



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1820A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Chiesa Francesco

MATERIA: Topografia - prof. Bellone

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Tuttamento statistico delle misure

LEZIONE 5/3/15

G. Belloni

Concetto di probabilità

$F(x)$

$f(x)$

distribuzione

densità di probabilità

è la probabilità che estruendo a caso una x questa x sia minore di x_0 , ovvero in simboli:

$$F(x_0) = P(x \leq x_0)$$

x, x_0 valori argomentali: valori della caratteristica (resistenza e compressione, a trazione, peso, colore, ...) oggetto di studio che appartenga a un fenomeno non deterministico, bensì **STOCASTICO** ovvero random, probabilistico, aleatorio

Come topografi è necessario tralare le misure, che si estrazioni da variabili casuali cioè da distribuzioni di probabilità.

Probabilità che una x stia tra x_1 e x_2 : $P(x_1 < x < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

Probabilità che un elemento estratto abbia valore argomentale tra x_0 e $x_0 + \Delta x$

$$P(x_0 < x < x_0 + \Delta x) = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = \Delta F \quad (\Delta x \text{ piccolo})$$

facciamo come densità di probabilità $f(x)$ lo derivato $F'(x) = f(x) \equiv F'(x)$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{\Delta F}{\Delta x} \Rightarrow \Delta F = F' \Delta x \quad \text{con } F \text{ differenziabile}$$

(lim $\Delta x \rightarrow 0$)

$$\Rightarrow P(x_0 < x < x_0 + \Delta x) = \Delta F(x_0)$$

$f(x)$ densità di probabilità: permette di calcolare la probabilità che all'estrazione di un elemento esso si trovi in un intervallo

variabile casuale: permette di paragonarla a degli istogrammi: $\frac{(x+1)^2}{\sigma^2}$

Es. normale gaussiana $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x+1)^2}{\sigma^2}}$
 binomiale

funzione matematica discreta o continua che descrive un evento probabilistico

In un fenomeno elettrico, in una misura, sono necessari la media e lo scarto quadratico medio o della popolazione o della media

1 misura non basta! servono ⁽ⁿ⁾ + misure per eliminare errori di misurazione

gli errori accidentali, casuali rimangono sempre però in eliminabili
 1 sola misura ^{può essere affetta} da errori grossolani da eliminare

Non ci si può accontentare di una sola misura: \rightarrow numero dovuto a fenomeno non deterministico bensì stocastico
 bisognerà fare una media delle misure prese e la varianza della media delle misure

Tutte le misure sono date da $m \pm S_m$

scarto della media (valore argomentale - la media)

varianza $\sigma^2 = \int (x - \mu_x)^2 f(x) dx$

ricordando che la media rispetto a x è data da $E_x = \int x f(x) dx$

\Rightarrow varianza: media dei quadrati degli scarti rispetto alla media

(dove $\mu = \int x f(x) dx$)

• Esercizio 1

Sono dati 4 valori argomentali con la rispettiva probabilità

X	{	0	1	3	11	\leftarrow valori argom.
var. casuale		0,1	0,35	0,3	0,25	\leftarrow probabilità (la somma deve fare 1 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$)

$\mu_x = 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,35 + 3 \cdot 0,3 + 11 \cdot 0,25 = 4$

Moda : valore argomentale con la massima probabilità tra tutti (\checkmark)

\rightarrow Es 1 $M_{oda} = 1 \rightarrow V = 1$ (il valore 1 ha probabilità 0,35,
 \downarrow che è la probabilità max)
 $p(x=1) = \max$

Teorema

$$\sigma^2 \stackrel{\text{def}}{=} E[(x - \mu)^2] \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^m (x_i - m)^2 p_i \quad (\text{Cronopio})$$

$$\sigma^2 = E[x^2] - \mu^2 \quad (\text{media dei quadrati} - \text{quadrato della media})$$

→ sono 2 metodi analoghi per calcolare la varianza

→ Calcolo σ^2 es 1

$$\sigma^2 = (0-4)^2 \cdot 0,1 + (1-4)^2 \cdot 0,35 + (3-4)^2 \cdot 0,3 + (11-4)^2 \cdot 0,25 = 17,3$$

Oppure, per il Teor → $\sigma^2 = \underbrace{0^2 \cdot 0,1 + 1^2 \cdot 0,35 + 9 \cdot 0,3 + 11^2 \cdot 0,25}_{E[x^2]} - \underbrace{4^2}_{\mu^2} = 17,3$

Varianza per la variabile statistica

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - m)^2}{n}$$

s^2 → statistica → campione
 σ^2 → popolazione

Questa formula va bene sia per la varianza statistica (discreta) che per la varianza casuale: infatti la stima della media è una stima corretta

dato una var casuale

(popolazione delle misure) → estraggo un campione (es. var casuale: misura di un angolo)

faccio un po' di misure e la MEDIA ← 3 misure ad es. → una misura ideale dell'angolo

faccio campione di 3 misure ↓
 poi prendo altre 4 misure

→ faccio la MEDIA → poi 2 misure → faccio la MEDIA →

queste ~~varie~~ medie campionarie fanno parte della variabile cas. medie della popolaz.

Stima corretta se media teorica = media della popolazione

$$m = \frac{\sum x_i}{n}$$

media campionaria: è stima corretta della media teorica (ideale o reale)
 ↓ vedi altre oss. →

gli scarti possono essere rispetto alla $\left\{ \begin{array}{l} \text{media} \\ \text{mediana} \end{array} \right.$

5) m.a.v. mediana degli scarti assolute rispetto alla mediana

Prendo r valori $|x_i - \mu_c|$ e li dispongo in ordine crescente; sotto ad ogni valore scrivo la corrispettiva p_i .

