www.centroappunti.it
Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: 1826A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Semproni Federica

MATERIA: Analisi dei segnali (teoria+esercizi) - Prof. Olmo

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

PROGRAMMA: - Segnali
- Classi di segnali (e probabilità)
- Sistemi (telemedicina)
- Filtri
- Segnali non deterministici

ESAME: - 3 domande di teoria (non a sbarramento)
- 3 problemi
  - segnale continuo
  - segnale discreto
  - segnale a processo casuale
- Orale facoltativo con voto ≥ 18
  Orale obbligatorio con $15 \leq$ voto ≤ 17 } vale comunque

LIBRI: "Processi casuali" e "Segnali deterministici" di Loprestí
"Segnali e sistemi" di Carideo-Giordano-Calvagno

ESERCITAZIONI: dalla A alla L squadra A: lunedì } da
dalla M alla Z squadra B: mercoledì } 1 ore 3

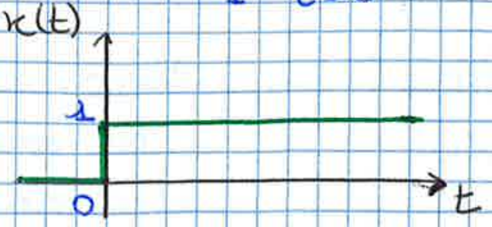
ESAME del 24-07-2015 aula 29B

Dimostrazione 1 PAG. 11 CONVOLUZIONE T-DISCRETO
Dimostrazione 2 PAG. 20 CONVOLUZIONE T-CONTINUO
Dimostrazione 3 PAG. 34
Proprietà Fourier PAG. 24-25-26

Esempi - 1) t continuo

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

GRADINO UNITARIO
(ovviamente è un modello)
(segnali fisici)

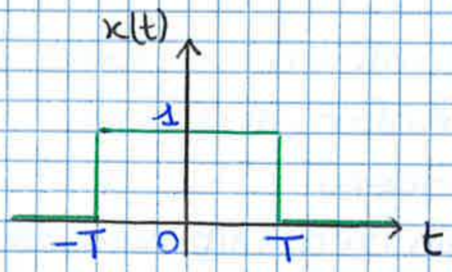


Utile per isolare il dominio di un segnale
(moltiplico il segnale per l'unitario)

! Anche se è discontinuo non è importante con i segnali elettrici

2)

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T \qquad -T<t<T \\ 0 & |t| \geq T \qquad t<-T \vee t>T \end{cases}$$



SEGNALE PORTA

3)

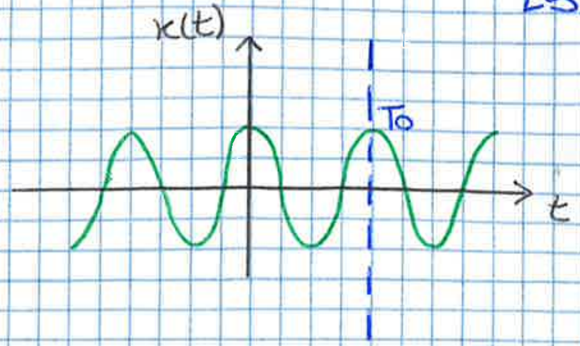
$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) + j\sin(2\pi f_0 t) = e^{j2\pi f_0 t}$$

$2\pi f_0 = \omega$ [rad/s] pulsazione

f_0 = frequenza [Hz]

T_0 = periodo $= \frac{1}{f_0}$ [s]

es. $f_0 = 1\,Hz$ $T_0 = 1s$
$f_0 = 1\,KHz$ $T_0 = 1ms$



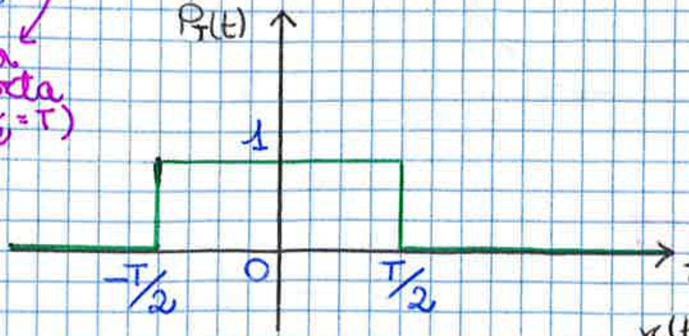
$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) + j\sin(2\pi f_0 t)$

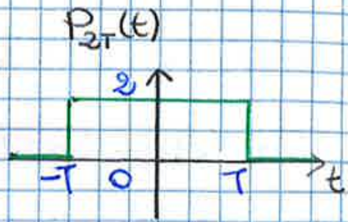
- $x(t) = P_T(t) = \begin{cases} 1^{*} & |t| \le T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases}$ $\quad$ * o altri valori

PORTA

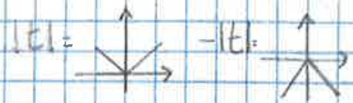
con $T \neq 0$

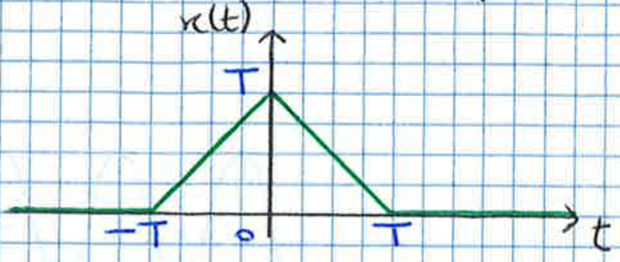
ampiezza totale porta (cioè $\frac{T}{2} + \frac{T}{2} = T$)





- $x(t) = \begin{cases} T - |t| & |t| \le T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$



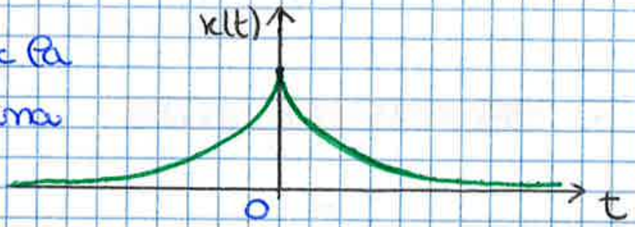


- $x(t) = e^{-a|t|}$

a cost

$a \geq 0$

Importante per la probabilità es. Gaussiana

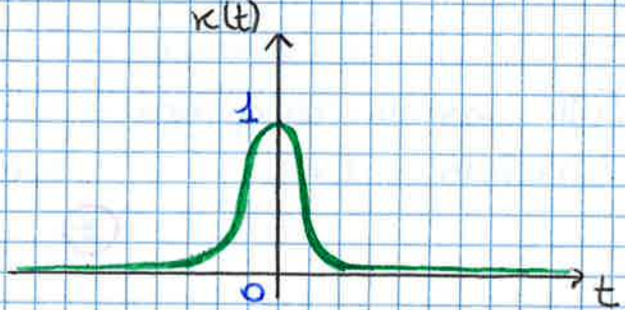


- $x(t) = e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$

m, σ^2 cost

$m \geq 0 \quad \sigma^2 \geq 0$

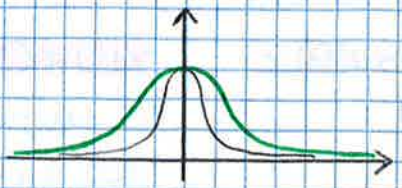
$m = 0$



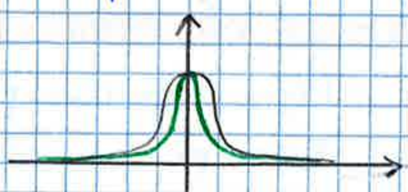
picco in $t=0$

σ definisce la pendenza e il picco se $m \neq 0$

σ Grande $\Rightarrow$ decresce lentamente



σ piccola $\Rightarrow$ decresce velocemente



- **SUPPORTO LIMITATO** $x(t) \neq 0$ in $t=[a,b]$

  con $a,b \neq \pm\infty$

  Esempio. $P_T(t)$, $\Pi_T(t)$

  Non i segnali periodici

- **SUPPORTO ILLIMITATO** Se non è verificata la condizione limitata

  $t=[-\infty,+\infty]$

  $t=[-\infty,a]$

  $t=[b,+\infty]$ anche con $a=0$, $b=0$

  Esempio_ segnali periodici

- **SEGNALE a ENERGIA FINITA**

$$\mathcal{E}_x \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \text{energia}$$

$x(t)$ SPETTRO $S_x(t)$

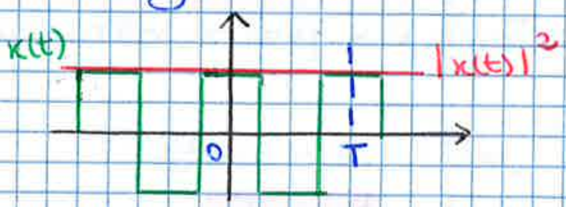
Esempi a energia finita $x(t)=e^{-a|t|}$

$\downarrow$

l'area converge (Gaussiana)

$x(t)=P_T(t)$

Esempi a energia non finita $x(t)=\cos(2\pi f_0 t)$



Sono a energia finita → segnali a supporto limitato

Non sono a energia finita → segnali periodici

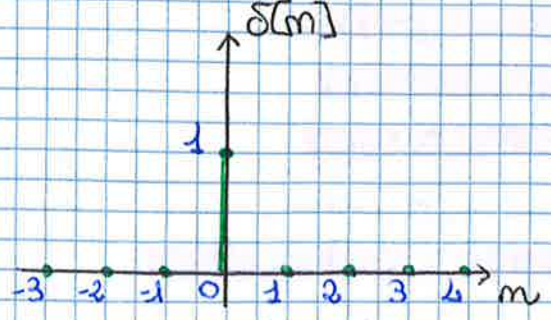
<u>A volte</u> sono a energia finita → segnali a supporto illimitato non periodici (es. Gaussiana)

$x[n]$ periodica di periodo M se $x[n+kM] = x[n]$ $\forall k$

$x[n] = \sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$ Trovare M: $\sin\left(\frac{2\pi(n+M)}{N}\right) = \sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$

verificata se $M = N$

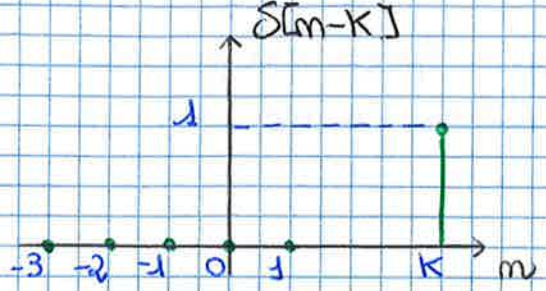
- IMPULSO UNITARIO (KRONEKER) fondamentale



$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

δ Kroneker: t DISCRETO

δ Dirac: t CONTINUO



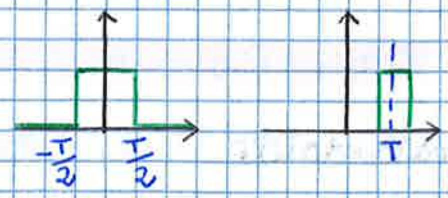
$\delta[n-k]$ traslata $= \begin{cases} 1 & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$

TRASLAZIONI

1) t CONTINUO $\quad x(t) \to y(t) = x(t-\tau)$

$\tau > 0$ verso destra

$\tau < 0$ verso sinistra



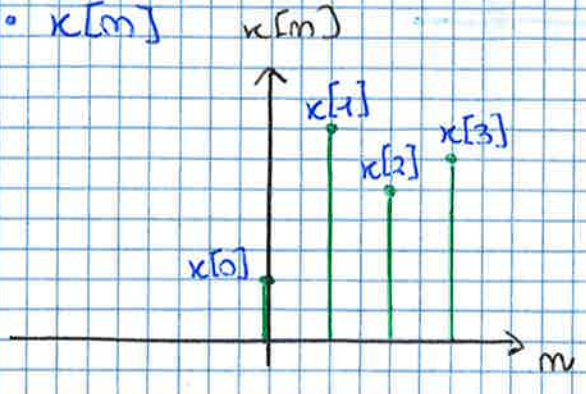
$\tau = T$

2) t DISCRETO $\quad x[n] \to y[n] = x[n-k]$ $\quad$ k intero per convenzione

$x[n-k] = x[n]\,\delta[n-k]$

$\downarrow x[n] * \delta[n]$ $\quad$ ≠ nulla ovunque tranne in 0

- $x[n]$



$x[n] = x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \ldots =$

$$= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \underbrace{x[i]}_{\text{fermo}} \, \underbrace{\delta[n-i]}_{\text{si sposta}}$$

CONVOLUZIONE

(DEF. ARTICOLANDOLO)
! Ritardando il segnale all'ingresso, anche il segnale all'uscita viene ritardato della stessa quantità !

2) **il SISTEMA è A TEMPO-INVARIANTE**

se $\mathcal{L}\{x[n]\} = y[n]$ e la risposta a

$$\mathcal{L}\{x[n \pm k]\} = y[n \pm k]$$

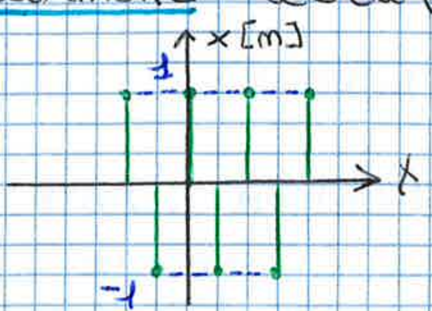
$\mathcal{L}$ = risposta e lavora nel t

Se applico un input al tempo ω, la risposta parte al tempo ω

! Significa che la risposta è uguale indipendentemente da quando inizio il segnale (la forma d'onda)

Esempi: il ritardatore, il quadratore, l'amplificatore, il sommatore sono tutti a t invariante

! Solo $\boxed{\text{per curiosità}}$ un esempio NON a t invariante è il DECIMATORE = se è di fattore 2 prende un campione sì e uno no



Prendo un campione sì e uno no

0 1 0 1 ...

