



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 1824A -

ANNO: 2015

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Contadin Stefania

MATERIA: Strutture Aeronautiche (esercizi) - Prof. Di Sciuva

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

**POLITECNICO DI TORINO**



**Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale**

**Corso di Strutture Aeronautiche**

**Esercitazioni svolte**

*Anno accademico 2014/2015*

*Stefania Contadin*  
*N° Matricola: 214240*

---

Poli tecnico di Torino  
Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

## Analisi statica di una semiala con il modello della trave a semiguscio

Poli tecnico di Torino  
Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

### Dati del problema

$W = 2800 \text{ Kg}$  (Peso al decollo del velivolo)  
 $W_C = 200 \text{ Kg}$  (Peso combustibile semiala)  
 $W_S = 210 \text{ Kg}$  (Peso semiala)  
 $n = 3.6$  (Fattore di carico massimo)  
 Portanza triangolare lungo la corda  
 Materiale: Dural ( $E = 73000 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.33$ )

Tracce del piano di riferimento del velivolo

AC	2.3696 m
AP	0.55 m
B/2	0.95 m
b/2	2.575 m
AB	1.577 m

Struttura Aeronautiche  
1 - Analisi statica di una semiala con il modello della trave a semiguscio

Poli tecnico di Torino  
Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

### Contenuto dell'esercitazione

L'esercitazione consiste nell'analisi statica di una semiala controventata con il modello della trave a semiguscio e si divide in due fasi:

- determinazione dell'andamento della caratteristiche di sollecitazione;
- analisi dello stato di tensione di una campata rappresentativa.

### Scopo dell'esercitazione

Lo scopo dell'esercitazione è quello di applicare le formule principali del modello della trave a semiguscio.

Struttura Aeronautiche  
1 - Analisi statica di una semiala con il modello della trave a semiguscio

Poli tecnico di Torino  
Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

### Determinazione delle caratteristiche di sollecitazione lungo la semiala

$W = 2800 \text{ Kg}$  (Peso al decollo del velivolo)  
 $W_C = 200 \text{ Kg}$  (Peso combustibile semiala)  
 $W_S = 210 \text{ Kg}$  (Peso semiala)  
 $n = 3.6$  (Fattore di carico massimo)

Carichi applicati alla semiala

$q_L = 6.527 \text{ N/mm}$  ( $= 9.8 \text{ inW/h}$ )  
 $q_W = 1.067 \text{ N/mm}$  ( $= 9.8 \text{ inWg/AD}$ )  
 $P_C = 7063 \text{ N}$  ( $= 9.8 \text{ inV}_C$ )

Tracce del piano di riferimento del velivolo

$q = q_L - q_W = 5.460 \text{ N/mm}$   
 $P_C = 7063 \text{ N}$

Struttura Aeronautiche  
1 - Analisi statica di una semiala con il modello della trave a semiguscio

Poli tecnico di Torino  
Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

### Analisi dello stato di tensione di una compata rappresentativa

Calcolo della sezione del modello del semiguscio ideale.

Sezione resistente a tensioni normali: si considerano collaboranti tutti i pannelli tesi e per la sola striscia collaborante quelli compressi.

Strutture Aerospaziali  
1 - Analisi statica di una semiala con il modello della trave a semiguscio

9

Poli tecnico di Torino  
Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

### Analisi dello stato di tensione di una compata rappresentativa

Calcolo delle tensioni normali

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_y} z_y + \frac{M_z}{J_z} z_z - \frac{M_y z_z - M_z z_y}{J_y J_z - J_{yz}^2} z_y + \frac{M_z z_z - M_y z_y}{J_z J_y - J_{yz}^2} z_z$$

Stazione  $x=1977$  mm  
Stazione  $x=2472$  mm

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_y} z_y$$

Strutture Aerospaziali  
1 - Analisi statica di una semiala con il modello della trave a semiguscio

11

Poli tecnico di Torino  
Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

### Analisi dello stato di tensione di una compata rappresentativa

Calcolo delle caratteristiche geometriche della sezione della semiala

Strutture Aerospaziali  
1 - Analisi statica di una semiala con il modello della trave a semiguscio

10

Poli tecnico di Torino  
Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

### Calcolo dei flussi di taglio nei pannelli

Taglio e momento torcente: valori medi sul tronchetto.

Taglio,  $T_x$

$$\bar{T}_x = \frac{T_x(0) + T_x(2)}{2}$$

Momento torcente,  $M_t$

$$\bar{M}_t = \frac{M_t(0) + M_t(2)}{2}$$

Strutture Aerospaziali  
1 - Analisi statica di una semiala con il modello della trave a semiguscio

12

## Esercitazione ①

### ANALISI STATICA DI UNA SEMIALA CON IL MODELLO DELLA TRAVE A SEMIGUSCIO

#### DATI:

$W = 2800 \text{ Kg}$  → peso al decollo del velivolo

$W_e = 200 \text{ Kg}$  → peso combustibile semiala

$W_s = 210 \text{ Kg}$  → peso semiala

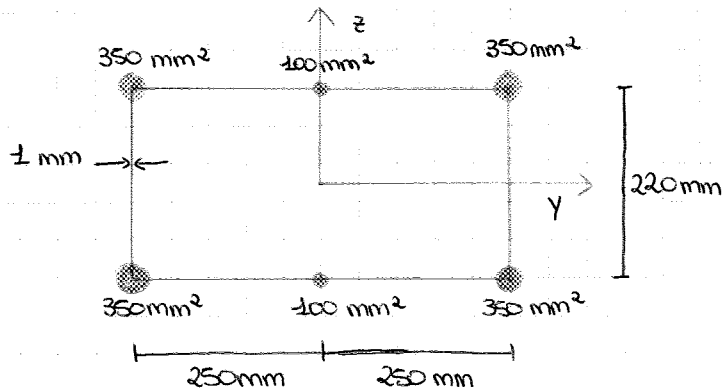
$n = 3,6$  → fattore di carico a contingenza massimo

Portanza triangolare lungo l'arco

Materiale : DURAL :  $E = 73000 \text{ MPa}$

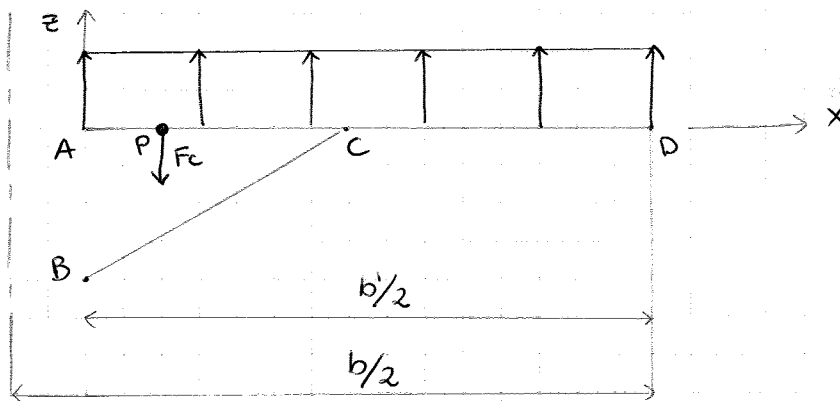
$\nu = 0,33$

#### • Sezione semiala



- Sezione a guscio rinforzato con doppia simmetria
- Gli assi di simmetria sono assi principali d'inerzia e sono ortogonali tra loro

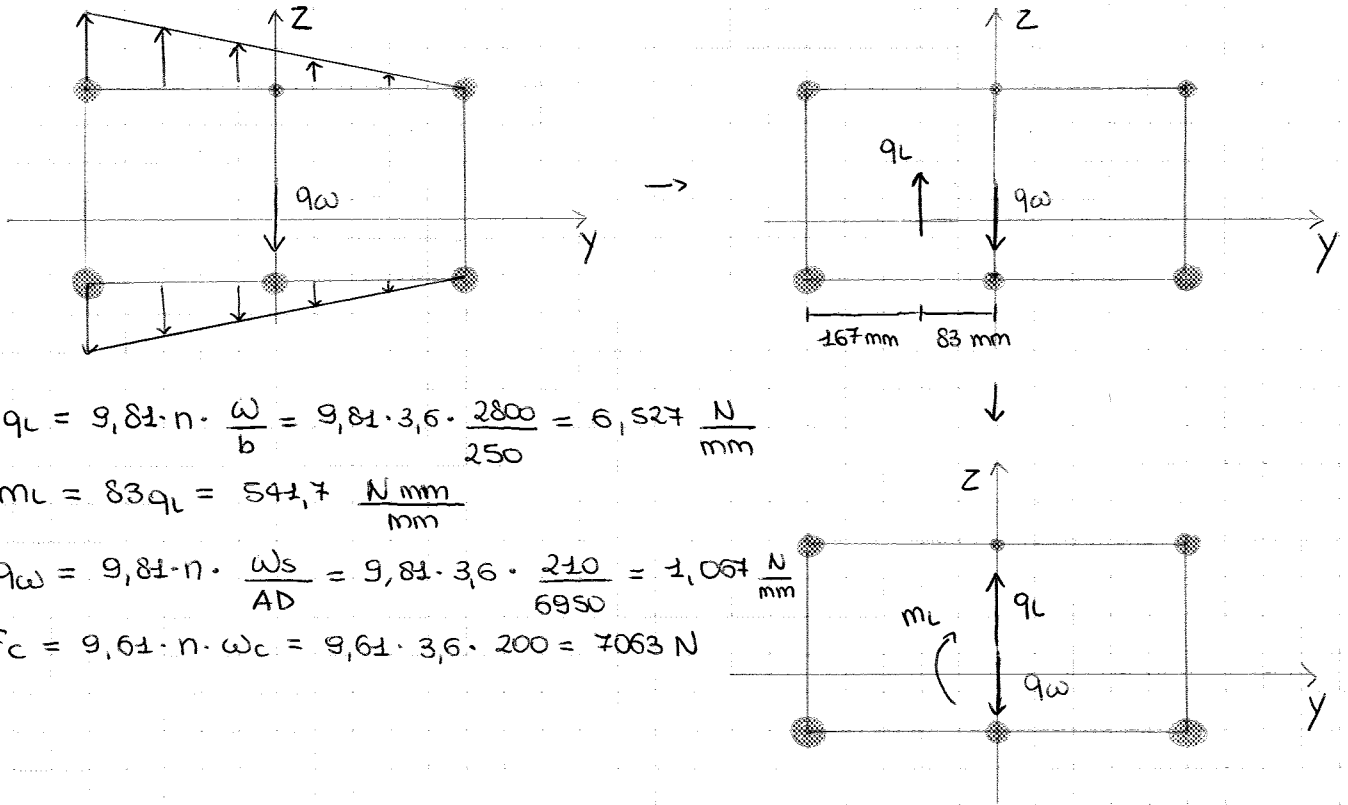
#### • Geometria semiala



$$\begin{aligned} AC &= 2,966 \text{ m} \\ AP &= 0,55 \text{ m} \\ b'/2 &= 6,95 \text{ m} \\ b/2 &= 7,575 \text{ m} \\ AB &= 1,517 \text{ m} \end{aligned}$$

→ Traccia del piano di simmetria del velivolo

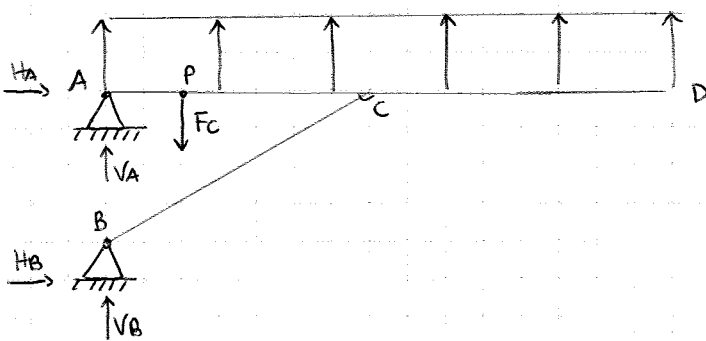
- La risultante della portanza agisce lungo l'asse dei terzi anteriori del cassone (risultante di distribuzione triangolare)  $\rightarrow q_L$
- Il peso della semiala (distribuito) e del combustibile (concentrato) agiscono lungo l'asse baricentrico della sezione
- $\rightarrow q_\omega$
- $\rightarrow F_c$
- Per spostare  $q_L$  sull'asse baricentrico devo calcolare il momento di trasporto  $\rightarrow m_L$



- $q_L = 9,81 \cdot n \cdot \frac{\omega}{b} = 9,81 \cdot 3,6 \cdot \frac{2800}{250} = 6,527 \frac{N}{mm}$
- $m_L = 83 q_L = 541,7 \frac{N \cdot mm}{mm}$
- $q_\omega = 9,81 \cdot n \cdot \frac{\omega_s}{AD} = 9,81 \cdot 3,6 \cdot \frac{210}{6950} = 1,067 \frac{N}{mm}$
- $F_c = 9,61 \cdot n \cdot \omega_c = 9,61 \cdot 3,6 \cdot 200 = 7063 N$

② Determinare l'andamento delle caratteristiche di sollecitazione sulla semiala

$$q_L - q_\omega = 5,46 \text{ N/mm} = 5460 \text{ N/m}$$



Calcolo reazioni vincolari:

$$\rightarrow) H_A + H_B = 0$$

$$\uparrow) V_A + V_B - F_c + (q_L - q_\omega) \frac{b'}{2} = 0$$

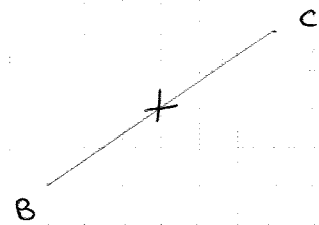
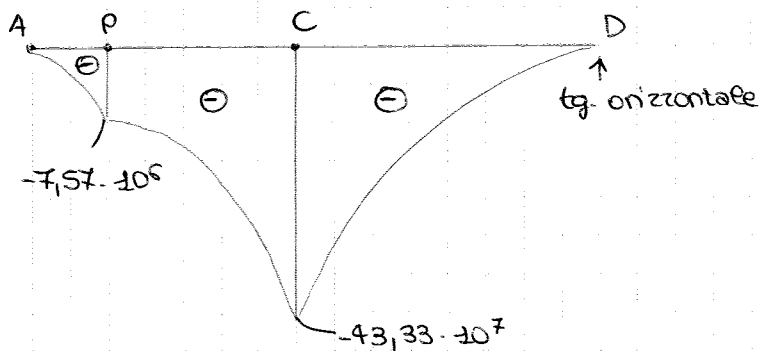
$$\curvearrowleft) - F_c \cdot AP + H_B \cdot AB + (q_L - q_\omega) \frac{b'}{2} \cdot \frac{b'}{4} = 0$$

$$\frac{V_B}{H_B} = \frac{AB}{AC}$$

$$H_B = \frac{1}{AB} \left( F_c \cdot AP - (q_L - q_\omega) \left( \frac{b'}{2} \right)^2 \frac{1}{2} \right) = -81155 \text{ N}$$

$$V_B = H_B \frac{AB}{AC} = -43149 \text{ N}$$

Ⓜ [Nmm] Momento flettente



In P, C cambio pendenza  
→ punti angolosi

A)  $M=0$

P)  $M = -12265 \cdot 550 - 5,46 \cdot 550 \cdot 225 = -7,57 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$

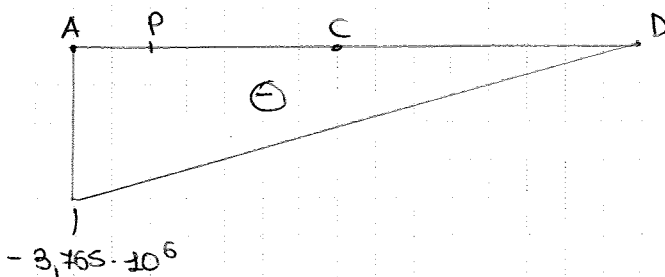
C)  $M = -12265 \cdot 2966 - 7063(2966 - 550) + 5,46 \cdot 2966 \cdot \frac{2966}{2} = -43,33 \cdot 10^7 \text{ Nmm}$

La controventatura è un'asta → regge solo sforzo normale (costante)

Ⓜ<sub>t</sub> Momento torcente [Nmm]

$$M_t \left( \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right) \Rightarrow \frac{dM_t}{dx} = -m_t$$

$$M_t = -\hat{m}_t \cdot \frac{b_l}{2} = -3,765 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$





#### ④ Calcolo dei flussi di taglio nella campata

Taglio e momento torcente: valori medi sul tronchetto

Sulle due sezioni il taglio ha un valore diverso ma sul tronchetto deve essere costante. Stessa cosa vale per il momento torcente. Si considera il valore nelle due sezioni e se ne fa il valore medio.