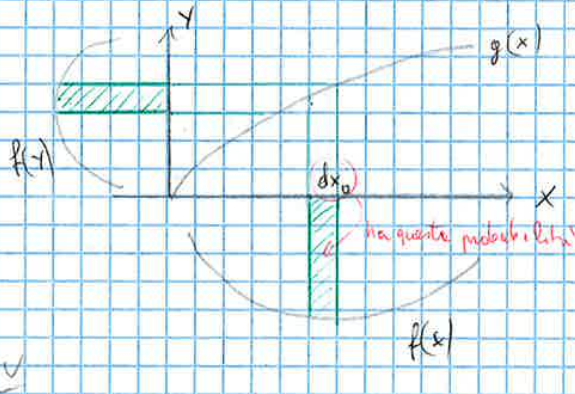
3	2	0	8	→	0	2	3	8
0,1	0,35	0,3	0,25		0,3	0,35	0,1	0,25

$F(0) = 0,3$

$F(2) = 0,3 + 0,35 = 0,65 > 0,5 \Rightarrow \text{m.a.v.} = 2$

$F(3) \dots$

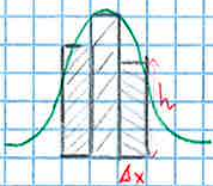
Trasformazioni di variabili casuali



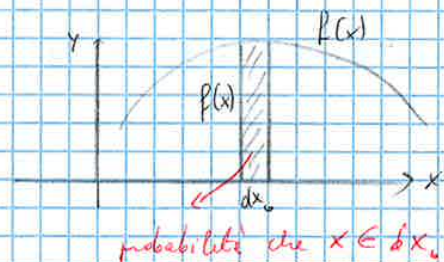
ipotesi: (tramite $g(x)$) devono essere probabilità $f(x)dx = f(y)dy$

(valori argomentali)

istogrammi: approssimazioni di $f(x)$



$\Delta x \cdot h = \text{frequenza} = \text{Area istogrammi}$



Teorema della media

Per ipotesi: $p(x) \in dx_0 = p(y) \in dy_0$
 \downarrow
 probabilità che x appartenga a dx_0 .

Essendo $y = g(x)$, $\frac{dy}{dx} = g'(x)$ ed essendo per i.p. $f(x)dx = f(y)dy$

si ha →

Analoghi risultati valgono per le varianze

* (Max Zimo) → meglio x statistiche

Consiglio ottimo per cartografia geodetica strumenti

$$\sigma_y^2 \stackrel{\text{def.}}{=} \int (y - \mu_y)^2 f(y) dy$$

1) se $y = a + bx$ allora $\sigma_y^2 = b^2 \sigma_x^2$ Legge di propagazione della varianza*

Dim

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \int [a + bx - (a + b\mu_x)]^2 f(y) dy = \int [b(x - \mu_x)]^2 \frac{f(x)}{g'(x)} g'(x) dx \\ &= b^2 \int (x - \mu_x)^2 f(x) dx = b^2 \sigma_x^2 \quad \text{c.v.d.} \end{aligned}$$

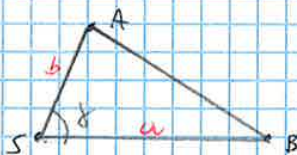
2) se $g(x)$ linearizzabile es $A = a + b$

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{dg}{dx}\right)^2 \sigma_x^2 = (g'(x))^2 \sigma_x^2 = (g'(\mu_x))^2 \sigma_x^2$$

↓
valore medio di x

e Esempio Misure INDIRETTE (quando non è possibile una misura diretta)

1



$$\overline{SA} = d_{AS} = b = \text{misura diretta}$$

$$\overline{SB} = d_{SB} = a$$

A = ?

Per calcolare l'area $A = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$

← è una g in più variabile

a, b, γ sono misure DIRETTE, col' estrazioni da variabili casuali.

La misura dell'area è una misura INDIRETTA effettata mediante 3 misure dirette che avranno una sua media e una varianza della media

Nell'es. pratico (Croatia) si suppone che la fz non lineare, come in questo caso, si possa linearizzare avendo varianza di a, b, γ piccole

$$\mu(A) \approx g(\mu_a, \mu_b, \mu_\gamma) \Rightarrow A = \frac{\bar{a} \bar{b} \sin \bar{\gamma}}{2}$$

↳ 2° corollario terza media

Media della media (applicando Teor Media, legge proporzionalità varianza)

$$E[m] = \mu_m = \frac{1}{n} x_1 + \frac{1}{n} x_2 + \frac{1}{n} x_3 + \dots + \frac{1}{n} x_n \quad \rightarrow \text{Esempio A}$$

$$\frac{1}{n} \bar{x}_1 + \frac{1}{n} \bar{x}_2 + \dots + \frac{1}{n} \bar{x}_m$$

con $\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$

Ma $E[x_1] = E[x_2] \dots$ (?) \rightarrow si tratta della variabile misurata
 esatta dell'angolo α ?
 $\Rightarrow E[m] = \frac{1}{n} \sum E[x_i]$ \Rightarrow media della media = media della popolazione
 stima corretta
 unbiased (bias = errore sistematico)

Varianza della media

$$\sigma^2(m) = \frac{1}{n^2} \sigma^2_{x_1} + \frac{1}{n^2} \sigma^2_{x_2} + \dots + \frac{1}{n^2} \sigma^2_{x_n} = \frac{1}{n^2} n \sigma_x^2 = \frac{\sigma_x^2}{n}$$

le var σ_1 è uguale $\sigma_2 \dots$

$$\Rightarrow \sigma^2(m) = \frac{\sigma_x^2}{n}$$

\Rightarrow varianza della media \neq varianza della popolazione
 $= \frac{1}{n}$ varianza popolazione

Es $1m \pm 3mm$
 ↓ media ↓ varianza della media (non della popolazione)

