NUMERO: 1827A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Semproni Federica

MATERIA: Geometria - Prof Casnati

ESERCITATORE: Fulvio Di Sciullo
Martedì alle 11:00 ricevimento 4-03
e-mail: fulvio.disciullo@polito.it

Lezione 1

Branca più antica della matematica. Varie fasi:

- Platone "Repubblica", VII (400 a.C.)
  "La conoscenza alla quale aspira la geometria è la conoscenza dell'Eterno"
- Cartesio (1600)
  26 marzo 1619 scrisse una lettera
  "There is almost nothing left to discover in geometry"
- Felix Klein (1872)
  Propone il programma di Erlanger
  Geometria = studio delle trasformazioni

Problema: rappresentazione delle trasformazioni
serve un linguaggio
↓

1_ MATRICI

Definizione 1.1 (matrice a coefficienti reali)
Dati $n, m \in \mathbb{N}$ una matrice $m \cdot n$ a coefficienti reali è una tabella di numeri reali disposti in m righe e n colonne.
Ciascun elemento è detto componente della matrice (o entrata della matrice)

Es. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & \sqrt{2} \\ -5 & \pi \end{pmatrix}$ matrice 3×2

tutti i numeri $\in \mathbb{N}$

$B = \left(\begin{array}{c|c} e & 4 \\ \hline \frac{3}{8} & \sqrt{7} \end{array}\right)$ matrice 2×2

$C = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 3 & 4 & \sqrt{e} & 8 \end{array}\right)$ matrice 1×4

$D = \begin{pmatrix} 3 \\ \hline 1 \\ \hline 0 \end{pmatrix}$ matrice 3×1

es. $A = \begin{pmatrix} 3 & \pi & \sqrt{2} \\ 4 & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ matrice 2×3

$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ \pi & -1 \\ \sqrt{2} & 3/2 \end{pmatrix}$ matrice $3 \cdot 2$

$$A \neq B$$

Hanno gli stessi componenti

$B' = \begin{pmatrix} 3 & \pi \\ 4 & -1 \\ 3/2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

* $A = \begin{pmatrix} 3 & \pi & \sqrt{2} \\ 4 & -1 & 3/2 \end{pmatrix}$ [far ruotare la matrice attorno a una diagonale]

Definizione 1.6 (**Matrice trasposta** [trasporre])
Data $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, la matrice trasposta di A si indica ${}^tA$ ed è una matrice di $\mathbb{R}^{n,m}$ costruita invertendo righe e colonne, cioè se $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ allora la trasposta di A

$${}^tA = (a_{j,i})_{\substack{1 \le j \le n \\ 1 \le i \le m}}$$

Oss (vedi esempio *)

$$B = {}^tA$$

La trasposta della trasposta ci riporta alla matrice iniziale

$$B = {}^tA \ ; \ A = {}^tB$$

Definizione 1.7 Data $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m,n}$

1) $A \in \mathbb{R}^{m,n} \iff {}^tA \in \mathbb{R}^{n,m}$
2) ${}^t({}^tA) = A$
3) ${}^t(-A) = -{}^tA$ la trasposta dell'opposta = all'opposta della trasposta

(**Proprietà** della trasposta)

Definizione 2.3 (matrice triangolare superiore)

se $a_{i,j}=0 \quad \forall i>j$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$$

se $a_{i,j}=0 \quad \forall i \geq j$

Definizione 2.4 (matrice strettamente triangolare superiore)

↳ triangolo più piccolo

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & \pi \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

→ se la diagonale ha entrate nulle

! Analogamente inferiore

Definizione 2.5 $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ diciamo che la matrice è simmetrica se

$$\boxed{{}^tA = A}$$

cioè se $a_{i,j} = a_{j,i} \quad \forall_{1 \le i,j \le n}$

es. $A=\begin{pmatrix} \pi & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1/2 \\ 5 & 1/2 & 3 \end{pmatrix}$

Definizione 2.6 (proprietà)

1) se A è diagonale $\Rightarrow A$ è simmetrica
2) O_{nn} è simmetrica
3) I_n è simmetrica
4) A simmetrica $\Rightarrow -A$ simmetrica
5) A simmetrica $\Rightarrow {}^tA$ simmetrica

Definizione 2.7 $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ si dice matrice antisimmetrica se

$$\boxed{{}^tA = -A}$$

$(a_{ij} = -a_{ji})$

Definizione 2.8 (proprietà)

1) A antisimmetrica $\Rightarrow a_{i,i}=0$
(gli elementi sulla diagonale sono nulli)
2) $O_{n,n}$ è antisimmetrica

sp4) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

tp) ${}^t(\alpha A) = \alpha({}^tA)$

p5) $\alpha A = O_{m,n} \iff \alpha = 0 \lor A = O_{m,n}$

legge di annullamento del prodotto

(Prodotto fra matrici) Definizione 3.5

• Matrice riga × matrice colonna — Lezione 2

$R = (x_{1,1}, x_{1,2}, \dots x_{1,p})$ matrice riga

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} \\ c_{2,1} \\ \dots \\ c_{p,1} \end{pmatrix} \in R$$

$RC = R^{1,1} \longleftrightarrow R$

$$RC = (x_{1,1}c_{1,1} + x_{1,2}c_{2,1} + \dots + x_{1,p}c_{p,1})$$

Es. $R = (2, -1, 7)$ $\quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$RC = (2 \cdot 1) + (-1 \cdot 3) + (7 \cdot (-1)) = 2 - 3 - 7 = -8$

Es. $C \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$R = (2, -1, 7)$

$RC = 8 - 1 - 7 = 0$

non è detto che se il prodotto è nullo allora almeno una matrice è nulla

• Il prodotto si può fare se e solo se il numero di colonne di una è uguale al numero di righe dell'altra

$A \in R^{m,p}$ $\quad B \in R^{p,n}$ $\quad AB$ matrice prodotto

$$A = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_m \end{pmatrix} \quad \llcorner R^{1,p}$$

$B = (c_1 \; c_2 \dots c_n)$ $\quad \llcorner R^{p,1}$

$AB \in R^{m,n}$

$(AB)_{ij} = R_i C_j$

$A \in \mathbb{R}^{m,p}$ $B \in \mathbb{R}^{p,m}$

Quando AB e BA hanno eguali dimensioni?

$AB = BA$

- devono essere moltiplicabili
- $m = n$

→ devono essere quadrate

(**potenza di matrice**) **Definizione 3.6**

$A \in \mathbb{R}^{m,m}$

$A^2 = A \cdot A$ La matrice dev'essere quadrata per poterla elevare a potenza

Se una matrice è quadrata $\forall p$ intero positivo definiamo $A^1 = A$ $A^p = A^{p-1} \cdot A$

es. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$(1 \cdot 1) + (1(-1))$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

La matrice da elevare a una qualsiasi potenza non dev'essere per forza nulla per dare come risultato la matrice nulla.

! Per ogni dimensione esiste una matrice nulla

(**Proprietà del prodotto di matrici**) **Definizione 3.7**

1. $A \in \mathbb{R}^{mp}$ $B \in \mathbb{R}^{pq}$ $C \in \mathbb{R}^{qn}$
   AB moltiplicabili (matrice $m \cdot q$)
   $(AB) \cdot C$ è moltiplicabile
   BC (matrice $p \cdot n$)

   $(AB)C = A(BC)$

proprietà associativa
Il prodotto non è commutativo ma è associativo

Definizione 3.8

(matrice invertibile) solo per matrici quadrate

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ si dice invertibile se esiste $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ tale che $\boxed{AB = BA = I_n}$ identità

È vero che tutte le matrici non nulle sono invertibili? NO

es. • $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

può essere un'identità?
No perchè la 2ª riga è solo di zeri

• $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ non è invertibile

• $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$B = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\left[-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\right]$ ~~La costante può essere portata fuori dalla matrice~~

$AB = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{è venuta l'identità}}$

! Non esiste solo una matrice che
$A \cdot A^{-1} = 1$

Definizione 3.9

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ (proprietà dell'invertibilità)

1. $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ tale che $AB = I_n$

$\Longleftrightarrow BA = I_n$ (basta il prodotto non serve verificare)

2. se B e $C \in \mathbb{R}^{n,n}$ tali che $AB = I_n = AC$

$\Longleftrightarrow B = C$

(Sistema di equazioni lineari) è un insieme finito di equazioni lineari.
Cioè

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

Definizione 4.2

$a_{ij}\ B_i \in K$

Definizione 4.3

(Soluzione del sistema **) è una n-upla ordinata $(\bar{x}_1, \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n) \in K^n$ è soluzione di ogni equazione di **

Es. $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+y=-1 \end{cases}$

(1,0) è soluzione della prima ma non della seconda
(-1;1) è soluzione del sistema

Un sistema con soluzione si dice compatibile.

Es. $\begin{cases} x+2y=1 \\ x+2y=0 \end{cases}$ $\nexists$ soluzione
è un sistema incompatibile

Un sistema è omogeneo se tutti i termini noti sono nulli. Ogni sistema omogeneo è compatibile.