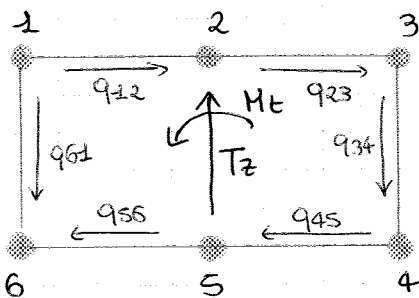
$$\bar{T}_z = \frac{\bar{T}_z^{(1)} + \bar{T}_z^{(2)}}{2} = -17348 \text{ N}$$

$$\bar{M}_t = \frac{\bar{M}_t^{(1)} + \bar{M}_t^{(2)}}{2} = -2,56 \cdot 10^5 \text{ Nmm}$$

La sezione è sollecitata da taglio applicato lungo la congiungente i correnti 5-2 e da momento torcente.

Quindi si hanno: 1- flussi di taglio nei pannelli equivalenti al taglio  
2- flussi di taglio nei pannelli equivalenti al momento torcente

Il flusso complessivo è dato dalla somma algebrica.



Flussi positivi → antiorari

Calcolo momenti statici:  $S_y = A_i z_i$

$$S_{y1} = S_{y3} = 52744 \text{ mm}^3$$

$$S_{y2} = 18044 \text{ mm}^3$$

$$S_{y4} = S_{y6} = -47502 \text{ mm}^3$$

$$S_{y5} = -28420 \text{ mm}^3$$

Calcolo gradienti di sforzo normale:

$$\frac{dN_i}{dx} = \frac{T}{J_y} S_{y_i} \quad \sum_{i=1}^6 \frac{dN_i}{dx} = 0$$

$$\frac{dN_1}{dx} = \frac{dN_3}{dx} = \frac{-17348}{2 \cdot 71683 \cdot 10^7} \cdot 52744 = -33,68 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

$$\frac{dN_2}{dx} = -11,52 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

$$\frac{dN_4}{dx} = \frac{dN_6}{dx} = 30,33 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

$$\frac{dN_5}{dx} = 18,15 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

$$4q'_{23} = -\frac{dN_3}{dx} + 2\frac{dN_2}{dx} + \frac{dN_1}{dx}$$

$$q'_{23} = \frac{1}{4} \left( -\frac{dN_3}{dx} + 2\frac{dN_2}{dx} + \frac{dN_1}{dx} \right) = -5,7591 \frac{N}{mm}$$

$$q'_{34} = -39,4 \frac{N}{mm}$$

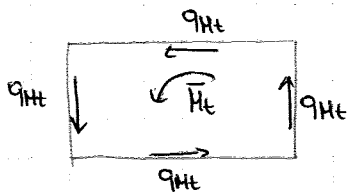
$$q'_{12} = 5,76 \frac{N}{mm}$$

$$q'_{61} = 39,43 \frac{N}{mm}$$

$$q'_{56} = 9,08 \frac{N}{mm}$$

$$q'_{45} = -9,08 \frac{N}{mm}$$

- Sezione monocella sollecitata da momento torcente



Non inseriamo i correnti poiché assorbono solo sforzi normali.

Solo se vi sono i pannelli si fa un salto di flusso, dunque in tutti i pannelli si fa:

$$q_{Mt} = \frac{\bar{M}_t}{2\Omega} = -21,6355 \frac{N}{mm}$$

- Calcolo flussi totali

$$q_{12} = q'_{12} + q_{Mt} = -5,88 \frac{N}{mm}$$

$$q_{23} = q'_{23} + q_{Mt} = -17,39 \frac{N}{mm}$$

$$q_{34} = q'_{34} + q_{Mt} = -51,06 \frac{N}{mm}$$

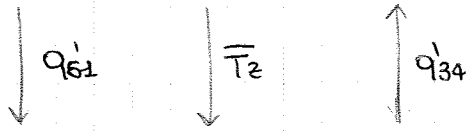
$$q_{45} = q'_{45} + q_{Mt} = -20,71 \frac{N}{mm}$$

$$q_{56} = q'_{56} + q_{Mt} = -2,56 \frac{N}{mm}$$

$$q_{61} = q'_{61} + q_{Mt} = 27,79 \frac{N}{mm}$$

Dei flussi ottenuti solo  $q_{61}$  è antiorario

2) Gli unici pannelli che possono assorbire il taglio verticale sono il pannello 1-6 ed il pannello 3-4.



$$q'_{61} \cdot e = \frac{\bar{T}_2}{2} \Rightarrow q'_{61} = 39,43 \frac{N}{mm}$$

$$q'_{61} = \frac{\bar{T}_2}{2e} = -q'_{34} \Rightarrow q'_{34} = -39,43 \frac{N}{mm}$$

$$q'_{12} = \frac{dN_1}{dx} + q'_{61} = 5,76 \frac{N}{mm}$$

$$q'_{23} = \frac{dN_2}{dx} + q'_{12} = -5,76 \frac{N}{mm}$$

$$q'_{56} = -\frac{dN_5}{dx} + q'_{61} = 9,08 \frac{N}{mm}$$

$$q'_{45} = -\frac{dN_5}{dx} + q'_{56} = -9,08 \frac{N}{mm}$$

$$q_{12} = q'_{12} + q_{Mt} = -5,88 \frac{N}{mm}$$

$$q_{23} = q'_{23} + q_{Mt} = -17,39 \frac{N}{mm}$$

$$q_{34} = q'_{34} + q_{Mt} = -51,06 \frac{N}{mm}$$

$$q_{45} = q'_{45} + q_{Mt} = -20,71 \frac{N}{mm}$$

$$q_{56} = q'_{56} + q_{Mt} = -2,56 \frac{N}{mm}$$

$$q_{61} = q'_{61} + q_{Mt} = 27,79 \frac{N}{mm}$$

## Analisi statica di piastre multistrato caricate trasversalmente

### Problema

Si considerino due piastre rettangolari ( $a=50$  cm,  $b=25$  cm,  $h=2$  mm), semplicemente appoggiate sui 4 lati, caricate trasversalmente da un carico sinusoidale di intensità  $q_z=1000$  Pa. Le caratteristiche meccaniche del singolo strato sono  $E_L=111$  GPa,  $E_T=8$  GPa,  $G_{LT}=3$  GPa e  $\nu_{LT}=0.33$ . Le stratificazioni delle due piastre sono:

- piastra a:  $(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$
- piastra b:  $(90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ)$

e gli spessori sono tra loro uguali (laminazione regolare). Si chiede di determinare, per ognuna delle 2 piastre:

- (1) le matrici  $[A]$ ,  $[B]$  e  $[D]$
- (2) la massima deflessione  $w_{\max}$  ( $w^{(0)}(a/2, b/2)$ )
- (3) l'andamento lungo lo spessore delle deformazioni  $\epsilon_x$  e  $\epsilon_y$ , e delle tensioni  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  nel punto centrale  $(a/2, b/2)$
- (4) l'andamento lungo lo spessore della tensione  $\tau_{xz}$  nel punto  $(0, b/2)$  (*facoltativo*)

### Contenuto dell'esercitazione

L'esercitazione si divide in tre fasi:

1. calcolo delle matrici di rigidità di piastre cross-ply simmetriche;
2. determinazione della massima deflessione delle piastre quando semplicemente appoggiate sui 4 lati e soggette ad un carico trasversale;
3. determinazione dello stato di deformazione e tensione in alcuni punti caratteristici.

### Scopo dell'esercitazione

Lo scopo dell'esercitazione è quello di analizzare il comportamento statico di piastre cross-ply e simmetriche soggette a carichi trasversali.

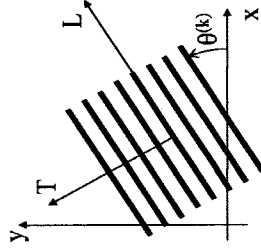
### Svolgimento

Il calcolo della matrice delle rigidità ridotte trasformate di un generico strato,  $[Q_p^{(k)}]$ , può essere effettuato con la seguente procedura

$$[Q_p^{(k)}] = [\Lambda^{(k)}]^{-1} \cdot [Q_p^{(0)}] \cdot [\Lambda^{(k)}]^{-1}$$

$$[Q_p^{(0)}] = \begin{bmatrix} \frac{E_L}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix} \quad [\Lambda^{(k)}] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2-s^2 \end{bmatrix}$$

$$c \equiv \cos(\theta^{(k)}) \quad s \equiv \sin(\theta^{(k)})$$



dove  $E_L$  e  $E_T$  sono i moduli di Young nelle due direzioni principali,  $\nu_{LT}$  e  $G_{LT}$  sono il coefficiente di Poisson e il modulo di taglio nel piano (L, T). Si ha che  $\nu_{TL} = \nu_{LT}E_T/E_L$ . Si notino i due casi seguenti (piastra cross-ply):

$$\theta^{(k)} = 0^\circ \Rightarrow [\Lambda^{(k)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow [Q_p^{(k)}] = [Q_p^{(0)}]$$

$$\theta^{(k)} = 90^\circ \Rightarrow [\Lambda^{(k)}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

**Svolgimento**

Sebbene il modello di Kirchhoff non le preveda, è possibile calcolare anche le due tensioni di taglio trasversale  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$ . Partendo dalle equazioni indefinite di equilibrio in direzione x ed y (in assenza di forze di volume)

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} = 0$$

$$\tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{yz,z} = 0$$

e, note  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  si possono determinare le tensioni di taglio trasversale per integrazione lungo lo spessore. Proviamo, per esempio, a calcolare la tensione  $\tau_{xz}$ :

$$\tau_{xz,z} = -(\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y})$$

da cui

$$\tau_{xz}(x,y,z) = \tau_{xz}(x,y,-h/2) - \int_{-h/2}^z (\sigma_{x,x}^{(k)} + \tau_{xy,y}^{(k)}) dz$$

Sostituendo alle tensioni le deformazioni (piastra cross-ply  $\Rightarrow Q_{16}^{(k)} = Q_{66}^{(k)} = 0$  in ogni strato) e raccogliendo, la funzione integranda diventa

$$-(\sigma_{x,x}^{(k)} + \tau_{xy,y}^{(k)}) = \left[ (Q_{11}^{(k)} \cdot w_{xx}^{(0)} + Q_{12}^{(k)} \cdot w_{yy}^{(0)}) + (2Q_{66}^{(k)} \cdot w_{xy}^{(0)}) \right] \cdot z = f^{(k)}(x,y) \cdot z$$

per cui, essendo  $\tau_{xz}(x,y,-h/2) = 0$ ,

$$\tau_{xz}(x,y,z) = \int_{-h/2}^z (f^{(k)}(x,y) \cdot z) dz$$

**Analisi di convergenza**

Consideriamo la piastra b (90/0/0/90) ma questa volta soggetta ad un carico trasversale uniforme (sempre di intensità  $q_z^0 = 1000$  Pa).

In questo caso dobbiamo sviluppare il carico in serie di Fourier:

$$\bar{q}_z(x,y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N q_{mn} \text{sen}(\lambda_m x) \text{sen}(\lambda_n y) \text{ con } \lambda_m = \frac{m\pi}{a} \text{ e } \lambda_n = \frac{n\pi}{b}$$

$$q_{mn} = \begin{cases} 16\bar{q}_z^0 / (\pi^2 mn) & m \text{ e } n \text{ dispari} \\ 0 & m \text{ o } n \text{ pari} \end{cases}$$

Allora la deflessione della piastra è

$$w^{(0)}(x,y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_{mn} \text{sen}(\lambda_m x) \text{sen}(\lambda_n y) \text{ con } \lambda_m = \frac{m\pi}{a} \text{ e } \lambda_n = \frac{n\pi}{b}$$

dove

$$w_{mn} = \frac{q_{mn}}{D_{11} \lambda_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda_m^2 \lambda_n^2 + D_{22} \lambda_n^4} \quad \forall m, n$$

**Svolgimento**

Sviluppando le derivate coinvolte nell'espressione finale, si ha

$$w^{(0)}_{,xxx} = -(\pi/a)^3 W \cos(\pi x/a) \text{sen}(\pi y/b)$$

$$w^{(0)}_{,xyy} = -(\pi/a)(\pi/b)^2 W \cos(\pi x/a) \text{sen}(\pi y/b)$$

Allora

$$f^{(k)}(x,y) = \left[ (Q_{11}^{(k)} \cdot w_{xx}^{(0)} + Q_{12}^{(k)} \cdot w_{yy}^{(0)}) + (2Q_{66}^{(k)} \cdot w_{xy}^{(0)}) \right]$$

$$= -(\pi/a) \left[ Q_{11}^{(k)} (\pi/a)^2 + (Q_{12}^{(k)} + 2Q_{66}^{(k)}) (\pi/b)^2 \right] W \cos(\pi x/a) \text{sen}(\pi y/b)$$

Un'analogo procedura si può utilizzare per calcolare la tensione  $\tau_{yz}$ :

**Analisi di convergenza**

Si riportano i valori di deflessione e tensioni massime al variare del numero di termini negli sviluppi in serie della soluzione