Scarto quadratico medio (SQM)

$d_1, d_2, d_3 \rightarrow \bar{d} = \frac{d_1 + d_2 + d_3}{3}$ aggiungo a questa media lo SQM della media

$$\frac{S^2}{n} = \frac{\sum (x_i - \bar{d})^2}{(n-1) n}$$

$$S = \pm \sqrt{\frac{\sum (x_i - m)^2}{n(n-1)}}$$

Es $3m \pm 1mm$
 ↓ media ↓ S_m

3) Calcolo della varianza dello A (Legge di propagazione delle variazioni)

$$\sigma_A^2 = \left(\frac{\partial A}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2$$

$$\frac{\partial A}{\partial a} = \frac{\partial(a \cdot b)}{\partial a} = b$$

$$\frac{\partial A}{\partial b} = \frac{\partial(a \cdot b)}{\partial b} = a$$

esempio $g(y) = x_1 \cdot x_2$
esempio $A = a \cdot b$

$$\Rightarrow \sigma_A^2 = b^2 \sigma_a^2 + a^2 \sigma_b^2 = 0,00013^2 \cdot 100^2 + 0,00008^2 \cdot 200^2 = 0,000425$$

Teorema della media - Validità 2° corollario

Sia X :

1	2	5	$\leftarrow x_i$
0,25	0,5	0,25	$\leftarrow p_i$

e s.a. $y = g(x) = 2x^2 + 4$
non lineare

$$\rightarrow \mu_x = \sum_i x_i \cdot p_i = 1 \cdot 0,25 + 2 \cdot 0,5 + 5 \cdot 0,25 = 2,5$$

Sia Y :

6	12	54	$\leftarrow x_i$
0,25	0,5	0,25	$\leftarrow p_i$

$y = 2 \cdot 1^2 + 4 = 6$
 $y = g(2) = 2 \cdot 2^2 + 4 = 12$
 $y = g(5) = 2 \cdot 5^2 + 4 = 54$

$$\rightarrow \mu_y = \sum_i y_i \cdot p_i = 6 \cdot 0,25 + 12 \cdot 0,5 + 54 \cdot 0,25 = 21$$

Se $g(x)$ fosse lineare, varrebbe $\mu_y = g(\mu_x)$
In questo caso però

$$g(\mu_x) = g(2,5) = 2 \cdot 2,5^2 + 4 = 16,5 \neq \mu_y = 21$$

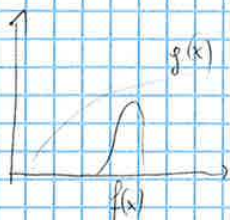
ovvero non è applicabile il 1° cor. del teor della media

La fz $g(x)$ è lineare (reale se non è brusca (lentamente crescente) e se x non è troppo dispersa intorno alla media ($f(x)$ deve avere poca varianza) nel dom di x

→ Cons. X^*

1,2	1,8	2,8	4,2	x_i^*
0,25	0,25	0,25	0,25	p_i^*

$\rightarrow \mu_x = \sum_i x_i^* \cdot p_i^* = 2,5$



Applica $g(x) = 2x^2 + 4$

6,88	10,48	19,68	39,28	y_i^*
0,25	0,25	0,25	0,25	p_i^*

Es $g(1,2) = 2 \cdot 1,2^2 + 4 = 6,88$
 $\rightarrow \mu_y = \sum_i y_i^* \cdot p_i^* = 19,8$

sviluppendo la relazione precedente, ricordando che $m_{xy} = \sum_{i,j} x_i \cdot y_j \cdot f_{ij}$ si ottiene

$$\sigma_{xy} = m_{xy} - m_1(x) \cdot m_1(y)$$

$$\sigma_{xy} = \sum_{i,j} x_i \cdot y_j \cdot f_{ij} - \mu_x \mu_y$$

(Ballone)

Esercizio

X \ Y	-1	0	1	p_i
0	0,3	0	0,2	0,5
1	0,2	0,1	0,2	0,5
q_j	0,5	0,2	0,4	

f_{ij} : probabilità congiunte
 p_i : probabilità marginali risp X
 q_j : probabilità marginali risp Y
 p_1 : probabilità che x valga 0 (1ª riga)

$$\mu_x = 0 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,5 = 0,5$$

$$\mu_y = -1 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,4 = -0,1$$

$$\sigma_x^2 = 0^2 \cdot 0,5 + 1^2 \cdot 0,5 - 0,5^2 = 0,25 \Leftrightarrow (0-0,5)^2 \cdot 0,5 + (1-0,5)^2 \cdot 0,5 = 0,25$$

$$\sigma_x^2 = E[X^2] - \mu_x^2 \quad \uparrow \quad \sigma_x^2 = E[(X-\mu)^2]$$

$$\sigma_y^2 = (-1)^2 \cdot 0,5 + 0^2 \cdot 0,2 + 1^2 \cdot 0,4 - (-0,1)^2 = 0,89 \Leftrightarrow (-1+0,1)^2 \cdot 0,5 - (0+0,1)^2 \cdot 0,2 + (1+0,1)^2 \cdot 0,4 = 0,89$$

$$\sigma_{xy} = [0 \cdot (-1)] \cdot 0,3 + [0 \cdot 0] \cdot 0 + [1 \cdot 0] \cdot 0,2 + [1 \cdot (-1)] \cdot 0,2 + [0 \cdot 1] \cdot 0,1 + [1 \cdot 1] \cdot 0,2 - \mu_x \mu_y = 0,05$$

C_{xx} : Matrice di varianza - covarianza di X (vettore)

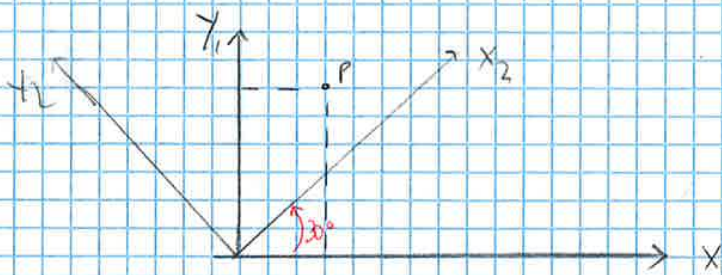
C_{yy} : " " " " Y

2D $C_{xx} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

3D $C_{xx} = \begin{pmatrix} \sigma_{x^2} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z^2 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

• Esercizio da ESAME!!