Definizione 4.4

Posso risolvere un sistema con una tabella dei n°
Scelgo l'ordine delle equazioni

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$ matrice dei coefficienti

C'è bisogno di un'altra matrice

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$ matrice dei termini noti

(risoluzione sistema) Definizione 4.6

$$\begin{cases} a+b+d+3f=1 \\ b+c-f=2 \\ b+2e=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=1-b-d-3f \\ b+c-f=2 \\ b+2e=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=1-b-d-3f \\ c=2-b+f \\ b+2e=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=1-b-d-3f \\ c=2-b+f \\ e=-\frac{b}{2} \end{cases}$$

insieme soluzioni $\left\{ \left(\underbrace{1-b-d-3f}_{a}, b, \underbrace{2-b+f}_{c}, d, \underbrace{-\frac{b}{2}}_{e}, f \right) \middle| b,d,f \in \mathbb{R} \right\}$

se $b=d=$ [illegible] $=0 \Rightarrow (1,0,2,0,0,0)$

$\hookrightarrow$ trovo tutti i casi delle soluzioni

$(3,0,1,0,1,0)$

$b=0$ ma la $e=-\frac{b}{2}$ dovrebbe essere 0, invece è 1

non è soluzioni

$\boxed{\infty^3}$ soluzioni = dipendono da 3 variabili

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

matrice ridotta per righe

in ogni riga c'è l'entrata non nulla e in ogni colonna idem (almeno 1 n° per colonna diverso da 0)

MATRICE NON RIDOTTA PER RIGHE

$AX=B$ associamo la matrice $(A|B)$ 07-03

$\downarrow$

$A'X=B'$ associamo la matrice $(A'|B')$ A' è una matrice fortemente ridotta per righe

es. $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+y=-1 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$

le soluzioni del primo sistema sono contenute nelle soluzioni del secondo sistema

$\begin{cases} eq.\ 1 \\ eq.\ 2 \end{cases}$ *

$\begin{cases} eq.\ 1 \\ -2eq.1+eq.2 \end{cases}$

metto insieme le due equazioni moltiplicate per una costante

$\begin{cases} eq.\ 1 \\ (eq.2-2eq1)+2eq1 \end{cases}$ riottengo l'insieme *

$\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+y-2(x+2y)=-1-2(1) \end{cases}$

$\begin{cases} x+2y=1 \\ +3y=+3 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{array}\right)$ matrice ridotta per righe

$\begin{cases} x+2y=1 \\ +y=1 \end{cases}$ ho diviso per $-\frac{1}{3}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ ho una matrice quadrata fortemente ridotta per righe

Abbiamo risolto il sistema

DEF. L'operazione elementare di riga è

1) scambiare la riga di indice i con quella J

$A \xrightarrow{R_i \leftrightarrow R_J} B$

2) moltiplicare la riga i per uno scalare $\alpha \neq 0$

$R_i \leftrightarrow \alpha R_i$

3) Sommare alla riga il multiplo per lo scalare α della riga J

$R_i \leftrightarrow R_i + \alpha R_J$

es.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- prima riga non nulla = 1^a
- cerco un'entrata non nulla sulla 1^a riga
- scelgo -1 così ho a denominatore 1 e $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ diventa positivo

$R_2 \to R_2 + R_1$
$R_3 \to R_3 + 3R_1$
$R_4 \to R_4 + R_1$

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{3} & \cancel{1} \\ 3 & 4 & 0 & 4 & 3 \\ 6 & 8 & 0 & 8 & 6 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

- scelgo 4 perchè sotto ho suoi multipli

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-1} \end{pmatrix}$$

-1 e 4 sono pivot = perno

$R_3 \to R_3 - 2R_2$
$R_4 \to R_4 - R_2$

La matrice è ridotta per righe

$R_3 \Leftrightarrow R_4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_1 \to -R_1$
$R_2 \to R_2/4$
$R_3 \to -R_3$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -3 & -1 \\ 3/4 & 1 & 0 & 1 & 3/4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- dall'ultima riga non nulla scelgo

$R_2 \to R_2 - R_3$
$R_1 \to R_1 + 2R_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

DEF. $A, A' \in \mathbb{R}^{m,n}$

A' ridotta per righe e ottenuta da A con una sequenza finita di operazioni elementari di riga. Si definisce **rango di A** il numero $rk(A)$ uguale al numero di righe non nulle di A'. (rango o caratteristica o nullità)(P)(N)

$rk(A)$ = rango di A

OSS. Se ho una matrice $\mathbb{R}^{m,n}$ il minor rango è 0 (es. la matrice nulla). ~~Il~~ massimo rango è m

es. $\mathbb{R}^{33 \cdot 2}$ $rk(A)=2$

n° $rk(A)$ = n° pivo

$$0 \leq rk(A) \leq m, n$$

OSS Una matrice $2 \cdot 2$ ha insieme rango $(0, 1, 2)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$a_{11} \neq 0$

moltiplico per $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$

la 2ª deve diventare nulla

a_{22} è proporzionale a_{12}

Una matrice $2 \cdot 2$ ha $rk(A)=1$ se una riga è multipla dell'altra

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $rk(A)=2$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $rk(A)=1$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $rk(A)=1$

Una matrice in generale ha $rk(A)=1$ se tutte le sue righe sono proporzionali

A una matrice. La riduco fortemente per righe in 2 modi diversi ottengo A' e A''.

$$\boxed{rk(A') = rk(A'')}$$

Dim. (c) Ipotesi $AX_0 = B$

$AY = 0$

Tesi $A(x_0 + y) = B$

$$Ax_0 + Ay = B$$
$$B + 0 = B$$
$$B = B$$

Ipotesi $AX_0 = B$

$AX = B$

Tesi $\exists\, y \,/\, Ay = 0 \,/\, x_0 + y = X$ $\hookrightarrow y = x - x_0$

$$X = x_0 + (x - x_0)$$
$$A(x - x_0) = 0$$
$$Ax - Ax_0 = 0$$
$$B - B = 0$$
$$0 = 0$$

Es.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

2 colonne B quindi 2 sistemi diversi

$R_2 \to R_2 + 2R_1$

$R_3 \to R_3 + 3R_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 7 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 7 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$R_3 \to R_3 - R_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

con B_1 il sistema è incompatibile

$$\begin{cases} a_{11}(x_{11},x_{12})+a_{12}(x_{21},x_{22})=(b_{11},b_{12}) \\ a_{21}(x_{11},x_{12})+a_{22}(x_{21},x_{22})=(b_{21},b_{22}) \end{cases}$$

- Le righe si possono scambiare
- Si può moltiplicare tutto per una costante
- Si possono sommare le matrici

$$(A|B) \to (A'|B')$$

↳ fort. rid. per righe

La condizione a del teorema di Rouché-Capelli vale

Le soluzioni però dipendono dalle righe (b)

$n-rK(A)$ righe libere di x

La condizione c del teorema di Rouché-Capelli vale

$\times$ $rK(A)=rK(A|I_n)$

↳ è fortemente ridotta per righe

$rK(A|I_n)=n$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ Hanno rango 1

Ogni matrice nilpotente non è invertibile

↳ dopo una serie di elevamenti a potenza si ottiene la matrice nulla

es. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad R_2 \to R_2 - R_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad R_2 \to -\frac{1}{2}R_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \quad R_1 \to R_1 - 3R_2$$

$$\begin{cases} (x_{11} \quad x_{12}) = \left(-\frac{1}{2} \quad \frac{3}{2}\right) \\ (x_{21} \quad x_{22}) = \left(\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

DEF: (I determinanti si trovano solo in matrici quadrate)

$A \in K^{n,n}$ il determinante di A è un numero (elemento di K) definito:

- Se $n=1 \rightarrow A=(a_{1,1})$ si pone $\det(A)=a_{1,1}$
- Se $n \geq 2 \rightarrow$ si pone $\det(A) = a_{1,1} \cdot A_{1,1} + a_{1,2} + A_{1,2} + \dots + a_n \cdot A_n$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j}$$

dove $A_{i,j}$ è il "complemento algebrico" di a_{ij} cioè è il determinante della sottomatrice di A ottenuta cancellando la riga i e la colonna j moltiplicato per

$$(-1)^{i+j} \quad \begin{cases} i+j=2k & =1 \\ i+j=2k+1 & =-1 \end{cases}$$

$$A=\overset{\text{matrice}}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} \qquad A=\overset{\det(A)}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Il simbolo del determinante è dato da 2 sbarre verticali (attenzione a non confondere le tonde per la matrice e le sbarre per det(A)).

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} a_{22} = a_{22}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} a_{21} = -a_{21}$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} -$

$- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$ **FORMULA di SARRUS**

$n!$ addendi

Metodo per ricordarselo

- $$\begin{array}{ccc|cc} + & + & +\,- & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$ Solo per matrici 3×3

- $$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$ segni di $(-1)^{i+j}$

PROP. $A \in K^{n,n}$

1) Se A' è ottenuto da A permutando due righe* diverse $\underline{\det(A') = -\det(A)}$ [idem per colonne *]

2) Se A' è ottenuta da A moltiplicando una riga* per $\alpha \in K$ [idem per colonne *]

$$\underline{\det(A') = \alpha \det(A)}$$

3) Se A' è ottenuta da A sommando a una riga* un multiplo di <u>un'altra</u> [idem per colonna]*

$$\det(A') = \det(A)$$

COR. Se $A \in K^{n,n}$ allora $\forall i = 1 \dots n$ il
$\forall j = 1 \dots n$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$ (possiamo determinare il determinante in qualsiasi riga)

$$\sum_{i}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

! Quando faccio una permutazione devo cambiare tutta la matrice di segno. → del determinante

OSS. Se in una matrice c'è una riga o una colonna di zeri allora det = 0

Se riesco a combinare le righe il det = 0 (se la 3ª riga = 1ª + 2ª ; ...)