Se traslo di un passo l'uscita è diversa

0 -1 0 -1 ...

SISTEMI LTI

RISPOSTA ad IMPULSO (associata a LTI, quello che serve a noi)

$$\delta[n] \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow h[n]$$

Mando un impulso $\delta[n]$ e ottengo una risposta $h[n]$

$$h[n] \rightarrow \text{uscita a un impulso}$$

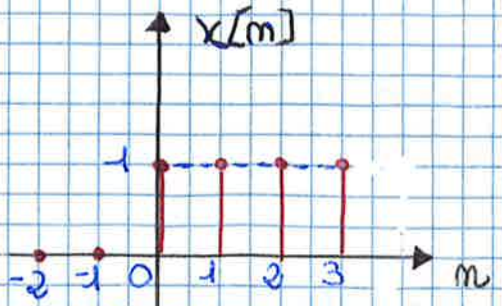
! Anche la risposta all'impulso di sistemi NON LTI è $h[n]$, ma a noi non serve.

! Quel che veramente ci serve è la risposta del sistema a qualsiasi ingresso $x[n]$

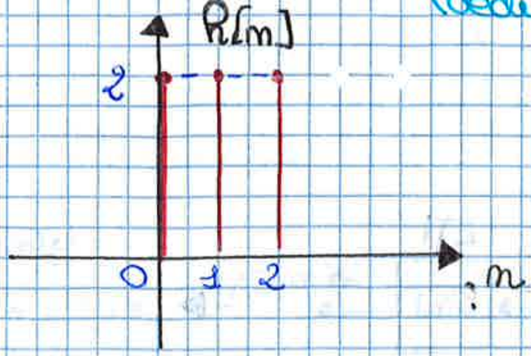
$$h[n] = \mathcal{L}\{\delta[n]\}$$

Esempio **Calcolare la convoluzione** T-DISCRETO

(vedi pag 21)



Porta causale



$$y[n] = \sum x[n]\, h[n-k] = x[n] * h[n]$$

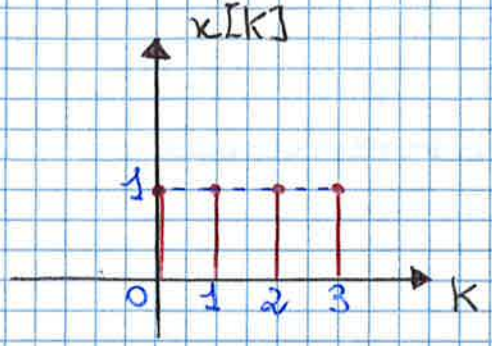
↳ si può commutare a

$$\sum \underline{h[k]}\, x[n-k]$$

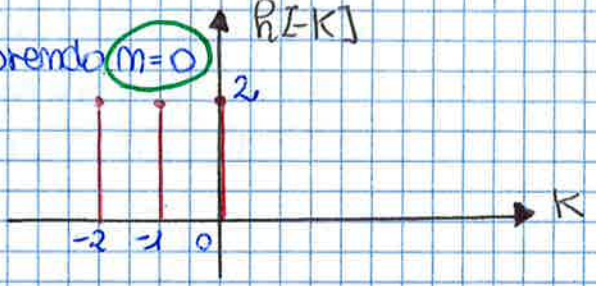
è il valore fermo → scelgo il più complicato

! PRIMA di TUTTO devo RIBALTARE h[n]

↳ h[-n]



prendo n=0



$$x[k]\, h[-k] = \begin{cases} 0 & k>0 \\ 2 & k=0 \\ 0 & k<0 \end{cases}$$

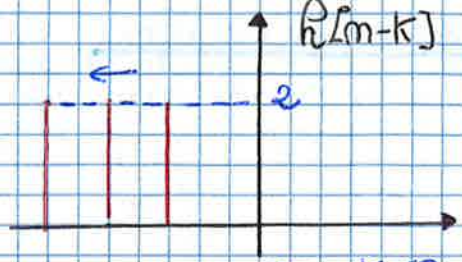
(prodotto segnali)

Sommo tutti i risultati

⇓

$y[0] = 0+0+\ldots+2+0+0+\ldots = 2$ (1° punto della convoluzione)

n<0



$$x[k] = \begin{cases} 0 & k<0 \\ 1 & k\geq 0 \end{cases}$$

↓

$y[n] = 0 \quad n<0$

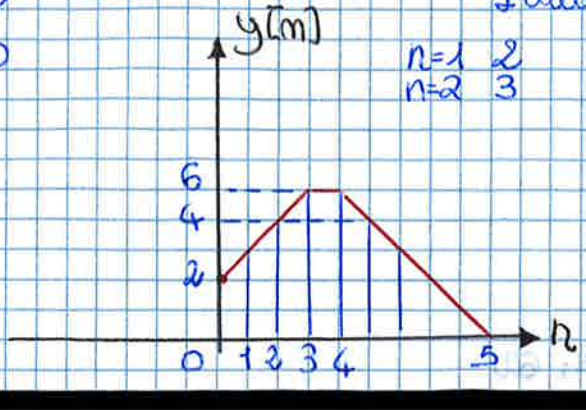
n>0

h [n-k] viaggia verso destra

n=0 si sovrappone 1 campione

n=1 2

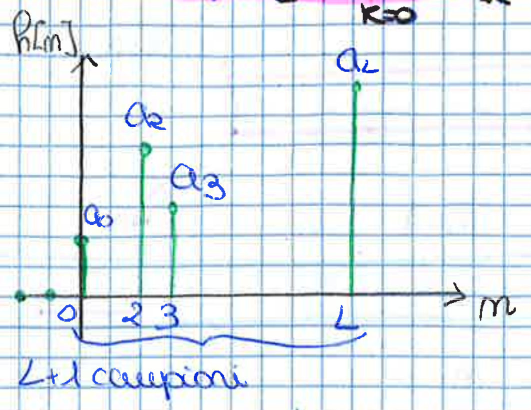
n=2 3



Per risposta all'impulso finita si intende "di lunghezza" finita (viene escluso ovviamente $L=\infty$)

$$h[n] = \sum_{k=0}^{L} a_k \, \delta[n-k]$$

↓ i campioni potenzialmente diversi da zero da 0 a $L \rightarrow L+1$ campioni



CONVOLUZIONE $y[n] = x[n] * h[n]$

relazione ingresso/uscita

insieme ci danno la formulazione di sistemi discreti

SISTEMI RICORSIVI feedback (compare $y[n]$ sia a SX sia a DX)

Dipende ANCHE dai valori precedenti all'ingresso (precedenti uscite)

L'uscita in questo caso

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} a_k \, x[n-k] + \sum_{i=1}^{N-1} b_i \, y[n-i]$$

ho M campioni

contributo dell'ingresso

contributo dell'uscita stessa in attimo precedente

(vedi esercitazione per l'esempio)

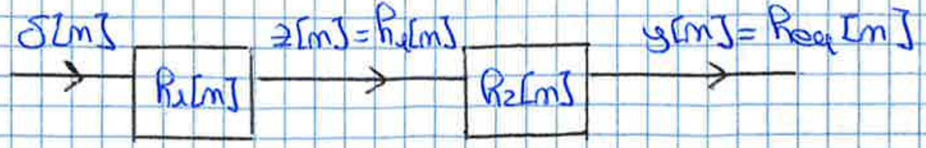
CONDIZIONE INIZIALE (importante per gli esercizi)

$y[n]=0 \quad \forall n<0$ ovvero prima di n tutto è spento

↓

deve essere CAUSALE

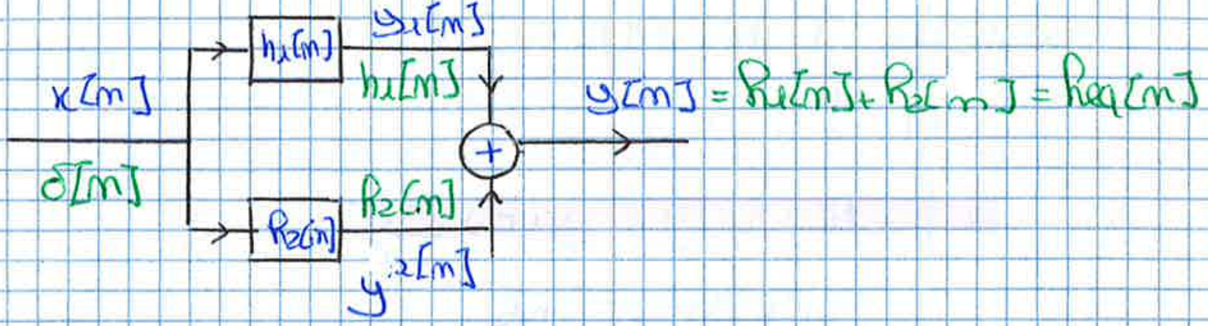
Riepilogo

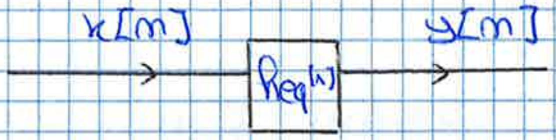


$$h_{eq}[n] = h_1[n] * h_2[n]$$

PARALLELO

es. per segnali vocali





$$h_{eq}[n] = h_1[n] + h_2[n]$$

! **SISTEMI CAUSALI** (≠ segnali casuali)

se $h[n] = 0$ per $n < 0$

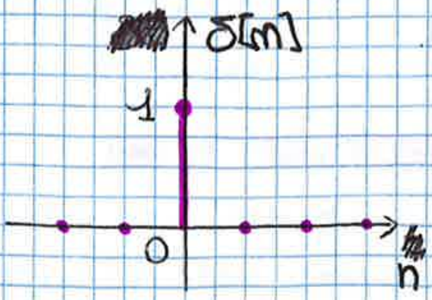
Devono rispettare la causa/effetto

Non devono dare uscite prima che inizi l'ingresso

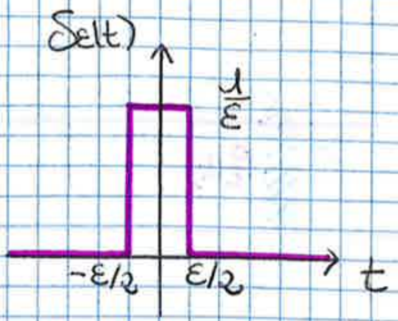
$h[n]$ è la risposta a $\delta[n]$ per $n \geq 0$

inizia a $n = 0$

DELTA di DIRAC: $\delta(t)$



Non esiste come funzione, ma possiamo avere (simile) una porta MOLTO piccola (supporto piccolo)



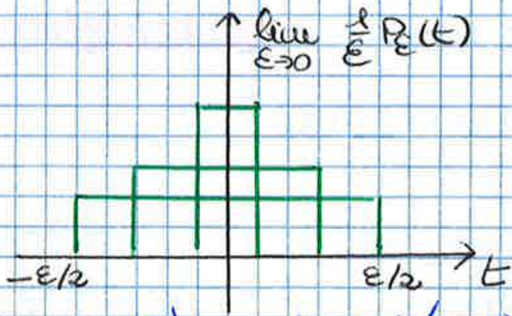
$\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} P_\varepsilon(t)$

Porta di ampiezza ε
Area unitaria

$$\text{Area} = 1 = \underset{(\text{base})}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\varepsilon}$$

Definizione 1 $\delta(t) \triangleq \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} P_\varepsilon(t)$ *

Se stringo il supporto la porta diventa più stretta e alta (l'area è unitaria sempre)



Se $\varepsilon \to 0$ l'oggetto $\nexists$ più, possiamo solo avere il rettangolo stretto e alto = approssimazione

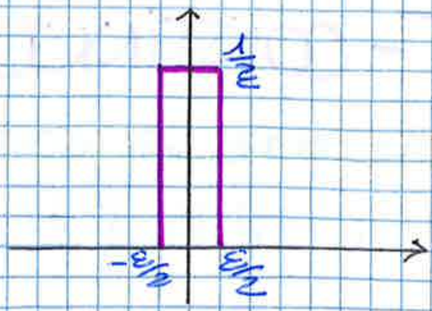
* Il limite di queste funzioni non è una funzione ma una <u>DISTRIBUZIONE</u> = lim di successioni di funzioni in cui ogni elemento $\exists$ ed è una funzione, ma il lim non lo è

