cerchio } R = \frac{D}{2} \quad \Rightarrow \quad i = \frac{3U \mu}{\delta R^2} = \frac{12 U \mu}{\delta D^2}$$

$$R = \frac{D}{2} \quad \Rightarrow \quad D = 2R$$

Possiamo scrivere Reynolds

$$Re = \frac{4R U}{\nu}$$

Fin tanto che abbiamo una superficie liscia la curva della λ non dipende dalla rugosità ϵ .

Quindi $\lambda = \lambda(Re)$.

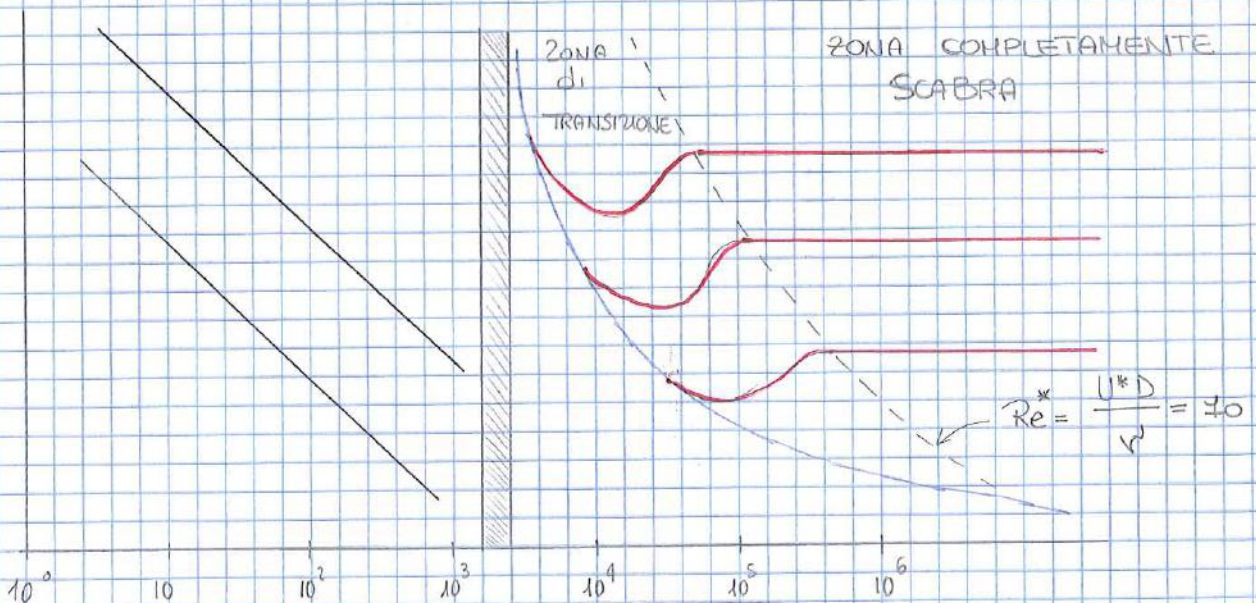
Uno studioso, Nikuradse cerca di descrivere la rugosità ipotizzando una rugosità superficiale provocata da sfenette di diametro ϵ .



Faccendo degli esperimenti ricavai che:

- Per un breve tratto la curva coincide con la curva a SUPERFICIE LISCIA
- Ad un certo punto la curva cambia sotto l'influenza di $\epsilon \rightarrow \lambda = \lambda(Re, \frac{\epsilon}{D})$
- Dopo un certo punto la curva diventa orizzontale ossia $\lambda = \lambda(\frac{\epsilon}{D})$

Nikuradse distingue una zona di TRANSIZIONE che sta tra la curva a PARETE LISCIA e la zona COMPLETAMENTE SCABRA ($\lambda = \lambda(\frac{\epsilon}{D})$).



OSSERVAZIONI

$$i \propto U^\alpha Q^\beta D^\delta$$

vogliamo capire come è legato i alle grandezze che lo definiscono.

$$\lambda = \frac{Di}{U^2/2g} \rightarrow i \propto \lambda \cdot \frac{U^2}{D}$$

► MOTO LAMINARE $\lambda \propto \frac{c}{Re} \rightarrow \lambda \propto \frac{1}{DU}$

$$i \propto \frac{U^2}{DU} = \frac{U}{D^2} \rightarrow i \propto \frac{U}{D^2}$$

Riconducendo poi che $Q = U \cdot \Omega \rightarrow Q \propto U \cdot D^2 \rightarrow U \propto \frac{Q}{D^2}$

$$i \propto \frac{Q}{D^4}$$

► MOTO TURBOLENTO su PARETE LISCIA

$$\lambda = \frac{0,316}{Re^{0,25}} \quad \text{formula di Blasius} \quad \lambda \propto \frac{1}{D^{0,25} U^{0,25}}$$

$$i \propto \frac{1}{D^{0,25} U^{0,25}} \cdot \frac{U^2}{D} \rightarrow i \propto \frac{U^{1,75}}{D^{1,25}}$$

$$i \propto \frac{Q^{1,75}}{D^{4,75}}$$

► MOTO TURBOLENTO su parete completamente scabra

$$\lambda = \text{costante}$$

$$i \propto \frac{U^2}{D}$$

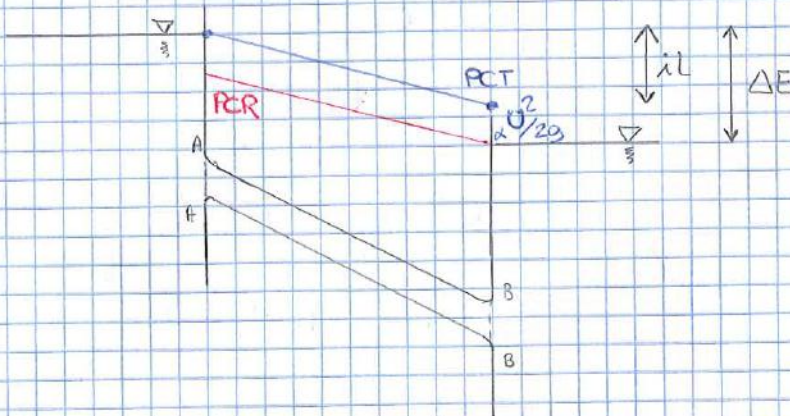
$$i \propto \frac{Q^2}{D^5}$$

► MOTO TURBOLENTO SU PARETE SCABRA

Colburn e White hanno combinato assieme le due equazioni su parete liscia e completamente scabra ottenendo un'equazione che descrive λ nel tratto di transizione.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{2,51}{\text{Re}\sqrt{\lambda}} + \frac{3,71 D}{\epsilon_{\text{eq}}} \right)$$

TRACCIAMENTO delle UNEE dei CARICHI



Colleghiamo due serbatoi in quiete con un tubo circolare di diametro D costante e con stesso scabrezza lungo tutto il tubo.

$$H_A = z_A + \frac{p_A}{\rho} + \frac{U_A^2}{2g} \quad H_B = h$$

In pratica nel serbatoio il piano dei carichi totali coincide con il piano dei carichi idrostatici.

Una volta nel tubo il fluido si mette in moto con velocità costante U .

Giunti nel 2° serbatoio il fluido giunge con un'energia H_B pari a quella del fluido nel serbatoio + una componente cinetica $\alpha \frac{U^2}{2g}$.