LEGAME FRA DETERMINANTE e INVERSA

DEF. $A \in K^{n,n}$ si dice $\boxed{\text{AGGIUNTA di } A}$ la matrice $\tilde{A} \in K^{n,n}$ la cui entrata i,j è $A_{j,i}$ (c'è però di mezzo una trasposizione)

es. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1^{*} \end{pmatrix}$

* (A_{21} cancello 2ª riga e 1ª col, trovo $v \to +v$)
(A_{22} cancello 2ª riga 2ª col, trovo $w \to -w$)

$\tilde{A} = {}^t\begin{pmatrix} n & -m \\ +v & -w \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} n & v \\ -m & -w \end{pmatrix}$

Aggiunta di A = $\tilde{A}$
↓
Calcolo $A_{i,j}$
(scelgo A_{11} → cancello 1ª riga e 1ª colonna, trovo n → $+n$)
(A_{12} → cancello 1ª riga e 2ª colonna, trovo m → $-m$) *

$A_{11} = 1^{*}$
↓
cancello 1ª riga e 1ª colonna, segno +

$A_{12} = -1$

$A_{21} = -3$ cancello 2ª riga e 1ª colonna

$A_{22} = 1$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$
[trasposta]

PROP. $A \in K^{n,n}$

$$\tilde{A} \cdot A = A \cdot \tilde{A} = \det(A) I_n$$

es. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(B\ A_2\ A_3 \dots A_n) = \det(\bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2 + \bar{x}_3 A_3 + \dots + \bar{x}_n A_n\ A_2\ A_3 \dots A_n)$$

op. colonne

$$= \det(\bar{x}_1 A_1\ A_2\ A_3 \dots A_n) =$$

$$= \bar{x}_1 \underbrace{\det(A_1\ A_2\ A_3 \dots A_n)}_{\det(A)}$$

$$\boxed{\bar{x}_1 = \frac{\det(B\ A_2 \dots A_n)}{\det(A)}}$$

es. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$AX = B$$

$$\det(A) = -3$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-3}{-3} = 1$$

soluzione $(-1; 1)$

$$\bar{y}_1 = \frac{\det(A_1\ A_2 \dots A_{n-1}\ B)}{\det(A)}$$

I vettori di modulo 1 sono detti VERSORI

S_2

SISTEMA di RIFERIMENTO nel piano

- monometrici*
- ortogonali
- orientati

=> assi

* la scelta di un vettore ci dice la lunghezza che stiamo utilizz.

$\boxed{S_2}$ piano euclideo

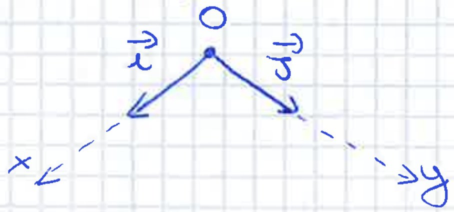
$(O, \vec{i}, \vec{j})$

O punto

$\vec{i}$ $\vec{j}$ applicati in O

$\vec{i}$ si sovrappone a $\vec{j}$ con rotazione antioraria di $\frac{\pi}{2}$ radianti

Le direzioni sono orientate e si chiamano assi coordinati (ascisse e ordinate)



A ogni punto associamo una coppia di numeri $P \to (x_P, y_P)$ con segno

Corrispondenza biunivoca

S_3

$\boxed{S_3}$ spazio euclideo

$(O, \vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k})$

$O \in S_3$

$\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k} \in V_3(O)$ sono versori

$\vec{i}$ e $\vec{j}$ sono ortogonali (individuano un piano)

$\vec{k}$ è perpendicolare al piano per $\vec{i}$ e $\vec{j}$

ed è tale che la terna $(\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k})$ sia orientata con la regola della mano destra

↓

pollice
indice
medio

OPERAZIONI con VETTORI

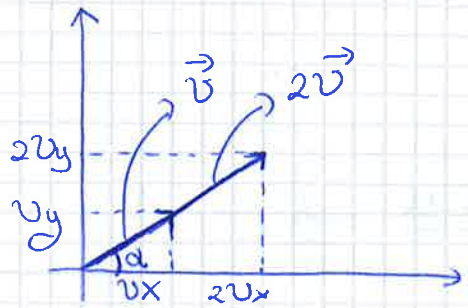
$\vec{v} \in V_n(O)$ $\qquad \alpha \in \mathbb{R}$ (scalare)

$\downarrow$

$(v_x \ v_y \ v_z)$

PRODOTTO $\alpha \vec{v}$ come vettore associato alla matrice riga $\alpha(v_x \ v_y \ v_z)$

es. $\alpha = 2$

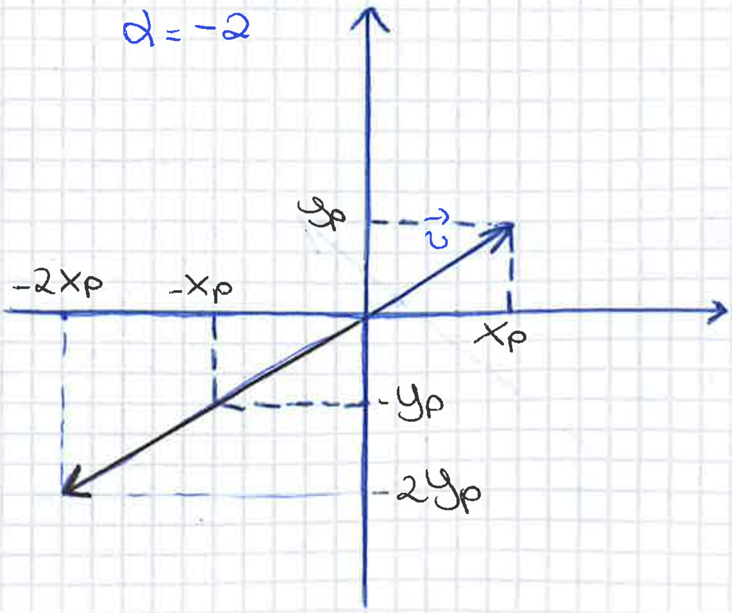


$2(v_x \ v_y) = (2v_x \ 2v_y)$

→ 2 triangoli simili
*indipendentemente dal sistema di riferimento

→ $\vec{v}$ e $2\vec{v}$ hanno *
- stesso verso
- stessa direzione
- modulo 1 il doppio dell'altro

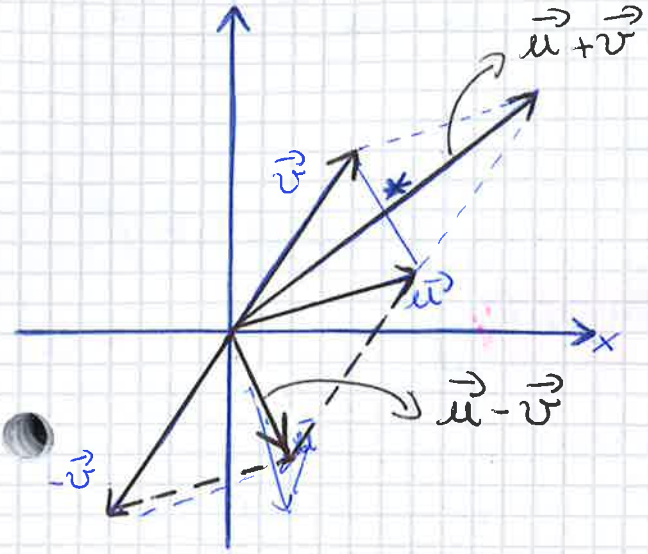
$\alpha = -2$



PROP. $\forall \vec{v} \in V_3(O)\ \exists!\ v_x\ v_y\ v_z$

unici!

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

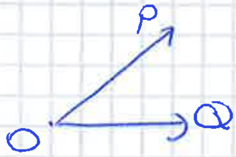


$\vec{u}+\vec{v}$ $*$

$\vec{u}-\vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

Quando $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono paralleli?

$\vec{OP}$ $\vec{OQ}$



1) o uno è nullo

2) o hanno eguale direzione

concordi

egual verso

$\vec{u} \parallel \vec{v} \qquad \vec{v} \neq 0 \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \,/\, \vec{u} = \lambda \vec{v}$

es. $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$

$\vec{v} = -6\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$

per sapere se sono $\parallel$ basta vedere se uno è un multiplo dell'altro

$\boxed{\vec{u} = \lambda \vec{v}}$ paralleli

$3 = -6\lambda \quad \lambda = -\frac{1}{2}$ sono paralleli

$$rk\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & -4 \end{pmatrix} \leq 1$$

es. $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$

$\vec{v} = -6\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$

non sono paralleli

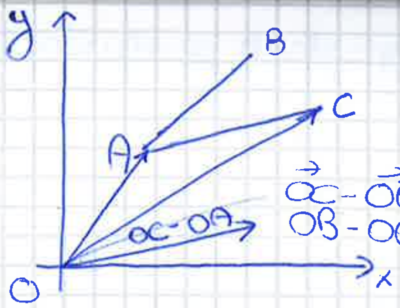
$$rk\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -6 & +2 & +4 \end{pmatrix} = 2$$

VETTORI PARALLELI

↓

1 multiplo dell'altro

tre punti **allineati**



$\vec{OC} - \vec{OA} = C - A$

$OB - OA = \underbrace{B - A}_{\text{simbolo non operazione}}$

$A(x_A, y_A, z_A)$

$B(x_B, y_B, z_B)$

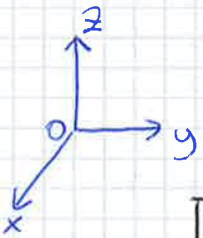
$C(x_C, y_C, z_C)$

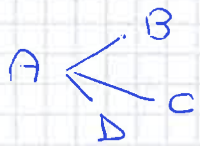
$$\vec{OC} - \vec{OA} = (x_C - x_A)\vec{i} + (y_C - y_A)\vec{j} + (z_C - z_A)\vec{k}$$

$$\vec{OB} - \vec{OA} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

3 PUNTI ALLINEATI

$$\boxed{rk \begin{pmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{pmatrix} \leq 1}$$





Si traslicano finchè un punto coincide con l'O

4 PUNTI ALLINEATI

$$\boxed{rk \begin{pmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ x_D - x_A & y_D - y_A & z_D - z_A \end{pmatrix} \leq 2}$$

PRODOTTO SCALARE

LEZIONE 8

Due vettori

$\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$

$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$

$\left.\begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{v} \\ \langle \vec{u}; \vec{v} \rangle \end{array}\right\}$ simbolo

$$= u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

$$= \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Proprietà

$\forall \vec{u} \; \vec{v} \; \vec{w} \in V_n(O) \quad \alpha \in \mathbb{R}$

- $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}; \vec{u} \rangle$ commutativa
- $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}; \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}; \vec{w} \rangle$ distributiva
- $\langle \vec{v} + \vec{w}; \vec{u} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{w}; \vec{u} \rangle$
- $\alpha \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \alpha \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}; \alpha \vec{v} \rangle$

'Reductio ad absordum' ...