! $\delta[n]$ è più facile da definire

Quando facciamo cambio di variabile possiamo considerarla pari

Ricorda: $\sum x[k]\delta[n-k]$

↳ numerica



T CONTINUO → SOMMATORIA → K numerica

T DISCRETO → INTEGRALE → τ analogica

PAG 11 DIM. CONVOLUZIONE T-DISCRETO

PAG 20 DIM. CONVOLUZIONE T-CONTINUO

CONVOLUZIONE:

$$h(t) \triangleq \mathcal{L}\{\delta(t)\}$$

$$y(t) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau\right\} =$$

T-DISCRETO

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k]$$

$$y[n] = \mathcal{L}\{x[n]\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]\right\} \stackrel{(LTI)}{=}$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} x[k]\,\mathcal{L}\{\delta[n-k]\} =$$

so che $h[n] = \mathcal{L}\{\delta[n]\}$

(T-invarianza) $h[n-k] = \mathcal{L}\{\delta[n-k]\}$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k] =$$

$$= x[n] * h[n]$$

T-CONTINUO

$$y(t) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\mathcal{L}\{\delta(t-\tau)\}\,d\tau \stackrel{(LTI)}{=}$$

con $h(t) = \mathcal{L}\{\delta(t)\}$

(t-invarianza) $h(t-\tau) = \mathcal{L}\{\delta(t-\tau)\}$

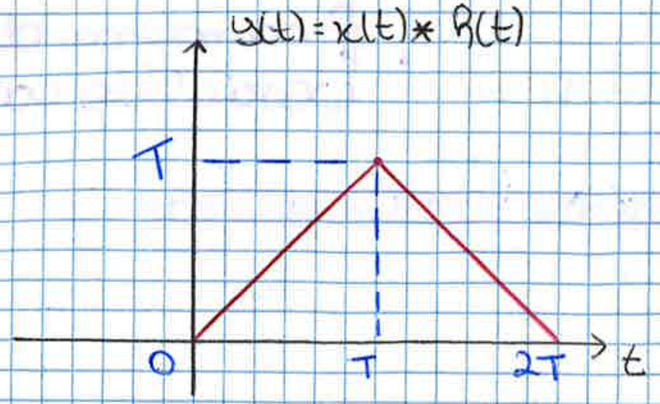
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= x(t) * h(t)$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t-\tau)\} = h(t-\tau)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau = y(t) = x(t) * h(t)$$

$$x[n] * h[n] \triangleq \sum x[k]\,h[n-k]$$



TRASFORMATA di FOURIER

si legge sull'asse y

- f complessa di variabile reale

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \Rightarrow$$

raramente $\in \mathbb{R}$
normalmente $\in \mathbb{C}$
bisogna disegnare modulo e fase

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} = x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df$$

<u>COND. **SUFFICIENTE**</u> (non necessaria) per "trasformare" (ammettere Fourier)
ed è invertibile

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt < \infty$$

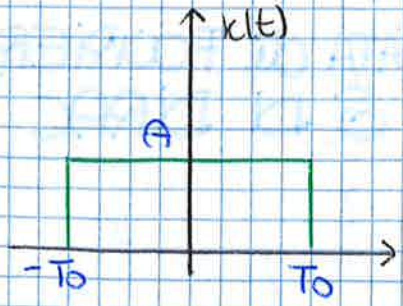
assoluto/integrabile

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt$$

→ di un segnale periodico diverge

Esempio

importante negli es.



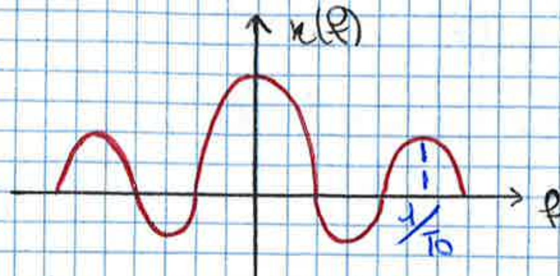
$$X(f) = \int_{-T_0}^{T_0} A e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= A\, 2 \int_{0}^{T_0} \underbrace{\cos(2\pi f t)}_{Re}\, dt =$$

$$= 2A \frac{1}{2\pi f} \sin(2\pi f t)\Big|_0^{T_0} =$$

$$= 2A \frac{\sin(2\pi f T_0)}{2\pi f}$$

reale (caso raro)



T_0 piccolo → dilatato
T_0 grande → compresso

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$ COMPLESSA di variabile REALE

COND. SUFFICIENTE (non necessaria) $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt < \infty$

$$\mathcal{F}^{-1} = x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df$$ COMPLESSA di variabile COMPLESSA

PROPRIETÀ di Fourier (SULLE TAVOLE)

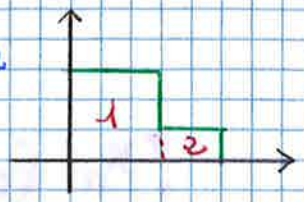
1) linearità

lo spettro di 1 segnale (comb. lin. di segnali) è la comb. lineare dei singoli spettri

$$\mathcal{F}\{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\} = a_1\mathcal{F}\{x_1(t)\} + a_2\mathcal{F}\{x_2(t)\} = a_1 X_1(f) + a_2 X_2(f)$$

L'integrale infatti è un operatore lineare

Esempio. La trasformata del segnale posso vederla come la somma delle trasformate (dalle tabelle) di le 2 *



2) Anticipo / Ritardo

Traslazione lungo l'asse tempi

$x(t) \Leftrightarrow X(f)$

$$\mathcal{F}\{x(t \pm \theta)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t \pm \theta)\, e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

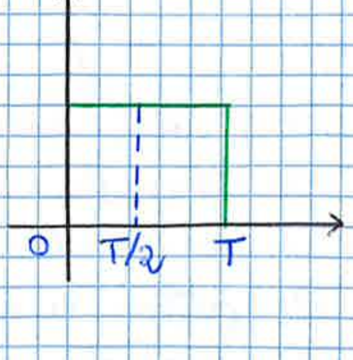
cambiamo variabile

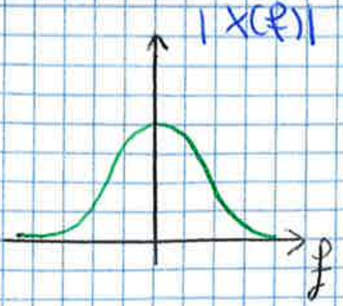
$t \pm \theta = u \qquad t = u \mp \theta \qquad dt = du$

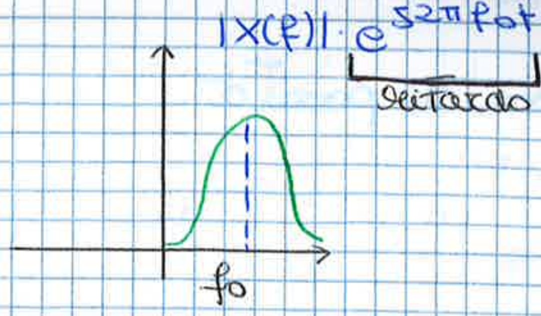
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, e^{-j2\pi f (u \mp \theta)}\, du = e^{\pm j2\pi f \theta} X(f)$$

$$x(t \pm \theta) \rightarrow X(f)\, e^{\pm j 2\pi f \theta}$$ anticipo o ritardo!

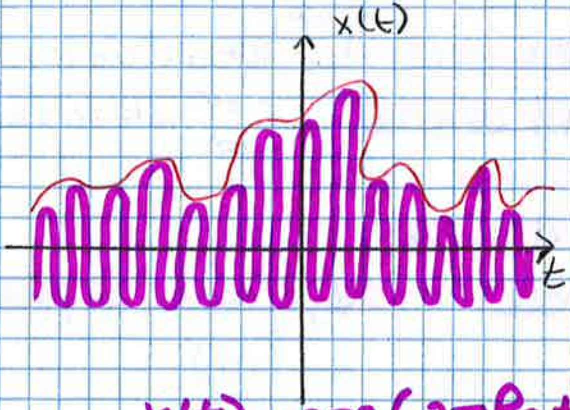
Esempio. $X(f)\, e^{-j2\pi f T/2}$

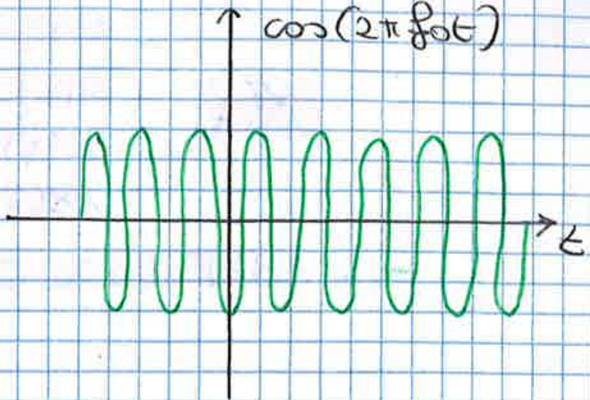






Esempio = segnale vocale





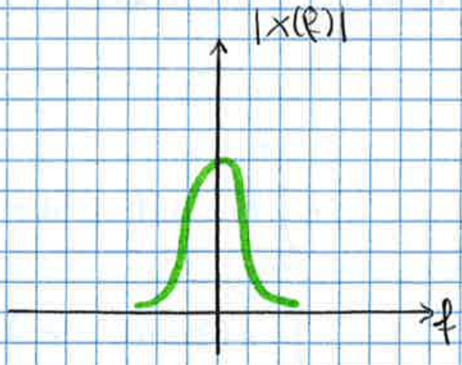
$x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$

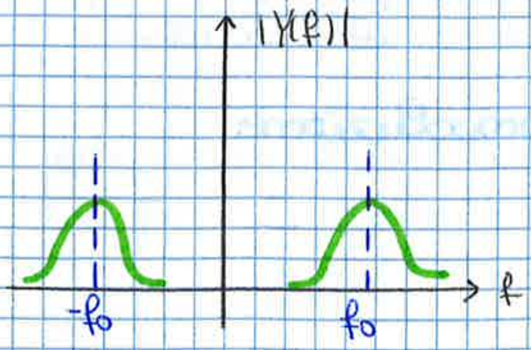
PROPRIETÀ quindi

- linearità
- $x(t \pm \theta)$ $\quad X(f)e^{\pm j2\pi f\theta}$ Anticipo/ritardo
- $\boxed{x(t)e^{\pm j2\pi f_0 t} \rightarrow X(f \mp f_0)}$ Modulazione

$$y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t) = x(t)\,\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}$$

$$Y(f) = \frac{1}{2}\left\{X(f-f_0) + X(f+f_0)\right\}$$





Modulazione reale pari

$$Y(f) = X(f)\,H(f)$$

$\boxed{\text{Dimostriamolo}}$: $Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt =$

n°2

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \right] \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$\begin{cases} y(t) = x(t) * h(t) \\ Y(f) = X(f) \cdot H(f) \end{cases} \qquad \begin{cases} y(t) = x(t) \cdot h(t) \\ Y(f) = X(f) * H(f) \end{cases}$$

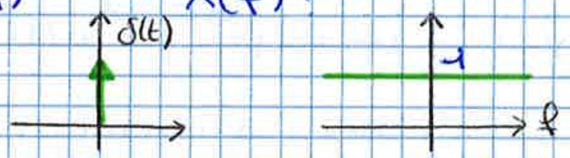
$H(f)$ è LA FUNZIONE di TRASFERIMENTO o RISPOSTA in FREQUENZA del sistema LTI (all'impulso)

$x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$

$\Downarrow$ risposta del segnale in frequenza

$Y(f) = H(f) \cdot X(f)$ $\qquad X(f)$?

- $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$



proprietà di dualità $\qquad x(t) \leftrightarrow X(f)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x(t) \leftrightarrow x(-f)$

$\Downarrow$

$\mathcal{F}\{1\} = \delta(f)$

Esempio. $\mathcal{F}\{1 \cdot e^{j2\pi f_0 t}\}$ so che per la seconda proprietà: $\underbrace{1}_{\delta(f)}$ $\underbrace{e^{j2\pi f_0 t}}_{\text{ritardo } (f-f_0)}$

$x(t)\, e^{\pm j2\pi f_0 t} \rightarrow x(f \mp f_0)$

allora

$= \delta(f - f_0)$ proprietà di modulazione

$Y(f) = H(f) \cdot \delta(f - f_0) = H(f_0) \cdot \delta(f - f_0)$

$\Downarrow$

$$y(t) = H(f_0)\, \underbrace{e^{j2\pi f_0 t}}_{\text{autofunzione}}$$

! Se mando in un sistema LTI una sinusoidale esce 1 segnale sinusoidale alla stessa frequenza moltiplicato per 1 numero $H(f_0)$ complesso

↳ il modulo amplifica o attenua il segnale e la fase modifica la fase dell'esponenziale

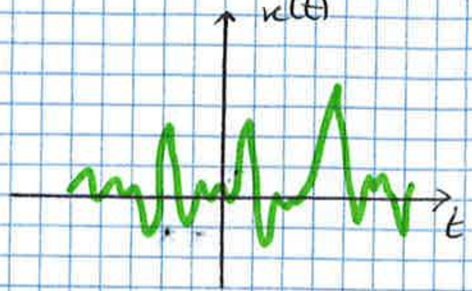
7) Derivata

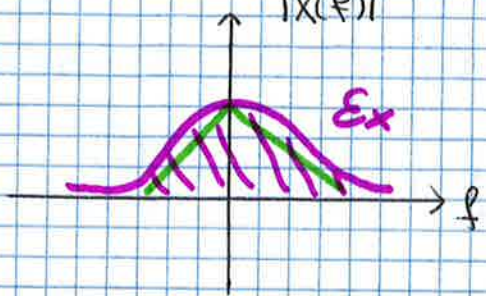
$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow j2\pi f X(f)$$

8) Energia del segnale

$$\underset{\text{energia}}{\mathcal{E}_x} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$





$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt}_{\mathcal{E}_x} = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \quad \text{PARSEVAL}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t)\, dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\varphi) e^{-j2\pi f\varphi} d\varphi$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{2\pi f t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, x^*(\varphi) e^{j2\pi(f-\varphi)t} d\varphi\, dt\, df$$

(vedi Dimostrazione pag. 34)

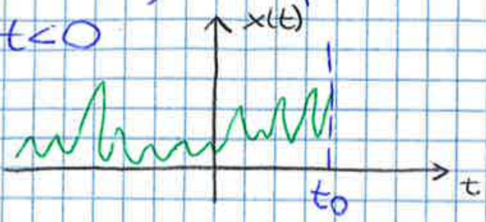
9) Dualità

Trasformando 2 volte una funzione x(t) ritroviamo la funzione stessa!