M=N	w <sub>max</sub> (mm)	max(σ <sub>x</sub> ) (MPa)	max(σ <sub>y</sub> ) (MPa)
1	0,933	2,26	16,49
3	0,807	0,40	13,53
5	0,816	0,59	14,06
7	0,812	0,34	13,97
9	0,813	0,40	14,00
11	0,813	0,30	13,99
13	0,813	0,36	14,00

```
close all
clear all
clc

%Piastra A

a = 0.5;
b = 0.25;
h = 0.002;

qz0 = -1000;
EL = 111*10^9;
ET = 8*10^9;
GLT = 3*10^9;
vLT = 0.33;
vTL = vLT*(ET/EL);

ns = 1:4;

theta_a = [0 90 90 0];
h_k = h/4;
z_k = -h/2:h_k:h/2;

zm = zeros(1,4);
zm(1) = (z_k(2)+ z_k(1))/2;

for i=2:4

    zm(i) = zm(i-1)+ h_k;

end

tab_a = zeros(4,4);

tab_a(:,1) = ns';
tab_a(:,2) = theta_a';
tab_a(:,3) = h_k';
tab_a(:,4) = zm;

Qp_0 = [EL/(1-vLT*vTL) (vLT*ET)/(1-vLT*vTL) 0; (vLT*ET)/(1-vLT*vTL) ET/(1-vLT*vTL) 0;
0 0 GLT];

gamma_k = [0 1 0; 1 0 0; 0 0 -1];

Qp_k = zeros(3,3);
A_k = zeros(3,3);
B_k = zeros(3,3);
D_k = zeros(3,3);

Qp = zeros(3,3);
A = zeros(3,3);
B = zeros(3,3);
D = zeros(3,3);

%Calcolo matrici A,B,D
```

```
grid on
```

```
%Andamento deformazioni lungo lo spessore nel punto (a/2, b/2)
```

```
z1 = linspace(-h/2,h/2,1000);  
eps_x = -z1.*(-(pi/a)^2*W*sin(pi*x1/a).*sin(pi*y1/b));  
eps_y = -z1.*(-(pi/b)^2*W*sin(pi*x1/a).*sin(pi*y1/b));
```

```
figure(2), grid on, hold on  
plot(eps_x,z1)  
xlabel('\epsilon_x(x=0.25, y=0.125, z)')  
ylabel('z')  
title('Andamento di \epsilon_x lungo lo spessore nel punto (a/2, b/2)')
```

```
figure(3), grid on, hold on  
plot(eps_y,z1)  
xlabel('\epsilon_y(x=0.25, y=0.125, z)')  
ylabel('z')  
title('Andamento di \epsilon_y lungo lo spessore nel punto (a/2, b/2)')
```

```
%Andamento tensioni lungo lo spessore nel punto (a/2, b/2)
```

```
sigma_y = zeros(1,N);  
Qp_90 = inv(gamma_k)*Qp_0*((inv(gamma_k))');
```

```
for i=1:250  
    sigma_y(i) = Qp_0(1,1)*eps_x(1,i) + Qp_0(1,2)*eps_y(1,i);  
end
```

```
for i=251:500  
    sigma_y(i) = Qp_90(1,1)*eps_x(1,i) + Qp_90(1,2)*eps_y(1,i);  
end
```

```
for i=501:750  
    sigma_y(i) = Qp_90(1,1)*eps_x(1,i) + Qp_90(1,2)*eps_y(1,i);  
end
```

```
for i=751:1000  
    sigma_y(i) = Qp_0(1,1)*eps_x(1,i) + Qp_0(1,2)*eps_y(1,i);  
end
```

```
figure(4)  
plot(sigma_y, z1)  
grid on  
xlabel('\sigma_x(x=0.25, y=0.125, z)')  
ylabel('z')  
title('Andamento di \sigma_x lungo lo spessore nel punto (a/2, b/2)')
```

```
sigma_y = zeros(1,N);
```

```
for i=1:250  
    sigma_y(i) = Qp_0(1,2)*eps_x(1,i) + Qp_0(2,2)*eps_y(1,i);
```

```
grid on
xlabel('\tau_x_z(x=0, y=0.125, z)')
ylabel('z')
title ('Andamento di \tau_x_z lungo lo spessore nel punto (0, b/2)')
```



## RISULTATI PIASTRA A

Qp =

1.0e+11 \*

2.3988	0.1064	0
0.1064	2.3988	0
0	0	0.1200

A =

1.0e+08 \*

1.1994	0.0532	0
0.0532	1.1994	0
0	0	0.0600

B =

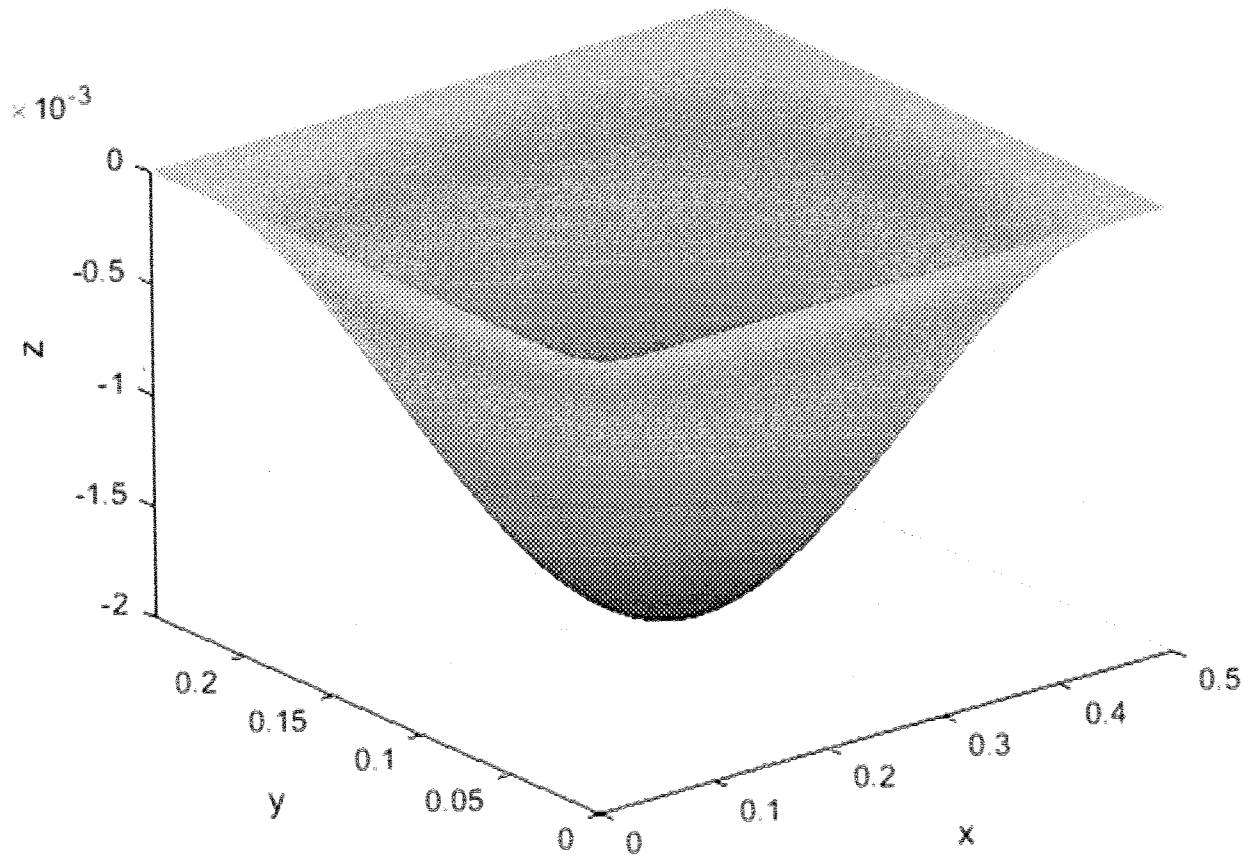
1.0e-12 \*

0	0	0
0	-0.4547	0
0	0	0

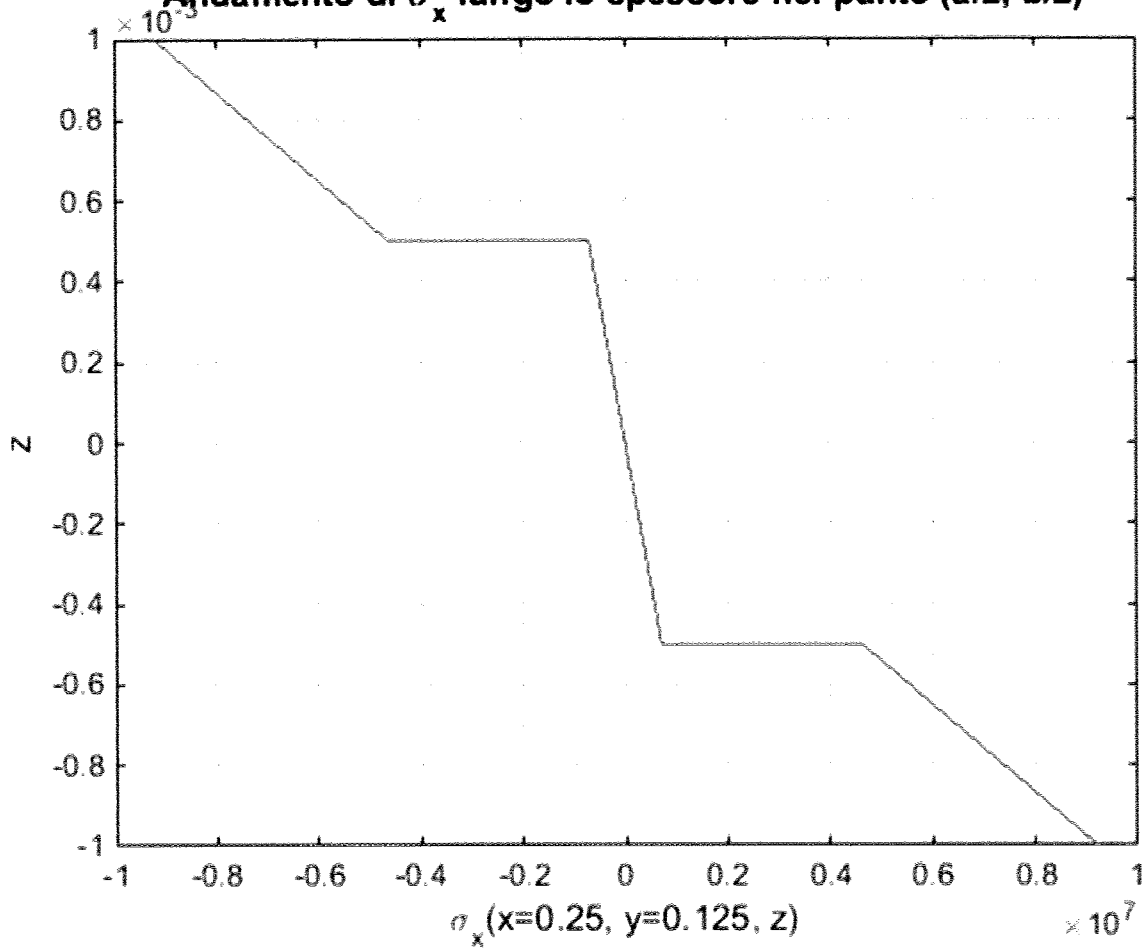
D =

65.9342	1.7739	0
1.7739	14.0268	0
0	0	2.0000

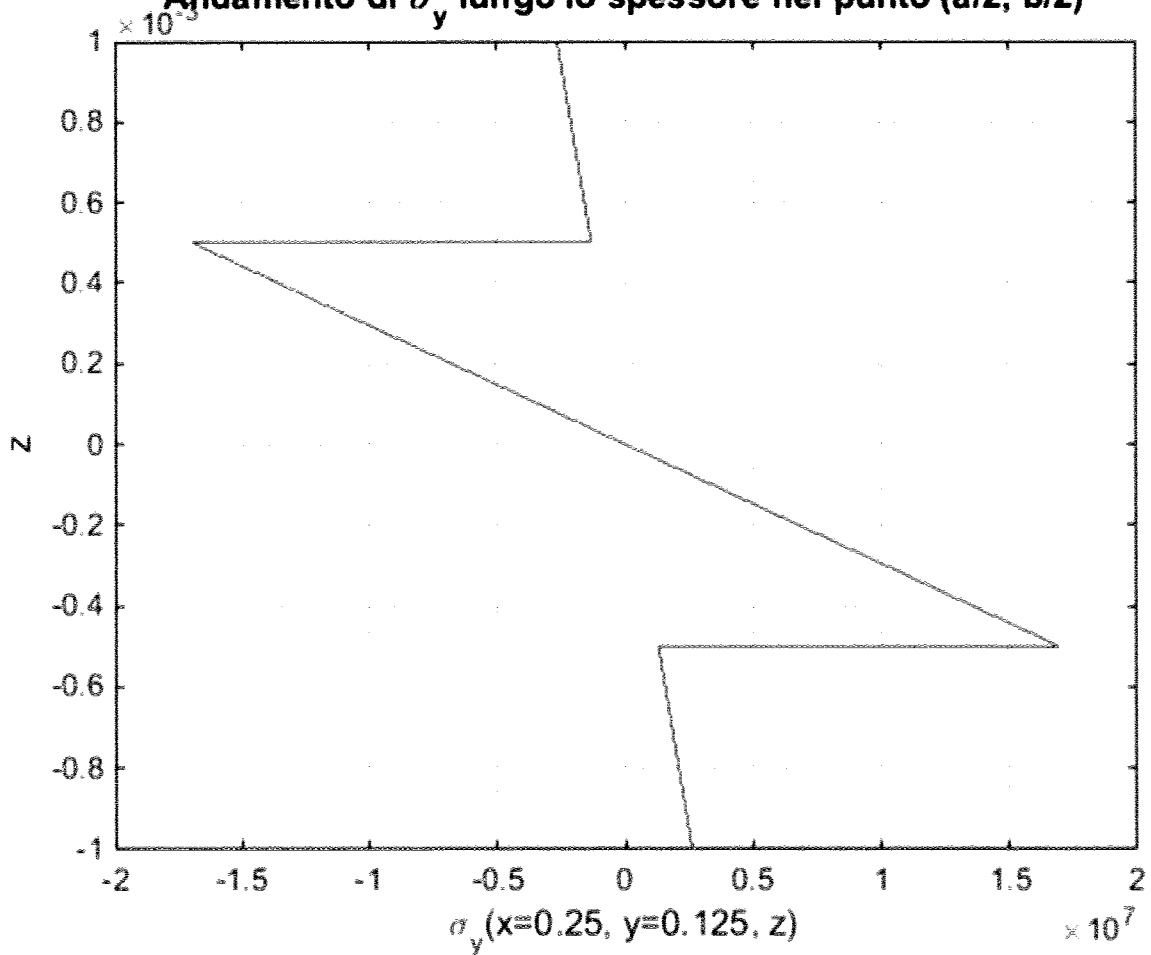
### Andamento della freccia lungo lo spessore



Andamento di  $\sigma_x$  lungo lo spessore nel punto (a/2, b/2)