PROP $\vec{v}\ \vec{w} \in V_2(O)$

1) $\vec{v}=\vec{0}$ oppure $\vec{w}=\vec{0} \Rightarrow \langle \vec{v};\vec{w}\rangle = 0$

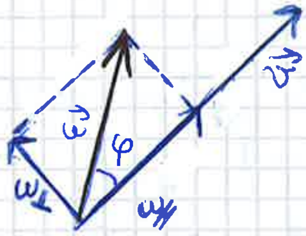
2) $\vec{v}\neq\vec{0}$, $\vec{w}\neq 0 \Rightarrow \langle \vec{v};\vec{w}\rangle = |\vec{v}||\vec{w}|\cos\widehat{\vec{v}\vec{w}}$

ortogonali
- formano l'angolo di $\pi/2$
- almeno uno dei due è nullo

$\vec{v}\perp\vec{w}$

- $\cos\widehat{\vec{u}\vec{v}} = \dfrac{\langle \vec{u},\vec{v}\rangle}{|\vec{u}||\vec{v}|}$ → positivo

il segno è dato dal segno del prodotto scalare



$\vec{w} = \vec{w}_\parallel + \vec{w}_\perp$ $\qquad \varphi = \widehat{\vec{v}\vec{w}}$

$\vec{w}_\parallel = \lambda\vec{v}$

$|\vec{w}|_\parallel = |\vec{w}|\cos\varphi$

$\cos\varphi = \dfrac{\langle\vec{v}\,\vec{w}\rangle}{|\vec{v}||\vec{w}|}$

$|\vec{w}_\parallel| \overset{**}{=} \dfrac{\langle\vec{v}\,\vec{w}\rangle}{|\vec{v}|}$ $\qquad$ {se φ fosse ottuso dovrei mettere un - davanti} $**$

$|\vec{w}_\parallel| = |\lambda||\vec{v}| \overset{*}{=} \lambda|\vec{v}|$

$|\vec{w}_\parallel| = \dfrac{|\vec{w}_\parallel|}{|\vec{v}|}\vec{v} = \dfrac{\langle\vec{v}\cdot\vec{w}\rangle}{|\vec{v}|^2}\vec{v} = \dfrac{\langle\vec{v},\vec{w}\rangle}{\langle\vec{v},\vec{v}\rangle}\vec{v}$

$|\vec{w}_\perp| = \vec{w} - \vec{w}_\parallel = \vec{w} - \dfrac{\langle\vec{v}\,\vec{w}\rangle}{\langle\vec{v}\,\vec{v}\rangle}\vec{v}$

PRODOTTO VETTORIALE

$(\wedge \circ \times)$

$\begin{matrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{matrix}$

$\vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}$

$\vec{w} = w_x\vec{\imath} + w_y\vec{\jmath} + w_z\vec{k}$

$\vec{v}\times\vec{w} = (v_y w_z - v_z w_y)\hat{\imath} + (v_z w_x - v_x w_z)\vec{\jmath} + (v_x w_y - v_y w_x)\vec{k}$

$** \quad \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} \qquad - \begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix}$

PROP. $\vec{v}\ \vec{w} \in V_n(O)$

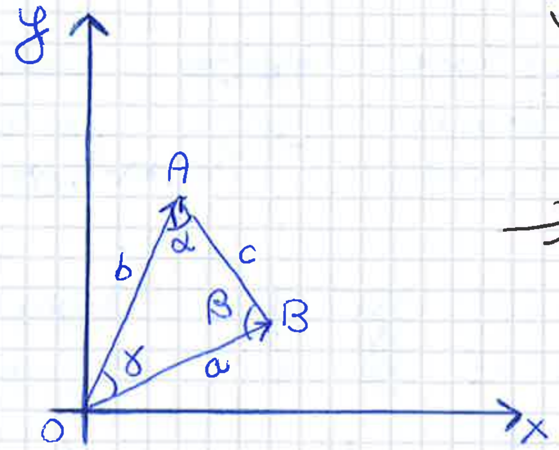
- $\vec{v} \parallel \vec{w} \Rightarrow \vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$
- $\vec{v} \nparallel \vec{w} \Rightarrow \vec{v} \times \vec{w}$

ho

a) direz. ortog. al piano di $\vec{v}$ e $\vec{w}$

b) verso tale che $(\vec{v}, \vec{w}\ \ \vec{v} \times \vec{w})$
sia orientato con la regola della mano destra

c) $|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}||\vec{w}| \sin \underbrace{\widehat{\vec{v}\vec{w}}}_{\text{strettamente positivo}}$



$\frac{1}{2} ab \sin\gamma$

$\frac{1}{2} bc \sin\alpha$

$\frac{1}{2} ca \sin\beta$

*

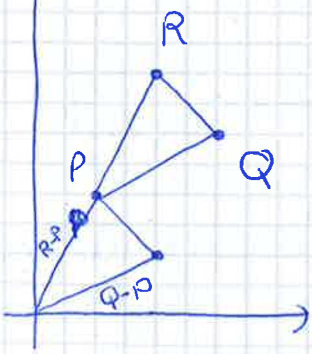
vettoriale

es. $A(3,2,-1)$
$B(1,1,1)$ punti non allineati
$O=(0,0,0)$

$$A = \frac{1}{2}|\vec{OA} \times \vec{OB}| = \frac{1}{2}\left|(3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}) \times (\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left| 3\vec{k} - 3\vec{j} - 2\vec{k} + 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{i} \right|$$

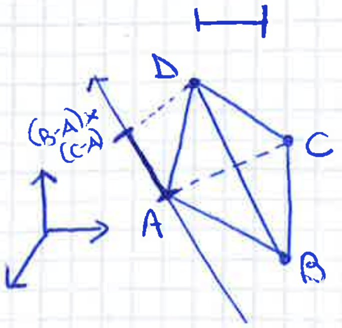
$$= \frac{1}{2}\left| 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k} \right| = \frac{1}{2}\sqrt{9+16+1} = \frac{1}{2}\sqrt{26}$$



$$\text{Area}(PQR) = \frac{1}{2}\left|(Q-P) \times (R-P)\right|$$

* $\frac{1}{2} ab \sin\gamma = \frac{1}{2} (\vec{a} \times \vec{b})$

Se i 3 vettori sono complanari $\Rightarrow$ il prodotto misto è nullo



es. ABC base

$$A_{base} = \frac{1}{2} |(B-A) \times (C-A)|$$

$$\text{Volume} = \frac{1}{3}\frac{1}{2} \underbrace{|(B-A) \times (C-A)|}_{\text{vettore 1}} \underbrace{|D-A|}_{\text{vettore 2}} \cos\varphi =$$

φ dev'essere compreso tra il vettore 1 e 2

$$= \frac{1}{6} \langle D-A, (B-A) \times (C-A) \rangle$$

es. $A = (1, 0, 1)$
$B = (2, 1, 1)$
$C = (1, 2, 3)$
$D = (1, 0, 0)$

Scelgo un punto come origine (es. punto D)

$$\langle A-D, (B-D) \times (C-D) \rangle = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\left(-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\right) = \frac{1}{3}$$

Ad ogni retta posso associare più sistemi di punti dello stesso tipo. Corrispondenza fra oggetto algebrico e oggetto geometrico (per le rette).

es. $\begin{cases} x = 4 - 6t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2t \end{cases}$ $\quad -6\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$

(4, 2, 0)

dell'esempio precedente ★ $\leftarrow$ rette parallele con un punto in comune = stessa retta

Due rette nello spazio possono essere
- parallele
- si intersecano in un punto } complanari $\downarrow$ esiste un piano che le contiene
- sghembe (non complanari)
- coincidenti

es. $r = \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$ $\quad s = \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$

$u = \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$

$\vec{v_r} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$] potrebbero essere sghembe

$\vec{v_s} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

$\vec{v_u} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$] parallele

$\begin{cases} 1 + 3t = -2 + t \\ 1 + 2t = -1 + t \\ 1 - t = 2 + t \end{cases}$ $\quad t = -\frac{1}{2}$ } non funziona

$\rightarrow \begin{cases} 1 + 3t = -2 + t' \\ 1 + 2t = -1 + t' \\ 1 - t = 2 + t' \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 3t - t' = -3 \\ 2t - t' = -2 \\ t + t' = -1 \end{cases}$ $\quad -t' = 0 \quad t' = 0$ $\quad 3t = -3 \quad t = -1$ è soluzione

ecc

es. $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

$A = (1, 1, 1)$

$3(x-1) + 2(y-1) - 1(z-1) = 0$

$3x + 2y - z = 4$

moltiplico i coeff dei versori per (x - le coordinate del punto)

PUNTO $\in$ PIANO

$B = (1\quad -1\quad 2) \in \alpha$?

$C = (0\quad 3\quad 2) \in \alpha$?

B. $3 \cdot 1 + 2(-1) - 1 \cdot 2 = 4$ $\quad -1 = 4$ B Non appartiene al piano

C. $3 \cdot 0 + 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 4$ $\quad 4 = 4$ C $\in$ al piano

Ad ogni piano corrispondono più equazioni!