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(x) e^{-j2\pi f x} dx$$

$$\mathcal{F}\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(x) e^{-j2\pi f x} dx\, e^{-j2\pi f t} dt$$

CAUSALE: Segnale che non vede il futuro, è imprevedibile, la risposta deve essere $h(t)=0 \quad \forall t<0$



STABILITÀ: BIBO (Bounded Input, Bounded Output)

se $|x(t)| \le A < \infty$ entrata limitata

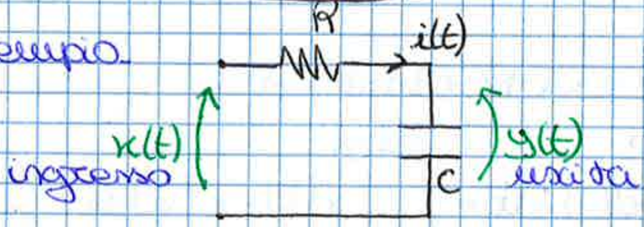
↓ allora ↓ allora $\forall t$

$|y(t)| \le A \cdot B < \infty$ uscita limitata

Cond. **Necessaria e Sufficiente** per essere BIBO:

$$\int_0^{\infty} |h(t)| < \infty$$

Esempio



$h(t)$?
$H(f)$?

METODI
- Se conviene metto $\delta(t)$ in ingresso e studio l'uscita $h(t)$ (NON SEMPRE)
- Passiamo in frequenza

So che $H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ (a)

$Y(f) = X(f)\,H(f)$

↓

$H(f) = \dfrac{Y(f)}{X(f)}$ (b)

$x(t) = y(t) + R \cdot i(t)$

$= y(t) + RC \dfrac{dy(t)}{dt}$

prop. derivata

↓

con $\mathcal{F}$

$X(f) = Y(f) + RC \cdot j2\pi f \, Y(f)$

$X(f) = Y(f)\left[1 + j2\pi f RC\right]$

FILTRO PASSA-BASSO: sistema che ha un massimo verso le frequenze basse poi scende

(non fisicamente realizzabile)

Il segnale generico

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} dt \quad \text{Fourier}$$

Le f basse del segnale passano inalterate, quelle alte vengono attenuate (~ non passano)

DIMOSTRAZIONE del TEOREMA di PARSEVAL

Dimostrazione n° 3

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t) \, dt$$

(Generalizziamo: segnale non reale)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \qquad x^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(\varphi) e^{-j2\pi \varphi t} d\varphi$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(\varphi) e^{-j2\pi \varphi t} df \, d\varphi \, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) X^*(\varphi) e^{j2\pi(f-\varphi)t} df \, d\varphi \, dt =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{j2\pi(f-\varphi)t} dt = \delta(f-\varphi)$$

$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$

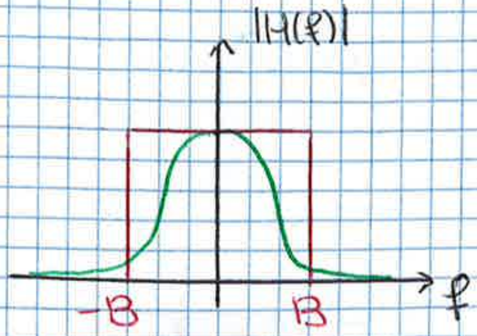
$\mathcal{F}\{1\} = \delta(f)$ **per dualità tempo-frequenza**

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) X^*(\varphi) \delta(f-\varphi) df \, d\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) X^*(f) df - \int |X(f)|^2 df$$

[Parseval generalizzato]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) Y^*(f) df$$

BANDA



FILTRO RC PASSA-BASSO

B = Larghezza di banda ideale: fascia che fa passare le frequenze. Oltre B non passa nulla

* **BANDA ASSOLUTA** = Valore di f al di sopra del quale il segnale è nullo (per filtri ideali)
$|H(f)|^2 = 0 \quad |f| > B$

BANDA RELATIVA = Se il segnale non è a supporto limitato ovvero nei casi realistici

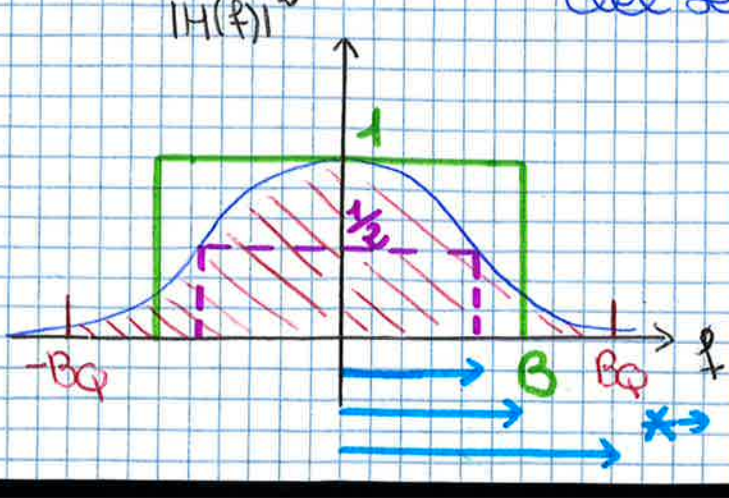
* **BANDA a 3dB** (*): valore di f al quale il valore di $|H(f)|$ si è ridotto di 3dB rispetto al valore di picco

$$f_0 = B_{3dB} : |H(f_0)|^2 = \frac{1}{2} \underbrace{|H(0)|^2}_{\text{valore di picco}}$$

* **BANDA a $K \to \begin{pmatrix} 90 \\ 95 \\ 99 \end{pmatrix}$ %** = valore di f /

$$\int_{-B_K}^{B_K} |H(f)|^2 df = 0{,}9 \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df$$

identifico il valore di frequenza tale per cui, se trascuro i valori oltre la banda, faccio 1 errore piccolo. Tengo il K (90 . 95 . 99)% del valore totale dell'energia del segnale



* BANDA ASSOLUTA

* $|H(f)|^2$ si è ridotto a $\frac{1}{2}$ del valore di picco
$|H(B_3)|^2 = \frac{1}{2} |H(0)|^2$

$\eta = \frac{|H(B_3)|^2}{|H(0)|^2} = \frac{1}{2}$

* → in dB $10 \log \eta = 10 \log \frac{1}{2} = \boxed{-3dB}$

RIPASSO di GEOMETRIA

Dati 2 segnali $x(t)$ e $y(t)$ con $x, y \in X$ (spazio vettoriale)

DISTANZA TRA x e y $\in X$, $d(x,y)$ un numero reale
1) $d(x,y) \geq 0$
2) $d(x,y) = d(y,x)$
3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Es. X insieme dei segnali reali a supporto limitato $[t_A, t_B]$

$$d(x,y) = \int_{t_A}^{t_B} |x(t) - y(t)|\, dt = \left[\int_{t_A}^{t_B} |x(t)-y(t)|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{E}$$

SOMMA TRA ELEMENTI $x, y \in X$

$x + y = y + x$

$x + (y+z) = (x+y) + z$

$x + 0 = x$

$x + (-x) = 0$

SCALARI α, β, γ

$\alpha(\beta x) = \alpha\beta x$

$1 \cdot x = x$

$\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

COMBINAZIONE LINEARE $x = \sum_i \alpha_i x_i \in X$

BASE n vettori w_i

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i = 0$$

linearmente indipendenti = una loro combinazione $= 0$ solo se $\alpha_i = 0$ se $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n} = 0$

n = dimensione s.v.

NORMA $\|x\| \geq 0$
↓
misura della lunghezza (d dall'origine)

$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

$\|x - y\| = d(x,y)$

$\|x\| = d(x,0) = (\text{norma } L^2) = \sqrt{\int_{t_A}^{t_B} |x(t)|^2 dt} = \sqrt{E_x}$

↓ misura dall'ampiezza

insieme dei segnali a E finita

l'energia del segnale è il quadrato della norma

circa le stesse informazioni

$= (\text{norma } L1) = \int_{t_A}^{t_B} x(t)\, dt$

PRODOTTO SCALARE $(x,y) = \int_{t_A}^{t_B} x(t)\, y^*(t)\, dt$

$\|x\| = (x,x)$ pr. scalare $x \cdot x$

disuguaglianza di Schwarz ← $|(x,y)|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$

$y(t) = K\, x(t)$

$\int_{t_A}^{t_B} x(t)\, y^*(t)\, dt = K^* \int_{t_A}^{t_B} x(t)\, x^*(t)\, dt = K^* \|x\|^2$

↓ $\sqrt{E_y}$

RIEPILOGO

X segnale definito nell'intervallo $[-T/2 ; T/2]$ *

↳ base ortonormale di Fourier $\left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j\frac{2\pi n t}{T}} \right\}_{n=-\infty}^{+\infty} = \varphi_n(t)$

Prodotto scalare $(\varphi_n, \varphi_m) = \frac{1}{T}\left[\int_{-T/2}^{T/2} e^{j\frac{2\pi n t}{T}} e^{-j\frac{2\pi m t}{T}} dt\right]$

- se $n=m$: $\|\varphi_n(t)\|^2 = 1$ energia
- se $n \neq m$: $\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{j\frac{2\pi(n-m)t}{T}} dt = 0$

multiplo di $\frac{1}{T}$

⇒ base ortonormale

* Segnale a supporto limitato $(-K;K)$ ≠ definito nell'intervallo $(-K,K)$

= nullo fuori dall'intervallo = non so come si comporta fuori dall'intervallo

$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \varphi_n(t)$ con $a_n = (x(t), \varphi_n(t))$

$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{j\frac{2\pi n t}{T}}$ con $\mu_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\frac{2\pi n t}{T}} dt$

Se ho un segnale definito in $-T/2 < t < \frac{T}{2}$ non so se è una porta perché non so come si comporta fuori dall'intervallo

FREQUENZA FONDAMENTALE

Se $n=1$ → $\frac{1}{\sqrt{T}} e^{j\frac{2\pi t}{T}} = \varphi_n(t)$ $f_0 = \frac{1}{T}$

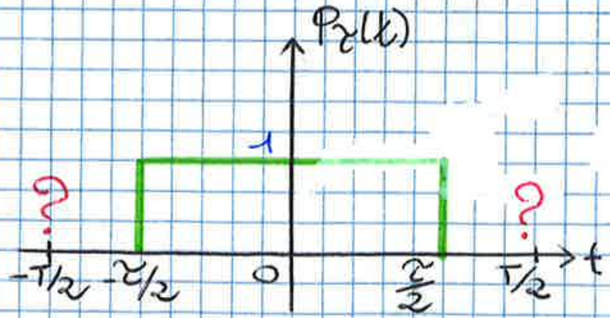
$n=2,3,\dots$ multipli della fondamentale → ARMONICA

La base ha cardinalità infinita

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mu_n e^{+j\frac{2\pi nt}{T}} \qquad \mu_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\,e^{-j\frac{2\pi nt}{T}}\,dt$$

definito su $[-T/2; T/2]$

Esempio.



$$\mu_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}P_\tau\, e^{-j\frac{2\pi nt}{T}}dt=\frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\tau/2}e^{-j\frac{2\pi nt}{T}}dt=\frac{1}{T}\cdot 2\int_{0}^{\tau/2}\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt=$$

$$=\frac{2}{T}\,\frac{T}{2\pi n}\sin\left(\frac{2\pi n}{T}\cdot\frac{\tau}{2}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi n\tau}{T}\right)}{\pi n}$$ coefficienti

La trasformata di Fourier è diversa dalla serie di Fourier tra $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$
(segnale diverso)

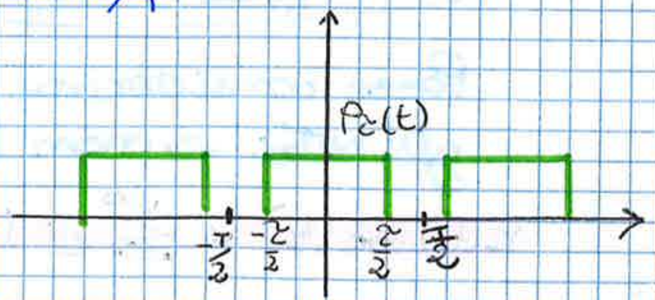
$$\mathcal{F}\{P_\tau(t)\}=\frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f}$$

so che è 0 per $t<\frac{\tau}{2}$ e $t>\frac{\tau}{2}$

Se non avessi l'ipotesi "definito su $[-T/2; T/2]$"

ANTI-TRASFORMATA $$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi n\tau}{T}}{\pi n}\right)e^{j2\pi nt/T}$$

funzione periodica



La serie di Fourier esiste per:
- segnale def $[-T/2; T/2]$
- segnali periodici che sono la ripetizione di una serie di $\mathcal{F}$

SVILUPPO in SERIE GENERALE per BASE ORTOGONALE

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n \varphi_n(t) \qquad t \in [-T/2; T/2]$$

$$\mathcal{E}_x = \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d_n d_m^* \varphi_n(t) \varphi_m^*(t) = \sum_n \sum_m d_n d_m^* \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} \varphi_n(t) \varphi_m^*(t) dt}$$

$n = m : 1$

$n \neq m : 0$

→ rimangono solo i termini per $n=m$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |d_n|^2$$

→ solo se il segnale è periodico

$$P_x = \lim_{a \to +\infty} \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

$$x(t) = \sum \mu_n e^{j \frac{2\pi n t}{T}}$$

$$P_{x\,media} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_n \sum_m \mu_n \mu_m^* e^{j \frac{2\pi (n-m) t}{T}} dt \overset{n=m}{=} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\mu_n|^2 \cdot T$$

