appunti
www.centroappunti.it
Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: 1825A - ANNO: 2015

# A P P U N T I

STUDENTE: Semproni Federica

MATERIA: Analisi 2 (teoria+esercizi) - Prof. Lancelotti

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell’autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

# ARGOMENTI



# TESTI

Teoria _ Lancelotti, "Lezioni di Analisi Matematica II" Celid
Esercitazioni _ "Esercizi e quiz di analisi matematica II" Celid

Inoltre è definita in $\mathbb{R}^n$ una norma, detta anche modulo:

se $x=(x_1,x_2,---,x_n)$

$$\|x\|=|x|=\sqrt{x\cdot x}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\_\_+x_n^2}$$

e rappresenta la distanza di $x$ dall'origine $O_{\mathbb{R}^n}=(0,0,---,0)$

OSS. $\|x\|=\|x-0\|$ $\quad x-0=x$

DEF. Siano $x_0\in\mathbb{R}^n$ e $r>0$. Si chiama intorno sferico aperto (chiuso) di centro $x_0$ e raggio $r$ (o palla aperta [chiusa]) l'insieme

$$B_r(x_0)=\{x\in\mathbb{R}^n: \|x-x_0\|<r\} \quad \text{APERTO}$$

$$\overline{B_r(x_0)}=\{x\in\mathbb{R}^n: \|x-x_0\|\le r\} \quad \text{CHIUSO}$$

$\|x-x_0\|$ è la distanza di $x$ da $x_0$.

per $\boxed{n=1}$ $\Rightarrow$ $B_r(x_0)=\{x\in\mathbb{R}: |x-x_0|<r\}$

$|x-x_0|<r \rightarrow \quad -r<x-x_0<r$

$x_0-r<x<x_0+r$

$B_r(x_0)=(x_0-r,\ x_0+r)$

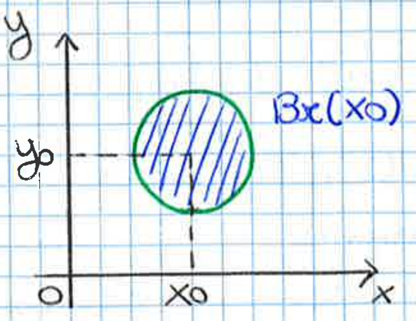
$\overline{B_r(x_0)}=[x_0-r,\ x_0+r]$

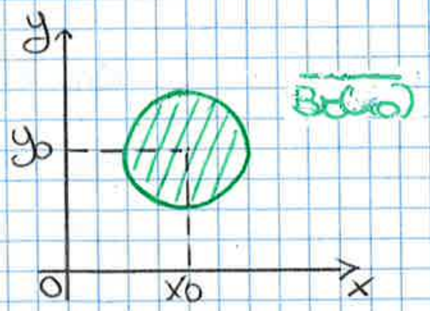
per $\boxed{n=2}$ $\Rightarrow$ $B_r(x_0)=\{x\in\mathbb{R}^2: \|(x,y)-(x_0,y_0)\|<r\}$

$\|(x,y)-(x_0,y_0)\|=\|(x-x_0),(y-y_0)\|$

$\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<r \Rightarrow \|(x-x_0),(y-y_0)\|<r$

$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r \Leftrightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2$



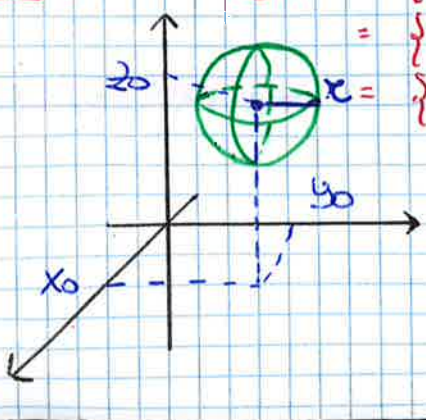




Se $\boxed{n\ge 2}$ non si definiscono gli intorni destri e sinistri dei punti di $\mathbb{R}^n$. Analogamente non si definiscono per $\pm\infty$.

$\boxed{n=3}\Rightarrow B_r(x_0,y_0,z_0)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: \|(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)\|<r\}=$

$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: \|(x-x_0),(y,y_0),(z-z_0)\|<r\}=$

$=\{x,y,z)\in\mathbb{R}^3: (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2<r^2\}$

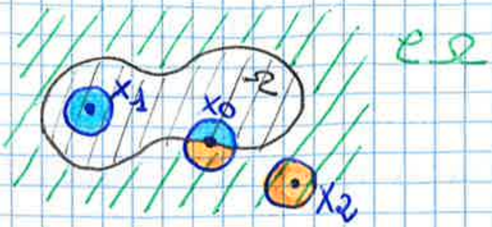


Diciamo che $x_0$ è un punto di frontiera per $\Omega$ se $\forall\, r>0$

$\Omega \cap B_r(x_0) \neq \emptyset$ e $C\Omega \cap B_r(x_0) \neq \emptyset$

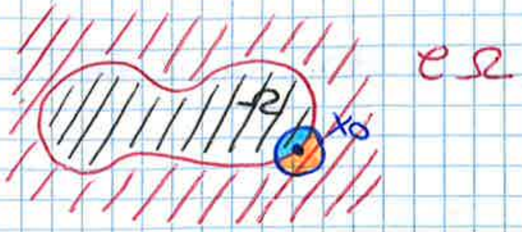
dove $C\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin \Omega\}$

└ è il complementare di $\Omega$




$x_0$ è di frontiera

$x_1$ e $x_2$ non sono di frontiera




oss. $x_0$ è di frontiera ma $x_0 \notin \Omega$

Diciamo frontiera di $\Omega$ (o bordo di $\Omega$) l'insieme dei punti di frontiera, si denota con $Fr(\Omega)$ o $\partial\Omega$

└ "$\partial$" e non "$\delta$"

oss. il bordo di $\Omega$ coincide con il bordo del complementare di $\Omega$

$$\partial\Omega = \partial(C\Omega)$$

Diciamo chiusura di $\Omega$ e si indica con $\overline{\Omega}$ l'insieme

$$\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$$

esempio. $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{Q}\}$

$\mathbb{Q}$ è denso di $\mathbb{R}$

$\partial\Omega$ ?


$\Omega$ = puntini "nebbia"

$C\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \cup y \notin \mathbb{Q}\}$

$x_0 \in \Omega$

La pallina interseca $\Omega$ ma anche punti $\notin \Omega$

tutti i punti di $\Omega \in \partial\Omega$

anche $x_1$ è di frontiera

$\partial\Omega = \Omega \cup C\Omega = \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ il bordo non sempre separa $\Omega$ dal $C\Omega$.

Esempio - $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1<x^2+y^2<4\}$

$\partial\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1 = x^2+y^2 = 4\}$ SBAGLIATO

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\} \cancel{\cap} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=4\}$ GIUSTO

Come trovare il bordo di più disuguaglianze

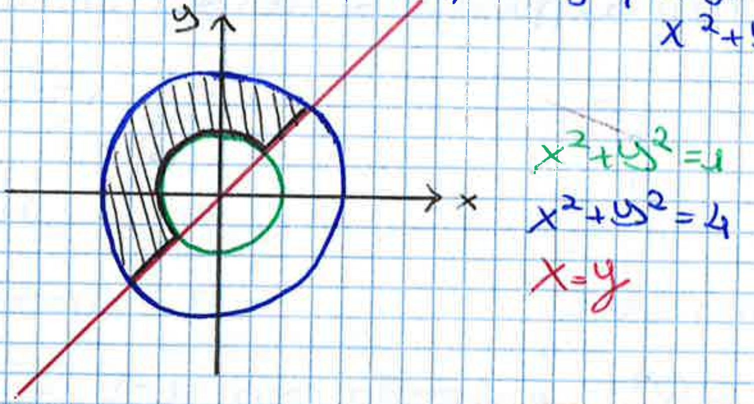
- $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1 < x^2+y^2 < 4\}$

$\partial\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1 = x^2+y^2,\ x^2+y^2<4\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1<x^2+y^2,\ x^2+y^2=4\}$

$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=4\}$

- $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\geq 1,\ x^2+y^2\leq 4,\ y \geq x\}$

$\partial\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4,\ y\geq x\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\geq 1,\ x^2+y^2\geq 4,\ y=x\}$



PROP Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, $x_0 \in \Omega$ e $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$.
Valgono i seguenti fatti

1) se $f$ è differenziabile in $x_0$, allora $f$ è continua in $x_0$
2) se $f$ è differenziabile in $x_0$, allora $\forall v \in \mathbb{R}^n \ \exists \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ ($v$ vettore) e si ha che $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = df(x_0)(v)$.
In particolare se $v = e_i$, allora $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \overset{*}{=} df(x_0)(e_i)$.
Quindi se $v = (v_1, \dots, v_n)$ allora
$v = e_1 v_1 + \dots + e_n v_n$ e $df(x_0)(v) = \underbrace{df(x_0)}_{\text{appl. lin.}}(v_1 e_1 + \dots + v_n e_n) =$

$L$ è lineare se $\to L(a+b) = L(a) + L(b)$
$\to L(\lambda a) = \lambda L(a)$

$= df(x_0)(v_1 e_1) + \dots + df(x_0)(v_n e_n) =$
$= \underset{\in \mathbb{R}}{v_1}\, \underset{\in \mathbb{R}^n}{df(x_0)(e_1)} + \dots + v_n\, df(x_0)(e_n) =$
$\overset{*}{=} v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + \dots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)$

In particolare se $m = 1$, allora
$df(x_0)(v) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right) \cdot (v_1, \dots, v_n) =$
$= \nabla f(x_0)(v)$

$L(x - x_0) \underset{m=1}{=} \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)$ pr. scalare

3) se $f$ ammette tutte le derivate parziali in $\Omega$ e sono continue in $\Omega$ e $x_0$, allora $f$ è differenziabile in $x_0$.

OSS Se $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ è differenziabile in $x_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ allora esiste $df(x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
Se in $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ consideriamo le basi canoniche, allora a $df(x_0)$ si associa una matrice $m \times n$ detta Jacobiana (Jacobi) di $f$ in $x_0$ denotata con $J_f(x_0)$

$f = (f_1, \dots, f_m)$
$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$
$f_1 \dots f_m \ \Omega \to \mathbb{R}$ componenti

$$J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x = (x_1, \dots, x_n)$
$df(x_0)(x) = J_f(x_0) \cdot x = \underset{m \times n}{\left(\equiv\right)} \underset{n \times 1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}}$
$\llcorner m \times 1 \lrcorner$

Nelle dimostrazioni utilizzeremo

$[a,b] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$(g \circ \gamma)'(x) = \nabla g(\gamma(x)) \cdot \gamma'(x)$

DEF. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto e $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$. Diciamo che $f$ è di classe $C^0$ su $\Omega$ se $f$ è continua in $\Omega$.
Diciamo che $f$ è di classe $C^1$ se $f$ ammette tutte le derivate parziali (prime) in $\Omega$ e sono continue in $\Omega$.
Diciamo che $f$ è di classe $C^2$ se $f$ ammette tutte le derivate parziali (seconde) $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_i}$ in $\Omega$ e continue.

Diciamo che $f$ è di classe $C^k$, con $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, se ammette tutte le derivate $k$-esime $\frac{\partial^k f}{\underbrace{\partial x_i \dots \partial x_j}_{k \text{ variabili}}}$ in $\Omega$ e sono continue.

Diciamo che $f$ è di classe $C^\infty$ in $\Omega$ se $f$ è di classe $C^k$ in $\Omega$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

$$C^\infty(\Omega) \subseteq C^k(\Omega) \subseteq C^2(\Omega) \subseteq C^1(\Omega) \subseteq C^0(\Omega)$$

OSS. $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ è di classe $C^k(\Omega)$, allora ogni componente $f_i$ di $f$ è di classe $C^k(\Omega)$, $\forall i = 1, \dots, n$ e viceversa.