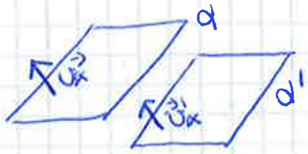
Due piani possono essere:
- coincidenti
- paralleli
- incidenti → intersezione = retta

$\alpha = ax + by + cz = d \quad \perp \quad a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

$\alpha' = a'x + b'y + c'z = d' \quad \perp \quad a'\vec{i} + b'\vec{j} + c'\vec{k}$

- $\alpha // \alpha' \iff \vec{v_\alpha} // \vec{v_{\alpha'}} \iff rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \leq 1$

omogeneo



completo

- $\alpha = \alpha' \iff rk\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} \leq 1$

Rouché-Capelli

- $\alpha \cap \alpha' = \text{retta} \iff rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$

es. $\begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ 3x + 2y + z = 4 \end{cases}$

Non sono // xk non sono proporzionali

⇓

Si intersecano

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \to R_2 = R_2 - R_1$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & +2 & 0 \end{array}\right) \to R_2 = +\frac{R_2}{2}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to R_1 = R_1 + R_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

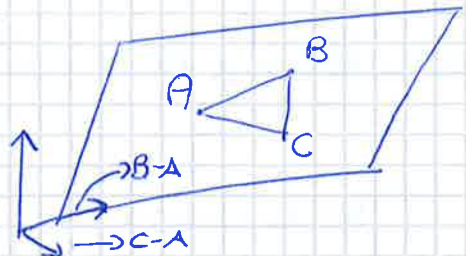
$r \cap \alpha_1$

$\cancel{1}+3t+1+\cancel{2t}-\cancel{2t}=\cancel{1}$ $\quad t=-\frac{1}{3}$ valore del parametro corrispondente al punto di intersezione

$r \cap \alpha_1 = \left\{\left(0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)\right\}$

Si sostituiscono i punti della retta nell'eq del piano.

Per 3 punti non allineati passa ! piano.



Possiamo trovare un vettore ⊥ al piano?

$$(B-A) \times (C-A)$$

$$\langle (P-A); (B-A)\times(C-A) \rangle = 0$$ prodotto misto

devono essere complanari per far sì che il prodotto sia nullo

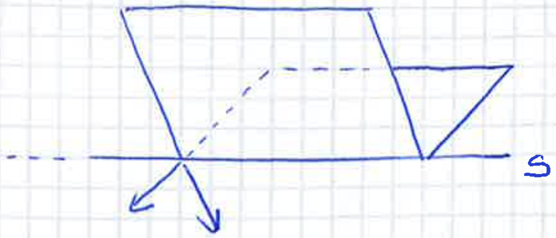
es. $A(1 \quad 1 \quad -1)$
$B(2 \quad -1 \quad 3)$
$C(3 \quad 1 \quad 1)$

$$\begin{array}{c} \\ B \\ C \end{array} \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} y-1 & z+1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} x-1 & y-1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(4y-4+2z+2)+2(-2x+2-y+1)$$

$$= -4x+6y+4z+2$$

$$-4x+6y+4z=-2$$



$$s\begin{cases}3x+y-z=1\\ x+y+2z=0\end{cases}$$

$$3\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=1$$
$$\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}=0$$

Ho 2 vettori $\perp s$, posso trovarne 1 parallelo?
Con il pr. vettoriale

$$s \parallel (3\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})\times(\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$$
$$= 3\vec{k}-6\vec{j}-\vec{k}+2\vec{i}-\vec{j}+\vec{i}=$$
$$= 3\vec{i}-7\vec{j}+2\vec{k}$$

$$r:\begin{cases}ax+by+cz=d\\ a'x+b'y+c'z=d'\end{cases}$$ 2 piani che danno la retta

$$\alpha: a''x+b''y+c''z=d''$$

Retta contenuta nel piano?

$r\cap\alpha \rightarrow$ sistema
$$\begin{cases}ax+by+cz=d\\ a'x+b'y+c'z=d'\\ a''x+b''y+c''z=d''\end{cases}$$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c}\underbrace{\begin{matrix}a & b & c\\ a' & b' & c'\\ a'' & b'' & c''\end{matrix}}_{A} & & & \begin{matrix}d\\ d'\\ d''\end{matrix}\end{array}\right)}_{(A|B)}$$

rk(A)
rk(A|B)
$\downarrow$
Rouché-Capelli
ci dice quante soluzioni

importante

	rk(A)	rk(A|B)	posiz. rel.
caso 1	2	2	$r\subseteq\alpha$
CASO 2	2	3	$r\parallel\alpha$, $r\not\subseteq\alpha$
CASO 3	3	3	$r\cap\alpha$ 1 punto

$$r: \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} a''x+b''y+c''z=d'' \\ a'''x+b'''y+c'''z=d''' \end{cases}$$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \underbrace{\begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} d \\ d' \\ d'' \\ d''' \end{matrix} \end{array}\right)}_{(A|B)}$$

rk(A)

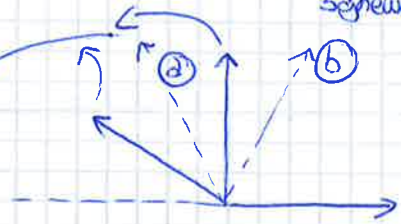
rk(A|B)

$rk_{min}(A)=2$

Rouché capelli ↙

posiz	rk(A)	rk(A|B)	
r=s	2	2	a
no sol //	2	3	b
r∩s 1 punto	3	3	c
no sol sghembe	3	4	d

complanari



es.

$$s \begin{cases} 3x+y-z=1 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$$

$$r \begin{cases} x-y-5z=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$R_2 \to R_2 - R_1$
$R_3 \to R_3 + R_1$
$R_4 \to R_4 - R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -6 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$R_3 \to R_3 + 2R_2$
$R_4 \to R_4 - R_2$

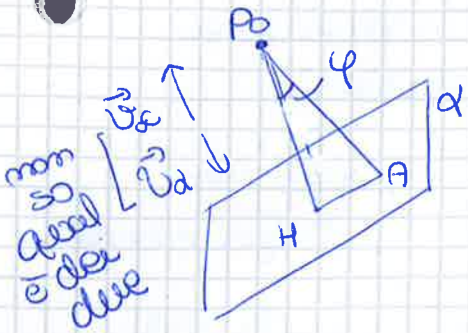
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$z=0$
$x=1/2$
$y=-1/2$

perché tocco un punto
↑
incidenti

$\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$

$$d(P_0, H) \geq d(P_0, \alpha) \geq d(P_0, H)$$
$$\Rightarrow \quad d(P_0, H) = d(P, \alpha)$$



$\overline{P_0 H} \,//\, \vec{v}_\alpha \qquad H - P_0 \,//\, \vec{v}_\alpha$

$$d(P_0\,\alpha) = d(P_0\,H) = |\overline{P_0 A}|\cos\varphi =$$
$$= |A - P_0|\cos\varphi \cdot \frac{|\vec{v}_\alpha|}{|\vec{v}_\alpha|} = \frac{|\langle A - P_0, \vec{v}_\alpha\rangle|}{|\vec{v}_\alpha|}$$

$A = (x_A, y_A, z_A)$

$$A - P_0 = (x_A - x_0)\vec{i} + (y_A - y_0)\vec{j} + (z_A - z_0)\vec{k} =$$
$$= \frac{|a(x_A - x_0) + b(y_A - y_0) + c(z_A - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} =$$
$$= \frac{|a x_A + b y_A + c z_A - (a x_0 + b y_0 + c z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

La formula vale sempre sia per punti esterni che interni al piano →

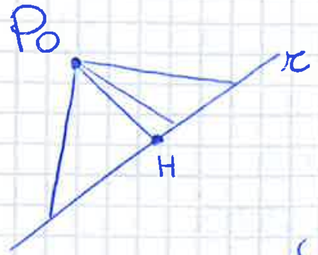
$$= \frac{|d - a x_0 - b y_0 - c z_0|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|a x_0 + b y_0 + c z_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

<u>esempio</u> $\alpha: 3x + 2y - z = 1$

$P_0 = (1, 1, 1)$

$$d(P_0, \alpha) = \frac{|3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{|3|}{\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

2) PUNTO-RETTA



$$d(P_0, r) = d(P_0, H)$$

Calcoliamo il piano passante per $P_0 \perp r$

<u>esempio</u> $r: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \qquad P_0 = (1, 1, 1)$

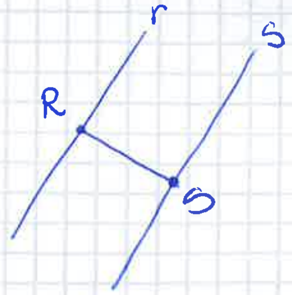
$r \,//\, \vec{v}_r = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$

$3(x-1) + 2(y-1) - 2(z-1) = 0$

$3x + 2y - 2z = 3$ sost. nell'eq piano la retta

$3(1 + 3t) + 2(2t) - 2(1 - 2t) = 3$

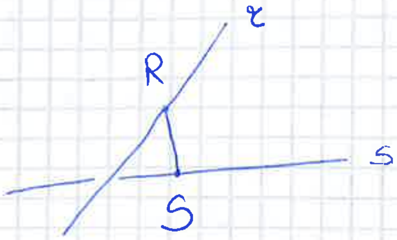
$t = \frac{2}{17} \qquad H = \left(\frac{23}{17}, \frac{4}{17}, \frac{13}{17}\right)$

3) 

RETTA-RETTA

$$d(r,s) = d(R,S)$$

vd. 4). 5)



$\exists!\, R \in r,\ S \in s \ /\ \overline{RS} \perp r,s$

Inoltre $d(r,s) = d(R,S)$

<u>esempio</u>

$$r = \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2t \\ z = 1-t \end{cases} \qquad s = \begin{cases} x = t' \\ y = t' \\ z = t' \end{cases}$$

dobbiamo sostituire con dei vettori

$$\vec{v_r} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} \qquad \vec{v_s} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