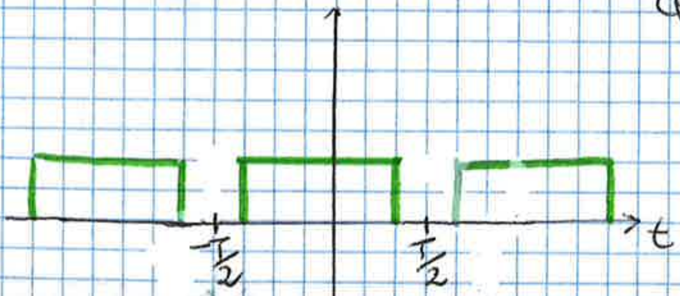
ortogonali (prodotto scalare nullo)

integrale da $-T/2$ a $T/2$

$e^{j \frac{2\pi n t}{T}} = 1$

$1 \cdot T$

$\mu_n \cdot \mu_m^* = |\mu_n|^2$



$$\boxed{P_x = \sum_n |\mu_n|^2}$$ coeff. righe dello spettro delle δ di Dirac

$X(f) = \sum \mu_n \delta(f - \frac{n}{T})$! trovo le μ_n con < serie di F / segnale troncato

! Integrando in df lo spettro di potenza trovo l'energia

SPETTRO di ENERGIA
$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df = \mathcal{E}_x \\ S_x(f) = |X(f)|^2 \end{cases}$$

per analogia (per periodici)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f) df = P_x$$

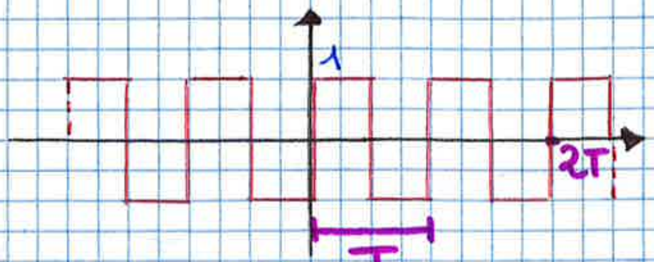
SPETTRO di POTENZA

Se il segnale è a energia

- **finita** $\Rightarrow P_{x\,\text{media}} = 0$ (es. gaussiane, exp, ...)
- **non finita** (es. periodico)

$$P_x = \lim_{a\to+\infty} \frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt =$$

Essendo periodico la calcolo solo su un periodo

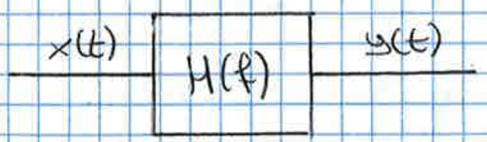


periodico $= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\mu_n|^2$

$$G_x(f) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\mu_n|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f)\,df = P_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\mu_n|^2$$

①



?

$X(f) = \sum \mu_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$ $\quad Y(f) = H(f)X(f) = H(f)\sum \mu_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) =$

$$= \sum \underbrace{\mu_n H\left(\frac{n}{T}\right)}_{\nu_n} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

$$G_y(f) = \sum |\nu_n|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = |H(f)|^2 G_x(f)$$

② $\mathcal{F}^{-1}\{G_x(f)\}$?

$$\mathcal{F}^{-1}\Big\{\underbrace{\sum_{-\infty}^{+\infty} |\mu_n|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)}_{G_x(f)}\Big\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\mu_n|^2 \cancel{\delta(t - nT)}$$ NO

Grafico simile alla convoluzione seg NON ribalta mento

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(\theta+\tau)\,x^*(\theta)\,d\theta$$

FUNZIONE di AUTOCORRELAZIONE di SEGNALI PERIODICI

rispetto asse y

$T \to \infty$

SPETTRO di POTENZA

$$G_x(f) \triangleq \lim_{T\to+\infty} \underbrace{S_T(f)}_{\text{periodogramma}} = \lim_{T\to+\infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T}$$

→ **densità** spettrale di potenza

CONDIZIONI PER ESSERE 1 DENSITÀ SPETTRALE di POTENZA

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f)\,df = P_x$

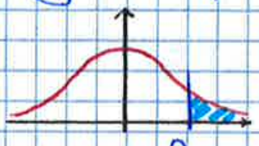
2) $x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t)$

Devo sapere lo spettro di potenza in ingresso e in uscita

IMPORTANTE → $G_y(f) = G_x(f)|H(f)|^2$

Se filtro un segnale perdo una certa % di potenza

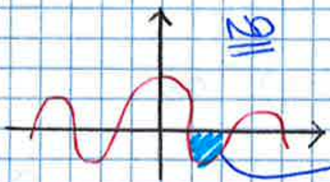
Potenza da Bx in poi



Bx

COROLLARI:

→ $G_x(f)$
- reale
- positiva



NO

la potenza NON può essere negativa

- modulo pari (perché anche x(t) lo mando è reale)
- fase dispari

Lo spettro è a righe (δ) solo se il segnale è periodico

Antitrasformata di Fourier $\mathcal{F}^{-1}\{G_x(f)\} = \phi_x(\tau)$ = FUNZIONE di AUTOCORRELAZIONE

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f) e^{j2\pi f\tau}\,df = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)x^*(t)\,dt$$

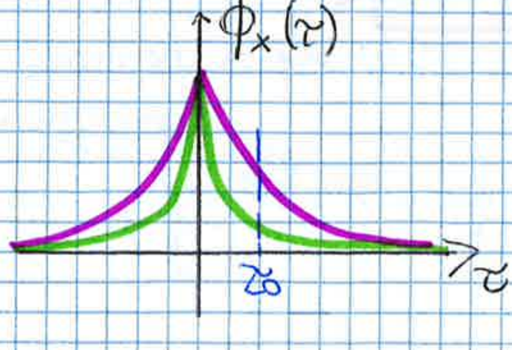
* cambia poco

→ limite dell'area del prodotto

→ uno lo tengo fermo traslo l'altro

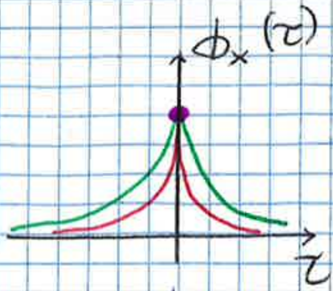
⇓

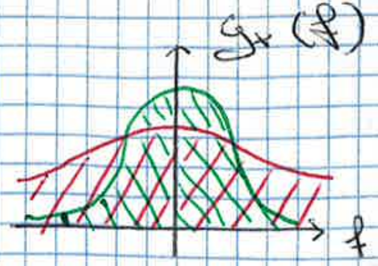
misura quanto si somigliano



Se il segnale cambia = perde memoria di com'era

$\phi_x(0) \Rightarrow$ potenza *



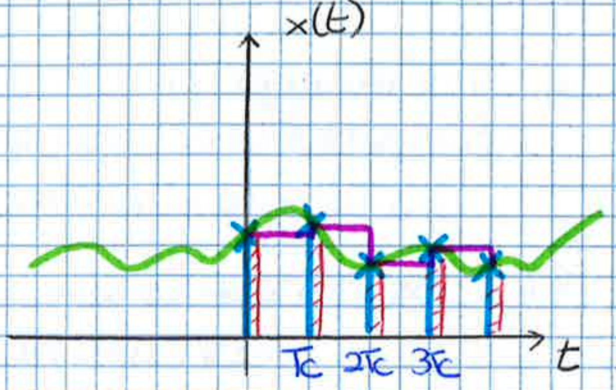


$\Downarrow$

Hanno uguale potenza $\Rightarrow$ l'area sottesa è uguale per i 2 segnali

CAMPIONAMENTO

(TEOREMA del CAMPIONAMENTO)



campionamento reale

$\exists\, X(f)$

CAMPIONARE = prendere dei punti a distanza T_c secondi l'uno dall'altro

nella pratica sono dei rettangolini $\Rightarrow$ funzione infinitesima *

* Viene preso il valore e mantenuto costante per un intervallo di tempo T_c, dopo di che ne viene preso un altro

In modo astratto consideriamo la δ di Dirac * (campionam. ideale)

Tengo solo il segnale nei punti $x(nT_c)$

* $\boxed{\text{CAMPIONATORE IDEALE}}$ (treno di δ moltiplicato per il segnale)

Da $x(t)$ a $x_c(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_c) =$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c)\, \delta(t - nT_c)$$

Fotografa il segnale nei punti dove c'è la δ di Dirac

* INTERPOLAZIONE
(non ho più il segnale)

FILTRO RICOSTRUTTORE: $x(t) = x_c(t) * h(t) =$

$$h(t) = \frac{\sin 2\pi t B_x}{\pi t}$$

(passaggi importanti) $= \sum x(nT_c)\,\delta(t-nT_c) * h(t) =$

$= \sum x(nT_c)\,h(t-nT_c)$

* Errore ALIASING = code della replica del segnale

pre-filtro

cambio banda → limita

TRASFORMATA ZETA

$$X(z) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n}$$

$z \in \mathbb{C}$ variabile indipendente

Mappa una funzione complessa

Sviluppo in serie

SERIE di LAURENT (sicuramente converge in una regione di z)

Esempio: $x[n] = a^{-n} u[n]$

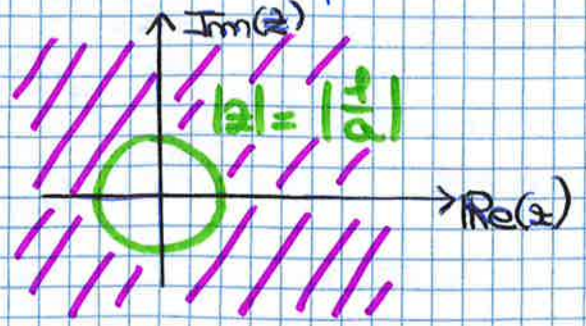
$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot a^{-n} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az)^{-n} = \frac{1}{1-(az)^{-1}}$$

Taylor ↓ $u[n] = 1$ serie geometrica ↓

$|az| > 1$

∃ la trasformata z per $|z| > \left|\frac{1}{a}\right|$

ROC



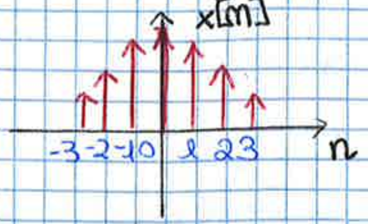
Regione di convergenza : ROC

SERIE: $H_{eq} = H_1(z) H_2(z)$

$h_{eq} = h_1[n] * h_2[n]$

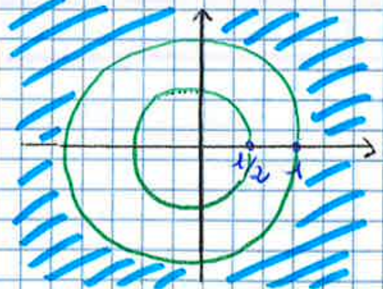
La Trasformata di Fourier del gradino unitario in generale non esiste (non periodico, non a energia finita). Sulla tavola c'è come sommatoria (al limite).
distribuzione

SEQUENZE MISTE = non causale non anticausale



ROC: se una trasformata converge in un punto
⇒ converge per tutti i punti di uguale modulo
(tutta la circonferenza passante per quel punto)
se diverge in un punto (nel polo) ⇒ diverge in tutta la circonferenza di uguale modulo

Esempio



$$\frac{z}{(z-1)(z-\frac{1}{2})}$$ poli $\begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$

⇓

diverge su *

⇒ la ROC è all'esterno *

1 • Se il segnale $x[n]$ è $\boxed{\text{CAUSALE}}$ la forma della ROC è l'esterno della circonferenza, ovvero $|z| > z_0$

2 • Se il segnale $x[n]$ è $\boxed{\text{ANTICAUSALE}}$ la forma della ROC è l'interno della circonferenza, ovvero $|z| < z_0$

3 • Se il segnale $x[n]$ è $\boxed{\text{MISTO}}$ la forma della ROC è una corona circolare, ovvero $|z_1| < |z| < |z_2|$

(2) $X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ razionale fratta

[vediamo solo segnali CAUSALI]

Esempio. CAUSALE

$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ ha zeri e poli

non converge in tutto il piano zeta

TABELLE della TRASFORMATA Z

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{z}{z-a} \rightarrow a^n u[n] \qquad 1 \rightarrow \delta[n] \\ \frac{z}{(z-a)^2} \rightarrow n\, a^{n-1} u[n] \end{array}}$$

(Supponiamo grado N ≤ grado D)

$D(z) = 0$ trovo i poli $z = z_i$ (non facciamo poli semplici o doppi)

qui semplici

Definiamo una f ausiliaria $X'(z) = \frac{X(z)}{z}$

la scomponiamo in fratti semplici

$$X'(z) = \sum_i \frac{A_i}{z - z_i} \qquad A_i = \lim_{z \to z_i} \frac{X'(z) \cdot (z - z_i)}{1}$$

allora $X(z) = \sum_i A_i \frac{z}{z - z_i}$

$\downarrow$

$$x[n] = \sum_i A_i (z_i)^n u[n]$$

Esempio $X(z) = \frac{1}{8z^2 - 6z + 1}$ poli $z = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{4}$ CAUSALE

metodo più semplice $\rightarrow$ $X(z) = \frac{1}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4})}$ * ROC

$$X'(z) = \frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4}) z} = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z - \frac{1}{2}} + \frac{A_3}{z - \frac{1}{4}}$$

$A_1 = \lim_{z \to 0} X'(z) \cdot z = 8$

$X(z)$ *

$\lim_{z \to \frac{1}{2}} \frac{1}{(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) \cdot \frac{1}{2}}$ $\leftarrow$ $A_2 = \frac{1}{(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) \frac{1}{2}} = 8$