## LEMMA di SCHWARZ

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto e $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ una f di classe $C^2$ su $\Omega$. Allora $\forall i, j = 1, \dots, n$ e $\forall x \in \Omega$ si ha che le derivate parziali e miste sono uguali

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

## TEOREMA di WEIERSTRASS

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un compatto non vuoto e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una f continua. Allora $f$ ammette massimo e minimo.
cioè $\exists\, x_n, x_m \in \Omega \,/\, \forall x \in \Omega: f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_n)$

$x_n$ = pt di minimo

$x_m$ = " massimo

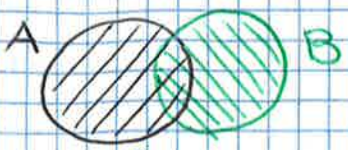
In particolare $f$ è limitata

4) Se $\Omega$ è un aperto misurabile $\Rightarrow$ $m(\partial\Omega)=0$

e  Area di $\partial\Omega=0$

5) Se $A, B$ sono misurabili in $\mathbb{R}^n$, allora

$$m(A\cup B)=m(A)+m(B)-m(A\cap B)$$




$A+B \to$ calcolo 2 volte $A\cap B$, quindi lo sottraggo

In particolare se $m(A\cap B)=0$, allora

$$m(A\cup B)=m(A)+m(B)$$


Se $\Omega$ è un aperto misurabile, allora

$$m(\bar{\Omega})=m(\Omega\cup\partial\Omega)=m(\Omega)+\underbrace{m(\partial\Omega)}_{\emptyset}-\underbrace{m(\underbrace{\Omega\cap\partial\Omega}_{\emptyset})}_{\emptyset}$$

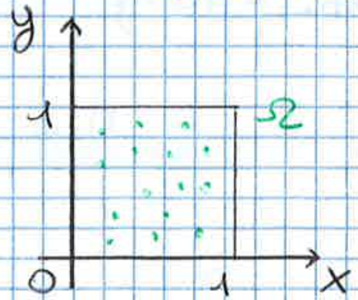
$m(\bar{\Omega})=m(\Omega)$ la misura di un insieme non cambia con o senza bordo

DEF. Sia $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ misurabile. Diciamo che $\Omega$ è **trascurabile** in $\mathbb{R}^n$ se $m_n(\Omega)=0$

TEOREMA Sia $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ limitato non vuoto. Allora $\Omega$ è misurabile se e solo se $\partial\Omega$ è trascurabile

Esempio $\Omega=\{(x,y)\in[0,1]^2 : x,y\in\mathbb{Q}\}$

$[0,1]^2=[0,1]\times[0,1]$




$\partial\Omega=[0,1]\times[0,1]=[0,1]^2$

non è trascurabile

$\Omega$ non è misurabile

$\Downarrow$

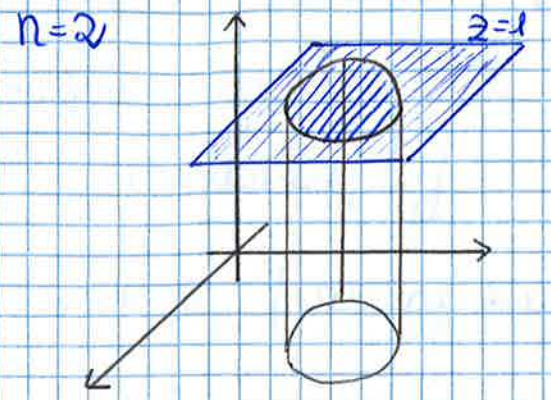
Peano-Jordan

(Per Lebesgue lo è uguale 0)

OSS. Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è misurabile, allora $[e\ f(x)=1]$

$m_n(\Omega) = \int_\Omega 1 \cdot dx$

↳ valore numerico senza unità di misura




$f=1$

$T_f =$

$\int_\Omega 1 \cdot dx = m_3(T_f) = m_2(\Omega) \cdot 1 = m_2(\Omega)$

PROP Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile, $f, g: \Omega \to \mathbb{R}$ continue e limitate e $\lambda \in \mathbb{R}$. Valgono i fatti:

1) $\int_\Omega (f+g) = \int_\Omega f + \int_\Omega g$ additività } linearità
2) $\int_\Omega \lambda f = \lambda \int_\Omega f$ omogeneità
3) se $f \leq g$ su $\Omega \to \int_\Omega f \leq \int_\Omega g$ monotonia
4) $\left| \int_\Omega f \right| < \int_\Omega |f|$

Da 3) segue che se $f \geq 0 \to \int_\Omega f \geq 0$
se $f \leq 0 \to \int_\Omega f \leq 0$

PROP Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ continua e limitata. Valgono i fatti

→ 1) se $\Omega$ è trascurabile $\Rightarrow \int_\Omega f = 0$
2) se $\Omega$ è $A \cup B$, con $A$ e $B$ misurabili e $A \cup B$ trascurabile, allora $\int_\Omega f = \int_A f + \int_B f$

3) se $A \subseteq \Omega$ è misurabile e $f \geq 0$ su $\Omega$ allora $\int_A f \leq \int_\Omega f$

In Analisi I → 2) $\forall c \in [a,b]$ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
3) $f \geq 0$, $\forall c \in [a,b]$ $\int_a^c f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$

# CALCOLO degli INTEGRALI DOPPI

**DEF** Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Diciamo che $\Omega$ è **Y-semplice** (o normale rispetto a x o verticalmente convesso) se $\Omega$ è della forma

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\},\ \text{dove}$$

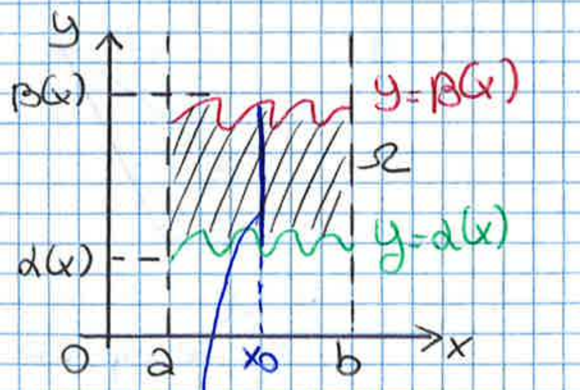
$\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ sono continue e tali che $\alpha(x) \le \beta(x)$
(la y è compresa tra 2 funzioni)

Diciamo che $\Omega$ è **X-semplice** (o normale rispetto a y o orizzontalmente convesso) se $\Omega$ è della forma

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d,\ \gamma(y) \le x \le \delta(y)\},\ \text{dove}$$

$\gamma$ e $\delta : [c,d] \to \mathbb{R}$ sono continue e tali che $\gamma(y) \le \delta(y)$ $\forall y \in [c,d]$

Esempio **Y-semplice**

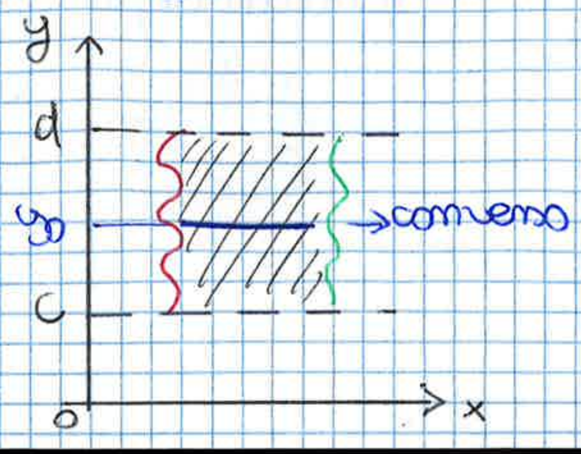



$\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue
$\alpha(x) \le \beta(x)\ \forall x \in [a,b]$

$\Omega$ è anche $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ perché ho incluso gli uguali, però sono trascurabili (bordo)

è un insieme convesso $x = x_0$
dati comunque 2 punti dell'insieme, il segmento che li unisce è contenuto nell'insieme


**X-semplice** (non y semplice)



**TEOREMA** di integrazione sugli insiemi x-y semplici
Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ è l'insieme

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

allora

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[ \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$$ y-semplice

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}$$

allora

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[ \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx \right] dy$$ x-semplice

Se $\Omega$ è sia x sia y semplice posso usare quella che voglio

Prima risolvo questo integrale
x = variabile, y = costante

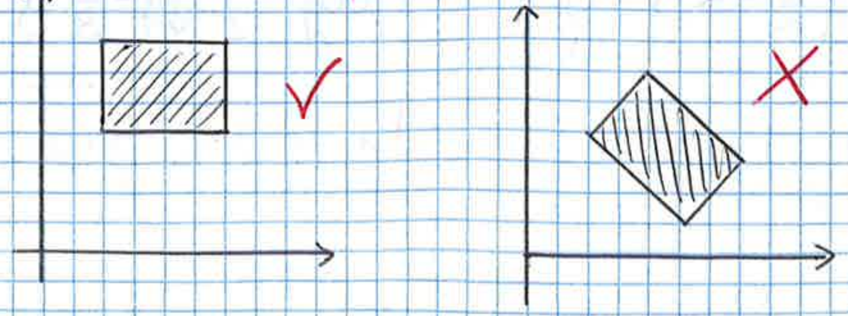
OSS. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è un rettangolo con lati // agli assi coordinati x e y, cioè se $\Omega = [a,b] \times [c,d]$, e se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è il prodotto di 2 f continue, una della sola variabile di x, l'altra di y definite rispettivamente su $[a,b]$ e $[c,d]$, cioè

$$f(x,y) = f_1(x) f_2(y) \quad \text{con} \quad f_1 : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad f_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$$

continue e limitate

$$\Rightarrow \int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_{[a,b]\times[c,d]} f_1(x) f_2(y)\,dx\,dy =$$

$$= \left( \int_a^b f_1(x)\,dx \right) \left( \int_c^d f_2(y)\,dy \right)$$ o con le formule di prima



**TEOREMA** del cambiamento di variabile negli integrali doppi: siano $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^2$ aperti e misurabili, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una f continua e limitata e $\Phi : \Omega' \to \Omega$ una f soddisfacente le seguenti ipotesi

1) $\Phi$ è biettiva (suriettiva)*
2) $\Phi$ è di classe $C^1$ in $\Omega'$ e $\forall (u,t) \in \Omega'$ si ha che $\det J_\Phi (u,t) \neq 0$

allora

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\Omega'} f(\Phi(u,t)) \left|\det J_\Phi (u,t)\right| du\,dt$$

**FORMULA di CAMBIAMENTO di VARIABILE negli INTEGRALI DOPPI**

Simile alla formula di analisi I

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,dt \qquad x = \varphi(t)$$

$\varphi$ derivabile

$dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)\,dt$

$a \mapsto \alpha \quad \varphi(\alpha) = a$

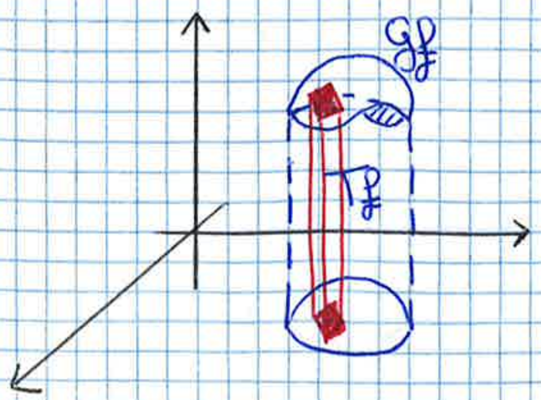
$b \mapsto \beta \quad \varphi(\beta) = b$

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int f(\Phi(u,t)) \det J_\Phi (u,t)\,du,dt$$

$(x,y) = \Phi(u,t)$
cambio le variabili

$\Omega \to \Omega' : \Phi(\Omega') = \Omega$*

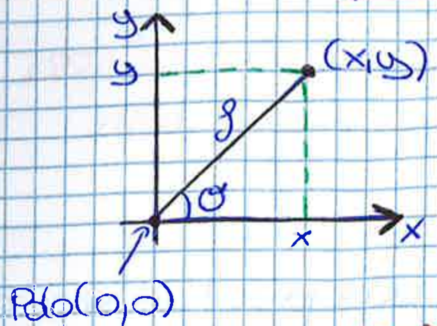
$dx\,dy \mapsto \left|\det J_\Phi (u,t)\right| du\,dt$




Prendiamo in $\Omega$ aree infinitesime sommiamo i contributi

# CAMBIAMENTO di COORDINATE NOTEVOLI NEL PIANO

1) coordinate **polari**




$\rho$ = distanza di $(x,y)$ dal polo

$\theta$ = angolo

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

con polo (0,0) $\Phi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$

$$\Phi : [0,+\infty)\times[0;2\pi] \to \mathbb{R}^2$$

$[-\pi, \pi]$ ampiezza $2\pi$

In generale se $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, la funzione $\Phi$ del cambiamento di coordinate polari con polo $(x_0,y_0)$ è

$$\Phi : [0;+\infty)\times[0;2\pi] \to \mathbb{R}^2,$$

con polo $(x_0,y_0)$ $\Phi(\rho,\theta) = (\underset{\text{cost}}{x_0} + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta)$

$$J_\Phi(\rho,\theta) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow x \\ \leftarrow y \end{array} \end{array}$$

$\rho \geq 0$

$$|\det J_\Phi(\rho,\theta)| = |\rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta| = |\rho| = \rho$$