$R-S$

$R - S \perp \vec{v_r}, \vec{v_s}$

$\downarrow$

$\langle R-S, \vec{v_r} \rangle = 0$

$\langle R-S, \vec{v_s} \rangle = 0$

$$R-S = (1+3t-t')\vec{i} + (2t-t')\vec{j} + (1-t-t')\vec{k}$$

$$\begin{cases} 3(1+3t-t') + 2(2t-t') - (1-t-t') = 0 \\ (1+3t-t') + (2t-t') + (1-t-t') = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14t - 4t' = -2 \\ 4t - 3t' = -2 \end{cases}$$ matrice rango 2

$$\left(\begin{array}{cc|c} 14 & -4 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 = R_1/2]{} \left(\begin{array}{cc|c} 7 & -2 & -1 \\ 4 & -3 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 7 & -2 & -1 \\ -\frac{13}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \qquad t = -\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{13}\right) = \frac{1}{13}$$

$$-2t' = -1 - \frac{7}{13}$$

$$R\left(\frac{16}{13}; \frac{2}{13}; \frac{12}{13}\right)$$

$$S\left(\frac{10}{13}; \frac{10}{13}; \frac{10}{13}\right) \qquad \Leftarrow \quad t' = \frac{10}{13}$$

SFERE LEZIONE 12

$C \in S_n \quad \rho \in (0; +\infty)$

$\{P \in S_n \,/\, d(P,C) = \rho\}$

$C(x_c, y_c, z_c) \quad d(P,C)^2 = \rho^2$

$P(x, y, z)$

coordinate del centro

$= \{P = (x,y,z) \,/\, (x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 + (z-z_c)^2 = \rho^2\}$

raggio al quadrato

$x^2+y^2+z^2-2x_cx-2y_cy-2z_cz+$
$+x_c^2+y_c^2+z_c^2-\rho=0$

$$x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$$

$x^2+y^2+z^2+1=0$ rispetta la scrittura della sfera ma non è una sfera

<u>esempio</u> $C = (1,-1,2)$

$\rho = 1$

$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2 = 1^2$

$x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+5=0$

$-2x_c = \alpha$

$-2y_c = \beta$

$-2z_c = \gamma$

$$C = \left(-\frac{\alpha}{2}; -\frac{\beta}{2}; -\frac{\gamma}{2}\right)$$

raggio quadro

$x_c^2+y_c^2+z_c^2-\rho^2=\delta$

$\rho^2 = x_c^2+y_c^2+z_c^2-\delta > 0$

$= \dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-4\delta}{4} > 0$

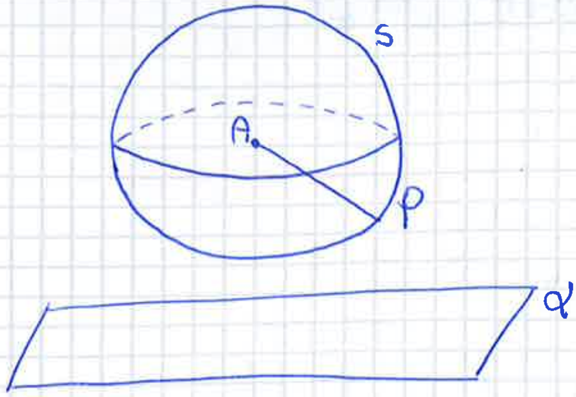
se è $=$ a 0 la sfera è degenere

$$\rho = \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-4\delta}}{2}$$

<u>esempio</u> $x^2+y^2+z^2+4x-2y+4=0$

$C = (-2, 1, 0)$

$\rho = \dfrac{\sqrt{4^2+(-2)^2+0^2-4\cdot 4}}{2} = 1$ è una sfera



Intersecando troviamo infinite circonferenze lontano dal centro i paralleli diventano punti

Piano tangente se l'intersezione è un punto

$d(A,\alpha) > \rho$ non si toccano
$d(A,\alpha) = \rho$ tangenti
$d(A,\alpha) < \rho$ paralleli
└ si intersecano

<u>esempio</u> Posizione relativa sfera-piano
└ distanza centro-piano rispetto al raggio

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2+4x-2y-4=0 \end{cases}$$

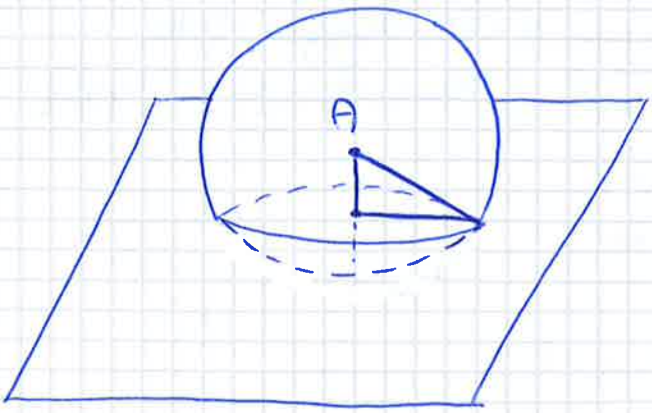
$$(x+2)^2+(y-1)^2+z^2-4-1-4=0$$
$$(x+2)^2+(y-1)^2+z^2=3^2$$ è una sfera

Trovo distanza

$C=(-2;1;0) \quad \rho=3$

$$d(\alpha,A) = \frac{|-2+1+0-1|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} < 3$$ si intersecano

$*$



Il centro della circonferenza si trova sulla retta $\perp$ al piano e passante per il centro della sfera (Pitagora)

Raggio circonferenza $= \alpha \cap S$ $*$ $\sqrt{9-\frac{21}{3}} = \sqrt{\frac{23}{3}}$

$$\begin{matrix} \alpha \\ S \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2+4x-2y-4=0 \end{cases}$$

$$x^2+y^2+z^2+4x-2y-4+\lambda(x+y+z-1)=0$$

metodo del fascio di sfere

$\lambda \in \mathbb{R}$

$$\frac{4+\lambda}{-2}=-1$$

$$\frac{-2+\lambda}{-2}=-2$$

$$\frac{\lambda}{-2}=1$$

da $B=(-1,2,1)$

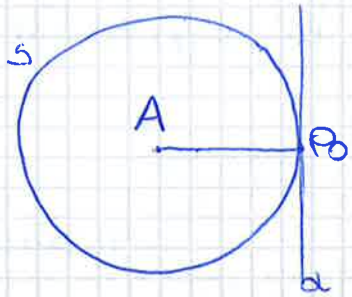
$\lambda=-2$

eq. sfera

$$x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z-2=0$$

Voglio trovare la sfera tangente ad α nel punto dato.

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=\rho^2$$



Data la sfera e il punto trovare il piano

$P_0:(x_0,y_0,z_0)$

trovo un vettore $\perp$ α = raggio vettore

$A-P_0$

$$(x_A-x_0)(x-x_0)+(y_A-y_0)(y-y_0)+(z_A-z_0)(z-z_0)=0$$

...

OPERAZIONI in $\mathbb{R}^n$

∟ la identifichiamo come matrici $\mathbb{R}^{1,n}$

$$(x_1, x_2, \dots) + (y_1, y_2, \dots) = (x_1+y_1 \quad x_2+y_2 \dots)$$

$$\lambda (x_1 x_2 \dots) = (\lambda x_1 \quad \lambda x_2 \dots)$$

SOMMA $f, g : I \to \mathbb{R}^n$

$f+g : I \to \mathbb{R}^n$

$t \to (f+g)(t) = f(t)+g(t)$

$\lambda f : I \to \mathbb{R}^n$

$t \to (\lambda f)(t) = \lambda (f(t))$

Una funzione è di classe C^n se tutte le sue componenti sono C^n.
Se le C sono diverse si prende la più piccola.

CURVE

$O_{\hat{i}\hat{j}\hat{k}} \quad S_n \leftrightarrow \mathbb{R}^3$

CURVA PARAMETRIZZATA è una funzione continua f da $I \to \mathbb{R}^3$, $I \subseteq \mathbb{R}$ int. aperto.

CURVA è un insieme $C \in \mathbb{R}^3$

∟ deve essere immagine di una curva parametrizzata *

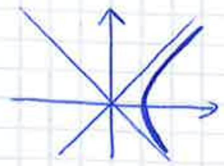
ogni retta è una curva

CURVA PIANA è contenuta in un piano (ogni retta è una curva piana)

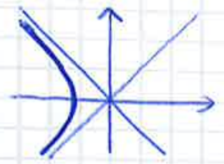
$$\cosh(t) = \frac{e^{t}+e^{-t}}{2}$$ catenaria

$$\sinh(t) = \frac{e^{t}-e^{-t}}{2}$$

$t \to (a\cosh(t), b\sinh(t))$



$t \to (-a\cosh(t), +b\sinh(t))$



6) $t \to (t, t^2, t^3)$ ** curva sghemba o gobba*

$\Downarrow$

non sta in un piano

questa è cubica gobba

* Come vedere se una curva sta in un piano:
se la ipotizzo piana: devo trovare 3 punti non allineati, calcolare il piano passante per questi e vedere se la curva è contenuta nel piano.