3



$$P \begin{cases} x_1 = 100 \pm 0,03 \\ y_1 = 200 \pm 0,05 \end{cases}$$
 scarti quadratici medi della media (non dalla popolazione)

Si suppone che le coordinate siano state misurate in maniera indipendente $\Rightarrow \sigma_{xy} = 0$

1- Determinare le coordinate di P ^{risultato} nel nuovo sistema di riferimento \checkmark (A diff. che nel corso di Geometria qui si hanno ^{non} numeri tesi misure)

ogni misura ha la sua precisione

1)
$$\begin{cases} x_2 = \cos d x_1 + \sin d y_1 \\ y_2 = -\sin d x_1 + \cos d y_1 \end{cases}$$

2- Determinare la matrice var-covar a partire dalla matrice var-covar iniziale

In forma matriciale
$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos d & \sin d \\ -\sin d & \cos d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Po sto
$$Y = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ e } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \text{ si ha } \vec{Y} = R \vec{X}$$

con R matrice di rotazione quadrata e ortog. (trasposta e inversa uguali)

→ Applico 1° Cor Teor Media: se una transf è lineare allora la media della soluzione è la fz nel valore medio di X (non devo fare tutto il percorso: partire da \bar{x}_2, \bar{y}_2 e poi fare le medie; posso fare la fz nel valore medio) applico teor media su 2 relazioni:

$$\vec{\bar{Y}} = R \vec{\bar{X}} = \begin{pmatrix} \cos 30 & \sin 30 \\ -\sin 30 & \cos 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{y}_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{\bar{Y}} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 186,6 \\ 123,2 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{matrix} \sqrt{3}/2 \cdot 186,6 + 0,5 \cdot 100 \\ + 1/2 \cdot 100 + \sqrt{3}/2 \cdot 200 \end{matrix} \right)$$

2)

$$C_{YY} = R C_{XX} R^T$$

cm

$$C_{XX} = \begin{pmatrix} \sigma_{x^2} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$$

espriamo direttamente in cm

$$C_{YY} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 25\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

R C_{XX} R^T

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial p} & \frac{\partial g_1}{\partial d} \\ \frac{\partial g_2}{\partial p} & \frac{\partial g_2}{\partial d} \end{pmatrix}$$

Cfr. minimi quadrati

osservazioni → nelle righe
 le osservazioni (o equazioni)
 in colonne (colonne)

$$= \begin{pmatrix} \cos d & -p \sin d \\ \sin d & +p \cos d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \pi/6 & -1 \sin \pi/6 \\ \sin \pi/6 & 1 \cos \pi/6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,8666 & -10 \cdot 0,5 \\ 0,5 & 10 \cdot 0,8666 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C_{YY} = \begin{pmatrix} 0,8666 & -10 \cdot 0,5 \\ 0,5 & 10 \cdot 0,8666 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8666 & 0,5 \\ -10 \cdot 0,5 & 10 \cdot 0,8666 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,75 & -1,299 \\ -1,299 & 3,253 \end{pmatrix}$$

25/3/15

Variabili casuali:

univariata: estratte da una var. casuale 1D → es.: misure di angoli, distanze

bivariata: estratte da una var. casuale 2D → es.: coordinate di un punto, GPS...

I legami tra le variabili possono essere di varia natura: tra 2 variabili può esserci un legame matematico, deterministico oppure nullo: in particolare i legami possono essere

- blandi
- in media
- di correlazione lineare

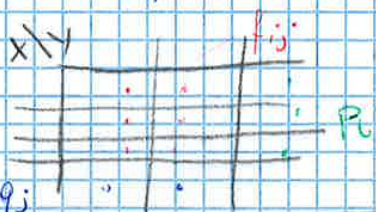
Le due situazioni estreme che possono verificarsi sono:

- indipendenza stocastica
- dipendenza funzionale: $\exists f: X \rightarrow Y$

I fenomeni reali in genere sono un caso intermedio tra questi 2 (Commissione più blanda, dipendenza in media, correlat. lineare, regressione lineare)

Teorema: 2 variabili sono indipendenti se I congiunta è uguale al prodotto delle I marginali.

ovvero $n \cdot f_{ij} = p_i \cdot q_j$



$$\bar{x} = 1 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,4 = 1,4$$

$$\bar{y} = 0 \cdot 0,4 + 1 \cdot 0,37 + 2 \cdot 0,43 = 1,23$$

$$\sigma_x^2 = E(x^2) - \bar{x}^2 = 1 \cdot 0,6 + 4 \cdot 0,4 - 1,4^2 = 0,24$$

$$\sigma_y^2 = E(y^2) - \bar{y}^2 = 0^2 \cdot 0,2 + 1^2 \cdot 0,37 + 2^2 \cdot 0,43 - 1,23^2 = 0,58$$

$$\sigma_{xy} = 0 \cdot 1 \cdot 0,5 + 1 \cdot 1 \cdot 0,25 + 2 \cdot 1 \cdot 0,7 + 0 \cdot 2 \cdot 0,05 + 1 \cdot 2 \cdot 0,12 + 2 \cdot 2 \cdot 0,23 - 1,72 = 0,09$$

$$\Rightarrow r_{xy} = \frac{0,09}{\sqrt{0,24 \cdot 0,58}} = 0,2$$

il valore è piccolo \Rightarrow
non c'è correlac. lineare.