Andamento di  $\sigma_y$  lungo lo spessore nel punto (a/2, b/2)



```
close all
clear all
clc

%Piastra B

a = 0.5;
b = 0.25;
h = 0.002;

qz0 = -1000;
EL = 111*10^9;
ET = 8*10^9;
GLT = 3*10^9;
vLT = 0.33;
vTL = vLT*(ET/EL);

ns = 1:4;

theta_b = [90 0 0 90];
h_k = h/4;
z_k = -h/2:h_k:h/2;

zm = zeros(1,4);
zm(1) = (z_k(2)+ z_k(1))/2;

for i=2:4

    zm(i) = zm(i-1)+ h_k;

end

tab_b = zeros(4,4);

tab_a(:,1) = ns';
tab_a(:,2) = theta_b';
tab_a(:,3) = h_k';
tab_a(:,4) = zm;

Qp_0 = [EL/(1-vLT*vTL) (vLT*ET)/(1-vLT*vTL) 0; (vLT*ET)/(1-vLT*vTL) ET/(1-vLT*vTL) 0;
0 0 GLT];

gamma_k = [0 1 0; 1 0 0; 0 0 -1];

Qp_k = zeros(3,3);
A_k = zeros(3,3);
B_k = zeros(3,3);
D_k = zeros(3,3);

Qp = zeros(3,3);
A = zeros(3,3);
B = zeros(3,3);
D = zeros(3,3);

%Calcolo matrici A,B,D
```

```
grid on
```

```
%Andamento deformazioni lungo lo spessore nel punto (a/2, b/2)
```

```
z1 = linspace(-h/2,h/2,1000);  
eps_x = -z1.*(-(pi/a)^2*W*sin(pi*x1/a).*sin(pi*y1/b));  
eps_y = -z1.*(-(pi/b)^2*W*sin(pi*x1/a).*sin(pi*y1/b));
```

```
figure(2), grid on, hold on  
plot(eps_x,z1)  
xlabel('\epsilon_x(x=0.25, y=0.125, z)')  
ylabel('z')  
title('Andamento di \epsilon_x lungo lo spessore nel punto (a/2, b/2)')
```

```
figure(3), grid on, hold on  
plot(eps_y,z1)  
xlabel('\epsilon_y(x=0.25, y=0.125, z)')  
ylabel('z')  
title('Andamento di \epsilon_y lungo lo spessore nel punto (a/2, b/2)')
```

```
%Andamento tensioni lungo lo spessore nel punto (a/2, b/2)
```

```
sigma_y = zeros(1,N);  
Qp_90 = inv(gamma_k)*Qp_0*((inv(gamma_k))');  
  
for i=1:250  
    sigma_y(i) = Qp_90(1,1)*eps_x(1,i) + Qp_90(1,2)*eps_y(1,i);  
end  
  
for i=251:500  
    sigma_y(i) = Qp_0(1,1)*eps_x(1,i) + Qp_0(1,2)*eps_y(1,i);  
end  
  
for i=501:750  
    sigma_y(i) = Qp_0(1,1)*eps_x(1,i) + Qp_0(1,2)*eps_y(1,i);  
end  
  
for i=751:1000  
    sigma_y(i) = Qp_90(1,1)*eps_x(1,i) + Qp_90(1,2)*eps_y(1,i);  
end
```

```
figure(4)  
plot(sigma_y, z1)  
grid on  
xlabel('\sigma_x(x=0.25, y=0.125, z)')  
ylabel('z')  
title('Andamento di \sigma_x lungo lo spessore nel punto (a/2, b/2)')
```

```
sigma_y = zeros(1,N);
```

```
for i=1:250  
    sigma_y(i) = Qp_90(1,2)*eps_x(1,i) + Qp_90(2,2)*eps_y(1,i);
```

```
grid on
xlabel('\tau_x_z(x=0, y=0.125, z)')
ylabel('z')
title ('Andamento di \tau_x_z lungo lo spessore nel punto (0, b/2)')
```

## RISULTATI PIASTRA B

Qp =

1.0e+11 \*

2.3988	0.1064	0
0.1064	2.3988	0
0	0	0.1200

A =

1.0e+08 \*

1.1994	0.0532	0
0.0532	1.1994	0
0	0	0.0600

B =

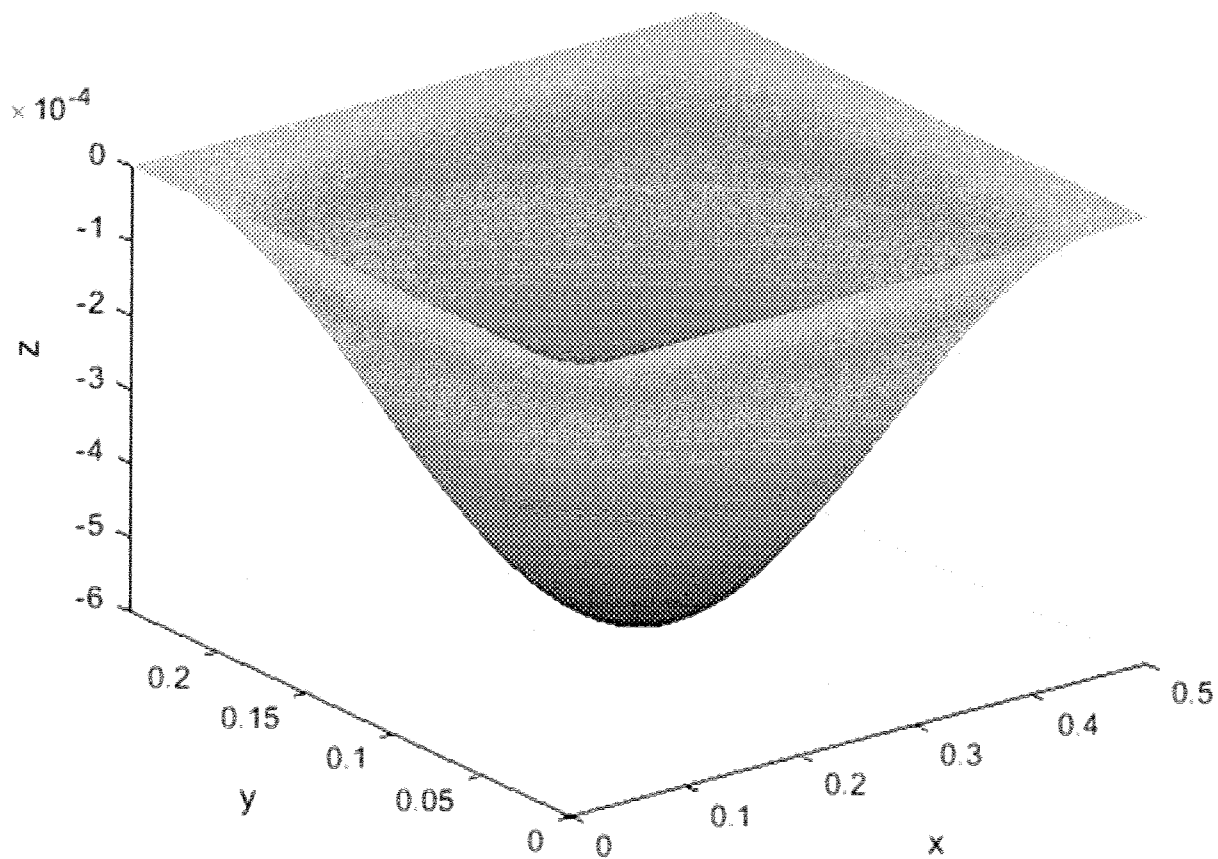
1.0e-12 \*

-0.4547	0	0
0	0	0
0	0	0

D =

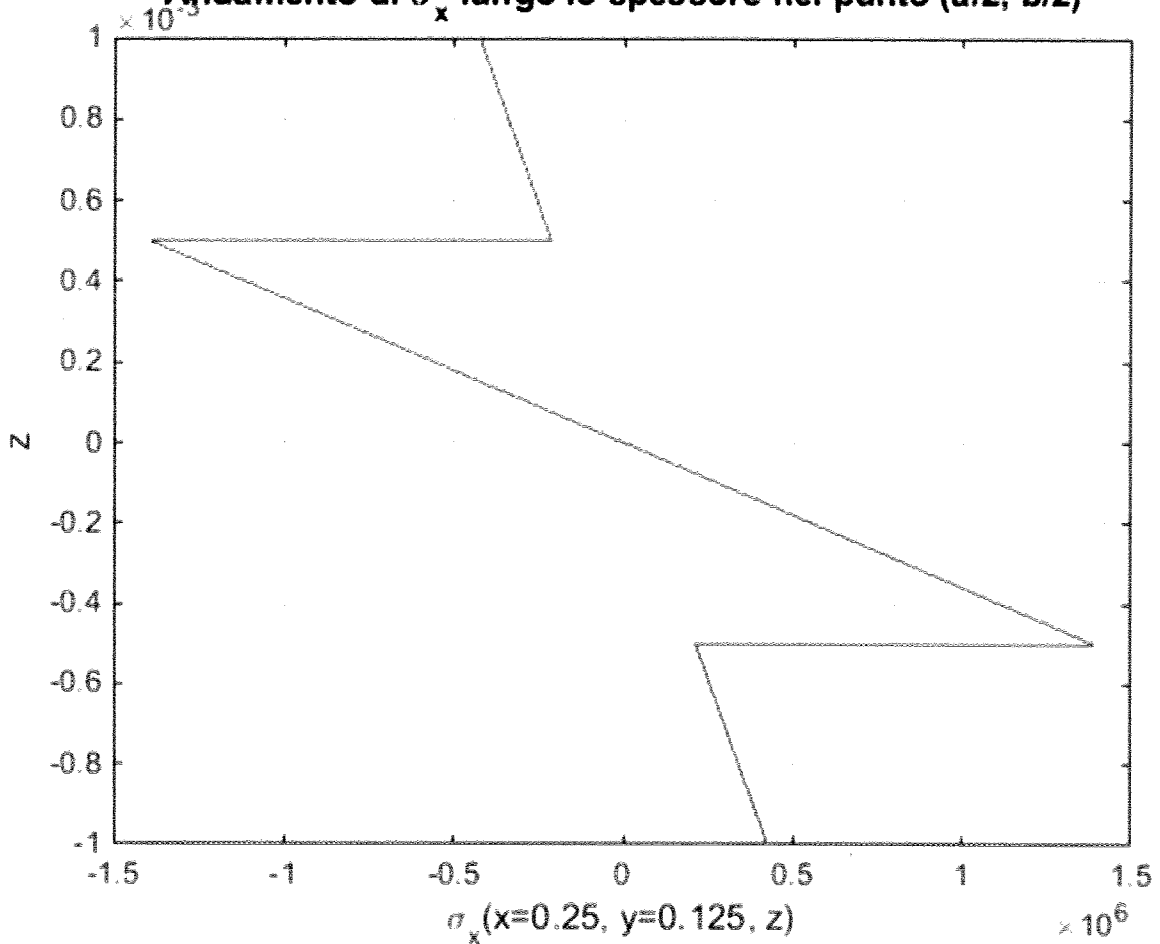
14.0268	1.7739	0
1.7739	65.9342	0
0	0	2.0000

### Andamento della freccia lungo lo spessore

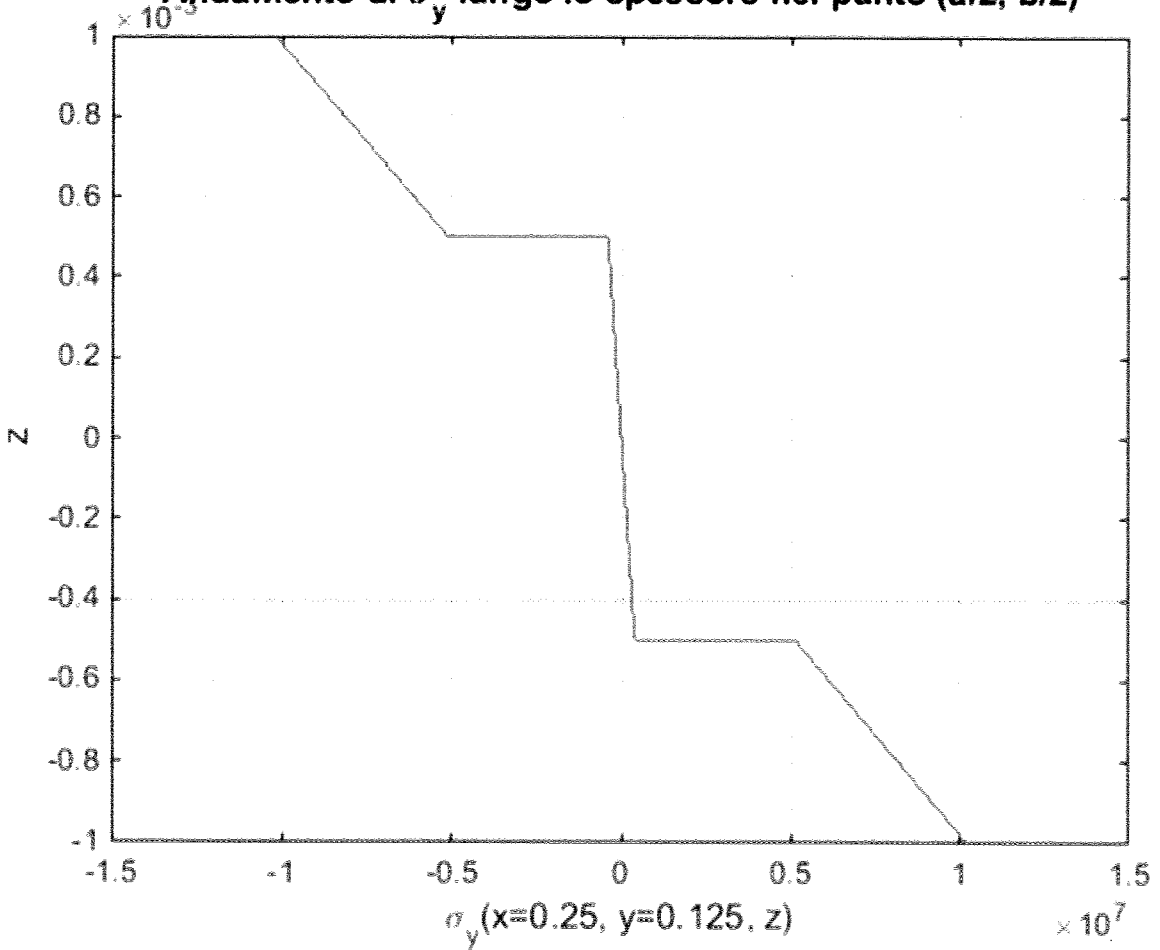




Andamento di  $\sigma_x$  lungo lo spessore nel punto (a/2, b/2)



Andamento di  $\sigma_y$  lungo lo spessore nel punto (a/2, b/2)



## Dimensionamento di travi composite e sandwich

### Contenuto dell'esercitazione

L'esercitazione si divide in tre fasi:

1. risoluzione di alcuni semplici schemi strutturali statici secondo le teorie della trave di Eulero-Bernoulli e sandwich;
2. analisi delle prestazioni (massa, rigidità, robustezza) nel caso di laminazione isotropa, composita e sandwich;
3. dimensionamento delle travi composita e sandwich.