$z - \frac{1}{2}$ non lo considero

$\underbrace{(z - \frac{1}{4}) \cdot z}$

$A_3 = \frac{1}{(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}) \frac{1}{4}} = -16$

So che $\left[\dfrac{z}{z-\frac{1}{2}} - \dfrac{z}{z-\frac{1}{4}}\right] \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

Se z^{-1} davanti fa ritardare tutto di 1

$$\boxed{x[n] = 4\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1]\right]}$$

Sono lo stesso risultato

SISTEMI LT-I $[h[n]]$ risposta all'impulso

$x[n] = z_0^n$

convoluzione

$y[n] = \sum_k h[k]\, x[n-k] = \sum_k h[k] z_0^{n-k} = z_0^n \sum_k h[k] z_0^{-k}$

ingresso moltiplicato per un numero

$H(z_0) = \sum_k h[k] z_0^{-k}$ trasf. Z della risposta all'impulso

AUTOFUNZIONE

$H(z)$ funz. di trasferimento $= \sum_n h[n] z^{-n}$

Caso particolare: se prendo $z_0 = e^{j\omega}$ sinusoide complessa

$x[n] = e^{jn\omega}$ $\quad y[n] = e^{jn\omega} \cdot H(e^{j\omega})$

stessa frequenza

Se all'ingresso mando 1 sinusoide

$\downarrow$

all'uscita sinusoide dalla stessa frequenza moltiplicata per $H(z_0)$

circonf. di $R=1$

RISPOSTA in FREQUENZA — Fourier per segnali DISCRETI

$z = e^{j2f_0\pi} = e^{j\omega}$ (caso particolare) in ingresso una sinusoide

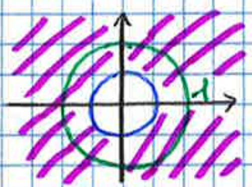
$\Downarrow$

$x[n] = e^{j2\pi f_0 n}$

$y[n] = \underbrace{e^{j2\pi f_0 n}}_{z^n} H(e^{2\pi f_0})$

per analogia in continuo $H(e^{j2\pi f})$ risposta in frequenza del sistema LTI

$H(z)\big|_{z=e^{j2\pi f}}$



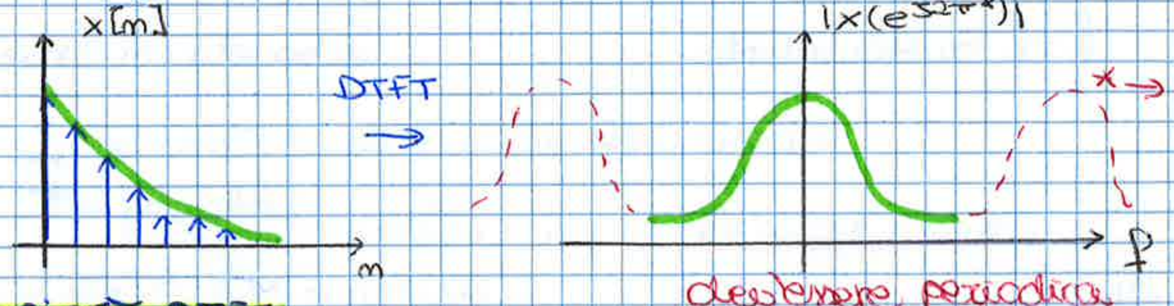
La risposta in frequenza "converge" se $|z| = 1 \in ROC$

DTFT $\mathcal{F}\{h(n)\} \triangleq \sum h[n] e^{-j2\pi f n} = H(e^{j2\pi f})$

generalizziamo

$\mathcal{F}\{x[n]\} \triangleq \sum x[n] e^{-j2\pi f n} = X(e^{j2\pi f})$ SPETTRO

Trasformata di Fourier a tempo discreto



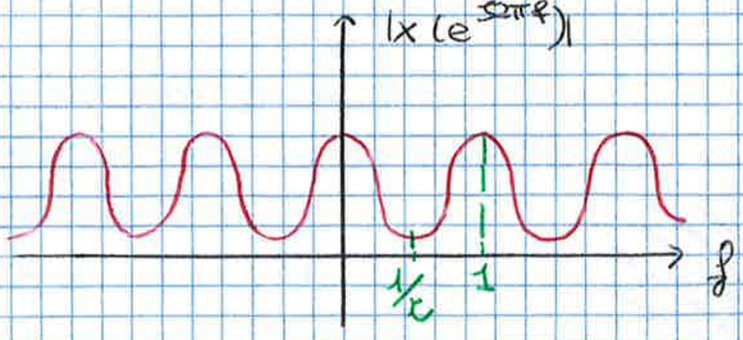
PROPRIETÀ DTFT

1) ESISTENZA DTFT esiste se $\sum_n |x[n]| < \infty$

2) LINEARITÀ

3) PERIODICITÀ $X(e^{j2\pi f})$ è periodica di periodo

$e^{-j2\pi(f+T)n}$ periodo 1



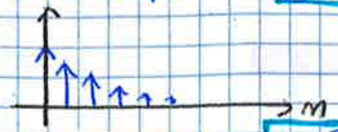
FILTRI $h[n]$

SISTEMI LINEARI sempre

1) FIR (risposta all'impulso $\boxed{\text{finita}}$) $\rightarrow h[n]=0 \quad n<0 \quad n>L$

$\downarrow$

NON RICORSIVO



2) IIR (risposta all'impulso $\boxed{\text{infinita}}$) $\rightarrow$ RICORSIVO

più facile da implementare

$$H(z) = \frac{\sum b_n z^{-n}}{\sum_{m=0} a_m z^{-m}} \Rightarrow \text{conosco } h[n]$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

FIR $\quad y[n] = \sum_{k=0}^{L-1} h[k]\, x[n-k]$

IIR $\quad y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]\, x[n-k]$ NON UTILIZZABILE IN PRATICA

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{n=0}^{N-m} b_n z^{-m}}{\sum_{m=0}^{N-1} a_m z^{-m}}$$

Funzione di trasferimento in Trasformata di zeta

$$Y(z)\left[\sum_{n=0}^{N-1} a_m z^{-m}\right] = X(z)\left[\sum_{n=0}^{N-1} b_n z^{-n}\right]$$

$$\sum_{m=0}^{M-1} a_m\, y[n-m] = \sum_{k=0}^{N-1} b_k\, x[n-k]$$

$$a_0\, y[n] = \sum_{k=0}^{N} b_k\, x[n-k] - \sum_{m=1}^{M-1} a_m\, y[n-m]$$

BIBO

STABILE: se a un ingresso limitato corrisponde un'uscita limitata

C. SUFF $\quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty$

3) RICORSIVO

4) NON RICORSIVO

$f_K = \frac{K}{N}$ $\quad K=0, \dots, N-1$

$$X(e^{j2\pi \frac{K}{N}}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j2\pi n \frac{K}{N}} = X[K] = DFT\{x[n]\}$$

con
$$\begin{cases} 0 \le n \le N-1 \\ 0 \le K \le N-1 \end{cases}$$

INVERSIONE DFT:

$$X[K] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j2\pi \frac{Kn}{N}} \quad \text{(DFT) è invertibile}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} X[K]\, e^{j2\pi \frac{Kn}{N}} \quad \text{(iDFT)}$$

$$0 \le {K \atop n} \le N-1$$

$x_T(t) = x(t) \cdot p_T(t) \Rightarrow X_T(f) = X(f) * P_T(f)$

mi restituisce una versione periodicizzata di x. se è a supporto limitato non mi cambia nulla, se non lo è c'è il fenomeno di aliasing (sovrapposizione)

! errore di aliasing se NON è a supporto limitato

PROBABILITÀ CONGIUNTA: A e B si verificano contemporaneamente

$$P\{A \cap B\} = P\{A, B\}$$

se m. e. $(A \cap B = 0 \rightsquigarrow P\{A, B\} = 0)$

STATISTICAMENTE INDIPENDENTI (es. 2 dadi lanciati)

non si influenzano

$$P\{A, B\} = P\{A\} \cdot P\{B\}$$

! Se A e B sono statisticamente indipendenti allora non possono essere mutualmente esclusivi e viceversa.

PROBABILITÀ CONDIZIONATA (statistic. dipendenti)

$P\{A|B\} \to$ spazio campione B, non più Ω

$$P\{A|B\} = \frac{N_A}{N_B}$$ FREQUENZA STATISTICA

$$P\{A|B\} = \frac{P\{A, B\}}{P\{B\}}$$

FORMULA di BAYES $P\{A, B\} = P\{A|B\}P\{B\} = P\{B|A\}P\{A\}$

TEOREMA della PROBABILITÀ TOTALE

1) $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_N$
2) $A_i \cap A_J = 0 \quad , \forall i \neq J$

$$\Rightarrow P\{B\} = P\{B, A_1\} + P\{B, A_2\} + \ldots + P\{B, A_N\}$$

CAPITOLO 3 VARIABILE ALEATORIA CONTINUA

Utilizzando uno strumento ideale di precisione infinita.*
Nel momento in cui si effettua la misura, ogni variabile aleatoria diventa automaticamente discreta.
Se non la si misura (viene considerata per sé) o si misura con uno strumento ideale *, allora può essere considerata continua.

* DISTRIBUZIONE CUMULATIVA: $F_\xi(x) = P\{\xi \leq x\}$
(non si distinguono più i gradini)

X DENSITÀ DI PROBABILITÀ: $P\{x_i < \xi < x_s\} = F_\xi(x_s) - F_\xi(x_i)$
(d.d.p) x_s e x_i vicinissime

per discrete

$P\{\xi = x\} = 0$ per continue

$f_\xi(x) = \frac{d}{dx} F_\xi(x) \Rightarrow$ derivata della distribuz. di massa

PROPRIETÀ: $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(u)\,du$

DISTRIBUZIONE GAUSSIANA o NORMALE:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

μ: valor medio
σ: deviazione standard

$$\lim_{\sigma \to 0} f_\xi(x) = \delta(x-\mu)$$

~ VALOR MEDIO $\mu_\xi = E\{\xi\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_\xi(x)\,dx$

può essere utilizzata anche per le discrete

~ MOMENTI DI ORDINE K $\mu_\xi^n = E\{\xi^n\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_\xi(x)\,dx$

TEOREMA FONDAMENTALE della media: $E\{g(\xi)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_\xi(x)\,dx$

FUNZIONE CARATTERISTICA: $C_\xi(u) = E\{e^{-j2\pi u\xi}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x) e^{-j2\pi u x}\,dx$

CAPITOLO 5

Processi casuali: non scrivibili con un'espressione matematica
In generale i processi casuali NON ammettono Trasformata di Fourier.

PROCESSO CASUALE come COLLEZIONE di SEGNALI

Abbiamo un generatore che può generare tot segnali. Noi a priori non sappiamo quale tra questi tot genererà.
L'insieme dei possibili "valori": processo casuale
Ogni "valore" del processo casuale: realizzazione del processo.
vengono disegnate o in un unico grafico o in grafici diversi disposti in verticale

Segnale quasi determinato: ha almeno una variabile aleatoria

$x(t)$ con variabile aleatoria $\to x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t)$

PROCESSO CASUALE come COLLEZIONE di variabili ALEATORIE

Variabile aleatoria: n° che ha diversi valori a seconda del risultato dell'esperimento

DISTRIBUZIONE CUMULATIVA del I ordine: $F_x(u;t) = P(x(t) < u)$
DENSITÀ di PROBABILITÀ del I ordine: $f_x(u,t) = \frac{d}{du} F_x(u,t)$

DISTRIBUZIONE CUMULATIVA del II ordine: $F_x(u_1,u_2;t_1,t_2) = P(x(t_1) \le u_1, x(t_2) \le u_2)$
DENSITÀ di PROBABILITÀ del II ordine: $f_x(u_1,u_2;t_1,t_2) = \frac{d^2}{du_1 du_2} F_x(u_1,u_2;t_1,t_2)$

VALOR MEDIO: $\mu_x(t) = E\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} u f_x(u;t)\,du$
VALOR QUADRATICO MEDIO: $E\{x^2(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 f_x(u,t)\,du$
VARIANZA: $\sigma_x^2(t) = E\{[x(t) - \mu_x(t)]^2\} = E\{x^2(t)\} - \mu_x^2(t)$
COEFF. di CORRELAZIONE: $\rho_{x(t_1),x(t_2)} = \frac{E\{[x(t_1)-\mu_x(t_1)][x(t_2)-\mu_x(t_2)]\}}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)}$

PROPRIETÀ del processo WSS:

$$R_x(\tau)=E\{x(t)\,x(t+\tau)\}$$

1) $\underbrace{R_x(0)}_{\text{nell'origine}}=E\{x^2(t)\}=\underbrace{\sigma_x^2+\mu_x^2}_{\text{valor quadratico medio}}$

2) $|R_x(\tau)|\le R_x(0)=E\{x^2(t)\}$

→ massimo nell'origine ($\tau=0$)

3) $R_x(-\tau)=E\{x(t)\,x(t-\tau)\}=R_x(\tau)$

↳ è una funzione pari se WSS è reale

SPETTRO del VALOR QUADRATICO MEDIO (di WSS)

$$G_x(f)=\mathcal{F}\{R_x(\tau)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}R_x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

$x(t;\xi_0)$

MEDIE TEMPORALI: $m_x(\xi_0)=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}x(t;\xi_0)\,dt$

POTENZA: $P_x(\xi_0)=\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}x^2(t;\xi_0)\,dt$

FUNZIONE di AUTOCORRELAZIONE: $R_x(\tau;\xi_0)=\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}x(t;\xi_0)\,x(t+\tau;\xi_0)\,dt$

$x(t)$

MEDIA STATISTICA: $\mu_x(t)=E\{x(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}u\,f_x(u;t)\,du$