** es. $t=0 \quad (0,0,0) = O$

$t=1 \quad (1,1,1) = A$

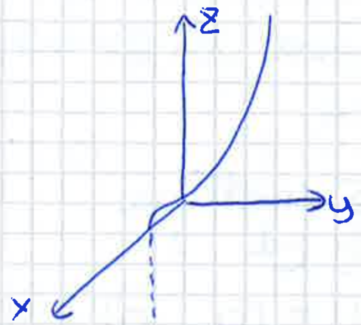
$t=-1 \quad (-1,1,-1) = B$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2(x-z)$$

$x - z = 0$

$t - t^3 = 0$ al max 3 punti di intersezione

$t(1-t)(1+t) = 0 \to 0,\ 1,\ -1$



gli altri punti non sono contenuti

$\Downarrow$

non è una curva piana

nel piano xy $\quad t \to (t, t^2) \quad x = t,\ y = t^2 \quad y = x^2$ parabola

$xz \quad t \to (t, t^3) \quad z = x^3$

$yz \quad t \to (t^2, t^3)$

esempio
- $t \to (1+t, 2t, ..., 3-t)$
  è regolare
- $t \xrightarrow{g'} (1, 2, ..., -1)$
  rappresenta una retta
- $t \to \bar{x} \in \mathbb{R}^n$
  non è regolare

$s \xrightarrow{g} (1+s^3, 2s^3, 3-s^3)$

con valori diversi di s ogni componente ha un diverso

es. $2s^3 \to s=1 \to 2$, $s=2 \to 16$

$s \xrightarrow{g'} (3s^2, 6s^2, -3s^2)$

non è regolare

parametrizzazione di una retta NON regolare

esempio

$t \to (t^2, t^3)$ non regolare

$t \to (2t, 3t^2)$ non regolare nell'origine ⇒ punto regolare da $(0; +\infty)$

punto curva

$f = (f_1, f_2, f_3) : I \to \mathbb{R}^3$, t_0

param regolare

$(f_1(t_0) + \tau f_1'(t_0), f_2(t_0) + \tau f_2'(t_0), f_3(t_0) + \tau f_3'(t_0))$

retta tg curva

RETTA TANGENTE

es. $t \xrightarrow{f} (1+t, 2t, 3-t)$

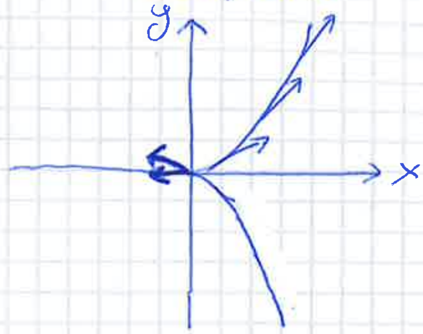
$t \xrightarrow{f'} (1; 2, -1)$

$t=0$

$(1+\tau, 2\tau, 3-1\tau)$

esempio $\quad t \xrightarrow{f} (t^2, t^3)$

$t \xrightarrow{f'} (2t, 3t^2)$



[salta la 3ª condizione]

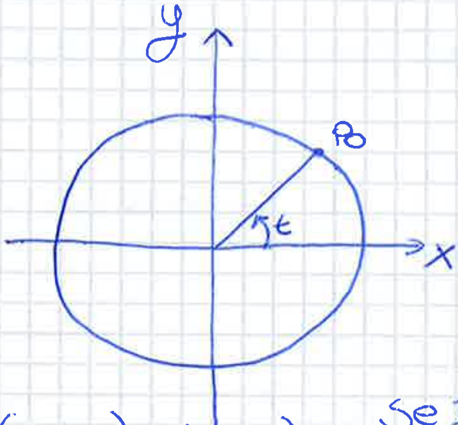
punti in cui la derivata prima (retta tangente) cambia di segno

↓

curva NON regolare

però in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ è regolare

esempio *



$(0;2\pi)$ $\quad (-\pi;\pi)$

$t \xrightarrow{f} (\rho\cos t, \rho\sin t)$

$t \xrightarrow{f'} (-\rho\sin t, \rho\cos t)$

f non è iniettiva [salta la 2ª condizione]

se le componenti almeno una è iniettiva allora la f è iniettiva (non viceversa infatti) *

$\vec{OP_0} = \rho\cos t_0 \vec{i} + \rho\sin t_0 \vec{j}$

$-\rho\sin t_0 \vec{i} + \rho\cos t_0 \vec{j}$

↓

vettori perpendicolari - retta tangente

CAMBIARE PARAMETRIZZAZIONE

$f: I \to \mathbb{R}^3$

$t: J \to I$

$s \mapsto t(s)$

$g = f \circ t : J \to \mathbb{R}^3$

1) la f su cui cambiamo dev'essere **suriettiva**
2) Deve mantenersi la regolarità **regolare continua**

= $t: J \to I$ si dice cambio di parametro se è
1) continua
2) suriettiva

(le immagini rimangono uguali)

CURVA BIREGOLARE

f e $g : I \mapsto \mathbb{R}^3$

$f = (f_1, f_2, f_3)$

$g = (g_1, g_2, g_3)$

$$f \times g : I \mapsto \mathbb{R}^3$$

$$t \mapsto \left(\begin{vmatrix} f_2(t) & f_3(t) \\ g_2(t) & g_3(t) \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} f_1(t) & f_3(t) \\ g_1(t) & g_3(t) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ g_1(t) & g_2(t) \end{vmatrix} \right)$$

Se f e g sono continue \ derivabili allora anche t è continua \ derivabile

$$(f \times g)' = f' \times g + f \times g' \quad \text{formula di Leibniz}$$

$$f : I \longmapsto \mathbb{R}^3$$
$$g : J \longmapsto \mathbb{R}^3$$

parametri regolari di C

$g = (f \circ t) \quad t : J \to I$

↳ cambio regolare di param.

$$f, g \in C^2$$

$$f' \times f''$$
$$g' \times g''$$
$$g' = (f' \circ t) \cdot t'$$
$$g'' = ((f' \circ t) \cdot t')' = (f'' \circ t)(t')^2 + (f' \circ t)(t'')$$
$$g' \times g'' = ((f' \times f'') \circ t)(t')^3$$
$$\llcorner \neq 0$$

DEF. $f : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizzazione regolare di C di classe C^2

$P_0 = f(t_0) \in C$ si dice **flesso** di C

se $(f' \times f'')(t_0) = 0$

Il primo elemento posso vederlo come

$$<a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}, f_1'\vec{i}+f_2'\vec{j}+f_3'\vec{k}>$$

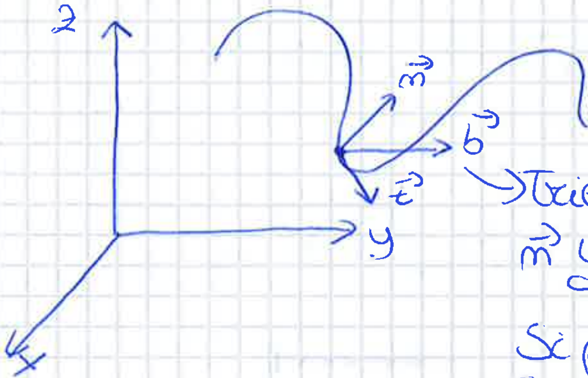
$$af_1''+bf_2''+cf_3''=0$$

OSS. $f: I \to \mathbb{R}^3$ param. regolare di C $\quad f \in C^2$

$$\vec{t}_{P_0} = \frac{1}{|f'|} f'$$

$$\vec{b}_{P_0} = \frac{1}{|f' \times f''|}(f' \times f'')$$ binormale alla curva

$$\vec{n}_{P_0} = \vec{b} \times \vec{t}$$ versore normale



$\to$ Triedro fondamentale

$\vec{m}$ verso il centro della curva

Si può approssimare la curva a una circonferenza osculatrice.

Una curva parametrizzata si dice rettificabile se esiste finito $\ell(a,b,f) = \sup \delta(a,b,f)$

TEOREMA **Lunghezza curva**

Se f è una parametrizzazione regolare allora è rettificabile

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{f(t_i)-f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right| (t_i - t_{i-1})$$

esempio

$$f: \begin{cases} x = a+\ell t \\ y = b+mt \\ z = c+nt \end{cases}$$ $[0;1]$ lunghezza segmento

$\downarrow$ modulo differenza

$(a,b,c) \qquad (a+\ell, b+m, c+n)$

$$f': \begin{cases} x = \ell \\ y = m \\ z = n \end{cases}$$

SPAZI VETTORIALI — LEZIONE 15

K = campo di numeri che comprende ($\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$)
insieme non vuoto
somma e prodotto (con proprietà)

$\mathbb{Z}_2 = \{0;1\}$ $\quad$ $\mathbb{Z}_2$ ha 2 elementi

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

DEF. K campo di numeri
$V \neq \emptyset$ si dice **spazio vettoriale** su K (o K spazio vettoriale) se sono definite 2 operazioni

1) $S : V \times V \longrightarrow V$
$(v_1, v_2) \longrightarrow S(v_1, v_2) = v_1 + v_2$ SOMMA
2) $P : K \times V \longrightarrow V$
$(\alpha ; v) \longmapsto P(\alpha, v) = \alpha v$ PRODOTTO

S1) $u + v = v + u \quad \forall u, v \in V$ commutativa
S2) $(u+v)+w = u+(v+w) \quad \forall u, v, w \in V$
S3) $\exists n \in V / \; n + v = v + n = v \quad \forall v \in V$
S4) $\forall v \in V \; \exists \; w \in V / v + w = w + v = n$
P1) $\forall v \in V \quad 1 \cdot v = v$
P2) $\forall \alpha, \beta \in K \quad v \in V \quad \alpha(\beta v) = (\alpha \beta) v$
SP1) $\forall \alpha, \beta \in K \; v \in V$
$(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha v + \beta v$
SP2) $\forall \alpha \in K \; u, v \in V$
$\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$

esempio $\quad K^{m,n}$ matrici
esempio $\quad V_n(O)$ vettori applicati
esempio $\quad I \subseteq \mathbb{R}$
$\{f : I \to \mathbb{R}\}$ $\quad$ • $f+g : I \to \mathbb{R}$
$x \to (f+g)(x) = f(x) + g(x)$
• $\alpha f : I \longmapsto \mathbb{R}$
$x \to (\alpha f)(x) = \alpha(f(x))$