### Scopo dell'esercitazione

Gli scopi dell'esercitazione sono:

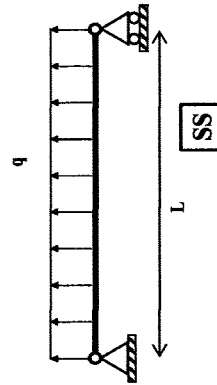
- imparare a calcolare la risposta statica (spostamenti e tensioni) di semplici schemi strutturali mono-dimensionali a partire dalle equazioni di equilibrio scritte in termini di spostamento (equazione della linea elastica);
- confrontare il comportamento di travi isotrope, composita e sandwich in termini di massa, rigidità e robustezza.

Strutture Aeronautiche  
3 - Dimensionamento di travi composite e sandwich

2

### Problema

Si considerino i seguenti due schemi strutturali



$L=500$  mm  
 $b=25$  mm (larghezza sezione trasversale)  
 $q=5000$  N/m

Strutture Aeronautiche  
3 - Dimensionamento di travi composite e sandwich

3

### Problema

Le travi vengono realizzate con tre diverse soluzioni

#### Trave isotropa

$h=25$  mm (spessore totale)  
Lega di Alluminio ( $E=73000$  MPa,  $\rho=2700$  kg/m<sup>3</sup>)

#### Trave composita regolare (0/90/0)

$h$  variabile (spessore totale)  
Carbon/Epoxy ( $E_1=111000$  MPa,  $E_2=8000$  MPa,  $\rho=1500$  kg/m<sup>3</sup>)

#### Trave sandwich simmetrica

$h$  variabile (spessore del cuore)  
 $h_f=1$  mm o 2 mm (spessore di ciascuna faccia)  
Faccie in lega di Alluminio ( $E_f=73000$  MPa,  $\rho_f=2700$  kg/m<sup>3</sup>)  
Cuore in honeycomb di alluminio ( $G_c=300$  MPa,  $\rho_c=50$  kg/m<sup>3</sup>)

Strutture Aeronautiche  
3 - Dimensionamento di travi composite e sandwich

4

**Svolgimento**

Le equazioni di equilibrio trasversale della teoria della trave sandwich (simmetrica) sono

$$A_T (w_{xx}^{(0)} + \psi_{x,x}) = -q(x)$$

$$D \psi_{x,xx} = A_T (w_x^{(0)} + \psi_x)$$

dove D è la rigidezza flessionale ed  $A_T$  quella di taglio trasversale della sezione della trave

$$D \equiv \left( \int_{A_1} E_x^{(0)} z dA - \int_{A_2} E_x^{(0)} z dA \right) h/2$$

$$A_T \equiv \int_A G_{xz} dA$$

Nel caso in esame, le facce sono isotrope ed identiche ( $h_F, E_F$ ) per cui

$$D \equiv b \left( \int_{+h/2}^{+h/2+h_F} E_F z dz - \int_{-h/2-h_F}^{-h/2} E_F z dz \right) \frac{h}{2} = \frac{E_F b h}{2} \left[ \frac{(h/2+h_F)^2 - (h/2)^2}{2} - \frac{((-h/2)^2 - (-h/2-h_F)^2)}{2} \right] = \dots$$

Per quello che riguarda la rigidezza  $A_T$ , si ha semplicemente

$$A_T = G_c b h$$

**Svolgimento**

SS	Trave isotropa e composita (Eulero-Bernoulli)	Trave sandwich
Freccia	$w^{(0)}(x) = \frac{qL^4}{24D} [\eta^4 - 2\eta^3 + \eta]$	$w^{(0)}(x) = \frac{qL^4}{24D} \left[ (\eta^4 - 2\eta^3 + \eta) + \frac{12D}{A_T L^2} (-\eta^2 + \eta) \right]$
Rotazione sezione	$w_x^{(0)}(x) = \frac{qL^3}{24D} [4\eta^3 - 6\eta^2 + 1]$	$\psi_x(x) = \frac{qL^3}{24D} [-4\eta^3 + 6\eta^2 - 1]$
$W_{max}$	$\frac{5qL^4}{384D}$	$\frac{5qL^4}{384D} + \frac{qL^2}{8A_T}$
$\sigma_{max}$	$E \frac{h}{2} \frac{qL^2}{8D}$	$E_F \frac{h}{2} \frac{qL^2}{8D}$

$$\eta \equiv \frac{x}{L}$$

**Svolgimento**

Determinate la freccia e la rotazione,  $w^{(0)}(x)$  e  $\psi_x(x)$ , è possibile determinare la tensione (assiale) con la solita procedura (ristretta alle sole facce)

$$\epsilon_{xx}^{(0)}(x,z) = -\epsilon_{xx}^{(0)}(x,z) = u_{xx}^{(0)}(x) + (h/2) \psi_{x,xx}(x)$$

$$\sigma_{xx}^{(0)}(x,z) = -\sigma_{xx}^{(0)}(x,z) = E_F (h/2) \psi_{x,xx}(x)$$

La tensione assiale, per ogni stazione x, ha due soli valori (uguali ed opposti) sulle due facce

Dunque la massima tensione assiale si ha dove è massima la curvatura ( $\psi_{x,xx}$ ), cioè ancora una volta dove è massimo il momento flettente

$$M = D \psi_{x,xx}$$

$$\sigma_{max} \equiv \max_{x,z} (\sigma_{xx}^{(0)}(x,z)) = E_F \frac{h}{2} \max_x (\psi_{x,xx}(x))$$

**Svolgimento**

CF	Trave isotropa e composita (Eulero-Bernoulli)	Trave sandwich
Freccia	$w^{(0)}(x) = \frac{qL^4}{24D} [\eta^4 - 4\eta^3 + 6\eta^2]$	$w^{(0)}(x) = \frac{qL^4}{24D} \left[ (\eta^4 - 4\eta^3 + 6\eta^2) + \frac{12D}{A_T L^2} (-\eta^2 + 2\eta) \right]$
Rotazione sezione	$w_x^{(0)}(x) = \frac{qL^3}{24D} [4\eta^3 - 12\eta^2 + 12\eta]$	$\psi_x(x) = \frac{qL^3}{24D} [-4\eta^3 + 12\eta^2 - 12\eta]$
$W_{max}$	$\frac{qL^4}{8D}$	$\frac{qL^4}{8D} + \frac{qL^2}{2A_T}$
$\sigma_{max}$	$E \frac{h}{2} \frac{qL^2}{2D}$	$E_F \frac{h}{2} \frac{qL^2}{2D}$

$$\eta \equiv \frac{x}{L}$$

### ESERCITAZIONE (3)

#### DIMENSIONAMENTO DI TRAVI COMPOSITE E SANDWICH

Caso 1a) → trave isotropa monostrato semplicemente appoggiata

$$h = 25 \text{ mm}$$

lega di alluminio ( $E = 73000 \text{ MPa}$ ,  $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$ )

Schema strutturale:



$$L = 500 \text{ mm}$$

$$b = 25 \text{ mm}$$

$$q = 5000 \text{ N/m}$$

l'equazione di equilibrio da cui si parte è la seguente:

$$D w''''(x) = q(x) \rightarrow \text{si è eliminata la dipendenza da } y$$

Equazione di equilibrio trasversale della teoria di Eulero-Bernoulli

Per travi monostrato si ha che:  $D \equiv EI$ , quindi l'equazione di equilibrio diventa:

$$EI w''''(x) = q(x)$$

Risolvendo quest'equazione differenziale con le opportune condizioni al contorno si ottiene l'andamento della freccia,  $w^{(0)}(x)$

$$w^{(0)}(x) = \frac{qL^4}{24D} [\eta^4 - 2\eta^3 - \eta] \text{ dove } \eta = \frac{x}{L}$$

Ponendo  $x = \frac{L}{2}$  si ottiene la freccia massima  $w_{\max}$ :

$$w_{\max} = \frac{5qL^4}{384D} = \frac{5qL^4}{384EI} = \frac{5qL^4}{384E \frac{b^3 h}{12}} = \frac{5 \cdot 5000 \cdot (500 \cdot 10^{-3})^4}{384 \cdot 73000 \cdot \frac{(25 \cdot 10^{-3})^3 \cdot 25 \cdot 10^{-3} \cdot 10^6}{12}} = 1,71 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Per la rotazione si ha invece:

$$w^{(0)'}(x) = \frac{qL^3}{24D} [4\eta^3 - 6\eta^2 + 1]$$

Per il calcolo della tensione si parte dalla relativa deformazione:

$$\epsilon_{xx}(x, z) = u_{,x}(x) - z w^{(0)''}(x)$$

$$\sigma_{xx}(x, z) = -E_x z \cdot w^{(0)''}(x)$$

$\sigma_{\max}$  si trova in corrispondenza del massimo valore  $w^{(0)''}(x)$  e di  $z$ .  
 $w^{(0)''}(x)$  massimo si ha in corrispondenza del massimo momento flettente, infatti:

$$M = -D w^{(0)''}(x)$$

Per la trave semplicemente appoggiata  $M_{\max}$  (e quindi la massima curvatura) si ha in corrispondenza della stazione  $x = \frac{L}{2}$ . Una volta scelta la sezione

lungo  $x$  occorre determinare la quota  $z$  che massimizza ulteriormente la tensione. Per la trave monostrato  $z = \pm \frac{h}{2}$  poiché la tensione è lineare in  $z$ .  
Si ha quindi:

$$|\sigma_{\max}| \equiv \max_{x,z} (\sigma_{xx}(x, z)) = E \frac{h}{2} \max_x (w^{(0)''}(x)) = E \frac{h}{2} \frac{qL^2}{8D}$$

$$|\sigma_{\max}| = E \frac{h}{2} \frac{qL^2}{8D} = E \frac{h}{2} \frac{qL^2}{2 \frac{b^3 h}{12}} = 25 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{5000 \cdot (500 \cdot 10^{-3})^2}{4 \cdot \frac{(25 \cdot 10^{-3})^3}{12}} = 6 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2 = 60 \text{ MPa}$$

Caso 2a) Trave composta regolare semplicemente appoggiata

Lo schema strutturale è lo stesso della trave monostrato

Anche per la trave composta è possibile utilizzare la teoria di Eulero-Bernoulli per trovare flessione, rotazione e  $\sigma$ .

Affinché la trave composta abbia la stessa flessione max della trave monostrato occorre dimensionarla con un opportuno spessore  $R$  totale.

Partiamo dall'equazione di  $w^{(0)}(x)$ , sostituiamo  $x = \frac{L}{2}$  come per la trave monostrato e otteniamo:

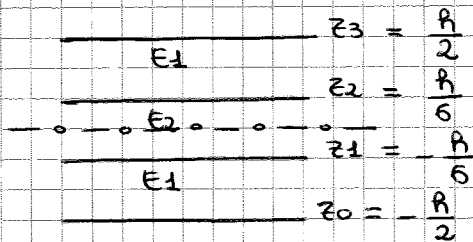
$$w_{\max} = \frac{5qL^4}{384D}$$

Come  $w_{\max}$  inseriamo quella della trave monostrato ed estraiamo l'incognita  $R$  da  $D$ , abbiamo infatti:

$$D = b \sum_{k=1}^3 \frac{1}{3} (z_k^3 - z_{k-1}^3) E_k$$

Per la trave composta si ha:  $E_1 = 111000 \text{ MPa}$   
 $E_2 = 8000 \text{ MPa}$   
 $\rho = 1500 \text{ kg/m}^3$   
Orientamento fibre:  $0^\circ/90^\circ/0^\circ$

Lo spessore di ogni strato è pari ad  $\frac{R}{3}$  (laminazione regolare) ed il piano medio è il piano neutro ( $z = \frac{R}{2}$ ).



Si ha dunque:

$$\begin{aligned} D &= b \left[ E_1 \cdot \frac{1}{3} (z_1^3 - z_0^3) + E_2 \frac{1}{3} (z_2^3 - z_1^3) + E_1 \frac{1}{3} (z_3^3 - z_2^3) \right] = \\ &= b \left[ E_1 \cdot \frac{1}{3} \left( \left( -\frac{R}{6} \right)^3 - \left( -\frac{R}{2} \right)^3 \right) + E_2 \frac{1}{3} \left( \left( \frac{R}{6} \right)^3 - \left( -\frac{R}{6} \right)^3 \right) + E_1 \frac{1}{3} \left( \left( \frac{R}{2} \right)^3 - \left( \frac{R}{6} \right)^3 \right) \right] = \\ &= b \left[ E_1 \cdot \frac{13}{324} R^3 + E_2 \frac{1}{324} R^3 + E_1 \frac{13}{324} R^3 \right] = \\ &= b \left[ E_1 \frac{13}{162} R^3 + E_2 \frac{1}{324} R^3 \right] = b \left( \frac{13}{162} E_1 + \frac{1}{324} E_2 \right) R^3 = \\ &= 25 \cdot 10^3 \left( \frac{13}{162} 111000 \cdot 10^6 + \frac{1}{324} \cdot 8000 \cdot 10^6 \right) R^3 = (2,23 \cdot 10^8) R^3 \end{aligned}$$

Sostituisco l'espressione trovata per  $D$  nella relazione di  $w_{\max}$  e ricavo lo spessore totale  $R$ :

$$R = \sqrt[3]{\frac{5qL^4}{384 \cdot (2,23 \cdot 10^8) \cdot w_{\max}}} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 500 \cdot (500 \cdot 10^{-3})^4}{384 \cdot (2,23 \cdot 10^8) \cdot 1,71 \cdot 10^{-3}}} = 0,022 \text{ m} = 22 \text{ mm}$$

Anche per il caso di trave composita incastrata si ha che le tensioni massime si trovano in corrispondenza di  $z = \pm \frac{h}{2}$ , ad una stazione posta però in  $x=0$ .