<u>OSS</u> $\rho = 0 \to \Phi(\rho,\theta) = (0,0) =$ polo

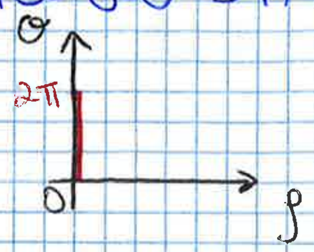
$\Phi$ quindi non è iniettiva (non valgono le ipotesi ma *

$\forall\,\theta$ trovo il polo

ma

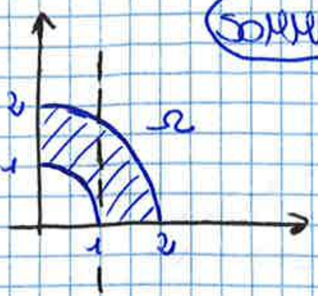
$\det J_\Phi(\rho,\theta) = 0$

Per $\rho = 0 \to A = \{0\}\times[0,2\pi]$




con $m(A) = 0$

SOMMA

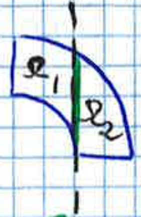



y semplice? $0 < x < 2$

$\quad < y < \quad$ (non si può fare)

$$\begin{cases} y = \sqrt{1-x^2} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \text{esprimibile } y = \sqrt{4-x^2}$$

$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$




$\Omega_1$ = y semplice
$\Omega_2$ = y semplice

$m(\Omega_1 + \Omega_2) = 0$

$$\int_\Omega f = \int_{\Omega_1} f + \int_{\Omega_2} f$$

x semplice? idem a y-semplice

DIFFERENZA

$\Omega =$ 


$$\int_\Omega f = \int_A f - \int_B f$$

Posso applicare il cambiamento di variabile

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\sin\theta \end{aligned} \Rightarrow x^2+y^2 = \rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta = \rho^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \rho^2$$

$$x^2+y^2 = \rho^2$$

Passiamo in coordinate polari centrate in $(0,0)$

$$\Phi: \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \rho \geq 0 \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$|\det J_\Phi(\rho,\theta)| = \rho \quad \text{non nulla}$$

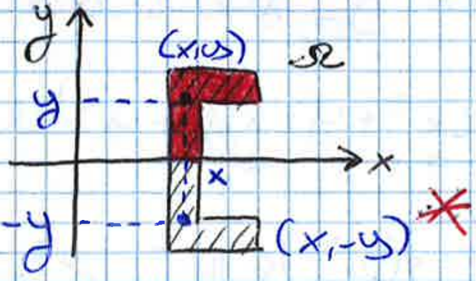
$$\int_\Omega \frac{xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_{\Omega'} \frac{\rho\cos\theta\,\rho\sin\theta}{\rho^2} \cdot |\det J_\Phi(\rho,\theta)|\,d\rho\,d\theta =$$

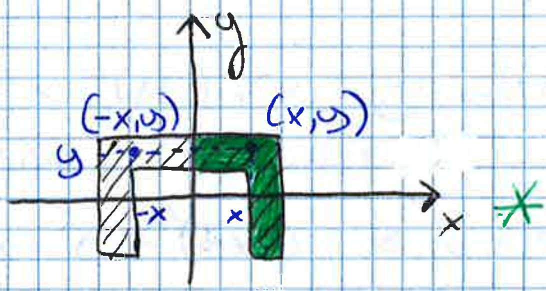
$$= \int_{\Omega'} \rho\cos\theta\sin\theta\,d\rho\,d\theta$$

Oss. Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ misurabile e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ continua e limitata hanno una simmetria rispetto allo stesso asse cartesiano allora $\int_\Omega f(x,y)\, dx\, dy$ si può calcolare in modo più semplice.

Ricordiamo: $\Omega$ è simmetrico rispetto all'asse $x$ se $\forall (x,y) \in \Omega$ anche $(x,-y) \in \Omega$.

$\Omega$ è simmetrico rispetto all'asse $y$ se $\forall (x,y) \in \Omega$ anche $(-x,y) \in \Omega$.




Casi: 1) $\Omega$ simmetrico rispetto all'asse X e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ è tale che $\forall (x,y) \in \Omega$: $f(x,-y) = f(x,y)$

pari in An I

allora $\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = 2\int_{\Omega'} f(x,y)\,dx,dy$,

dove $\Omega' = \{(x,y) \in \Omega : y \geq 0\}$ oppure $(y \leq 0)$ *

(metà dominio potrebbe far sì che la $f$ sia $x-y$ semplice)

2) $\Omega$ simmetrico rispetto all'asse X [ORIGINE] e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ è tale che $\forall (x,y) \in \Omega$: $f(x,-y) = -f(x,y)$

dispari in An II

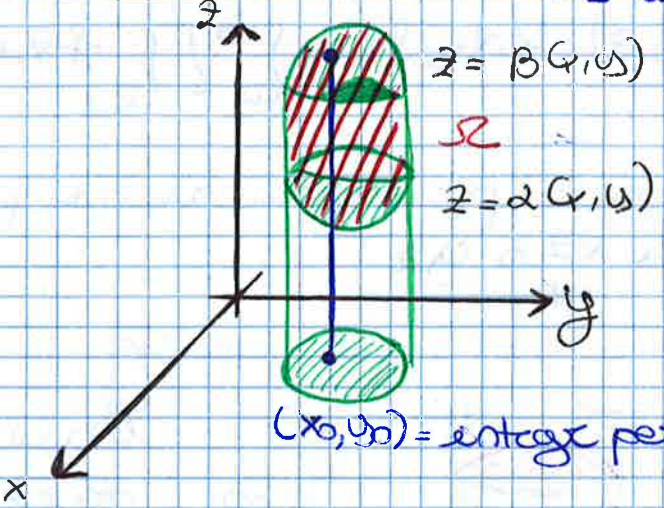
allora $\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = 0$

# CALCOLO degli INTEGRALI TRIPLI

## INTEGRAZIONE per FILI paralleli all'asse z

Sia $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\ \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y)\}$,
dove $D$ è un compatto e $\alpha, \beta : D \to \mathbb{R}$ sono due funzioni continue tali che $\alpha(x,y) \le \beta(x,y)$, $\forall (x,y) \in D$.
Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è continua, allora

$$\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_D \left[ \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right] dx\,dy$$



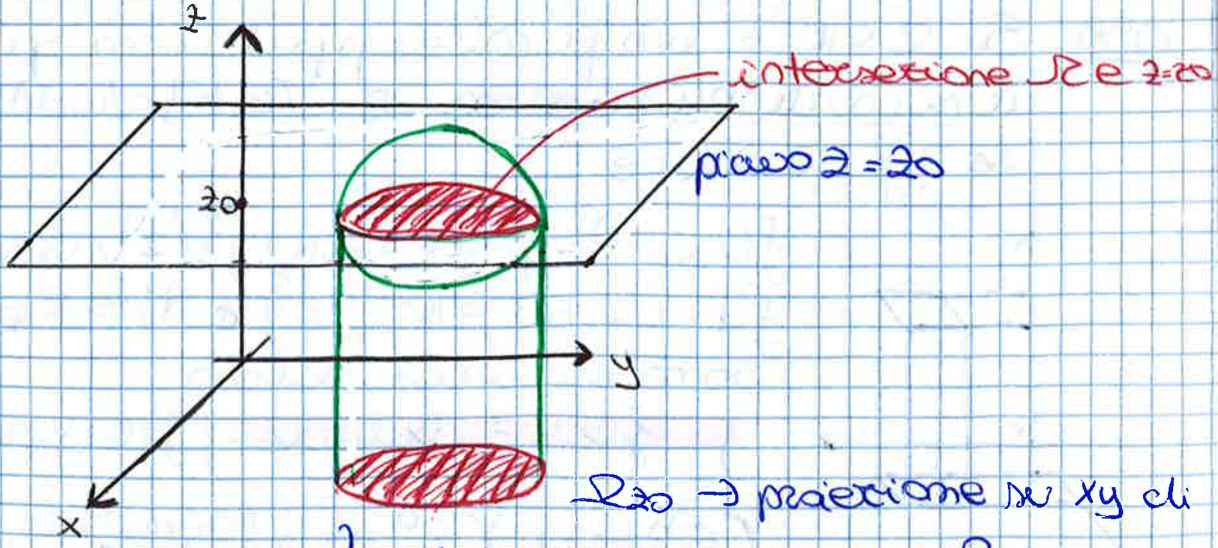

$(x_0, y_0)$ = integr. per fili // asse z

Analoghe formule valgono per fili // asse x, o asse y.

## INTEGRAZIONE per STRATI paralleli al piano xy

DEF Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitato e $z_0 \in \mathbb{R}$. Poniamo

$$\Omega_{z_0} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z_0) \in \Omega\}$$




se $\Omega \cap \{z = z_0\} = \emptyset$ allora $\Omega_{z_0} = \emptyset$

Esempio. Calcolare $\int_\Omega (x^2+y^2)z\,dx\,dy\,dz$ dove

$$\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ z\geq 0\}$$

$$\begin{cases} z^2 \leq 1-x^2-y^2 \\ 1-x^2-y^2\geq 0\end{cases} \qquad 0\leq z$$

$$\begin{cases} -\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2} \\ 1-x^2-y^2 \geq 0 \\ z\geq 0\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 0\leq z\leq \sqrt{1-x^2-y^2} \\ x^2+y^2\leq 1\end{cases}$$

$$\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2+y^2\leq 1}_{D},\ 0\leq z\leq\sqrt{1-x^2-y^2}\}$$

$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$

Allora $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in D,\ 0\leq z\leq\sqrt{1-x^2-y^2}\}$

$0\leq\sqrt{1-x^2-y^2}$ ✓

$\Omega$ va bene per integrare per fili paralleli all'asse $z$

$$\int_\Omega (x^2+y^2)z\,dx\,dy\,dz = \int_D\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}(x^2+y^2)z\,dz\right]dx\,dy =$$

fa pensare al cambiamento di variabili

$$= \int_D (x^2+y^2)\left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}dx\,dy = \frac{1}{2}\int_D (x^2+y^2)(1-x^2-y^2-0)\,dx\,dy =$$

Passiamo in coordinate polari nel piano $xy$

$$\Phi : \begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta\end{cases} \quad \rho\geq 0,\ 0\leq\theta\leq 2\pi,\ |\det(J_\Phi(\rho,\theta))| = \rho$$

$$= \frac{1}{2}\int_{D'} \rho^2(1-\rho^2)\rho\,d\rho\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{D'}(\rho^3-\rho^5)\,d\rho\,d\theta = \rightarrow$$

$D'\in\mathbb{R}^2 \,/\, \Phi(D') = D$

# TEOREMA del CAMBIAMENTO di VARIABILE per integrali tripli

Siano $\Omega, \Omega' \in \mathbb{R}^3$ aperti limitati non vuoti, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua e limitata e $\Phi: \Omega' \to \Omega$ una funzione
1) biettiva
2) di classe $C^1$ con $\det J_\Phi(u,v,w) \neq 0$

$$\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'} f(\Phi(u,v,w))\,|\det J_\Phi(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$

1) coordinate **polari/sferiche**

$$\Phi: [0,+\infty) \times [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$$

$$\Phi(\rho,\theta,\varphi) = (x_0 + \rho\sin\theta\cos\varphi,\ y_0 + \rho\sin\theta\sin\varphi,\ z_0 + \rho\cos\theta)$$

se $(x_0,y_0,z_0) = (0,0,0)$

$$\Phi(\rho,\theta,\varphi) = (\rho\sin\theta\cos\varphi,\ \rho\sin\theta\sin\varphi,\ \rho\cos\theta)$$

$$J_\Phi(\rho,\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$|\det J_\Phi(\rho,\theta,\varphi)| = \rho^2\sin\theta$$

$$x^2+y^2+z^2 = \rho^2$$

2) coordinate **cilindriche** (per coni, cilindri, paraboloidi)

$$\Phi: [0,+\infty) \times [0,2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

$$\Phi(\rho,\theta,z) = (x_0 + \rho\cos\theta,\ y_0 + \rho\sin\theta,\ z)$$

se $(x_0,y_0,z_0) = (0,0,0)$

$$\Phi(\rho,\theta,z) = (\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta,\ z)$$

$$J_\Phi(\rho,\theta,z) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\det J_\Phi(\rho,\theta,z)| = \rho$$

059. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ misurabile e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ continua e limitata. Se $\Omega$ e $f$ presentano una simmetria rispetto ad uno stesso piano cartesiano, $xy$, $xz$, $yz$, allora l'integrale di $f$ su $\Omega$ può essere calcolato in modo più semplice:

1) $\Omega$ simmetrico rispetto $xy$ e $\forall (x,y,z) \in \Omega$ si ha $f(x,y,-z) = f(x,y,z)$

$$\int_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = 2\int_{\Omega'} f(x,y,z)\,dxdydz$$

$\Omega' = \{(x,y,z) \in \Omega : z \geq 0\}$ oppure $z \leq 0$

2) $\Omega$ simmetrico rispetto $xy$ e $\forall$ $f(x,y,-z) = -f(x,y,z)$

$$\int_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = 0$$

3) $\Omega$ simmetrico rispetto $xz$ e $\forall$ $f(x,-y,z) = f(x,y,z)$

$$\int_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = 2\int_{\Omega'} f(x,y,z)\,dxdydz$$

con $y \geq 0$ o $y \leq 0$

4) $\Omega$ simmetrico rispetto $xz$ e $\forall$ $f(x,-y,z) = -f(x,y,z)$

$$\int_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = 0$$

5) $\Omega$ simmetrico rispetto $yz$ e $\forall$ $f(-x,y,z) = f(x,y,z)$

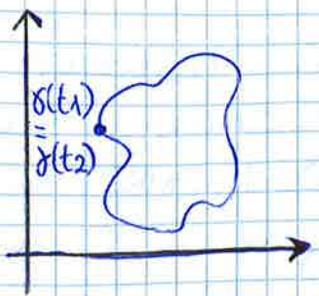
$$\int_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = 2\int_{\Omega'} f(x,y,z)\,dxdydz$$

con $x \geq 0$ o $x \leq 0$

6) $\Omega$ simmetrico rispetto $yz$ e $\forall$ $f(-x,y,z) = -f(x,y,z)$

$$\int_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = 0$$

DEF.