✓

slides STAT
angolo rivit
generatore

LEZIONE 1/4/15

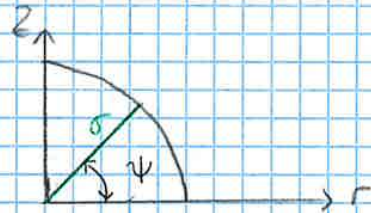
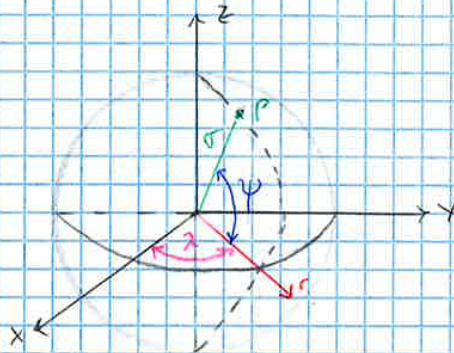
Del geode alla sferoide.

Coord. cartesiane geocentriche con origine nel G terrestre espresse in coord. polari 3D
 $(x, y, z) \rightarrow (\sigma, \psi, \lambda)$

σ : "raggio terrestre puntuale"

λ : "longitudine, angolo diedro tra ZX e il piano contenente P"

ψ : "angolo tra il piano equatoriale e la retta congiungente OP (direz. di σ)"



$$\begin{cases} X = \sigma \cos \psi \cos \lambda \\ Y = \sigma \cos \psi \sin \lambda \\ Z = \sigma \sin \psi \end{cases}$$

Sviluppo in serie arrestato 2° ord. \rightarrow slides (formole NON a meno, solo peggiori!!)

$$\nabla^2 = 0$$

$$W = V + w = V' + T + W = V' + W + T$$

$\xrightarrow{\text{potenziale sferoide}} \quad \xrightarrow{\text{potenziale anomalo}}$

Approssimazione al peggiori: $\frac{1}{\sigma^4} = \frac{1}{10^{28}} \approx 6,07 \cdot 10^{-8}$

Nell'eq. della sferoide compaiono cost. meccaniche, a noi interesso costanti geometriche
 cioè i 2 semiasse \rightarrow c : semiasse polare } della sferoide
 a : semiasse equatoriale

Geode \rightarrow sferoide \rightarrow ellissoide di rotazione

Riservio (l'equazione con $\psi = 0^\circ$ (\rightarrow equatore)
 della sferoide $\psi = 90^\circ$ (\rightarrow poli))

Sviluppo in serie binomiale

Si definisce SCHIACCIAMENTO

$$\alpha = \frac{a - c}{a} = 1 - \frac{c}{a}$$

• Ricordando che $z = \sigma \sin \psi \Rightarrow \frac{z^2}{\sigma^2} = \sin^2 \psi$

3^a Approssimazione

$$\frac{z^2}{\sigma^2} \approx \frac{z^2}{a^2}$$

perché si tratta sempre in entrambi i casi di raggi terrestri.

σ : raggio generico a : raggio terrestre equatoriale

$$\Rightarrow \sigma^2 = a^2 \left(1 - 2d \frac{z^2}{\sigma^2}\right) \Leftrightarrow \sigma^2 = a^2 (1 - 2d \sin^2 \psi)$$

$$\Leftrightarrow \sigma = a (1 - 2d \sin^2 \psi)^{1/2}$$

4^a Approssimazione \rightarrow sviluppo in serie di Taylor binomiale

$$\Rightarrow \sigma = a (1 - d \sin^2 \psi)$$

Eq. ellissoide di rotazione (e sferoide)

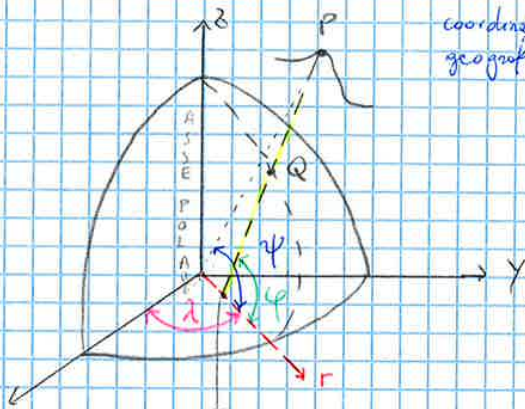
Con un'approssimazione di d^2 cioè 10^{-7} si può passare dallo sferoide all'ellissoide, figura matematica: con tale approssimazione l'ellissoide di rotazione \equiv sferoide

ellissoide \rightarrow sup. di riferimento per la planimetria (angoli e distanze)

geoidale \rightarrow " " " " per l'altimetria (misura quote) (3,40)

Geometria dell'ellissoide

Coordinate sulla sup. dell'ellissoide



coordinate geografiche $\left\{ \begin{array}{l} \varphi: \text{latitudine} \\ \lambda: \text{longitudine} \end{array} \right.$
 coordinate ellissoidiche $\left\{ \begin{array}{l} h: \text{altitudine ellissoidica} \end{array} \right.$

normale alla sup. ellissoidica in P \rightarrow non incontra Z nel centro della Terra ma in un'altra posizione dell'ellissoide

NB

$$\psi \neq \varphi$$

\rightarrow angolo tra il piano equatoriale e la normale alla sup. dell'ellissoide nel punto P

angolo tra il piano equatoriale e la congiungente il centro con P

Invece $\lambda_{\text{ell}} = \lambda_{\text{sf}} \rightarrow$ longitudine significato positivo (il + forte all'epoca) (latitudine) geografico
 ha origine dal piano equatoriale