La massa della trave è uguale al caso precedente

Caso 3a) Trave sandwich semplicemente appoggiata

Le equazioni di equilibrio trasversale per la trave sandwich (simmetrica) sono:

$$A_T (w^{(0)''''} + \psi_{x,x}) = -q(x)$$

$$D \psi_{x,xx} = A_T (w^{(0)'} + \psi_x)$$

Risolviendo queste equazioni differenziali ed inserendo le opportune condizioni al contorno, che per la trave sandwich semplicemente appoggiata sono:

$$\begin{aligned} w^{(0)}(0) &= 0 \\ \psi_{x,x}(0) &= 0 \\ w^{(0)}(L) &= 0 \\ \psi_{x,x}(L) &= 0 \end{aligned}$$

Si ottengono le relazioni per la freccia  $w^{(0)}$  e per la rotazione  $\psi_x$ .

$$w^{(0)}(x) = \frac{qL^4}{24D} \left[ (\eta^4 - 2\eta^3 + \eta) + \frac{12D}{A_T L^2} (-\eta^2 + \eta) \right] \quad \eta = \frac{x}{L}$$

$$\psi_x(x) = \frac{qL^3}{24D} [-4\eta^3 + 6\eta^2 - 1]$$

Per la trave semplicemente appoggiata la freccia massima si ha in corrispondenza di  $x = \frac{L}{2}$

$$w_{\max} = \frac{5qL^4}{384D} + \frac{qL^2}{8A_T}$$

dove  $A_T = G_c b h$

$$D = \frac{E_F b h}{2} \left[ \frac{(h/2 + R_F)^2 - (h/2)^2}{2} - \frac{(h/2)^2 - (h/2 - R_F)^2}{2} \right]$$

Dati trave sandwich:  $h$  = spessore del cuore (variabile)

$$R_F = 1 \text{ mm o } 2 \text{ mm}$$

$$E_F = 73000 \text{ MPa}$$

$$\rho_F = 2700 \text{ Kg/m}^3$$

$$G_c = 300 \text{ MPa}$$

$$\rho_c = 50 \text{ Kg/m}^3$$

L'unica incognita contenuta in  $w_{\max}$  è  $h$ , quindi inserendo la freccia max calcolata per la trave isotropa si trova lo spessore del cuore  $h$  per cui la trave sandwich ha la stessa freccia.

$$\text{Otteniamo } h_1 = 57 \text{ mm con } R_F = 1 \text{ mm}$$

$$h_2 = 42 \text{ mm con } R_F = 2 \text{ mm}$$

I calcoli sono stati fatti con MATLAB  $\rightarrow$  script in allegato

$$D_1 = 3025 \text{ Nm}$$

$$D_2 = 3355 \text{ Nm}$$

Per le calcoli di  $\sigma_{max}$  il procedimento è uguale al punto precedente, ma ora il momento flettente è massimo per  $x=0$ , si ottiene:

$$\sigma_{max_1} = E F \frac{R_1}{2} \frac{qL^2}{2D_1} \approx 456 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{max_2} = E F \frac{R_2}{2} \frac{qL^2}{2D_2} \approx 307 \text{ MPa}$$

$$\text{Massa trave: } m_1 = 2\rho_F R_1 bL + \rho_c R_1 bL = 0,101 \text{ Kg}$$

$$m_2 = 2\rho_F R_2 bL + \rho_c R_2 bL = 0,159 \text{ Kg}$$

```
close all
clear all
clc

%Trave sandwich incastrata ad un estremo

a = 0;
b = 50;
k = 0;
h0 = (a+b)/2;
k_max = 1000;
tol = 10^-6;
tolleranza = abs(b-a);

hF = 2*10^-3;
EF = 73000*10^6;
base=25*10^-3;
L = 500*10^-3;
q = 5000;
Gc = 300*10^6;
w_max = 0.016;

D = @(h) (((EF*base*h)/2)*(((h/2 + hF)^2 - (h/2)^2)/2) - ((-h/2)^2 - (-h/2-hF)^2)
/2));
At = @(h) Gc*base*h;

f = @(h) (q*L^4)/(8*D(h)) + (q*L^2)/(2*At(h)) - w_max;

while k<k_max && tolleranza>tol
    if f(a)*f(h0)<0

        a = a;
        b = h0;
        h0 = (a+b)/2;

    else if f(a)*f(h0) > 0

        b = b;
        a = h0;
        h0 = (a+b)/2;

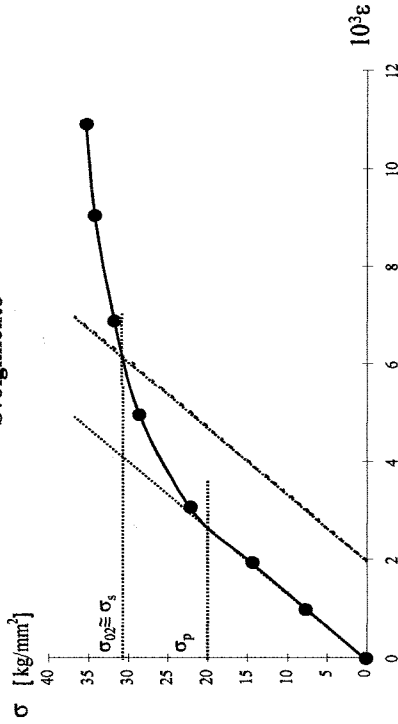
    end
end
k = k+1;
tolleranza = abs(b-a);

end

k
h = h0
```



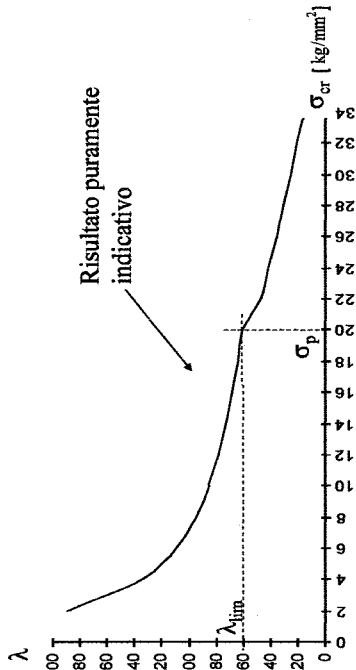
**Svolgimento**



Dal diagramma tensione-deformazione (non completo) è possibile ricavare:

- $\sigma_p$ : ordinata del punto in cui la curva si allontana dall'andamento rettilineo;
- $\sigma_s$ : ordinata del punto a cui corrisponde una deformazione permanente dello 0.2% (dato che il materiale non presenta un'effettiva tensione di snervamento si assume come limite convenzionale di snervamento la  $\sigma_{0.2}$ ).

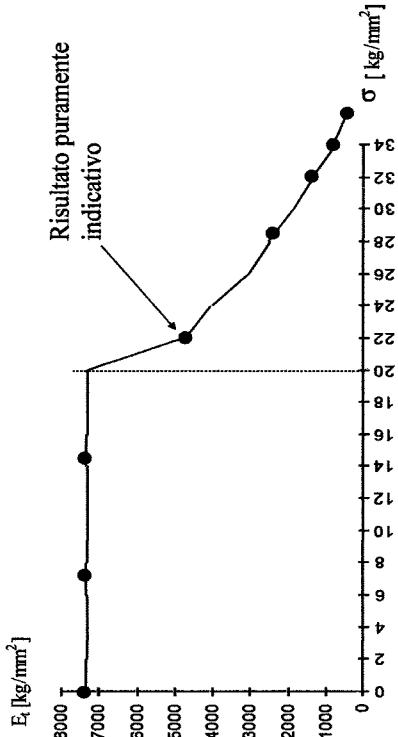
**Svolgimento**



Il diagramma può essere usato per calcolare la tensione critica (instabilità globale) nota la snellezza (si ricordi anche la formula di Johnson). Dato che la geometria della sezione è fissa, possiamo determinare  $\rho$  (raggio d'inerzia) conoscendo il piano di inflessione;  $L$  (lunghezza libera di inflessione), invece, dipende dalle condizioni di vincolo dei due estremi dell'asta.

**Svolgimento**

Ricaviamo ora il modulo tangente del materiale  $E_p$ , ovvero la pendenza della curva  $\sigma(\epsilon)$  nella zona non lineare, al variare della tensione. Sono possibili vari metodi: metodo grafico (rapporto incrementale), interpolazione con polinomi (di grado non elevato però), metodo dei minimi quadrati, etc.



**Svolgimento**

Per calcolare  $\rho$  dobbiamo ricordarci che

$$\rho = \sqrt{\frac{J}{A}}$$

Il valore di  $J$  da utilizzare nella formula precedente deve essere pari al momento di inerzia relativo al piano nel quale effettivamente avviene l'inflessione dell'asta per instabilità globale. In mancanza di altre indicazioni, bisogna usare il minimo  $J$  tra gli infiniti possibili valori, poiché corrisponde alla tensione critica minima. E' noto che i due momenti di inerzia centrali sono uno il minimo e uno il massimo; è quindi necessario calcolare il baricentro della sezione e poi determinare quali sono gli assi centrali ed i corrispondenti momenti di inerzia. Si avrà allora

$$\rho = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}}$$

Per il calcolo di  $\lambda$  bisogna tenere presente che

$$\lambda = \frac{L}{\rho} \quad \text{con } L = \delta \cdot \ell \quad \text{e } \delta = \begin{cases} 1 & \text{estremi appoggiati} \\ 0.5 & \text{estremi incastrati} \end{cases}$$

### Svolgimento

#### Instabilità globale del corrente (con striscia collaborante)

La procedura è la stessa usata in precedenza per l'asta: si calcola il baricentro della sezione costituita da corrente e striscia collaborante, si calcola il raggio di inerzia rispetto all'asse  $x'$  (l'inflessione del corrente avviene intorno a tale asse perché minima è la rigidità del pannello), si calcola  $L$  a partire dalla lunghezza geometrica (estremità appoggiate), si calcola  $\lambda$  e quindi  $\sigma_{cr}$  dal solito diagramma (parità di materiale)

#### Instabilità locale del corrente (con striscia collaborante)

Vale la formula di Vallat; in questo caso il lembo libero è il tratto verticale del corrente

#### Instabilità torsionale del corrente (con striscia collaborante)

Per calcolare la posizione del centro di taglio dell'area complessiva trascuriamo la striscia collaborante; in questo modo il centro di taglio è di immediata individuazione (?). Si può allora scrivere:

$$J_{Pt} = J_{PG} + A(x_t'^2 + y_t'^2) = J_{x'x'} + J_{y'y'} + A(x_t'^2 + y_t'^2)$$

dove siamo tornati a considerare l'area completa

## Instabilità globale

Calcolo l'andamento della snellezza  $A = A(\sigma_{cr})$

$$N_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{L^2} \Rightarrow N_{cr} = \pi^2 \frac{ES\rho^2}{L^2} \Rightarrow \frac{N_{cr}}{S} = \pi^2 \frac{E}{(L/\rho)^2} \quad \text{Carico critico euleriano}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{A^2} \Rightarrow A = \pi \sqrt{\frac{E'}{\sigma_{cr}}}$$

$$A = \begin{cases} \pi \sqrt{\frac{E'}{\sigma_{cr}}} & 0 \leq \sigma_{cr} \leq \sigma_p \quad \text{campo lineare} \\ \pi \sqrt{\frac{E_t(\sigma_{cr})}{\sigma_{cr}}} & \sigma_{cr} > \sigma_p \quad \text{campo non lineare} \end{cases}$$

$$A_{lim} = \pi \sqrt{\frac{E'}{\sigma_p}}$$

Asta in DURAL:  $E = 73000 \text{ MPa}$   
 $\sigma_p = 200 \text{ MPa}$  } Ricavabili anche dal grafico  $\sigma$ - $\epsilon$  tracciato per punti sperimentali.

$$A_{lim} = \pi \sqrt{\frac{73000 \text{ MPa}}{200 \text{ MPa}}} = 60,02$$

Per calcolare  $\rho$  occorre ricordare che:  $\rho = \sqrt{\frac{J}{S}}$

Il piano di minima rigidità è individuato da  $J_{min}$ . In mancanza di altre indicazioni esso si trova in corrispondenza di  $J_{min}$ , poiché corrisponde alla tensione critica minima. Poiché nel caso di sez. simmetrica i momenti centrali di inerzia sono uno minimo e l'altro massimo, si ha che  $J_{min}$  si trova in corrispondenza di  $J_{min} = J_x$ . Ci sarà quindi cedimento prima attorno all'asse  $x$ .

$$\rho = \sqrt{\frac{J_{min}}{S}} = \sqrt{\frac{26656 \text{ mm}^4}{275 \text{ mm}^2}} = 9,85 \text{ mm}$$

Vediamo ora in che campo cederà l'asta nelle due situazioni

Asta con due appoggi:

$$L_{eff} = \delta l \quad \delta = 1 \Rightarrow L_{eff} = l$$

$$A = \frac{L_{eff}}{\rho} = \frac{900 \text{ mm}}{9,85 \text{ mm}} = 91,37$$

Poiché  $A > A_{lim}$  l'asta cederà in campo lineare elastico  $\rightarrow$  asta lunga

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{A^2} = \frac{\pi^2 \cdot 73000}{(91,37)^2} = 86,30 \text{ MPa} \quad (8,63 \text{ Kg/mm}^2)$$

Asta incastrata alle estremità

$$L_{eff} = \frac{l}{2} \quad \text{poiché } \delta = \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{L_{eff}}{\rho} = \frac{450 \text{ mm}}{9,85 \text{ mm}} = 45,69$$

Poiché  $A < A_{lim}$  l'asta cederà in campo non lineare  $\rightarrow$  asta corta

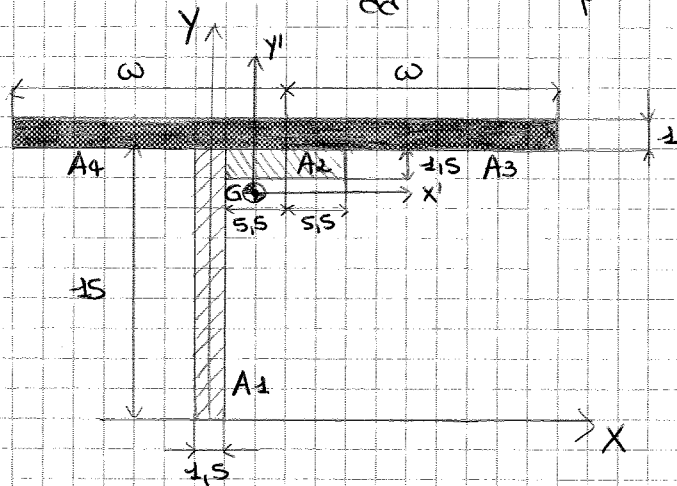
$$\sigma_{cr} = \pi^2 \frac{E_t}{A^2}$$

$$J_t = \frac{1}{3} (2 \cdot b s^3 + P s^3) = \frac{1}{3} (2,5)^3 \cdot (2 \cdot 30 + 50) = 572,92 \text{ mm}^4$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{73000 \text{ MPa}}{2(1+0,3)} = 28076 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{cr} = G \frac{J_t}{J_p} = \frac{572,92}{255537} \cdot 28076 = 62,95 \text{ MPa} = 6,3 \text{ Kg/mm}^2$$

② Verifica di un cemento soggetto a compressione



DURAL:  $E = 73000 \text{ MPa}$   
 $\sigma_p = 20 \text{ Kg/mm}^2$   
 $\sigma_y = 30 \text{ Kg/mm}^2$   
 $L = 345 \text{ mm}$

Calcolo sniscia collaborante:

$$\sigma_y = K E \left( \frac{s}{2\omega} \right)^2 \rightarrow \omega = \frac{s}{2} \sqrt{\frac{K E}{\sigma_y}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3,62 \cdot 73000}{30}} = 14,84 \text{ mm}$$

$$K = K(m=r) = \frac{4\pi^2}{12(1-\nu^2)} = 3,615 \approx 3,62$$

$$\omega_1 = \omega_2 = 14,84 \text{ mm}$$

Instabilità globale

L'area resistente a compressione è costituita dalla somma della sezione del cemento e della sniscia collaborante del pannello.