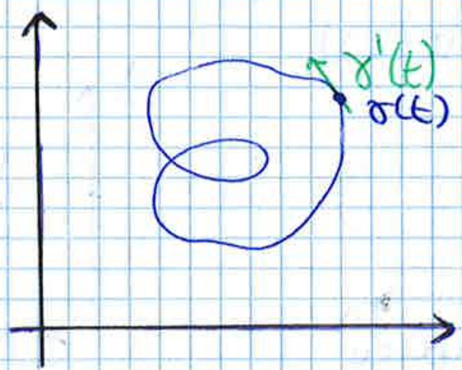



$\gamma$ è chiusa e semplice

Sia $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva parametrica, diciamo che $\gamma$ è **CHIUSA** se $\gamma(a)=\gamma(b)$

DEF. Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ una curva parametrica derivabile. Diciamo che $\gamma$ è **REGOLARE** se $\gamma'$ è continua e $\gamma'(t) \neq 0$ per ogni $t$ interno a $I$.

vettore con tutti gli elementi 0




$\gamma(t)$ = punto
$\gamma'(t)$ = velocità

DEF. Sia $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva parametrica, diciamo che $\gamma$ è **REGOLARE A TRATTI** se

1) $\gamma$ è derivabile con derivata continua in $[a,b]$ tranne che in un numero finito di punti
2) nei punti $t$ in cui $\gamma$ è derivabile si ha che $\gamma'(t) \neq 0$ tranne che in un n° finito di punti
3) nei punti in cui $\gamma$ non è derivabile $\exists$ però le derivate derivabili


in $a$-$t_1$ regolare
$t_1$-$t_2$
$t_2$-$t_3$
ecc

4) $\gamma$ e $\eta$ inducono sul loro comune sostegno lo stesso orientamento o verso di percorrenza.
"parametrizzano la stessa linea"

Ne segue che se $\gamma$ e $\eta$ sono equivalenti sono 2 parametrizzazione della stessa linea in $\mathbb{R}^n$

PROP. "Curve **antiequivalenti**"
Siano $\gamma, \eta, \alpha$ come nella def. precedente tranne che per il segno di $\alpha'$ e supponiamo che

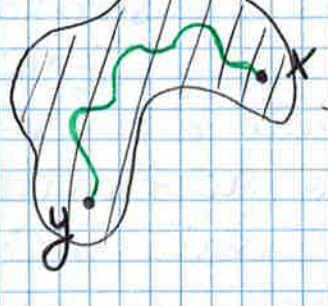
$$\forall \tau \in J: \alpha'(\tau)<0$$

allora valgono ancora 1), 2), 3) della proposizione precedente e $\gamma$ e $\eta$ inducono sul loro comune sostegno versi di percorrenza opposti.

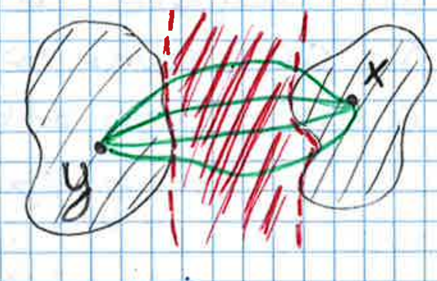
In tal caso diremo che $\gamma$ e $\eta$ sono 2 parametrizzazioni della stessa linea che però inducono versi di percorrenza opposti.

* In particolare $\gamma$ è regolare se e solo se $\eta$ è regolare

DEF. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, diciamo che $\Omega$ è **CONNESSO PER ARCHI** se $\forall x, y \in \Omega$ esiste una curva parametrica $\gamma: [a,b] \to \Omega$ tale che $\gamma(a)=x$ e $\gamma(b)=y$.




$\Omega$ connesso per archi




$\Omega$ non connesso per archi

# INTEGRALI CURVILINEI di II SPECIE

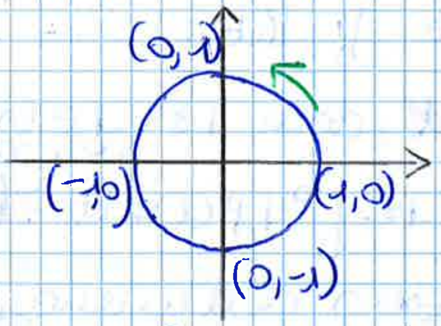
Detti anche integrali di linea.

DEF. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo e $\gamma: [a,b] \to \Omega$ una curva parametrica semplice e regolare. Si chiama integrale curvilineo di **II specie** di $F$ lungo $\gamma$ il numero reale

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

↳ o $dT$

Esempio. Calcolare l'integrale di linea del campo $F(x,y) = (y,\ x^2+y^2)$ lungo la curva $\gamma$ che parametrizza la circonferenza di centro $O(0,0)$ e raggio $1$ a partire da $(1,0)$, immaginando su di essa un verso di percorrenza antiorario.




**CIRCONFERENZA**

$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$, con $R>0$

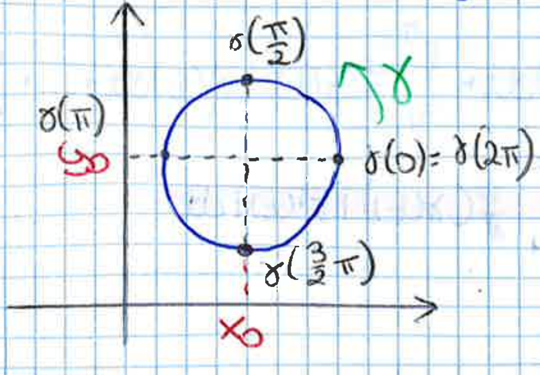
ANTIORARIO $\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

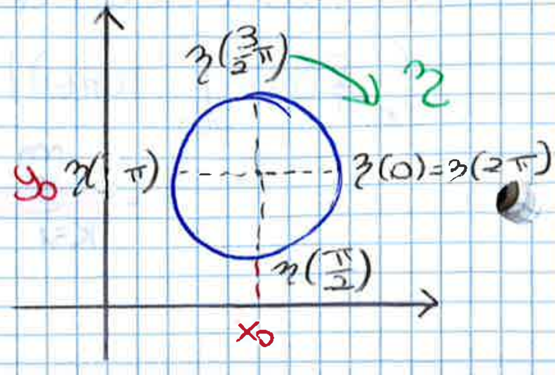
$\gamma(t) = (x_0 + R\cos t,\ y_0 + R\sin t)$

ORARIO $\eta: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$\eta(t) = (x_0 + R\cos t,\ y_0 - R\sin t)$

Provo con $x_0 = 0$ e $x_0 = \frac{\pi}{2}$ e trovo il verso di percorrenza



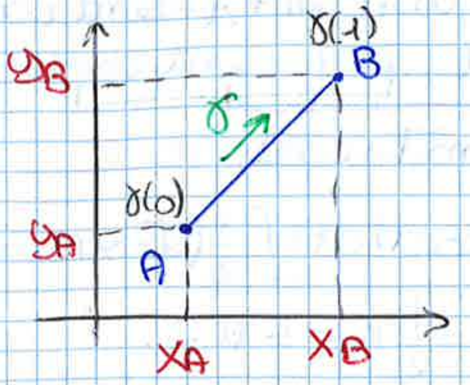



# SEGMENTO

$A(x_A, y_A)$
$B(x_B, y_B)$
da A a B

$\gamma\ [0,1] \to \mathbb{R}^2$ $\qquad \gamma(t) = (x_A + t(x_B - x_A), y_A + t(y_B - y_A))$

Infatti




con $x_A < x_B$
$y_A < y_B$

$$\begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = x - x_A / x_B - x_A \\ t = y - y_A / y_B - y_A \end{cases} \to \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}$$

$\gamma(0) = (x_A, y_A) \Rightarrow A$
$\gamma(1) = (x_B, y_B) \Rightarrow B$

$t = 0 \to x_A$
$t = 1 \to x_B$ $\qquad 0 \leq t \leq 1$

derivata $x_B - x_A \to [0,1] \to [x_A, x_B]$

$A(x_A, y_A, z_A)$
$B(x_B, y_B, z_B)$

$\gamma\ [0,1] \to \mathbb{R}^3$ $\qquad \gamma(t) = (x_A + t(x_B - x_A), y_A + t(y_B - y_A), z_A + t(z_B - z_A))$

DEF. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo e $\gamma: [a,b] \to \Omega$ una curva parametrica semplice e regolare a tratti.
Conformemente alla definizione di curva regolare a tratti, siano $a = t_0, t_1, \dots, t_m = b$ tale che $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ è regolare $\forall k = 1, 2, \dots, m$
Si chiama integrale di linea lungo $\gamma$ di $F$ di II specie il numero reale $\int_\gamma F \cdot dP = \int_{t_0}^{t_1} F(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt + \dots + \int_{t_{m-1}}^{t_m} F(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt$

$$\int_\gamma F \cdot dP = \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

## BREVI RICHIAMI sulle SUPERFICI PARAMETRICHE

DEF Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto connesso per archi, si chiama superficie parametrica (in $\mathbb{R}^3$) una funzione continua $\sigma: A \to \mathbb{R}^3$. Si chiama sostegno di $\sigma$ l'immagine di $\sigma$.

$$\Sigma = \sigma(A) = \{\sigma(u,v) \in A\}$$

Diciamo che $\sigma$ è semplice se è iniettiva.
Diciamo che $\sigma$ è regolare se $\sigma$ è di classe $C^1$ in $A$ e la matrice Jacobiana di $\sigma$ in $(u,v)$ $J\sigma(u,v)$ ha rango massimo, cioè 2, $\forall (u,v) \in A$.

$$J\sigma(u,v) \in \mathbb{R}^{3,2}$$

Si chiama calotta regolare la restrizione di una superficie parametrica semplice e regolare $\sigma$ ad un compatto $K \subseteq A$ tale che $\partial K$ (bordo) sia il sostegno di una curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti.

OSS. $\sigma: A \to \mathbb{R}^3$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

$$J\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \sigma_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \sigma_2}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \sigma_3}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial \sigma}{u}(u,v), \frac{\partial \sigma}{v}(u,v) \right)$$

sono vettori di $\mathbb{R}^3$ l. indipendenti $\iff \operatorname{rg} J\sigma(u,v) = 2$

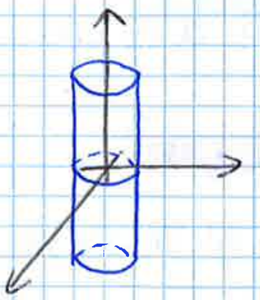
PROP. Siano $\sigma$, $\ell$ e $\alpha$ come nella definizione precedente tranne che per il segno di $\det J_\alpha$ e supponiamo che $\det J_\alpha(x,y)<0$ $\forall (x,y)\in B$. Allora $\sigma$ e $\ell$ hanno lo stesso segno ma inducono su di esso versi di attraversamento opposti.