PROP. V_{sv}/K $W \subseteq V$ è ssv/K se è ssv se

a) $W \neq \emptyset$

b) $\forall w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$

c) $\forall \alpha \in K$ $w \in W \Rightarrow \alpha w \in W$

a') $0_V \in W$

Le 15 alle 16:00, il 10 lezione

(Esempi) sottospazi vettoriali

$\mathbb{R}^2 = V$ $(\mathbb{R} \Rightarrow K)$ $K=$ campo di n° qualsiasi

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$

$W = \{(x,y) / x = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

- $0_{\mathbb{R}^2} = (0,0) \in W$? se sì allora non è $\emptyset$
  sì
- $(0, y_1), (0, y_2) \in W \rightarrow (0, y_1) + (0, y_2) \in W$
  $= (0, y_1 + y_2)$ sì
- $(0,y) \in W$, $\alpha \in K$ $\Rightarrow \alpha(0,y) \in W$
  $= (0, \alpha y)$ sì

$\Downarrow$

è un sottospazio vettoriale

esempi $A \in K^{m,m}, B \in K^{m,p}$

$W = \{ X \in K^{m,p} / AX = B \} \subseteq K^{m,p}$

quando W è un sottospazio?

a. $O_{n,p} \in W$?

b. $X_1, X_2 \in W$? $\rightarrow X_1 + X_2 \in W$

c. $X \in W$ $\alpha \in K \rightarrow \alpha X \in W$

deve essere omogeneo quindi $B = 0$

$\rightarrow B \neq 0$ non è un sottospazio

$\rightarrow B = O_{m,p}$

b. $A\overset{*}{X_1} = O_{m,p}$ $\qquad A\overset{**}{X_2} = O_{m,p}$

$\downarrow$

$A(X_1 + X_2) = 0$

$*AX_1 + AX_2 = 0$

$\overset{**}{0 = 0}$

esempi $W = \{ (x,y) / x \geq 0 \} \subseteq \mathbb{R}^2$

$0 \geq 0 \rightarrow (0,0) \in W$

$(\underset{\geq 0}{x_1}, y_1) + (\underset{\geq 0}{x_2}, y_2) =$

$= (\underset{\geq 0}{x_1 + x_2}, y_1 + y_2)$

$\alpha \in \mathbb{R}, (x,y) \in W$

$\Downarrow$ $\alpha(x,y) \in W$

No se $\alpha < 0$ e $(x,y) \neq (0,y)$

non è un sottospazio

esempi $W = \{ (x,y) / \underset{\hookrightarrow \text{gli assi}}{xy = 0} \} \subseteq \mathbb{R}^2$

una componente $\neq 0$

$\{ (0,y) \} \cup \{ (x,0) \}$
$\qquad * \qquad\qquad **$

$\swarrow$ al 1° esempio

Unione di 2 sottospazi

$(0,0) \in W$

$\alpha(x,y) \in W$

se prendo elementi in $*$ o 2 in $**$ funziona, se ne prendo 1 e 1 non funziona

DIM $C^p = \{ f : I \to \mathbb{R} / f$ derivabile p volte con $f^{(p)} \in C^0 \}$

↳ vedi "classi" in analisi

$$\bigcap_{p \geq 0} C^p = C^\infty$$

↳ sottospazio delle f

LEZIONE 16

V sv$/K$ $v_1 - v_n \in V$

DEF $v \in V$ è **combinazione lineare** di $v_1 - v_n$ se esistono $\alpha_1 \dots \alpha_n \in K /$

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + v_n \alpha_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

l'insieme di tutte le combinazioni lineari di $v_1 - v_n$ è indicato con $\mathcal{L}(v_1 \dots v_n)$ e si chiama **sottospazio generato da $v_1 \dots v_n$**

v_1 e v_n sono detti **generatori**

V sv$/K$ si dice **finitamente generato** se $\exists\ v_1 - v_n \in V /\ V = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$

esempi

$\mathbb{R}^2$ $\quad (x,y) = x\underbrace{(1,0)}_{e_1} + y\underbrace{(0,1)}_{e_2}$

$$\hookrightarrow = \frac{x+y}{2}(1,1) + \frac{x+y}{2}(1,-1)$$

$\mathbb{R}^3$ $\quad (x,y,z) = x\underbrace{(1,0,0)}_{e_1} + y\underbrace{(0,1,0)}_{e_2} + z\underbrace{(0,0,1)}_{e_3}$

K^n $\quad (x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$

$x_1 (1,0,0, \dots, 0) +$

$x_2 (0,1,0, \dots, 0) +$

$x_3 (0,0,1,0, \dots, 0) +$

$x_n (0,0,0, \dots, 1)$

$(1,0) \quad (1,1) \quad (1,2)$

$-1(1,0)+2(1,1)-1(1,2)=0$ sono linearmente dipendenti

1) v_1 è l.d se e solo (se $\exists\, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$) **n=1**

se $\exists\, \alpha_1 \neq 0 \,/\, \alpha_1 v_1 = 0_V$

$$\Updownarrow$$

$$v_1 = 0$$

$v_1, v_2, \ldots v_n$ con $v_1 = 0$

$1v_1 + 0v_2 + 0v_3 \ldots + 0v_n = 0_V$

(non vale il viceversa)

Sono linearmente dipendenti

n=2 v_1 e v_2 sono linearmente dipendenti

$\Leftrightarrow \exists\, \alpha_1, \alpha_2 \in K$ non entrambi nulli /

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0_V$$

sia $\alpha_1 \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad v_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 = 0_V$

$\Leftrightarrow \quad v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2$

viceversa se $v_1 = \lambda v_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1v_1 + (-\lambda) v_2 = 0_V$

$\Rightarrow v_1 v_2$ sono linearmente dipendenti

2) $v_1 - v_d$ l.d.

$\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_n \in K$ non tutti nulli /

$(*)\ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + v_n \alpha_n = 0_V$

Sia $k = \max \{ i / \alpha_i \neq 0 \text{ in } (*) \}$

$\Rightarrow$ * diviene

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \underset{\neq 0}{\alpha_k} v_k + 0 v_{k+1} + ... = 0_V$

$$\Rightarrow v_k = \left(-\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\right) v_{k-1} + ... + \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_k}\right) v_1$$

METODO DEGLI SCARTI

LEZIONE 17

ES. $\mathbb{R}^3$
$v_1\ (1, 1, -1)$
$v_2\ (2, -1, 1)$
$v_3\ (1, -2, 2)$
$v_4\ (1, 0, -1)$
$v_5\ (2, 3, -7)$

Vogliamo estrarre un sottoinsieme con vettori indipend. V

- Se troviamo il vettore che è comb. lin. dei precedenti lo buttiamo via altrimenti lo teniamo

Tenere	Scartare
v_1 (non è nullo)	v_3
v_2 (non è comb. lin. di v_1)	v_5
v_4 $\Rightarrow$ BASE	

per v_5
$(2, 3, -7) = \alpha(1, 1, -1) + \beta(2, -1, 1) + \gamma \cdot (1, 0, -1)$
con matrice e Rouché-Capelli

per $v_3 \rightarrow$ $(1, -2, 2) = \alpha(1, 1, -1) + \beta(2, -1, 1)$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ \alpha - \beta = -2 \\ -\alpha + \beta = 2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \beta = 1 \\ \alpha = -1 \end{matrix}$$

per $v_4 \rightarrow$ è comb. lineare di v_1 e v_2 (v_3 non c'è più)

$(1, 0, -1) = \alpha(1, 1, -1) + \beta(2, -1, 1)$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ \alpha - \beta = 0 \\ -\alpha + \beta = -1 \end{cases} \qquad \nexists \text{ soluzione}$$

in $V_3(O)$ $(\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k})$ è base

es. 2) K^n
e_1 $(1,0,0,\dots 0)$
e_2 $(0,1,0,\dots 0)$
e_3 $(0,0,1,\dots 0)$
e_n $(0,0,0,\dots 1)$

$e=(e_1,e_2,e_3,\dots,e_n)$ è una base di K^n
viene detta base canonica di K^n

PROP. V sv/K $\mathcal{B}=(v_1,v_2\dots v_n)$ base di V
$\forall v\in V\ \exists!\ (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_n)\in K^n/$

$$v=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\dots+\alpha_n v_n$$

DIM. $v_1\dots v_n$ generatori linearmente indipend.
$\exists$ e vogliamo dimostrarne l'unicità
sappiamo che $v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$ COMPONENTI di BASE
supponiamo che $v=\sum_{i=1}^{n}\beta_i v_i$

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i = \cancel{v} = \sum_{i=1}^{n}\beta_i v_i$$

$$\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\dots=\beta_1 v_1+\beta_2 v_2+\dots$$
$$\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\dots-\beta_1 v_1-\beta_2 v_2-\dots=0_V$$

$$\alpha_1 v_1-\beta_1 v_1+\alpha_2 v_2-\beta_2 v_2+\dots=0_V$$
$$(\alpha_1-\beta_1)v_1+(\alpha_2-\beta_2)v_2+\dots=0_V$$

l.i. $\Rightarrow \alpha_i-\beta_i=0 \quad i=1\dots n$
$\Rightarrow \alpha_i=\beta_i \quad i=1\dots n$

V ev$/K$ $\mathcal{B} = (v_1 - v_n)$

$$\Rightarrow [v' + v'']_{\mathcal{B}} = [v']_{\mathcal{B}} + [v'']_{\mathcal{B}} \quad ①$$

in K^n

$$[\alpha v]_{\mathcal{B}} = \alpha [v]_{\mathcal{B}} \quad ②$$

① $[v]_{\mathcal{B}} = (\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_n)$

$$\Updownarrow$$

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha v = \alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha(\alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha \alpha_i) v_i$$

$$\Rightarrow [\alpha v]_{\mathcal{B}} = (\alpha \alpha_1, \alpha \alpha_2, \ldots \alpha \alpha_n) =$$

$$= \alpha (\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_n) =$$

$$= \alpha [v]_{\mathcal{B}}$$