Non viene usata l'ipotesi di parete sottile. Tabella dati in allegato

$$x_G = \frac{S_{y \text{ TOT}}}{A_{\text{TOT}}} = 4,20 \text{ mm}$$

$$y_G = \frac{S_{x \text{ TOT}}}{A_{\text{TOT}}} = 12,58 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned} I_x &= \sum (I_{xi} + A d_i^2) = \frac{1}{12} (15)^3 (1,5) + 27,5 (7,5 - 12,58)^2 + \\ &+ \frac{1}{12} (11) (1,5)^3 + 16,5 (14,25 - 12,58)^2 + \\ &+ \frac{1}{12} (14,83) (1)^3 + 14,83 (15,5 - 12,58)^2 + \\ &+ \frac{1}{12} (14,83) (1)^3 + 14,83 (15,5 - 12,58)^2 = \\ &= 1002,52 + 49,11 + 127,68 + 127,68 = 1307 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$I_{pt} = I_x + I_y + A_{tot} (x_t^2 + y_t^2) =$$
$$= 1307 + 2935,85 + 68,66 \cdot ((-4,20)^2 + (-1,67)^2) = 5645,49 \text{ mm}^4$$

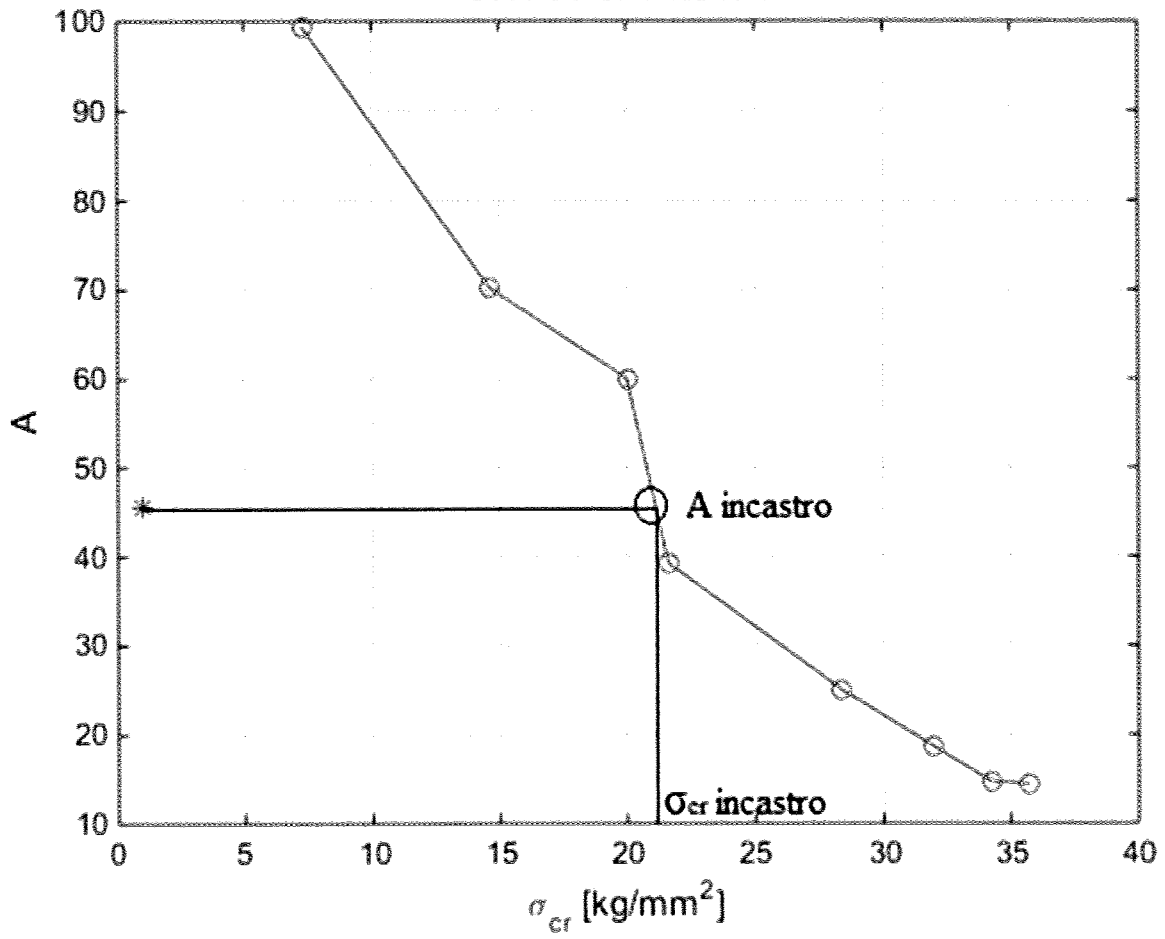
$$\sigma_{cr} = G \frac{I_t}{I_{pt}} = 28046 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot \frac{39,14}{5645,49} = 194,65 \text{ MPa} = 19,47 \text{ kg/mm}^2$$

```
for i = 5:length(y1)

    A(i) = pi*sqrt(E_t(i)/y1(i));
end

figure(3)
plot(y1, A, '-o'), grid on, hold on
A_cr = 45.69;
plot(A_cr, '*')
xlabel('\sigma_c_r [kg/mm^2]')
ylabel ('A')
title('Grafico snellezza A')
```

**Grafico snellezza A**





## **Stabilità a compressione e taglio di pannelli alari**



### **Contenuto dell'esercitazione**

L'esercitazione riguarda l'analisi di stabilità di alcuni pannelli presenti in un cassone alare e si divide in tre fasi:

1. analisi della stabilità a compressione di un pannello dorsale;
2. analisi della stabilità a taglio di un pannello del longherone anteriore;
3. analisi dello stato di sollecitazione dei rivetti.

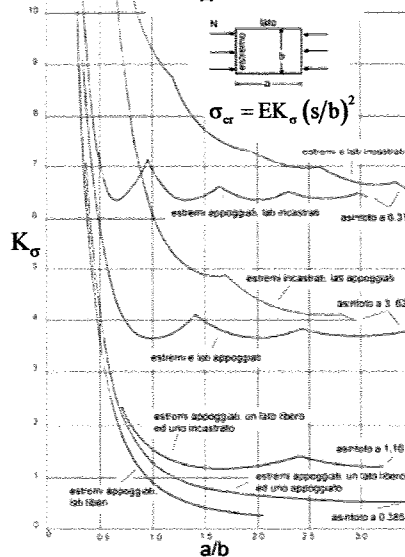
### **Scopo dell'esercitazione**

L'esercitazione ha come scopo l'applicazione delle formule per lo studio dell'instabilità dei pannelli soggetti a compressione e taglio e la comprensione del modo di lavorare tipico dei pannelli alari.





### Svolgimento



### Svolgimento

La tensione critica di taglio per un pannello isotropo si calcola con la seguente formula

$$\tau_{cr} = EK_t \left( \frac{s}{b} \right)^2$$

dove E, s e b (lato minore) sono ancora una volta dati noti per il pannello B mentre  $K_t$  si può calcolare conoscendo a/b e supponendo che il pannello sia semplicemente appoggiato sui 4 lati (vedere grafico nella slide successiva)

La tensione sollecitante è ricavabile dal flusso di taglio, determinato nell'esercitazione 1, ricordando che lo spessore del pannello è  $s=1$  mm:

$$q_{61}^{TOT} = +27.79 N / mm \Rightarrow \tau_{61}^{TOT} = q_{61}^{TOT} / s = +27.79 N / mm^2$$

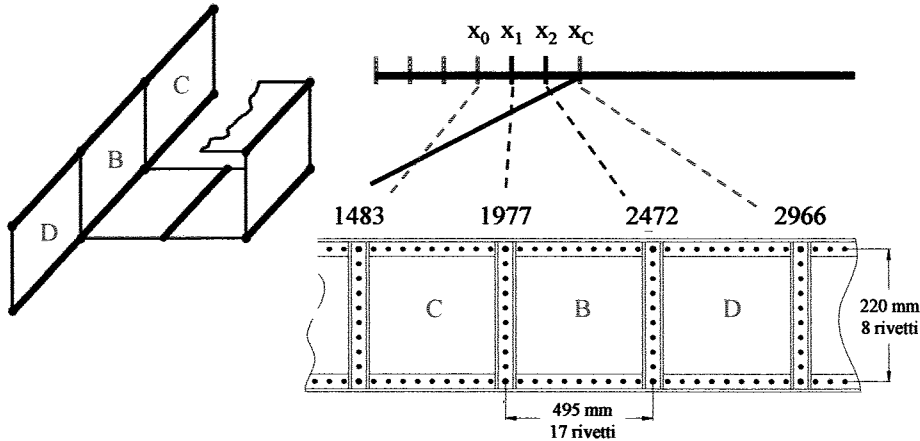
Anche in questo caso la tensione sollecitante è maggiore di quella critica e il pannello lavora in campo post-critico

E' quindi possibile determinare lo stato di sollecitazione interno al pannello, riconoscendolo in campo di tensione diagonale parziale



### Svolgimento

Per determinare le forze applicate ai rivetti del pannello B è necessario conoscere anche lo stato di sollecitazione nei pannelli adiacenti C e D (campate  $x_0-x_1$  e  $x_2-x_C$ )



### Svolgimento

Le tensioni critiche dei pannelli C e D coincidono con quella del pannello B. Le tensioni agenti su C e D si possono determinare a partire da quelle agenti su B e conoscendo l'andamento delle caratteristiche di sollecitazione lungo la semiala

In tutti i pannelli della struttura alare, il flusso di taglio sollecitante è la somma (algebrica) di un flusso proporzionale al momento torcente medio sulla campata e di un flusso proporzionale al taglio medio sulla stessa campata

$$q_{ij}^{TOT} = q_{M_i} + q_{ij}$$

$$q_{ij}^{TOT} = \alpha \cdot M_{im} + \beta_{ij} \cdot T_m$$

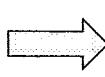
Per pannelli compresi tra gli stessi correnti, i coefficienti  $\alpha$  e  $\beta_{ij}$  non cambiano. I pannelli B, C e D sono compresi tra i correnti 1 e 6 per cui possiamo determinare  $\alpha$  e  $\beta_{61}$  nel pannello B (vedere risultati esercitazione 1) ed usarli poi per i pannelli C e D

$$M_{im} = -2.56 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

$$T_m = -17347 \text{ N}$$

$$q_{M_i} = -11.64 \text{ N/mm}$$

$$q_{61} = +39.43 \text{ N/mm}$$



$$\alpha = q_{M_i} / M_{im} = +4.55 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^{-2}$$

$$\beta_{61} = q_{61} / T_m = -2.27 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^{-1}$$

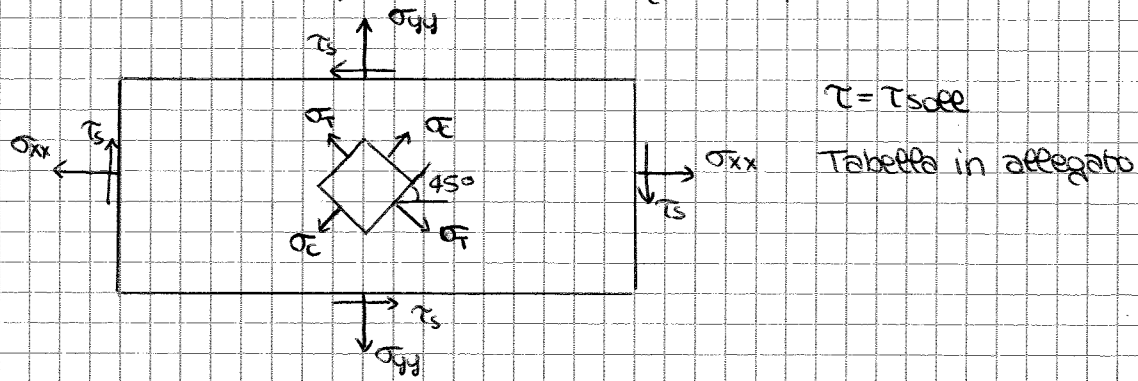


### Svolgimento

Noto lo stato di sollecitazione dei pannelli B, C e D, le forze applicate ai rivetti del pannello B si calcolano come segue:

- per ogni lato dei tre pannelli si calcolano le forze risultanti orizzontale e verticale
- dividendo tali due forze per il numero di rivetti presenti sul lato, si ottengono le forze orizzontale e verticale agenti sul singolo rivetto e dovute al singolo pannello
- per i rivetti interni dei due lati orizzontali del pannello B non ci sono altri pannelli che contribuiscono, possiamo calcolare la forza risultante agente sul rivetto
- per i rivetti interni dei due lati verticali del pannello B bisogna sommare i contributi dovuti ai lati verticali dei pannelli adiacenti
- per i 4 rivetti di vertice del pannello B ci sono 4 contributi relativi ai 4 lati di pannelli adiacenti che in tali vertici si toccano

Possiamo quindi determinare lo stato di sollecitazione interno al pannello, riconoscendolo in campo di tensione diagonale parziale.



a) Campo tangenziale puro  $\rightarrow$  pre-critico

c) Campo diagonale completo  $\rightarrow$  post-critico per valori molto elevati di  $\tau_s$

b) Campo diagonale parziale  $\rightarrow$  situazioni intermedie, esso è somma di a) fino a  $\tau_{cr}$  e di c) per la differenza  
 $\Delta\tau = \tau_s - \tau_{cr}$

$$\Delta\tau = \tau_s - \tau_{cr} = \tau_{s1} - \tau_{cr} = 27,79 - 8,59 = 19,2 \text{ MPa}$$

Tabella in allegato

③ Per determinare le forze applicate ai livelli del pannello B è necessario conoscere anche lo stato di sollecitazione nei pannelli adiacenti C e D, posti nelle campate  $x_0-x_1$  e  $x_2-x_3$

$$x_0 = 1483 \text{ mm}$$

$$x_3 = 2966 \text{ mm}$$

stessa geometria  
stesso materiale  
stesse BC

Le tensioni critiche dei pannelli C e D coincidono con quella del pannello B. Le tensioni agenti su C e D si possono determinare a partire da quelle agenti su B e conoscendo l'andamento delle caratteristiche di sollecitazione lungo la semiala.

In tutti i pannelli della struttura alare, il flusso di taglio sollecitante è la somma algebrica di un flusso proporzionale al momento torcente medio sulla campata e di un flusso proporzionale al taglio medio sulla stessa campata.

$$q_{ij}^{TOT} = q_{Mi} + q_{Tj} = \alpha M_{ij} + \beta_j T_{ij}$$

Per pannelli compresi tra gli stessi comenti, i coefficienti  $\alpha$  e  $\beta_j$  non cambiano. I pannelli B, C e D sono compresi tra i pannelli 1 e 6 per cui possiamo determinare  $\alpha$  e  $\beta_1$  nel pannello B ed usare poi per i pannelli C e D.