Esempi. (1) $A=\mathbb{R}\times(0,2\pi)$ $\sigma: A\to\mathbb{R}^3$, $\sigma(u,v)=(\rho\cos v,\rho\sin v,u)$
dove $\rho>0$ fissato
Sostegno di $\sigma$ $\Sigma=\sigma(A)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:$

$(x,y,z)=\sigma(u,v),\ (u,v)\in A\}$

$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\quad x=\rho\cos v$
$y=\rho\sin v$
$z=u\ ,\ u\in\mathbb{R},\ 0<v<2\pi\}$

$x^2+y^2=\rho^2\cos^2 v+\rho^2\sin^2 v=\rho^2$



$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \underbrace{x^2+y^2=\rho^2}_{\text{cilindro in }\mathbb{R}^3}\}\setminus\{(\rho,0,z)\ z\in\mathbb{R}\}$

$v=0,2\pi\Rightarrow(x,y,z)=(\rho,0,z)$ *

$J_\sigma(u,v)=\begin{pmatrix}0&-\rho\sin v\\0&\rho\cos v\\1&0\end{pmatrix}$ rango $=2$

(2) $A=(0,\pi)\times(0,2\pi)$, $\rho>0$, $\sigma: A\to\mathbb{R}^3$
$\sigma(u,v)=(\rho\sin u\cos v,\ \rho\sin u\sin v,\ \rho\cos u)$
$u$ → colatitudine misurata dall'asse $z$
$v$ → longitudine "

Sostegno $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: (x,y,z)=\sigma(u,v),(u,v)\in A\}=$

$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \begin{cases}x=\rho\sin u\cos v\\ y=\rho\sin u\sin v\\ z=\rho\cos u\end{cases}$
$0<u<\pi,\ 0<v<2\pi\}=$

$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2=\rho^2\}\setminus\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+z^2=\rho^2,\ x\geq0\}$

④ Esempio di superficie non regolare

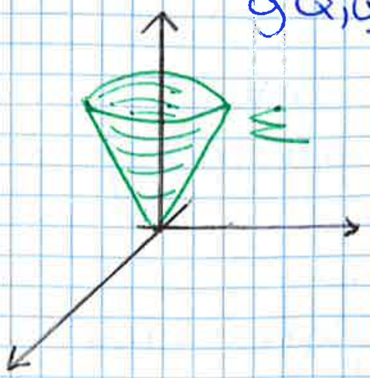
$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$

$\sigma: A\to\mathbb{R}^3,\ \sigma(x,y)=(x,y,\sqrt{x^2+y^2})$

$\sigma$ non è regolare perché non è di classe $C^1$

$\Sigma=\sigma(A)=G_g$

$g(x,y)=\sqrt{x^2+y^2} \to z=\sqrt{x^2+y^2}$




cono vuoto

$\nexists\ \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) \quad \nexists\ \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)$

# INTEGRALI di SUPERFICIE

DEF. Siano $K\subseteq\mathbb{R}^2$ un compatto tale che $\partial K$ è il sostegno di una curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti, $\sigma: K\to\mathbb{R}^3$ una calotta regolare. $\Sigma=\sigma(K)$ il sostegno di $\sigma$ e $f:\Sigma\to\mathbb{R}$ continua. Si chiama **integrale superficiale** di $f$ su $\sigma$ (o $\Sigma$) il n° reale

$$\int_\sigma f=\int_K f(\sigma(u,v))\,|N(u,v)|\,du\,dv$$

dove $N(u,v)=\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)$

è un doppio integrale, si indica $\int_\Sigma f,\ \int_\sigma f\,d\sigma,\ \int_\Sigma f\,d\sigma$

Se $f=1$ su $\Sigma$, allora $\int_\sigma f=\int_\sigma 1=A_\Sigma$ **area** di $\Sigma$

OSS Siano $A\subseteq\mathbb{R}^2$ un aperto connesso per archi, $K\subseteq A$ un compatto tale che $\partial K$ è il sostegno di una curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti, $g: A\to\mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1$ e $\Sigma=G_{g|K}=$

xy $=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=g(x,y),\ (x,y)\in K\}$

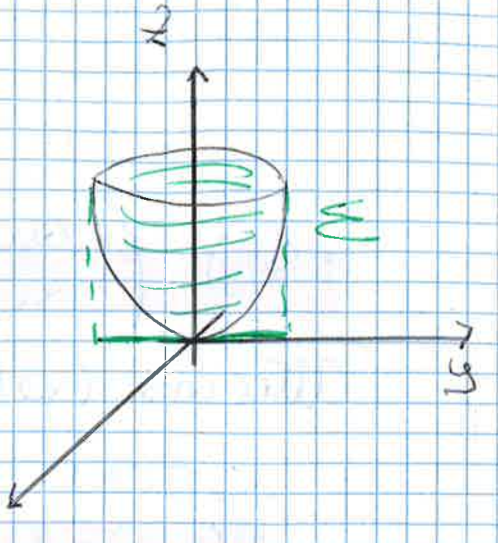
Quindi $\Sigma=\sigma(K)$, dove $\sigma: K\to\mathbb{R}^3$ e

$\sigma(x,y)=(x,y,g(x,y))$

Se $g(x,y)$ per esempio $g(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$,

$K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 8\}$, allora

$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=x, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=y$




$A_\Sigma = \int_K \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy =$

coordinate polari

$= \int_{K'} \sqrt{1+\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta$

$K'=[0,\sqrt{8}]\times[0,2\pi]$

$= \left(\int_0^{\sqrt{8}} \rho(1+\rho^2)^{\frac{1}{2}}\,d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} 1\cdot d\theta\right) =$

$= 2\pi\left[\frac{1}{3}(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{8}} = \frac{2}{3}\pi(27-1) = \frac{52}{3}\pi$

Esempio $\int_\Sigma z^2\,d\sigma$, dove

$\Sigma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2\leq 1\}$

l'uguaglianza ci dice che è un integrale di superficie

Parametrizzare la superficie $\Sigma$

$\Sigma = G_g,\ g(x,y)=\sqrt{x^2+y^2},\ (x,y)\in K$

$K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$

$\Sigma=\sigma(K),\ \sigma(x,y)=(x,y,\sqrt{x^2+y^2})$

$\int_\Sigma z^2\,d\sigma = \int_\Sigma f(\sigma(x,y))\|N(x,y)\|\,dx\,dy$

$f(x,y,z)=z^2$

$N(x,y)=\frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y)\wedge\frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y)$

# FLUSSO di UN CAMPO VETTORIALE

DEF. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto. $F: \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale continuo. $K \subseteq \mathbb{R}^2$ un compatto tale che $\partial K$ è il sostegno di una curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti, $\sigma: K \to \Omega$ una calotta regolare e $\Sigma = \sigma(K)$ il sostegno di $\sigma$, si chiama **flusso** del campo $F$ attraverso $\sigma$ ($\sigma \Sigma$) il n° reale

$$\int_\sigma F \cdot n = \int_K F(\sigma(u,v)) \cdot N(u,v)\, du\, dv,$$

$$N(u,v) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)$$

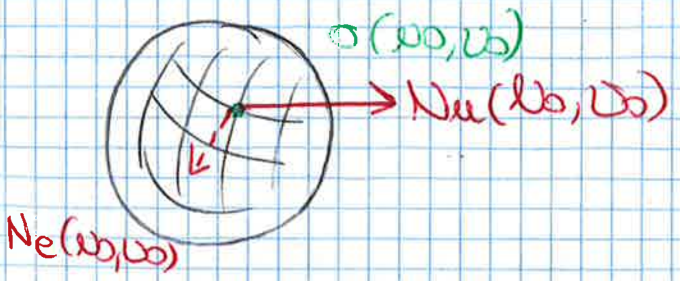
altre notazioni $\int_\Sigma F \cdot n$, $\int_\sigma F \cdot n\, d\sigma$, $\int_\Sigma F \cdot n\, d\sigma$

OSS. $\Sigma = \partial D$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$ compatto con $\mathrm{int}(D) \neq \emptyset$. Può succedere di dover calcolare il flusso entrante o uscente di $F$ da $\Sigma = \partial D$.

Se $N(u,v) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)$ è il vettore normale a $\Sigma = \partial D$ come facciamo a sapere se $N$ è entrante o uscente da $D$ (3 modi)

È sufficiente considerare un qualunque punto $(u_0, v_0)$ interno a $K$, calcolare $\sigma(u_0, v_0)$ e $N(u_0, v_0)$ e vedere se $N$ è entrante o uscente per continuità.

1) GRAFICO - Disegno $\Sigma = \partial D$ e $\sigma(u_0, v_0)$ e in $\sigma(u_0, v_0)$ applico $N(u_0, v_0)$ che è $\perp$ a $\Sigma$. Controllo



Per definizione di integrale di flusso

$$\int_{\Sigma_1} F\cdot n = \int_K F(\sigma_1(x,y))\cdot \underbrace{N_1(x,y)}_{\substack{\text{vettore normale a } \Sigma_1 \text{ in} \\ \sigma_1(x,y) \text{ uscente}}}\,dx\,dy$$

$$N_1(x,y) = \frac{\partial\sigma_1}{\partial x}(x,y)\wedge\frac{\partial\sigma_1}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y), 1\right) = (0,0,1)$$

$$\int_{\Sigma_1} F\cdot n = \int_K F(\sigma_1(x,y))\cdot N_1(x,y)\,dx\,dy = \int_K F(x,y,1)\cdot(0,0,1)\,dx\,dy =$$

$$= \int_K (x,y,1)\cdot(0,0,1)\,dx\,dy = \int_K dx\,dy = \pi$$

Per definizione di integrale di flusso

$$\int_{\Sigma_2} F\cdot n = \int_K F(\sigma_2(x,y))\cdot N_2(x,y)\,dx\,dy$$

$N_2(x,y) = (-2x,-2y,1)$ vettore entrante

$N_2'(x,y) = -N_2(x,y) = (2x,2y,-1)$ vettore uscente

$$\int_{\Sigma_2} F\cdot n = \int_K F(\sigma_2(x,y))\cdot N_2(x,y)\,dx\,dy = \int_K F(x,y,x^2+y^2)\cdot(2x,2y,1)\,dx\,dy =$$

$$= \int_K (x^2+y^2, x^2+y^2)(2x,2y,-1)\,dx\,dy =$$

$$= \int_K \left[2(x^3+y^3)-(x^2+y^2)\right]dx\,dy = \quad \text{coordinate polari}$$

$$= \left(\int_0^{2\pi}(\cos^3\theta+\sin^3\theta)\,d\theta\right)\left(\int_0^1 2\rho^4\,d\rho\right) - \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^1 \rho^3\,d\rho\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\int_{\partial D} F\cdot n = \int_{\Sigma_1} F\cdot n + \int_{\Sigma_2} F\cdot n = \frac{\pi}{2}$$

# TEOREMI di GREEN, STOKES e GAUSS

uguaglianza fra un integrale di linea (circuitazione) e un integrale doppio

uguaglianza fra un integrale di linea (circuitaz.) e un integrale di flusso

uguaglianza fra un integrale di flusso e un integrale triplo

dipendono dall'orientamento indotto dalla parametrizzazione sul sostegno.

## TEOREMA di GREEN

DEF. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto limitato non vuoto tale che $\partial A$ è il sostegno di una curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$. Diciamo che $\partial A$ è **orientato positivamente** se $\gamma$ induce su $\partial A$ un verso di percorrenza **antiorario**. Cioè se percorrendo idealmente $\partial A$ si vedono i punti di $A$ alla propria sinistra.