Def: eccentricità $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = 1 - \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2$

Sost. l'espressione (b) in (a)

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{a^2(1-d)^2}{a^2}$$

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{r^2 \tan^2 \varphi (1-e^2)^2}{c^2} = 1$$

$$= 2d - d^2$$

$$r^2 + \frac{a^2 r^2 \tan^2 \varphi (1-e^2)^2}{c^2} = a^2$$

⇔

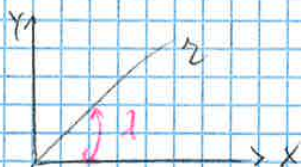
$$r^2 + \frac{r^2 \tan^2 \varphi (1-e^2)^2}{(1-e^2)^2} = a^2 \Leftrightarrow r^2 + r^2 \tan^2 \varphi (1-e^2) = a^2$$

$$\Leftrightarrow r^2 \left(1 + \tan^2 \varphi (1-e^2) \right) = a^2 \Leftrightarrow r^2 \left(1 + \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} (1-e^2) \right) = a^2$$

$$\Leftrightarrow r^2 = \frac{a^2}{\frac{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi (1-e^2)}{\cos^2 \varphi}} = \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi - \sin^2 \varphi \cdot e^2} = \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

$$\Rightarrow z = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

• Ricorriamo X, Y



$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

Per brevità → poniamo $1 - e^2 \sin^2 \varphi = w$

$$r^2 = \Rightarrow x = r \cos \varphi = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \cos \varphi = \frac{a \cos^2 \varphi}{w} \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \sin \varphi = \frac{a \cos \varphi}{w} \sin \varphi$$

x, y dipendono da:
- posiz. del punto (r, phi)
- Caratt. ellittico

$$z = r \tan \varphi (1-e^2) = \frac{a \cos \varphi}{w} \tan \varphi (1-e^2) = a \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{w \cos \varphi} (1-e^2) = a \frac{\sin \varphi}{w} (1-e^2)$$

Riassumendo

$$\begin{cases} X = \frac{a \cos^2 \varphi \cos \varphi}{w} \\ Y = \frac{a \cos \varphi \sin \varphi}{w} \\ z = \frac{a (1-e^2) \sin \varphi}{w} \end{cases}$$

14/6/15

Sezioni normali $\leftarrow N$
oblique $\leftarrow P$

Raggi di curvatura $\leftarrow \rho$
Teor. Eulero $(1/R_x)$
Teor. Meusnier (N)

Geodetica def.

Lez 6/5/15

Geoides \neq geodetica \neq campo geodetico

↓
 superficie equipot. della F_G

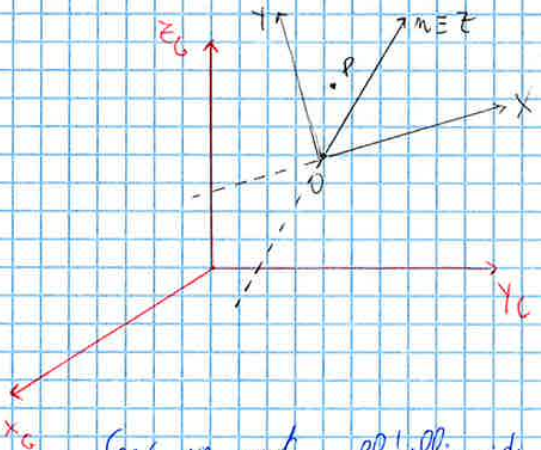
↓
 linea gobba che rappresenta il percorso minore sull'ellissoide

↓
 ambito in cui n può sostituire all'ellissoide una sfera tangente a quest'ultimo \rightarrow tale sostituzione non viene fatta su tutto l'ellissoide ma su un ambito dello campo geodetico (\approx rotina)

Campo geodetico (o di Weingarten)

\rightarrow sfera locale si approssima localmente l'ellissoide con una sfera tangente in un punto
 Vantaggio: calcoli trigonometrici facili + semplici di quelli ellissoidici

Il campo geodetico e la sfera locale fanno parte non + delle misure base del trattamento delle misure



SR globale SR locale riferito a terna euliana

$n \in \mathbb{R}^3 \rightarrow$ normale alla sup ellissoidica in O
 $X \rightarrow$ tangente al parallel. in O
 $Y \rightarrow$ tangente al meridiano in O

La terna euliana serve per del ambito in cui è possibile sostituire ellissoide con sfera

Cons un punto sull'ellissoide $P(x, s)$

α : azimut (angolo tra la ^(tangente alla) geodetica e il ^(ed tangente al) meridiano) \neq ^{NB} angolo azimutale

SR locale fornisce misura relativa, è molto usato dai topografi

Formule di Puissieux - Weingarten

Permettono di passare dalle coordinate cartesiane a euliane

NB queste formule si trovano sia nei testi della geodesia operativa che nelle dimostrazioni del campo geodetico

Le formule di P-W si semplificano su la sfera locale con $R = \sqrt{p}$

Si calcola l'errore di si commette

$X_s - X$
 $Y_s - Y$
 $Z_s - Z$

\rightarrow accettabile in planimetria per $s < 100$ km

\rightarrow in altimetria il campo si restringe $s < 15$ km

\downarrow
 la curvatura terrestre si fa sentire

Precisione livellazione trigonometrica / geometrica



$$h = 1 \text{ km} \quad d = 100 \text{ m} \quad n = \frac{1000}{100} = 10$$

(linea)

Sia $\sigma_p = 0,2 \text{ mm}$ (precisione di lettura alle stazioni)

$$\sigma_b^2 = 2 \sigma_p^2 \quad \sigma_L^2 = 2n \sigma_p^2$$

$$\Rightarrow \sigma_h = \sqrt{2n} \sigma_p = \sqrt{20} \cdot 0,2 \approx 0,89 \approx 1 \text{ mm}$$