Dalle esercitazione ① abbiamo

	$x_0 = 1483$	$x_1 = 1977$	$x_2 = 2472$	$x_3 = 2966$
T [N]	-13299	-15996	-18699	-21396
M <sub>t</sub> [Nmm]	$-2,964 \cdot 10^5$	$-2,694 \cdot 10^5$	$-2,426 \cdot 10^5$	$-2,16 \cdot 10^5$

- Per i rivetti interni dei due lati orizzontali del pannello B non ci sono altri pannelli che contribuiscono, possiamo calcolarne la forza risultante agente sul rivetto

$$F_{x1}^1 = - \frac{\tau_{soe}^B}{17} \cdot a \cdot s = \frac{27,79}{17} \cdot 495 \cdot 1 = -809,18 \text{ N} = -F_{x1}^3$$

$$F_{y1}^1 = + \frac{\sigma_{yB}}{17} \cdot a \cdot s = + \frac{19,2}{17} \cdot 495 \cdot 1 = +559,06 \text{ N} = -F_{y1}^3$$

- Per i rivetti interni dei due lati verticali nel pannello B bisogna sommare i contributi dovuti ai lati verticali dei pannelli adiacenti

$$F_{x1}^4 = - \frac{\sigma_{xB} - \sigma_{xC}}{8} \cdot b \cdot s = - \frac{19,2 - 11,78}{8} \cdot 220 \cdot 1 = -204,05 \text{ N}$$

$$F_{y1}^4 = + \frac{\tau_{soe}^B - \tau_{soe}^C}{8} \cdot b \cdot s = + \frac{27,79 - 20,37}{8} \cdot 220 \cdot 1 = +204,05 \text{ N}$$

$$F_{x1}^2 = - \frac{\sigma_{xD} - \sigma_{xB}}{8} \cdot b \cdot s = - \frac{26,5 - 19,2}{8} \cdot 220 \cdot 1 = -200,75$$

$$F_{y1}^2 = \frac{\tau_{soe}^D - \tau_{soe}^B}{8} \cdot b \cdot s = \frac{35,09 - 27,79}{8} \cdot 220 \cdot 1 = 200,75 \text{ N}$$

- Per i 4 rivetti di vertice del pannello B ci sono 4 contributi relativi ai 4 lati di pannello adiacenti che in tali vertici si toccano

$$F_{v2}^X = F_{x1}^1 + F_{x2}^2 - \frac{\tau_{soe}^D}{17} \cdot a \cdot s = -809,18 - 200,75 - \frac{35,09}{17} \cdot 495 \cdot 1 = -2032 \text{ N}$$

$$F_{v2}^Y = F_{y1}^1 + F_{y2}^2 + \frac{\sigma_{yD}}{17} \cdot a \cdot s = 559,06 + 200,75 + \frac{26,5}{17} \cdot 495 \cdot 1 = 1531,43 \text{ N}$$

$$F_{v2}^X = F_{x2}^2 + F_{x3}^3 + \frac{\tau_{soe}^D}{17} \cdot a \cdot s = -200,75 + 809,18 + \frac{35,09}{17} \cdot 95 = 1630,2 \text{ N}$$

$$F_{v2}^Y = F_{y2}^2 + F_{y3}^3 - \frac{\sigma_{yD}}{17} \cdot a \cdot s = 200,75 - 559,06 - \frac{26,5}{17} \cdot 495 = -1130 \text{ N}$$

$$F_{v3}^X = F_{x3}^3 + F_{x4}^4 + \frac{\tau_{soe}^C}{17} \cdot a \cdot s = 809,18 - 204,05 + \frac{20,37}{17} \cdot 495 = 1200 \text{ N}$$

$$F_{v3}^Y = F_{y3}^3 + F_{y4}^4 - \frac{\sigma_{yC}}{17} \cdot a \cdot s = -559,06 + 204,05 - \frac{11,78}{17} \cdot 495 = -698,2 \text{ N}$$

$$F_{v4}^X = F_{x4}^4 + F_{x1}^1 - \frac{\tau_{soe}^C}{17} \cdot a \cdot s = -204,05 - 809,18 - \frac{20,37}{17} \cdot 495 = -1606,36 \text{ N}$$

$$F_{v4}^Y = F_{y4}^4 + F_{y1}^1 + \frac{\sigma_{yC}}{17} \cdot a \cdot s = 204,05 + 559,06 + \frac{11,78}{17} \cdot 495 = 1120,66 \text{ N}$$

- Calcolo risultanti

$$F_1^1 = \sqrt{(F_{x1}^1)^2 + (F_{y1}^1)^2} = \sqrt{(-809,18)^2 + (559,06)^2} = 983,52 \text{ N} = F_1^3$$

$$F_1^4 = \sqrt{(F_{x1}^4)^2 + (F_{y1}^4)^2} = \sqrt{(-204,05)^2 + (204,05)^2} = 288,57 \text{ N}$$

$$F_1^2 = \sqrt{(F_{x1}^2)^2 + (F_{y1}^2)^2} = \sqrt{(-200,75)^2 + (200,75)^2} = 283,90 \text{ N}$$

$$F_{v1} = \sqrt{(F_{v2}^X)^2 + (F_{v2}^Y)^2} = \sqrt{(-2032)^2 + (1531,43)^2} = 2544,46 \text{ N}$$

$$F_{v2} = \sqrt{(F_{v2}^X)^2 + (F_{v2}^Y)^2} = \sqrt{(1630,2)^2 + (-1130)^2} = 1983,55 \text{ N}$$

$$F_{v3} = \sqrt{(F_{v3}^X)^2 + (F_{v3}^Y)^2} = \sqrt{(1200)^2 + (-698,2)^2} = 1368,34 \text{ N}$$

$$F_{v4} = \sqrt{(F_{v4}^X)^2 + (F_{v4}^Y)^2} = \sqrt{(-1606,36)^2 + (1120,66)^2} = 1958,64 \text{ N}$$

## PANNELLO D

	(a) Tangenziale puro ( $\tau_s < \tau_{cr}$ )	(b) Diagonale parziale ( $\tau_s = \tau_{cr}$ )	Diagonale completo ( $\tau_s > \tau_{cr}$ )
$\sigma_T$ (N/mm <sup>2</sup> )	8,59	61,59	70,18
$\sigma_c$ (N/mm <sup>2</sup> )	8,59	8,59	0
$\sigma_{xx}$ (N/mm <sup>2</sup> )	0	26,5	35,09
$\sigma_{yy}$ (N/mm <sup>2</sup> )	0	26,5	35,09

### Scrittura dei programmi

Inserimento dei dati per l'analisi:

- dati sui materiali (E);
- dati sulla geometria e sulla mesh (sezioni, coordinate dei nodi, connectivities);
- dati sui vincoli (gradi di libertà bloccati);
- dati sui carichi (carichi concentrati nei nodi)

### Scrittura dei programmi

Inserimento dei dati per l'analisi:

- dati sui materiali (E)

Per l'inserimento di questi dati, così come per quelli discussi nelle slides successive, è possibile usare una modalità alternativa a quella del comando `input`; elencarli tutti in un file `.m` che viene richiamato all'inizio dell'esecuzione del programma di analisi `ROD_FEM.m`.

```
nmat=3;  
E=[100 10 1];  
...
```

Inserimento dei dati per l'analisi:

- dati sui materiali (E)

Bisogna considerare la possibilità che la struttura sia realizzata in diversi materiali; è allora necessario inserire il numero di materiali (`nmat`) e i valori di `E` per ognuno di essi (attraverso il vettore colonna, di dimensioni `nmat x 1`, `{E}`).

```
nmat=input(' scrivi il numero di materiali diversi presenti nella struttura: ');  
for m=1:nmat  
    disp([' materiale n° ',num2str(m),' :']);  
    E(m,1)=input(' modulo elastico del materiale: ');  
end
```

### Scrittura dei programmi

Inserimento dei dati per l'analisi:

- dati sulla geometria e sulla mesh (sezioni)

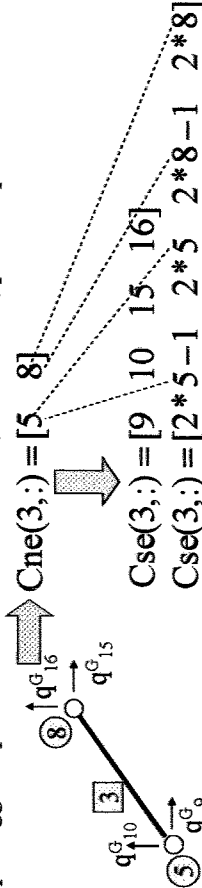
Le varie aste possono avere sezioni trasversali con aree diverse; bisogna inserire il numero di sezioni diverse (`nsez`) e l'area di ognuna (vettore colonna `nsez x 1` `{A}`).

```
nsez=input('???)  
for s=1:nsez  
    disp('???)  
    ???  
end
```

**Scrittura dei programmi**

**Calcoli preliminari:**  
• matrice di connectivity dei gradi di libertà per elemento

Per effettuare in maniera rapida l'assemblaggio, bisogna passare dalla matrice di connectivity dei nodi per elemento [Cne] (ne x 2, per ogni riga gli indici del primo e del secondo nodo dell'elemento) a quella dei gradi di libertà per elemento [Cse] (ne x 4, per ogni riga gli indici dei 4 gradi di libertà globali di quell'elemento). Il passaggio si può fare in modo automatico, notando che, per esempio

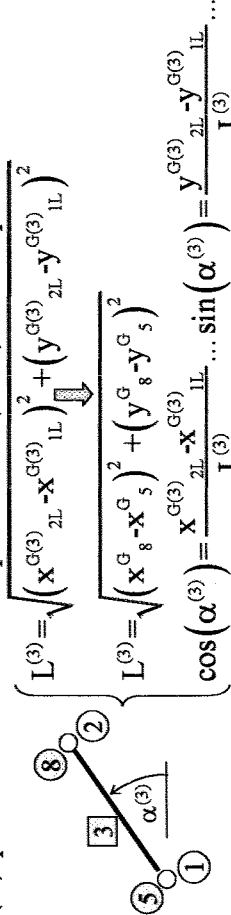


```
for e=1:size(Cne,1)
    Cse(e,:)=2*Cne(e,1)-1 ??? ;
end
```

**Scrittura dei programmi**

**Calcoli preliminari:**  
• lunghezza, cos(α) e sen(α) per ogni elemento

La lunghezza e le funzioni trigonometriche dell'angolo α per ogni elemento si ricavano sapendo due cose: (1°) quali sono i due nodi di quell'elemento ([Cne]) e (2°) quali sono le coordinate di quei due nodi ([Pn]). Per esempio



```
for e=1:n
    L(e,1)=sqrt((Pn(Cne(e,2),1)-Pn(Cne(e,1),1))^2+???);
    ca(e,1)=(???)/L(e);
    sa(e,1)=(???)/L(e);
end
```

**Scrittura dei programmi**

**Calcoli preliminari:**  
• numero di nodi, di elementi e di gradi di libertà

Il numero di nodi (nn) si trova facilmente (è il numero di righe di [Pn]).  
Il numero di elementi (ne) è altrettanto facile da calcolare (le righe di [Cne]).  
Il numero di gradi di libertà o incognite (ni) è il massimo indice presente in [Cse].

```
nn=size(Pn,1);
ne=???
ni=max(max(Cse));
```

**Scrittura dei programmi**

**Calcolo della matrice [K<sup>G</sup>] e del vettore {F<sup>G</sup>} per l'intera struttura:**

- calcolo, per ogni elemento, di [K<sup>G(e)</sup>];
- assemblaggio per ottenere [K<sup>G</sup>];
- calcolo diretto di {F<sup>G</sup>};
- calcolo delle matrici e dei vettori ridotti.



### Scrittura dei programmi

#### Risoluzione:

- calcolo statico (spostamenti nodali e reazioni vincolari)

Il calcolo statico consiste nell'uso delle sottomatrici di  $[K]$  ed  $\{F\}$  per calcolare i gradi di libertà non vincolati  $\{Qf\}$  e le reazioni vincolari  $\{Rv\}$ . Si tratta poi di ricostruire il vettore completo dei gradi di libertà  $\{Q\}$  e quello completo delle reazioni vincolari  $\{Cv\}$  (si noti che in questo caso  $\{Fev\} = \{0\}$ ).

#### Risoluzione:

- calcolo statico (spostamenti nodali e reazioni vincolari)

```
Qf=Kf\Fef;  
Rv=Kvf*Qf-Fev;  
Q(il,:)=Qf;  
Q(ib,:)=zeros(length(ib),1);  
Cv(il,:)=zeros(length(il),1);  
Cv(ib,:)=Rv;
```

### Scrittura dei programmi

#### Salvataggio dei risultati:

- salvataggio dei risultati statici

Prima di tutto bisogna inserire il nome del file nel quale si vogliono salvare i dati. Poi bisogna salvare tutte le informazioni necessarie al post-processing statico.

#### Salvataggio dei risultati:

- salvataggio dei risultati statici

```
nomeave=input(' scrivi il nome (tra apici) del file nel quale salvare i risultati: ');  
str=['save ',nomeave,' A E Pn Cpe Cse Ib Fn nn ne ni L ca sa K F Q Cv'];  
eval(str);
```

**Scrittura dei programmi**

**Tabulazione dei nodi (nodi), calcolo della deformazione, della tensione e dello sforzo normale in ogni elemento**

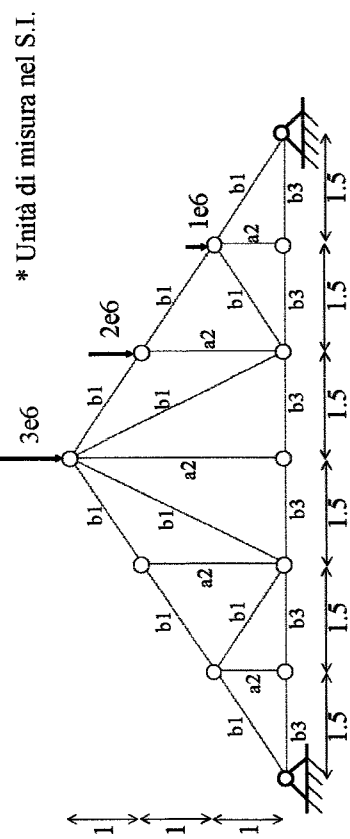
Si può creare la matrice [D] (n e x 4) contenente, in ogni riga, il numero dell'elemento, la deformazione, la tensione e lo sforzo normale in quell'elemento. Per il calcolo della deformazione si ricordino le espressioni

$$\epsilon^{(e)} = \frac{1}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{L^{(e)}_1} \\ q_{L^{(e)}_2} \end{Bmatrix} \Rightarrow \epsilon^{(e)} = \frac{1}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda^{(e)} \\ q^{(e)} \end{bmatrix}$$

Per il calcolo della tensione e dello sforzo normale, bisogna utilizzare i valori di A e di E relativi all'elemento in questione.

```
D=zeros(n,4);
D(:,1)=1:1:n;
for e=1:n
    Lambdae=???;
    D(e,2)=(1/L(e))*[-1 1]*Lambdae*q(:,e);
    D(e,3)=???;
    D(e,4)=???;
end
```

**Applicazione**



\* Unità di misura nel S.I.

Sezioni\* (circolari cave di raggio R e spessore s):

- a.  $R=5e-2, s=5e-3;$
  - b.  $R=3e-2, s=5e-3.$
- Materiali\*:
1. Acciaio ( $E=210e9, \nu=0.3, \rho=7.96e3$ );
  2. Titanio ( $E=105e9, \nu=0.3, \rho=4.50e3$ );
  3. Alluminio ( $E=73e9, \nu=0.3, \rho=2.70e3$ ).

Si determinino:

- spostamenti dei nodi;
- reazioni vincolari;
- deformazioni delle aste;
- tensioni nelle aste;
- sforzi normali nelle aste.