TEOREMA Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto non vuoto, $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale di classe $C^1$, $F = (f_1, f_2)$, $A \subset \Omega$ un aperto limitato tale che $\partial A \subset \Omega$ è il sostegno di una curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti $\gamma : [a,b] \to \Omega$. Supponiamo che $\partial A$ sia orientato positivamente, allora

$$\oint_{\partial A} F \cdot dP = \int_A \left( \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \right) dx\,dy$$

COROLLARIO Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto limitato tale che $\partial A$ sia il sostegno di una curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti che induca su di esso un verso di percorrenza antiorario, e $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale di classe $C^1$, e $F = (f_1, f_2)$ che soddisfa la condizione

$$\forall (x,y) \in A: \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 1$$

allora l'area di $A$ è

$$m(A) = \oint_{\partial A} F \cdot dP$$

Ne sono un esempio i campi

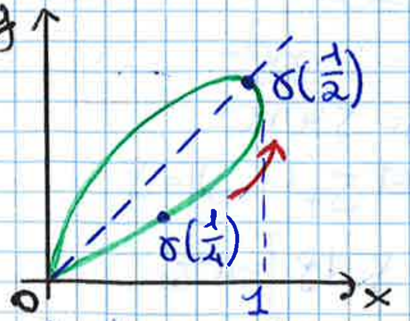
$F(x,y) = (0, x)$

$G(x,y) = (-y, 0)$

$H(x,y) = \left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}\right)$

Esempio. Calcolare l'area della regione di piano delimitata dal sostegno della curva parametrica

$\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^3 - 3t^2 + 2t, t - t^3)$




$\gamma(0) = (0,0) = \gamma(1)$

è una curva chiusa

il verso è antiorario

quindi per il corollario

$F(x,y) = (-y, 0)$

$$m(A) = \oint_\gamma F \cdot dP$$

$$\int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt =$$

$\hookrightarrow F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F(t^3 - 3t^2 + 2t, t - t^3) \cdot (3t^2 - 6t + 2, 1 - 3t^2) =$

$= (-t + t^3, 0)(3t^2 - 6t + 2, 1 - 3t^2) =$

$= (+t^3 - t)(3t^2 - 6t + 2) = 3t^5 - 6t^4 - t^3 + 6t^2 - 2t$

$$= \int_0^1 (3t^5 - 6t^4 - t^3 + 6t^2 - 2t)\,dt = \left[\frac{1}{2}t^6 - \frac{6}{5}t^5 - \frac{1}{4}t^4 + 2t^3 - t^2\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{6}{5} - \frac{1}{4} + 2 - 1 = \frac{1}{20}$$

(in senso orario verrebbe $-\frac{1}{20}$, ma l'$A<0$ è impossibile)

Applichiamo il teorema di Green

$$= \oint_{\partial A_1} F \cdot dP + \oint_{\partial A} F \cdot dP =$$

$$= \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \cancel{\int_{\eta_1} F \cdot dP} + \int_{\gamma_2} F \cdot dP + \cancel{\int_{\eta_2} F \cdot dP} + \int_{\gamma_3} F \cdot dP + \cancel{\int_{\eta_3} F \cdot dP} +$$

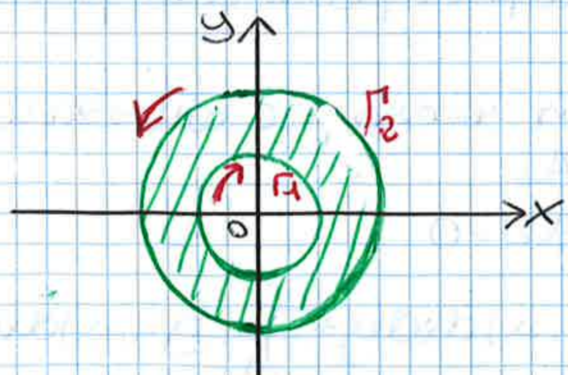
$$+ \int_{\delta_1} F \cdot dP + \cancel{\int_{\lambda_3} F \cdot dP} + \int_{\delta_3} F \cdot dP + \cancel{\int_{\lambda_2} F \cdot dP} + \int_{\delta_2} F \cdot dP + \cancel{\int_{\lambda_1} F \cdot dP} =$$

Per ogni coppia esempio $\int_{\lambda_1} F \cdot dP = -\int_{\eta_1} F \cdot dP$

quindi semplifichiamo

$$= \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP + \int_{\Gamma_3} F \cdot dP = \int_{\partial A} F \cdot dP$$

Esempio. Calcolare l'integrale di linea di $F(x,y) = (x^2y^3, y)$ lungo il bordo di A con
$A: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$ orientato positivamente




Due modi:

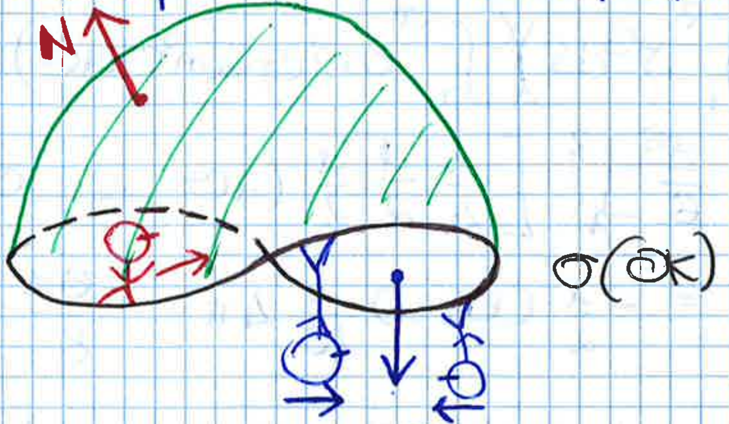
1) Df. $\int_{\partial A} F \cdot dP = \quad \partial A = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP$

2) $F \in C^1 \rightarrow$ teorema di Green

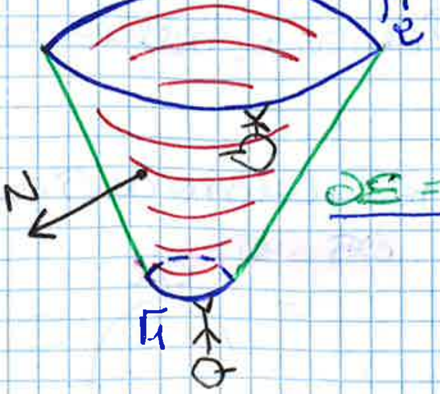
$$\int_{\partial A} F \cdot dP = \int_A \left( \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \right) dx dy =$$

$$= \int_A (0 - 3x^2y^2) dx dy = -3 \int_A x^2 y^2 dx dy$$

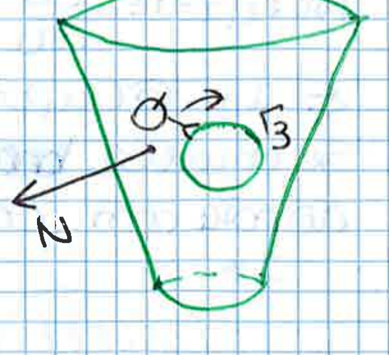
Talvolta, erroneamente, si parla di bordo di $\Sigma$ e si denota $\partial\Sigma$.
Diciamo che $\partial\sigma$ (o $\partial\Sigma$) è **orientato positivamente** se $\sigma(\partial K)$ è orientata in senso **antiorario** rispetto ad un osservatore posto come il vettore normale $N$, ovvero in modo analogo se percorrendo idealmente $\sigma(\partial K)$ appoggiati alla faccia di $\Sigma$ da cui esce il vettore $N$ si vedano i punti di $\Sigma$ alla propria sinistra




OSS. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto limitato connesso per archi tale che $\partial A$ sia l'unione di un numero finito di sostegni a 2 a 2 disgiunti di curve parametriche chiuse semplici e regolari a tratti, $\partial A = C_1 \cup C_2 \dots \cup C_k$, $C_i \cap C_k = \emptyset \ \forall i,j = 1,\dots,k$ $i \neq j$, $K = \bar{A}$, $\sigma: K \to \mathbb{R}^3$ una calotta regolare.
In tal caso $\sigma(\partial K) = \sigma(\partial A) = \sigma(C_1 \cup \dots \cup C_k) =$
$= \sigma(C_1) \cup \dots \cup \sigma(C_k) = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_k$. In tal caso diciamo che $\partial\sigma$ è orientato positivamente se ciascuna delle curve $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ è orientata positivamente nel senso precedente.




$\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$



2) $F \in C^1$, per Stokes

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma$$

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x & 0 & y \end{vmatrix} = (1-0, 0-0, 0-0) = (1,0,0)$$

$$\left(\text{es. } \vec{i}\left(\frac{\partial y}{\partial y} - \frac{\partial 0}{\partial z}\right)\right)$$

parametrizzazione

$\sigma : [0, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3$ $\quad \rho$ = raggio = 1
$\theta$ = latitudine

$\sigma(\theta, \varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$
$\theta$ = colatitudine misurata dall'asse $z$
$\varphi$ = longitudine

$x \geq 0 \quad \sin\theta\cos\theta \geq 0$

$\Sigma(\sigma(K))$, $K : [0, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$N_f(\theta,\varphi) = \frac{\partial\sigma}{\partial\theta}(\theta,\varphi) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}(\theta,\varphi) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = (-\sin^2\theta\cos\varphi, \sin^2\theta\sin\varphi, \cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi + \cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi) =$$

$$= (\sin^2\theta\cos\varphi, \sin^2\theta\sin\varphi, \cos\theta\sin\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\theta)) =$$

$$= (\sin^2\theta\cos\varphi, \sin^2\theta\sin\varphi, \underbrace{\cos\theta\sin\theta}_{\geq 0 \text{ sì}})$$ perché punta in alto

Torniamo a Stokes

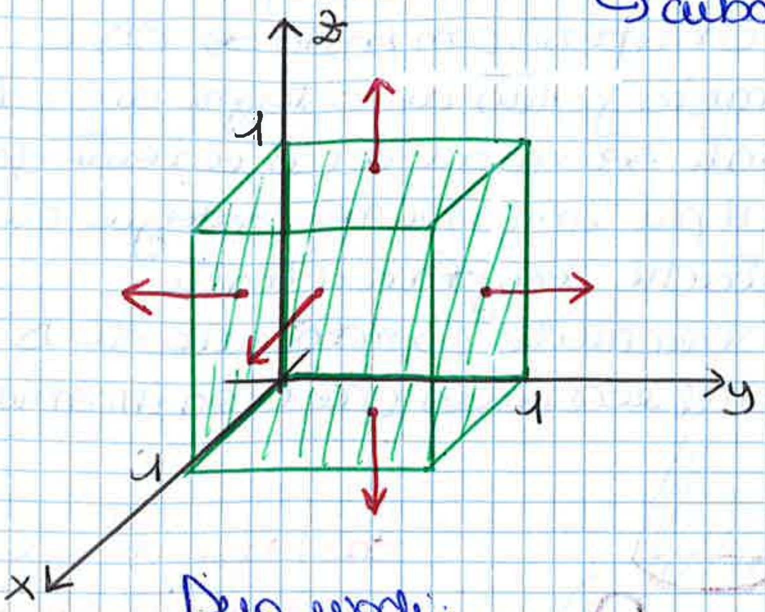
$$= \int_K \operatorname{rot} F(\sigma(\theta,\varphi)) \cdot N(\theta,\varphi)\, d\theta\, d\varphi = \int_K (1,0,0) \cdot (\sin^2\theta\cos\varphi, \sin^2\theta\sin\varphi, \cos\theta\sin\theta)\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \int_K (\sin^2\theta\cos\varphi, 0, 0)\, d\theta\, d\varphi$$ integrale doppio

$$= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\, d\theta\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi\right) = \left[\frac{1}{2}(\theta - \sin\theta\cos\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin\varphi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\right)(1+1) = \frac{\pi}{2}$$

Esempio: Calcolare il flusso uscente di $F(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$ dal bordo $D = [0,1]^3$

$\hookrightarrow$ cubo lato 1




Due modi:

1) Def. $\int_{\partial D} F \cdot n \cdot d\sigma = \sum_{i=1}^{6} \int_{\Sigma_i} F \cdot n \cdot d\sigma$ (6 integrali)

2) se $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$ utilizzo Gauss

$$\int_{\partial D} F \cdot n \, d\sigma = \int_D \operatorname{div} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$\hookrightarrow \operatorname{div} F(x,y,z) = (2x, 2y, 2z) = 2(x+y+z)$

$$= 2\int_D (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$$

$D: \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$

$2\int_D (x+y+z)\,dx\,dy\,dz =$ per fili // all'asse z

$$= 2\int_K \left[\int_0^1 (x+y+z)\,dz\right]dx\,dy = 2\int_K \left[(x+y)z + \frac{1}{2}z^2\right]_0^1 dx\,dy = 2\int_K \left(x+y+\frac{1}{2}\right)dx\,dy$$

$K = [0,1] \times [0,1]$ y-semplice

$$= 2\int_0^1 \left[\int_0^1 \left(x+y+\frac{1}{2}\right)dy\right]dx = 2\int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}y\right]_0^1 dx =$$

$$= 2\int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)dx = 2\int_0^1 (x+1)\,dx = 2\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2}+1\right) = 3$$

# CAMPI VETTORIALI CONSERVATIVI

(Importante per l'orale soprattutto se si hanno sbagliati tutti e 3 i quiz di teoria, e nei quiz dello scritto)

DEF. Nel seguito considereremo $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto e $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale, diciamo che **$F$ è conservativo** se esiste una funzione differenziabile $f: \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(x) = F(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$
In tal caso $f$ è detto **UN potenziale** di $f$ su $\Omega$.
Se $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ essendo $x$ definito

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) \text{ allora}$$

$$\nabla f(x) = F(x) \quad \forall x \in \Omega$$

equivale a

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = f_1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = f_2 \\ \ldots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = f_n \end{cases} \qquad \forall x \in \Omega$$

Un campo è conservativo se ammette almeno un potenziale

$$F = \nabla f = \text{grad } f$$

FISICA II - campo elettrostatico $F = -\nabla f$

OSS. $\forall c \in \mathbb{R}$, $\nabla(f+c) = \nabla f + \underbrace{\nabla c}_{\text{cost}=0} = \nabla f$

Se $F$ è conservativo allora ammette $\infty$ potenziali.
Infatti se $f$ è un potenziale di $F$ su $\Omega$, allora $\forall c \in \mathbb{R}$ anche $f+c$ è un potenziale di $F$ su $\Omega$.
Se $\Omega$ è $\boxed{\text{connesso per archi}}$ questi sono tutti e soli i potenziali di $F$ su $\Omega$

035. Se $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ è un campo vettoriale continuo e radiale, allora $F$ è conservativo.