Calcolo con distivello medio

$$\Delta_m = \frac{\Delta_A + \Delta_B}{2}$$

Andate ritorno

$$\sigma_{\Delta_m}^2 = \frac{1}{4} \sigma_{\Delta A}^2 + \frac{1}{4} \sigma_{\Delta B}^2 = \frac{1}{2} \sigma_{\Delta}^2$$

Legge di Propagazione varianza

$$\sigma_{\Delta_m} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0,89 \approx 0,6 \text{ mm}$$

c'è differenza notevole

⇒ errore medio Kmetrico

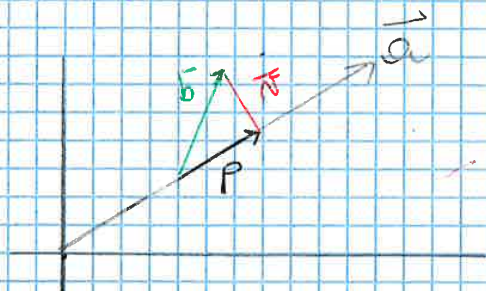
$$P_i = \frac{1}{h_i}$$

$$P_i = \frac{1}{L_i^2}$$

Se $m > n$ si utilizza un metodo statistico (approssimato) detto metodo statistico dei minimi quadrati

→ Trattazione geometrica (a partire da A e ne colonne)

Proiezione di \vec{b}



$$\vec{b} = x \vec{a} \quad \text{diventa}$$

$$\vec{p} = \hat{x} \vec{a}$$

$$\begin{cases} 2x = b_1 \\ 3x = b_2 \\ 4x = b_3 \end{cases}$$

→ Ne risolvo 1, gli altri saranno degli scarti
Oppure meglio gli scarti

Risolubile $\Leftrightarrow b$ si trova lungo la direzione $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{a}$

Altrimenti $\exists x$ se e solo se anche b si trova lungo $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2x = b_1 = 30 \\ 3x = b_2 = 40 \\ 4x = b_3 = 35 \end{cases}$$

noti

$\hat{x} = \text{hat} = \text{cappuccio}$

lance Se \vec{b} (misura) si discosta di poco dal valore che dovrebbe essere allora si cerca \vec{p}

Si cerca x in modo che \vec{p} stia sulla \vec{a} il + vicino possibile a b secondo la geometria euclidea (distanza pitagorica)

$\vec{p} = x$ volte \vec{a} (multiplo di \vec{a})

$$\vec{v} \perp \vec{p}$$

$$\text{con } \vec{v} = \vec{b} - \vec{p} = \vec{b} - x \vec{a} \quad (\vec{b} - x \vec{a}) \perp \vec{a} \quad \text{dove} \begin{matrix} \text{dove} \\ \text{incap} \end{matrix}$$

\vec{v} : vettore scarto (la + piccola differenza tra b e p)

In termini vettoriali la richiesta di ortogonalità si esprime alla maniera seguente:

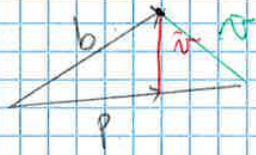
$$\vec{a}^T \cdot (\vec{b} - \hat{x} \vec{a}) = 0$$

(prodotto scalare o interno)
(Cond. ortogonalità: $x^T y = y^T x = 0$)

$$\begin{cases} \bar{v} = \bar{b} - \bar{p} \\ \bar{p} = A \hat{x} \end{cases}$$

Nota etimologica

Minimi quadrati: minimizzano lo scarto al quadrato



\bar{w} è quello in rosso, in quanto con \bar{w} minimizzo la distanza

minimizza la lunghezza del vettore scarto $w^2 = w_1^2 + w_2^2$
 cioè la somma dei quadrati delle componenti dei vettori

$$v(\text{scarto}) = \sum_i v_i^2 = \min$$

$w = b - p$ deve essere \perp piano

Quindi:

$$\begin{cases} (b-p) \perp a_1 \\ (b-p) \perp a_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^T \cdot (b-p) = 0 \\ a_2^T \cdot (b-p) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^T \cdot (b - A\hat{x}) = 0 \\ a_2^T \cdot (b - A\hat{x}) = 0 \end{cases}, \text{ con } \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \end{pmatrix} = A^T$$

In forma compatta, vedendo $\textcircled{*}$, si ha

$$A^T (b - A\hat{x}) = 0$$

$$A^T b - A^T A \hat{x} = 0$$

$$A^T (b - A\hat{x}) = 0$$

$$\Rightarrow \hat{x} = \underbrace{(A^T A)^{-1}}_{N^{-1}} \underbrace{(A^T b)}_{T_m}$$

\Rightarrow soluzione ai MQ

$$N^{-1} = (A^T A)^{-1}$$

$$N^{-1} = T_m$$

Stima di parametri di modelli: minimi quadrati lineari

<p>MQ lineari</p> <p>↓</p> <p>rete altimetrica</p> $y = \hat{a} + \hat{b}t + \hat{c}t^2$ <p>(lineare nei param. a, b, c)</p>	<p>MQ non lineari</p> <p>↓</p> <p>rete planimetrica</p> $y = \hat{A} \cos(\hat{\theta} + \hat{\alpha})$ <p>(non lin nei param. $(\hat{\theta}, \hat{\alpha})$)</p>
--	---

Ricordiamo che $\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$ (1)

$A^T A = N$ → matrice normale: il prodotto $A^T A$ trasforma mtr rettangolare

b : vettore delle osservazioni] A in una mtr quadrata simmetrica (simm. rispetto alla diagonale principale e con proprietà