VALOR QUADRATICO MEDIO: $E\{x^2(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}u^2 f_x(u;t)\,du$

FUNZIONE di AUTOCORRELAZIONE: $R_x(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}u\,v\,f_x(u,v;t_1,t_2)\,du\,dv$

$$P_x=\int G_x(f)\,df$$

CAPITOLO 6 PROCESSI CASUALI FILTRATI

PROCESSI di USCITA

$x(t)$ sia l'ingresso di un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t)$

$$y(t;\theta_0) = x(t;\theta_0) * h(t)$$

! NON con Fourier perché NON ESISTE

VALOR MEDIO di $y(t)$:
$$\mu_y(t) = E\{y(t)\} = E\left\{\int h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau\right\} = h(t) * \mu_x(t)$$

se è stazionario in senso lato

$$\mu_x(t) = \mu_x$$

$$\mu_y(t) = H(0)\,\mu_x$$

VALOR QUADRATICO MEDIO:
$$E\{y^2(t)\} = E\left\{\left[\int h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau\right]^2\right\}$$

se è stazionario in senso lato

$$E\{y^2(t)\} = \langle R_x(\tau), R_h(\tau)\rangle$$

se $x(t)$ è un RUMORE BIANCO

$$E\{y^2(t)\} = \frac{N_0}{2}\int h^2(u)\, du = \frac{N_0}{2}\,\mathcal{E}(h)$$

FUNZIONE di AUTOCORRELAZIONE

$$R_y(t_1,t_2) = E\{y(t_1)\, y(t_2)\}$$

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * R_h(\tau)$$

se è RUMORE BIANCO

$$R_y(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau) * R_h(\tau) = \frac{N_0}{2} R_h(\tau)$$

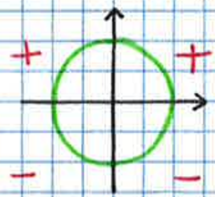
ML

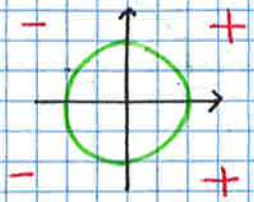
ESERCITAZIONE 1

1) Scrivere una tabella con i valori di $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ ed $e^{j\varphi}$ per $\varphi = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi, \pi$

	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π
$\sin\varphi$	0	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{2}/2$	0
$\cos\varphi$	1	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	-1
$e^{j\varphi}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$	j	$-\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1

$\sin\varphi$



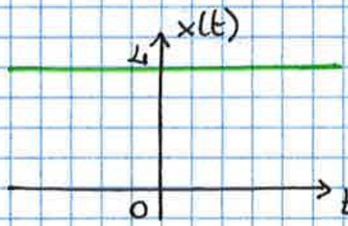


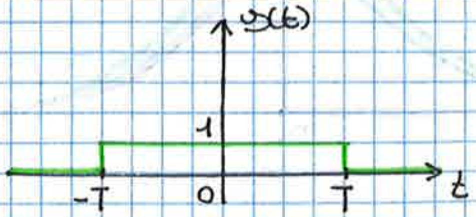
$\cos\varphi$

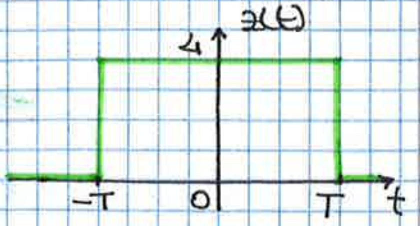
$$\boxed{e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi}$$

2) Disegnare il grafico per le seguenti funzioni di t (segnali):

$x(t) = 4$; $\quad y(t) = \begin{cases} 1 & |t| \le T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$; $\quad z(t) = x(t)\,y(t)$

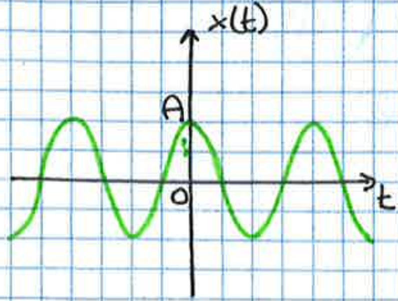


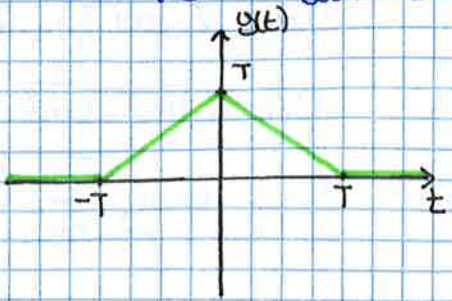


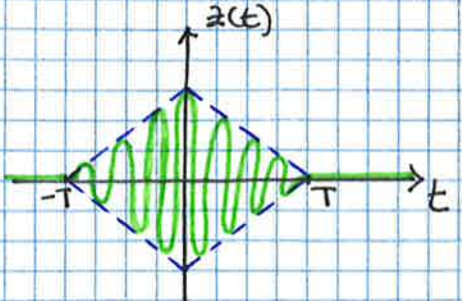


3) Disegnare il grafico per i seguenti segnali: $T = \frac{4}{f_c}$

$x(t) = A\cos(2\pi f_c t)$ $\quad y(t) = \begin{cases} T-|t| & |t| \le T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ $\quad z(t) = x(t)\,y(t)$







4 "onde" del $\cos\varphi$

$e_2 = 3+j$

$|Re| = 3$

$|Im| = 1$

$|e_2| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$

$\angle e_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} \simeq 0,1\pi$ ($18,44°$)

$18,44° : 180 = x : \pi$

$\frac{18,44}{180}\pi = 0,1\pi$

$e_3 = j$

$|Re| = 0$

$|Im| = 1$

$|e_3| = 1$

$\angle e_3 = \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$

$e_4 = 1-j$

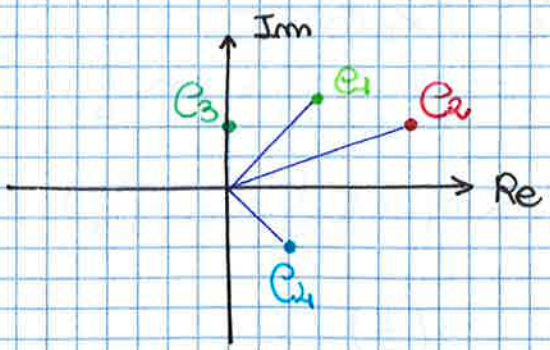
$|Re| = 1$

$|Im| = -1$

$|e_4| = \sqrt{2}$

$\angle e_4 = \operatorname{arctg}(-1) = -\pi/4$

Disegnare e_1, e_2, e_3, e_4 nel piano complesso:



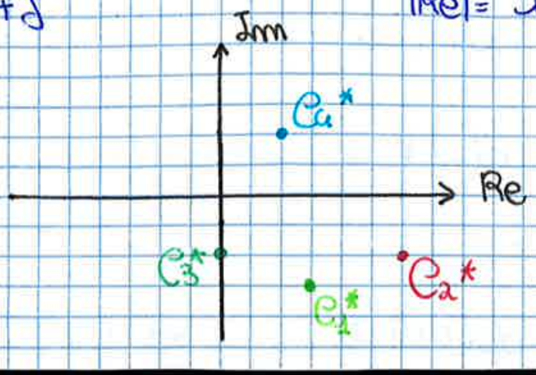
8) Calcolare il complesso coniugato di e_1, e_2, e_3, e_4 dell'es. 6. Disegnarli nel piano complesso:

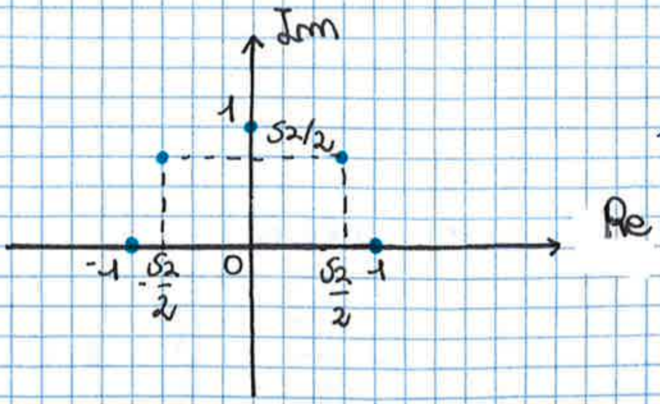
$e_1^* = 2e^{-j\pi/4}$ $|Re| = \sqrt{2}$ $|Im| = -\sqrt{2}$

$e_2^* = 3-j$ $|Re| = 3$ $|Im| = -1$

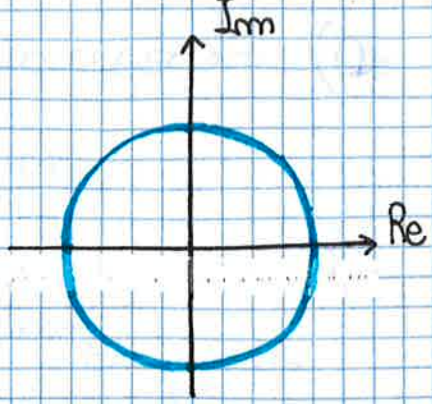
$e_3^* = -j$ $|Re| = 0$ $|Im| = -1$

$e_4^* = 1+j$ $|Re| = 1$ $|Im| = +1$





→ Traiettoria

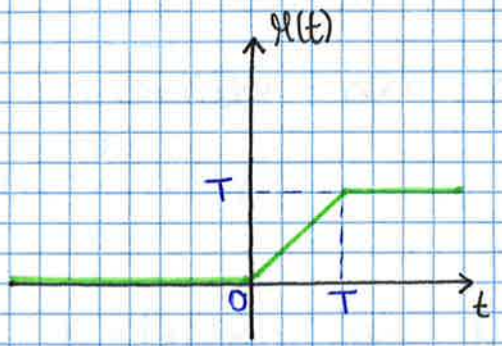


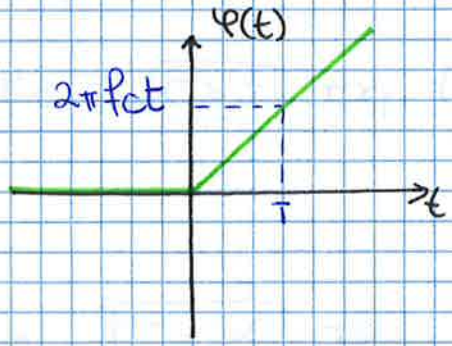
9) $x(t) = r(t)\, e^{j\varphi t}$ $r(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ t/T & 0 \le t \le T \\ 1 & t>T \end{cases}$

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 2\pi f_c t & t \ge 0 \end{cases}$$

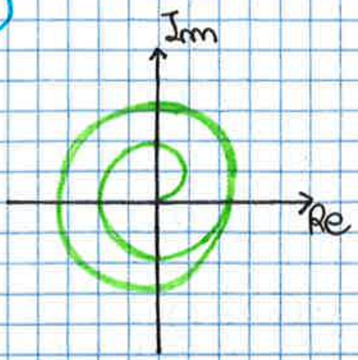
Disegnare la traiettoria di $x(t)$ se, in ordine,:

A • $f_c = \frac{1}{4T}$ B • $f_c = \frac{1}{2T}$ C • $f_c = \frac{1}{T}$

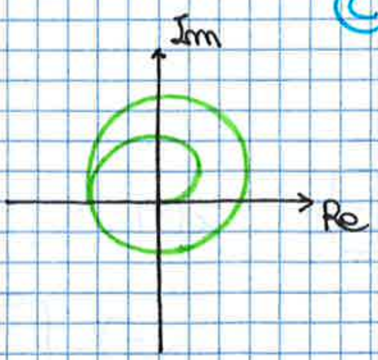




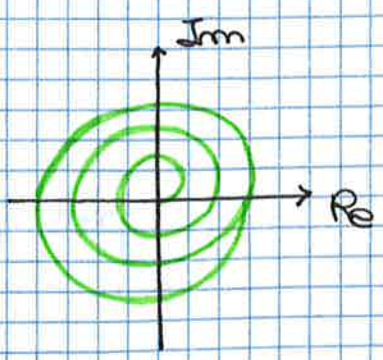
A



B

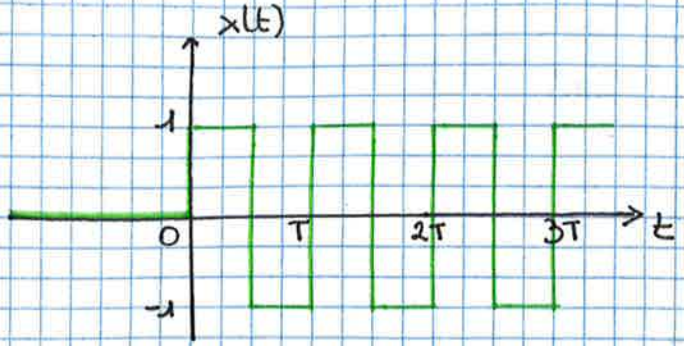


C



12) Disegnare i grafici dei segnali:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & KT \leq t < KT+\frac{T}{2} \\ -1 & KT+\frac{T}{2} < t \leq KT+T \end{cases} \quad ; \quad y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(u)\,du$$