**DIM.** Proviamo che $\exists\, f: \Omega \to \mathbb{R}$ differenziabile tale che $\nabla f(x) = F(x)$, $\forall x \in \Omega$.

$F$ radiale $\Rightarrow \exists\, \varphi: (a,b) \to \mathbb{R}$ tale che $F(x) = \varphi(\|x\|)\,x$

$F$ continua $\Rightarrow$ $\varphi$ continua $\Rightarrow$ è continua anche la funzione $\{t \mapsto t \cdot \varphi(t)\}$.

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale questa funzione ammette una primitiva su $(a,b)$.

Sia $\Phi: (a,b) \to \mathbb{R}$ una primitiva, cioè $\Phi$ derivabile con $\boxed{\Phi'(t) = t\,\varphi(t)}$, $\forall t \in (a,b)$.

Sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \Phi(\|x\|) \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

Dimostriamo che $f$ è differenziabile in $\Omega$ e che $\nabla f(x) = F(x)$, $\forall x \in \Omega$

Sia $i = 1, \dots, n$. {per proprietà capitolo 2}

Calcoliamo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Phi \circ \|\cdot\|\right)(x) = \Phi'(\|x\|)\frac{\partial \|\ \|}{\partial x_i}(x) \quad *$$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_i^2 + \dots + x_n^2}$$

$x = x_1, \dots, x_n$

$$\frac{\partial \|\ \|}{\partial x_i}(x) = \frac{1 \cdot \cancel{2} x_i}{\cancel{2}\sqrt{x_1^2 \dots + x_i^2 + \dots + x_n^2}}$$ → tutte le altre sono 0

$$\frac{\partial \|\ \|}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_i^2 + \dots + x_n^2}} = \frac{x_i}{\|x\|}$$

$$* = \Phi'(\|x\|) \cdot \frac{x_i}{\|x\|} \quad * = \cancel{\|x\|}\,\varphi(\|x\|) \cdot \frac{x_i}{\cancel{\|x\|}} = \varphi(\|x\|)\, x_i =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \varphi(\|x\|)\, x_i \,, \ \forall i = 1, \dots n, \ \forall x \in \Omega$$

$\varphi$ continua $\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ continue in $\Omega$, $\forall i = 1, \dots n$

$\to f$ è differenziabile in $\Omega$

Infatti, siano $x, y \in \Omega$ con $x \neq y$ e proviamo che $(f-g)(x) = (f-g)(y)$.

Poiché $\Omega$ è connesso per archi $\exists$ una curva parametrica $\gamma : [a,b] \to \Omega$ semplice e regolare a tratti tale che $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$.

Conformemente alla definizione di curva regolare a tratti siano $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = b$ tali che

$\gamma\big|_{[t_{k-1}, t_k]}$ è regolare $\forall\, k = 1, \dots, m$.

In particolare $\gamma$ è derivabile in $[t_{k-1}, t_k]$, $\forall\, k = 1, \dots, m$.

Sia $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita da $\varphi(t) = (f-g)(\gamma(t))$

$$\varphi(t) = [(f-g) \circ \gamma](t)$$

$f, g$ differenziabili $\to$ continue $\Rightarrow f-g$ continua

$\gamma$ continua $\to \varphi = (f-g) \circ \gamma$ è continua

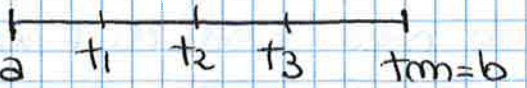
$\gamma$ è derivabile $\forall\, t \neq t_k$, $\forall\, k = 0, \dots, m$

$\Rightarrow \varphi$ è 〃 〃 〃

con $\varphi'(t) = [(f-g) \circ \gamma]'(t) = \underbrace{\nabla(f-g)(\gamma(t))}_{=0} \cdot \gamma'(t) =$

$\Rightarrow \forall\, t \in (t_{k-1}, t_k) \quad \varphi'(t) = 0$

Poiché $\varphi$ è continua in $(t_{k-1}, t_k)$ } per Lagrange $\varphi$ è costante su $[t_{k-1}, t_k]$ $\forall\, k = 1, \dots, m$




Essendo $\varphi$ continua su $[a,b] \to \varphi$ è costante $[a,b]$

In particolare $\varphi(a) = \varphi(b)$

$$(f-g)(x) = (f-g)(\gamma(a)) = \varphi(a) = \varphi(b) = (f-g)(\gamma(b)) = (f-g)(y)$$

Per l'arbitrarietà di $x, y \in \Omega$ risulta che

a caso $\qquad f-g$ è costante su $\Omega$

$\square$

OSS. FISICA II campo elettrostatico

$$F = -\nabla f = \underbrace{\nabla(-f)}_{\text{per analisi}}$$

$$\int_\gamma F \cdot dP = (-f)(\gamma(b)) - (-f)(\gamma(a)) =$$
$$= -f(\gamma(b)) + f(\gamma(a)) =$$
$$= f(\gamma(a)) - f(\gamma(b))$$

**DIM.** Conformemente alla def. di curva regolare a tratti $\exists\ a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = b$ tale che $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ è regolare $\forall\ k = 1, \dots, m$. In particolare $\gamma$ è derivabile con derivata continua in $(t_{k-1}, t_k)$ $\forall k = 1, \dots m$.

$$\int_\gamma F \cdot dP = \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt =$$

sia $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ la funzione
$\varphi(t) = f(\gamma(t)) = (f \circ \gamma)(t)$

$f$ è un potenziale $\to$ $f$ differenziabile $\to$ $f$ continua

$\gamma$ continua $\to$ $\varphi$ è continua

$f$ differenziabile, $\gamma$ è derivabile con $\gamma'$ continua in $\forall t \neq t_k$ $\to$ $\varphi$ è derivabile con derivata continua in ogni $t \neq t_k$, $\forall k = 1, \dots, m$ con

$$\varphi'(t) = (f \circ \gamma)'(t) = \underbrace{\nabla f}_{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

$$\varphi'(t) = F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t) = \sum_{k=1}^{m} \left[\varphi(t)\right]_{t_{k-1}}^{t_k} =$$

$$\sum_{k=1}^{m} \left[\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\right] = \underbrace{\varphi(\cancel{t_1}) - \varphi(t_0)}_{k=1} + \underbrace{\cancel{\varphi(t_2)} - \varphi(\cancel{t_1})}_{k=2} + \underbrace{\cancel{\varphi(t_3)} - \cancel{\varphi(t_2)}}_{k=3} +$$

$$+ \cancel{-} + \varphi(t_m) - \varphi(\cancel{t_{m-1}}) =$$

Esempio. $F(x,y) = (y^2, x)$ $\quad F$ è conservativo?

risposta $f(x,y) = xy + k$

## TEOREMA (di equivalenza)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto CONNESSO per ARCHI e $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo. Allora:

1) $F$ è conservativo
2) per ogni coppia di curve parametriche semplici e regolari $\gamma_1 : [a,b] \to \Omega$ e $\gamma_2 : [c,d] \to \Omega$ tali che $\gamma_1(a) = \gamma_2(c)$ e $\gamma_1(b) = \gamma_2(d)$
   si ha che $\displaystyle\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP$; {non dipende dal cammino}
3) per ogni curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti $\gamma: [a,b] \to \Omega$ si ha che $\displaystyle\oint_{\gamma} F \cdot dP = 0$
   {per una curva chiusa, l'integrale è nullo}

**DIM.** $1) \Leftrightarrow 2)$, $1) \Leftrightarrow 3)$, $2) \Leftrightarrow 3)$

$1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1)$ $\qquad \Rightarrow$ implica

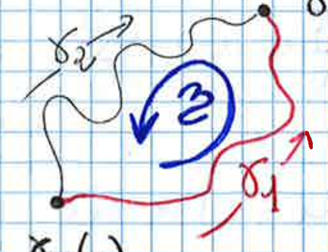
$\boxed{1) \Rightarrow 3) \Rightarrow 2) \Rightarrow 1)}$

Proviamo che $1) \Rightarrow 3)$

Già dimostrato nel teorema sull'integrale di linea di un campo conservativo

Proviamo che $3) \Rightarrow 2)$

$\gamma_1(b) = \gamma_2(d)$




$\gamma_2(c) = \gamma_1(a)$

$\eta$ chiusa $\Rightarrow 3)$ $\qquad \displaystyle\int_{\eta} F \cdot dP = 0$

$\eta(a) = \gamma_1(a)$

$\eta(b+d-c) = \gamma_2(\cancel{b}+\cancel{d}-\cancel{b}-\cancel{d}+c) = \gamma_2(c) = \gamma_1(a)$

$\rightarrow \eta$ è chiusa

Dimostriamo la continuità

$\lim_{t\to b^+} \eta(t) = \eta(b)?$

$\lim_{t\to b^+} \eta(t) = \lim_{t\to b^+} \gamma_2(b+d-t) = \gamma_2(b+d-b) = \gamma_2(d)$

$\gamma_2(d) = \gamma_2(b) = \eta(b)$

$\rightarrow \eta$ è continua

Per 3) $\rightarrow 0 = \int_\eta F\cdot dP = \int_a^b F\cdot(\eta(t)\cdot\eta'(t))\,dt + \int_c^{b+d-c} F\cdot(\eta(t)\cdot\eta'(t))\,dt =$

$= \int_a^b F(\gamma_1(t))\cdot\gamma_1'(t)\,dt + \int_c^{b+d-c} F(\gamma_2(b+d-t)\cdot(-\gamma_2'(b+d-t))\,dt =$

$s = b+d-t$
$ds = -dt$

$\eta(t) = \gamma_2(b+d-t)$

$\eta'(t) = \frac{d}{dt}(\gamma_2(b+d-t)) = \gamma_2'(b+d-t)(-1)$

$= \int_{\gamma_1} F\,dP + \int_d^c F(\gamma_2(s))\cdot(-\gamma_2'(s))(-ds) =$

$= \int_{\gamma_1} F\cdot dP + \int_d^c F\cdot(\gamma_2(s))\cdot\gamma_2'(s)\,ds =$

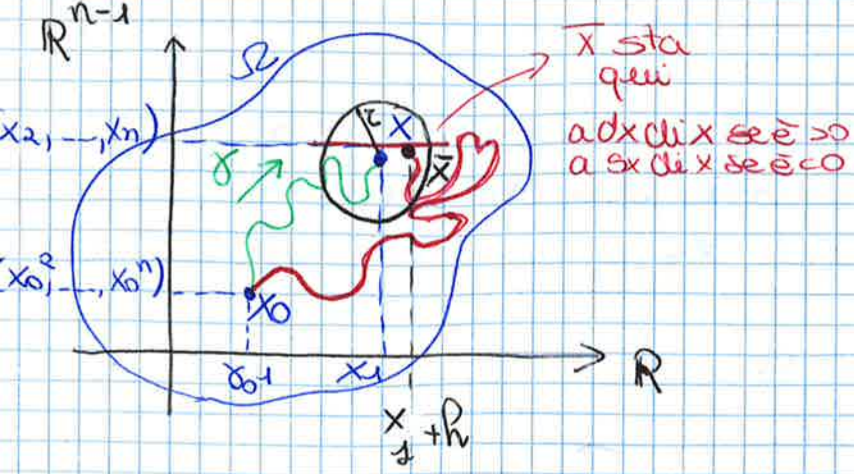
$= \int_{\gamma_1} F\,dP - \int_c^d F(\gamma_2(s))\cdot\gamma_2'(s)\,ds =$

$= \int_{\gamma_1} F\cdot dP - \int_{\gamma_2} F\cdot dP \Rightarrow \int_{\gamma_1} F\cdot dP - \int_{\gamma_2} F\,dP = 0$

$\downarrow$

$\int_{\gamma_1} F\cdot dP = \int_{\gamma_2} F\cdot dP$

$\hookrightarrow$ 2)




$x \in \Omega$, $\Omega$ aperto $\to \exists\, r>0$ tale che $B_r(x) \subseteq \Omega$