- $t<0 \qquad y(t)=0$

- $0<u<\frac{T}{2} \qquad x(u)=1$

  $0<t<T/2 \qquad y(t)=\int_0^t 1\cdot du = \frac{T}{2}$

- $\frac{T}{2}<u<T \qquad x(u)=-1$

  $\frac{T}{2}<t<T \qquad y(t)=\int_0^{T/2} 1\cdot du+\int_{T/2}^{t} -1\,du = T-t$

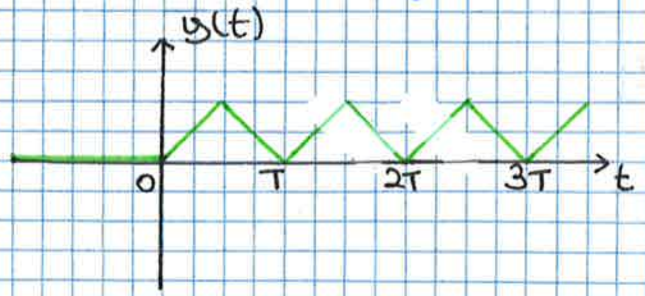
  se $T=t \quad y(t)=0$

- $T<u<\frac{3}{2}T \qquad x(u)=1$

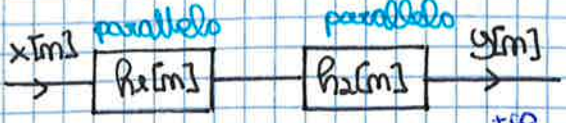
  $T<t<\frac{3}{2}T \qquad y(t)=\int_0^T x(u)du+\int_T^t 1\cdot du = t-T$

- $\frac{3}{2}T<u<2T \qquad x(u)=-1$

  $\frac{3}{2}T<t<2T \qquad y(t)=\int_0^T x(u)du+\int_T^{3T/2} 1\cdot du+\int_{3T/2}^{t} -1\,du = 2T-t$



2) $h_1[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$
$h_2[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$



$$h_{eq}[n] = h_1[n] * h_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_1[k]\,h_2[n-k]$$

1° metodo

$n<0$ $\quad h_{eq}[n] = 0$

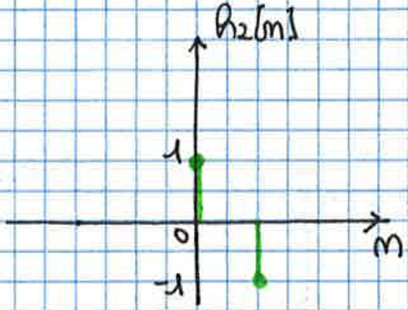
$n=0$ $\quad h_{eq}[0] = \sum h_1[k]h_2[-k] = h_1[0]h_2[0] + h_1[1]h_2[-1] = 1 - 1\cdot 0 = 1$

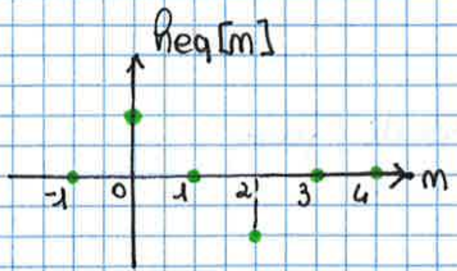
$n=1$ $\quad h_{eq}[1] = \sum h_1[k]h_2[1-k] = h_1[0]h_2[1] + h_1[1]h_2[0] = -1 + 1 = 0$

$n=2$ $\quad h_{eq}[2] = \sum h_1[k]h_2[2-k] = h_1[0]h_2[2] + h_1[1]h_2[1] = 0 - 1 = -1$

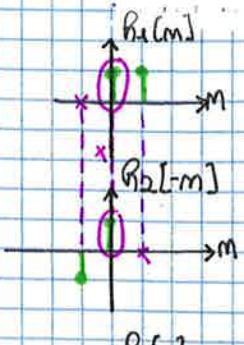
$n=3$ $\quad h_{eq}[3] = \sum h_1[k]h_2[3-k] = h_1[0]h_2[3] + h_1[1]h_2[2] = 0 + 0 = 0$

$n>3$ $\quad h_{eq}[n] = 0$

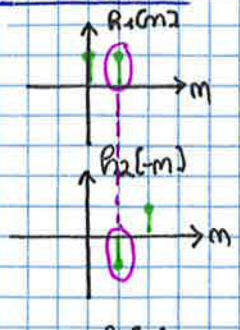




2° metodo



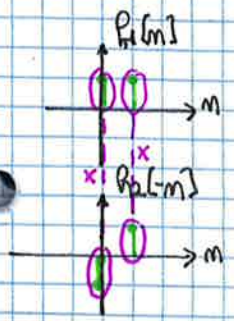
$h_{eq}[0] = 1$



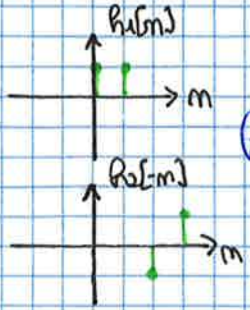
$h_{eq}[2] = -1$

$h_{eq}[n] = 0 \quad n > 3$

$h_{eq}[n] = 0 \quad n < 1$

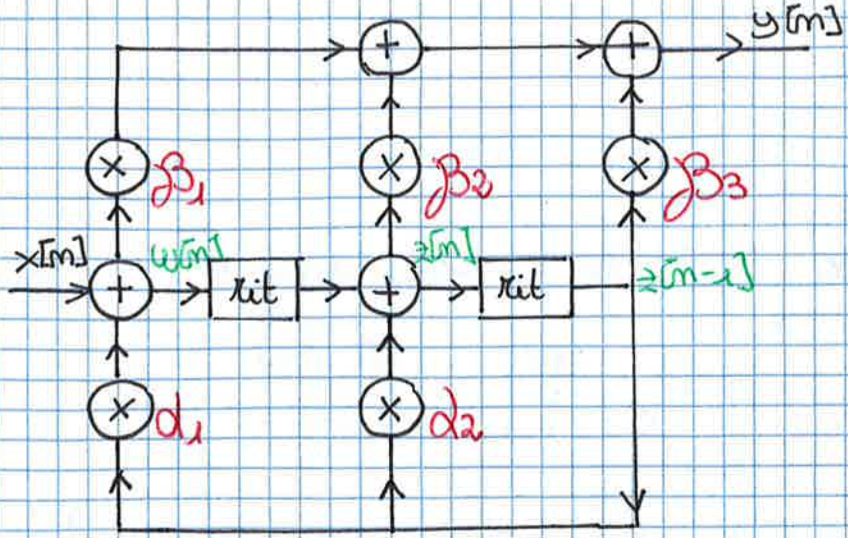


$h_{eq}[1] = -1 + 1 = 0$



$h_{eq}[3] = 0$

4)



$$\begin{cases} y[n] = \beta_1 w[n] + \beta_2 z[n] + \beta_3 z[n-1] \\ z[n] = w[n-1] + \alpha_2 z[n-1] \\ w[n] = x[n] + \alpha_1 z[n-1] \end{cases}$$

Si discuta la linearità e tempo invarianza del sistema

5) $$y(t) = T\{x(t)\} = \int_{t-1}^{t} x(\tau)\,d\tau + x(t-2)$$

parallelo

Ritarda di 2 passi

linearità

Risposte a 2 generiche segnali

$$y_1(t) = T\{x_1(t)\} = \int_{t-1}^{t} x_1(\tau)\,d\tau + x_1(t-2)$$

$$y_2(t) = T\{x_2(t)\} = \int_{t-1}^{t} x_2(\tau)\,d\tau + x_2(t-2)$$

$$x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$$

$$y(t) = T\{x(t)\} = \int_{t-1}^{t} [\alpha_1 x_1(\tau) + \alpha_2 x_2(\tau)]\,d\tau + [\alpha_1 x_1(t-2) + \alpha_2 x_2(t-2)] =$$

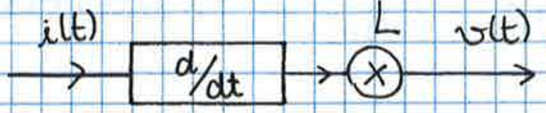
$$= \alpha_1 \left\{ \int_{t-1}^{t} x_1(\tau)\,d\tau + x_1(t-2) \right\} + \alpha_2 \left\{ \int_{t-1}^{t} x_2(\tau)\,d\tau + x_2(t-2) \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) \checkmark$$

ESERCITAZIONE 3

1) Dato un induttore $v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$ L: induttanza
Il sistema è lineare e tinvariante
Si calcoli $H(f)$ utilizzando i concetti di $<$ autofunzione, autovalore
Si calcoli $v(t)$ supponendo $i(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$



$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

$w(t)$ è AUTOFUNZIONE se $\boxed{w(t) * h(t) = \lambda\, w(t)}$

$$w_f(t) = e^{j2\pi f t}$$

AUTOVALORI $\lambda_f = H(f) = \int h(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$

$$w_f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, w_f(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{j2\pi f(t-\tau)}\, d\tau =$$

$$= e^{j2\pi f t} \int h(\tau)\, e^{-j2\pi f \tau}\, d\tau = w_f(t)\, H(f)$$

$i(t) = w_{f_0}(t) = e^{j2\pi f_0 t}$

$v(t) = i(t)\, H(f_0)$

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} = L\frac{d}{dt} e^{j2\pi f_0 t} = L(j2\pi f_0)\, e^{j2\pi f_0 t} =$$

$$= L\, i(t)\, (j2\pi f_0)$$

$H(f_0) = j2\pi f_0 L$

Se $i(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$

$v(t) = -AL\, 2\pi f_0 \sin(2\pi f_0 t + \varphi)$

3) $x(t) = e^{-(t/T)^2}$

$y(t) = \delta(t) + \delta(t-T)$

$z(t) = x(t)\, y(t)$ ingresso

• $h(t) = h_1(t) = e^{-t/T} u(t)$ risposta all'impulso

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$z(t) = e^{-(t/T)^2} [\delta(t) + \delta(t-T)] = e^{-(t/T)^2} \delta(t) + e^{-(t/T)^2} \delta(t-T) =$$

$$= e^{-(t/T)^2}\Big|_{t=0} \delta(t) + e^{-(t/T)^2}\Big|_{t=T} \delta(t-T) =$$

$$= \delta(t) + \frac{1}{e} \delta(t-T)$$

$$w_1(t) = z(t) * h_1(t) = h_1(t) + \frac{1}{e} h_1(t-T) =$$

$$= e^{-t/T} u(t) + \frac{1}{e} e^{-(t-T)/T} u(t-T)$$

...

$$= e^{-t/T} [u(t) + u(t-T)]$$

• $h(t) = h_2(t) = \begin{cases} t/T & 0 < t < T \\ 2 - t/T & T < t < 2T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

$$w_2(t) = z(t) * h_2(t) = h_2(t) + \frac{1}{e} h_2(t-T)$$

$$w_2(t) = \begin{cases} h_2(t) = t/T \\ h_2(t) + \frac{1}{e} h_2(t-T) = 2 - \frac{t}{T} + \frac{1}{e} \frac{t-T}{T} \\ \frac{1}{e} h_2(t-T) \\ 0 \end{cases}$$

DOMINIO della FREQUENZA

$$Y(f) = X(f)\,H(f)$$

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j2\pi f t}\,dt = \int_0^T e^{-j2\pi f t}\,dt =$$

$$= \left[-\frac{e^{-j2\pi f t}}{j2\pi f t}\right]_0^T = -\frac{e^{-j2\pi f T}}{j2\pi f t} + \frac{1}{j2\pi f t} =$$

$$= e^{-j2\pi f T} \quad \frac{e^{-j2\pi f T} - e^{j2\pi f T}}{-j2\pi f}$$

$$X(f) = \frac{A}{2}\left[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right] e^{j\Theta}$$

5) $y(t)$ uscita

$h(t) = e^{-t/T} u(t)$ $\qquad$ $H(f)$ anche nelle tavole

$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \Theta)$

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

$$Y(f) = H(f)\,X(f)$$

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t/T} u(t) e^{-j2\pi f t}\,dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-(2\pi f + \frac{1}{T})t}\,dt = \rightsquigarrow \frac{T}{1 + j2\pi f T}$$

$$Y(f) = \frac{A\,H(f_0)}{2}\left[e^{j(\Theta + \varphi(f_0))}\delta(f-f_0) + e^{-j(\Theta+\varphi(f_0))}\delta(f+f_0)\right]$$

$$H(f) = \frac{T}{\sqrt{1 + (2\pi f T)^2}}$$

$$\varphi(f) = -\operatorname{arctg}(2\pi f T)$$

$$y(t) = \frac{A T}{\sqrt{1 + (2\pi f_0 T)^2}} \cos\left[2\pi f_0 t + \Theta - \operatorname{arctg}(2\pi f_0 t)\right]$$

ESERCITAZIONE 4

Calcolare la trasformata di Fourier:

1) $x(t) = e^{-|t|/T}$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|/T} e^{-j2\pi f t} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{+\left(\frac{1}{T} - j2\pi f\right)t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-\left(\frac{1}{T} + j2\pi f\right)t} dt =$$

$$= \left[\frac{e^{\left(\frac{1}{T} - j2\pi f\right)t}}{\frac{1}{T} - j2\pi f} \right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-\left(\frac{1}{T} + j2\pi f\right)t}}{-\frac{1}{T} - j2\pi f} \right]_{0}^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{T} - j2\pi f} - 0 + 0 - \frac{1}{-\frac{1}{T} - j2\pi f} = T \frac{2}{1 + (2\pi f T)^2}$$

Oppure dalle tavole $\alpha = \frac{1}{T}$

2) $x(t) = e^{-|t - t_0|/T}$

Può essere il segnale d'uscita di un ritardatore

$y(t) = x(t) * h(t)$

$h(t) = \delta(t - t_0)$

$Y(f) = X(f) H(f)$

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) \cdot e^{-j2\pi f t} dt = e^{-j2\pi f t_0}$$

$$X(f) = \frac{2T}{1 + (2\pi f T)^2}$$

$$Y(f) = \frac{2T}{1 + (2\pi f T)^2} e^{-j2\pi f t_0}$$