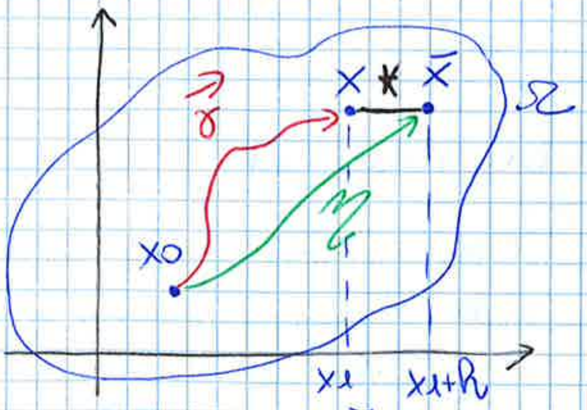
Se $0<h<r$. Allora

$$\bar{x} = (x_1+h, x_2, \dots, x_n) \in B_r(x)$$

quindi $\bar{x} \in \Omega$

Prendiamo una qualunque curva da $x_0$ a $\bar{x}$

(tragitto rosso)




$\eta : [a, b+h] \to \Omega$

$\gamma : [a,b] \to \Omega$

$\gamma(a) = x_0$, $\gamma(b) = x$

$$\eta(t) : \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } a \le t \le b \\ (x_1+t-b, x_2, \dots, x_n) & \text{se } b < t \le b+h \end{cases}$$

Punto iniziale $x$

Punto finale $\bar{x}$ $\qquad x \to \bar{x}$

$\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^n$

$* \; \delta(t_0) = (x_1 + t_0(x_1+h-x_1),\ x_2, x_3, \dots x_n) = (x_1 + t_0 h,\ x_2, \dots x_n)$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(\bar{x})-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\int_0^h f_1(x_1+s, x_2 \ldots x_n)\,ds}{h}$$

per ipotesi $F$ continua $\to f_1$ continua

$s \mapsto (x_1+s, x_2, \ldots x_n)$ continua

$s \longmapsto f_1(x_1+s, x_2 \ldots x_n)$ continua

T.F.C.I (Teo fond calc integr.) $h \to \int_0^h f_1(\ldots)\,ds$ è derivabile

e la sua derivata è

$f_1(x_1+h, x_2, \ldots, x_n)$

$s$

$\lim \to \left[\frac{0}{0}\right]$ applichiamo De l'Hôpital

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f_1(x_1+h, x_2, \ldots x_n)}{1} = \lim_{h\to 0^+} f_1(\underbrace{x_1+h, x_2, \ldots x_n}_{\downarrow\, x})$$

poiché è continua $= f(x)$

Analogamente si ha che

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(\bar{x})-f(x)}{h} = f(x), \text{ cioè}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{x})-f(x)}{h} = f_1(x)$$

Analogamente $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = f_j(x), \forall j$

$F$ cont $\to f_1 \ldots f_n$ cont

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}$ cont in $\Omega \to f$ è diff in $\Omega$

con $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) = (f_1(x) \ldots f_n(x)) = F(x)$ $\forall x \in \Omega$

$\to F$ è conservativo $\to$ i)

$\boxtimes$

OSS. Condizione necessaria dice che

$$F \text{ conservativo} \Rightarrow \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

$$F = (f_1, \_\_, f_n)$$

$\not\Leftarrow$ non vale l'inverso

$F(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ verifica C.N., cioè

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = -\frac{x^2+y^2-y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \frac{x^2+y^2-x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$\rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) \rightarrow$ vale C.N.

F non è conservativo, perché (vedi esercitazione)

$\int_\gamma F \cdot dP = 2\pi \neq 0 \qquad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$
$0 \leq t \leq 2\pi$ ($\gamma$ è chiuso)

Se non vale C.N., allora F NON è conservativo

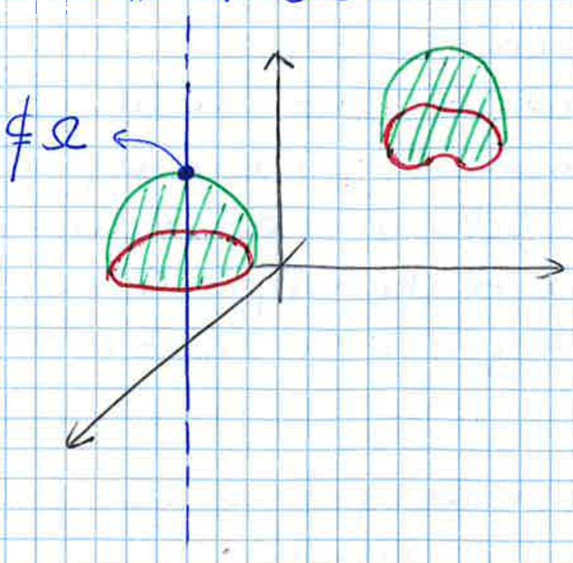
$\downarrow$

$\exists i,j = 1 \_\_ n, \ \exists x \in \Omega : \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \neq \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$

OSS. $n=3$ la C.N. $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad \forall i,j = 1 \_\_ n$
$\forall x \in \Omega$

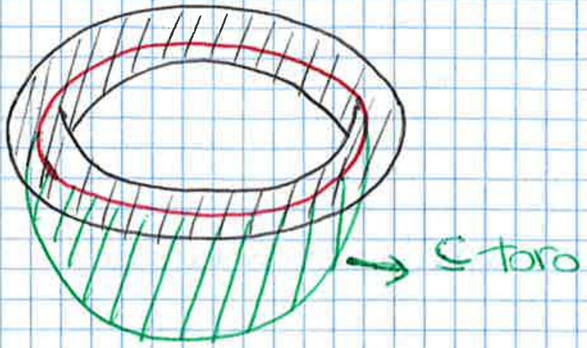
$\Leftrightarrow \text{rot } F = (0,0,0) = 0$
(si dice che il campo è irrotazionale)

$\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus$ retta




$\Omega$ non è semplicemente connesso

TORO non è semplicemente connesso




**TEOREMA** (condizione sufficiente)

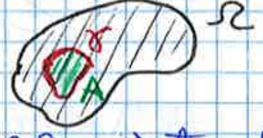
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto CONNESSO per ARCHI e $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale di classe $C^1$, $F = (f_1 \dots f_n)$. $\Omega$ è SEMPLICEMENTE CONNESSO e $\forall i, j = 1 \dots n$ e $\forall x \in \Omega$ si ha $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$, allora $F$ è conservativo

DIM. Per provare che $F$ è conservativo ricorriamo al teorema di equivalenza e più precisamente mostriamo che $\forall$ curva parametrica chiusa semplice e regolare a tratti $\gamma$,* si ha che $\oint_\gamma F \cdot dP = 0$

(n=2) C.N. $F = (f_1, f_2) \to \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)$, $\forall (x,y) \in \Omega$

$\Omega$ è semplicem. connesso

* avente sostegno in $\Omega$ $\Downarrow$




la parte di piano A delimitata dall'imm($\gamma$) è contenuta in $\Omega$ $A \subseteq \Omega$

$\partial A = \text{imm}(\gamma) \subseteq \Omega$

• Se $\gamma$ induce un verso di percorrenza non positivo sull'imm($\gamma$), cioè se $\partial\sigma$ non è orientato positivamente, allora

$$\oint_\gamma F\cdot dP = \underbrace{\oint_{\partial\sigma} F\cdot dP}_{\text{non positivam}} = -\underbrace{\oint_{\partial\sigma^+} F\cdot dP}_{\text{positivam}}$$

$\Downarrow$ per Stokes

$$-\int_\sigma \underbrace{\operatorname{rot} F}_{=0}\cdot\, n\, d\sigma \boxed{=0}$$

Quindi $\oint_\gamma F\cdot dP = 0$. Per il teorema di equivalenza

$\Downarrow$

F è conservativo ☒

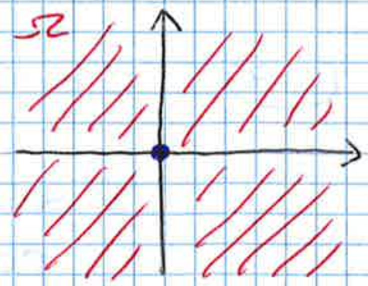
OSS. L'ipotesi $\Omega$ semplicemente connesso è NECESSARIA affinché F sia conservativo?

Cioè se $\Omega$ non è semplicemente connesso, allora F non è conservativo?

(Domanda d'orale !!!)

La risposta è $\underline{\underline{\text{NO}}}$. Infatti

$$G(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}\right)$$




$$\Omega = \operatorname{dom}(G) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$\Omega$ non è semplicemente connesso

G è conservativo, infatti

$$G(x,y) = \nabla g(x,y) \qquad g(x,y) = \log(x^2+y^2)$$

Se facciamo il percorso rosso

$$f(x,y)=\int_{x_0}^{x} f_1(s,y_0)ds+\int_{y_0}^{y} f_2(x_0,s)ds$$

# SERIE NUMERICHE

## BREVI RICHIAMI sui LIMITI di SUCCESSIONE

**DEF.** Una **successione reale** è una funzione $a: A \to \mathbb{R}$ dove $A \subseteq \mathbb{N}$ illimitato superiormente, cioè $\sup A = +\infty$. Si denota con $(a_n)$ o $\{a_n\}$.

**DEF.** Siano $(a_n)$ una successione reale e $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Diciamo che **$a_n$ ha limite $\ell$ per $n$ che tende a $+\infty$** se $\forall$ intorno$(+\infty)$ $I(\ell)$ di $\ell$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall\, n \in \mathbb{N}$ con $n > n_0$ si ha che $a_n \in I(\ell)$.
In tal caso scriveremo

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \quad \text{o} \quad \lim_n a_n = \ell$$

Se $\ell \in \mathbb{R}$, $I(\ell) = (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$

$$\lim_n a_n = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N} \text{ con } n \geq n_0$$

$$|a_n - \ell| < \varepsilon$$

Si dice che $(a_n)$ **converge** a $\ell$.

Se $\ell = \pm\infty$, $I(\ell) = (b, +\infty)$ o $I(\ell) = (-\infty, b)$

$$\lim_n a_n = +\infty \text{ o } -\infty \iff \forall b \in \mathbb{R} \ \exists n_0 \in \mathbb{N} /$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ con } n \geq n_0 \text{ si ha che}$$
$$a_n > b \quad \text{o} \quad a_n < b$$

Si dice che $(a_n)$ **diverge positivamente** o **negativamente**

Diciamo che $(a_n)$ è **indeterminata** (o oscillante) se $\nexists \lim_n a_n$.

## SCALA degli INFINITI

$$\uparrow \begin{array}{ll} n^n & \\ n! & \\ a^n & a>1 \\ n^k & \\ \log n & \end{array}$$

DEF. Siano $(a_n)$ e $(b_n)$ due successioni reali
Diciamo che **$a_n$ è o-piccolo di $b_n$** se

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 0$$

$$a_n = o(b_n) \, , \; n \to \infty$$

Diciamo che **$a_n$ è equivalente a $b_n$** se

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 1$$

$$a_n \sim b_n \, , \; n \to \infty$$

5') $\log^p n = o(n^k)$ , $n \to +\infty$, $\forall p \in \mathbb{R}$, $\forall k > 0$

6') $n^k = o(a^n)$ , $n \to +\infty$, $\forall k \in \mathbb{R}$, $\forall a > 1$

7') $a^k = o(a^{-n})$, $n \to +\infty$, $\forall k \in \mathbb{R}$, $\forall$ $0 < a < 1$

8') $a^n = o(n!)$, $n \to +\infty$, $\forall a \in \mathbb{R}$

9') $n! = o(n^n)$ , $n \to +\infty$

RICORDO $\quad 0! = 1$

$$\forall n \geq 1 \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \_\_\_ \cdot n = n(n-1)!$$

**TEOREMA** Sia $(a_n)$ una successione reale.
Supponiamo che

$$\lim_n (a_n) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

Allora $\forall$ sottosuccessione $(a_{n_k})$ di $(a_n)$ si ha che

$$\lim_k a_{n_k} = \ell$$

Esempio. $d_n = (-1)^n$

$e_n = d_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \quad \lim_n e_n = 1$

$f_n = d_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 \quad \lim_n f_n = -1$

$$\Rightarrow \nexists \lim_n d_n$$

**TEOREMA** (**Bolzano-Weierstrass**)
Sia $(a_n)$ una successione reale limitata, cioè $\exists\ M \in \mathbb{R} / |a_n| \leq M$
Allora $(a_n)$ ammette almeno una sottosuccessione convergente.

**TEOREMA** (**Criterio del rapporto per le successioni**)
Sia $(a_n)$ una successione REALE $/ a_n \geq 0\ \forall n$.
Supponiamo che

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in [0; +\infty) \cup \{+\infty\}$$

Allora:

1) se $\ell < 1$, allora $\lim_n a_n = 0$
2) se $\ell > 1$, allora $\lim_n a_n = +\infty$

OSS se $\ell = 1$, allora NSPCN
non si può concludere nulla