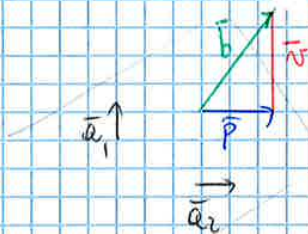
$A^T b = A^T T = T_m$ → termini noti normalizzati, uguale a se stessa)

In forma compatta (1) diventa

$$\hat{x} = N^{-1} T_m$$

Ricorda che $NN^T = I$

$p = A \hat{x}$



piano definito dalle colonne di A

b : osservazioni v : osservazioni stimate

$$\Rightarrow p = A \hat{x} = A \underbrace{(A^T A)^{-1} A^T b}_{\hat{x}}$$

$$= \underbrace{A (A^T A)^{-1} A^T}_P b \Rightarrow \hat{p} = P b$$

$b = y$: osservazioni
 $\hat{b} = \hat{y}$: proiezioni delle oss. sul piano def. dalle colonne di A

P matrice proiezione
 (het matrix H)

$$\Rightarrow \hat{v} = A \hat{x} - b = P b - b = \underbrace{(P - I)}_R b$$

R : matrice ridondanza

2) Trasposta della mtr disegno

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

⚠ Nella livellazione (vedi es. accanto) ci sono i pesi!! $\frac{1}{L}$ (L: linea di livellazione)

3) Mtr Normale $N = A^T A$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$$

2×3 3×2 2×2

4) Inversa di $N \rightarrow N^{-1}$

$$\det N = 3 \cdot 14 - 6 \cdot 6 = 42 - 36 = 6$$

$$N^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

ricordiamo che l'inverso di una mtr 2×2 (quadr.) è

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

5) Calcolo $T_m = A^T Y$

$$T_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

2×3 3×1 2×1

NOTA: in prt. es. (t_1, \dots, t_n) sono le osservazioni che ho a disposizione mentre (y_1, \dots, y_n) sono delle misure, dovremmo avere σ^2 quindi una precisione; non la mette perché sono misure fatte in lab. con le stazioni della stessa persona

$$P = \mathbb{1}$$

termini noti $T = b = Y$ normalizzati

↓
a volte modelli + complicati

$$Y = AX + c$$

6) Soluzione $\hat{X} = N^{-1} T_m$

$$\hat{X} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 70 - 66 \\ -30 + 33 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

7) $\hat{Y} = A \hat{X}$ ← metto il valore ottenuto di \hat{X} nel modello ottenendo \hat{Y} cioè p ↓ de solo

$$\hat{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 + 1/2 \\ 2/3 + 1 \\ 2/3 + 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/6 + 3/6 \\ 2/3 + 2/3 \\ 4/6 + 3/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/6 \\ 5/3 \\ 13/6 \end{pmatrix}$$

so: 50!

8) $\hat{V} = \hat{Y} - Y$ (oss. - oss. stimate)

$$\text{Scarto} = \begin{pmatrix} 7/6 \\ 5/3 \\ 13/6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ -5/3 \\ -13/6 \end{pmatrix}$$

Applicazione della legge della propagazione delle matrici
 varianze - covarianza
 (o di propagazione della covarianza)

$Y = BX$
 \downarrow
 $C_{YY} = BC_{XX}B^T$
 precisione del
 vettore risultante

Dim

$\hat{X} = (A^T A)^{-1} A^T Y$

\downarrow
 $C_{\hat{X}\hat{X}} = [(A^T A)^{-1} A^T] C_{YY} [(A^T A)^{-1} A^T]^T$

$C_{\hat{X}\hat{X}} = \sigma_0^2 Q_{YY}$
 \downarrow
 matrice
 precisione
 delle osservazioni
 (matr. var-covar
 delle osservazioni)

Determineremo la matrice var-covar
 applicando la legge della covarianza
 all'espressione lineare \hat{X}

Q_{YY} matr. cofattori

Es $C_{YY} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 10^{-3} & 10^{-3} \\ 10^{-3} & 5 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} = 10^{-3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

Il peso $P = \frac{1}{\text{varianza}}$ \Rightarrow trasuro 10^{-3}
 quando i rapporti 2 e 5

\downarrow
 σ_0^2
 varianza a priori (non A)

$\sigma_{xx}^2 = z \Rightarrow P \uparrow$ (dove $P = 1/2$)

$\Rightarrow Q_{YY}^{-1} = P \sigma_0^2$ fattore di proporzionalità

$C_{\hat{X}\hat{X}} = [(A^T A)^{-1} A^T] \sigma_0^2 I [(A^T A)^{-1} A^T]^T = \sigma_0^2 [\quad] [\quad]^T$

$\hat{X} = (A^T A)^{-1} A^T Y$

immagina che
 le misure siano state
 eseguite allo stesso modo
 e quindi uso I al
 posto di Q_{YY}

$(M_1 M_2)^T = M_2^T M_1^T$

$C_{\hat{X}\hat{X}} = \sigma_0^2 \{ [(A^T A)^{-1} A^T] \cdot [(A^T)^T ((A^T A)^{-1})^T] \} = \sigma_0^2 [(A^T A)^{-1} A^T A (A^T A)^{-1}]$

$= A$
 $(A^T A)^{-1}$
 perché N
 è matrice
 quadrata
 e simmetrica
 \Rightarrow è uguale
 alla sua trasposta

\downarrow
 I
 $M M^T = I$

$\Rightarrow C_{\hat{X}\hat{X}} = \hat{\sigma}_0^2 (A^T A)^{-1}$

$$5) A^T Y = A^T b = T_m$$

$$A^T b = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,5734 \\ -0,4205 \\ -1,1526 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5734 + 0,4205 \\ -0,4205 + 1,1526 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,9939 \\ 0,7321 \end{pmatrix}$$

$2 \times 3 \qquad 3 \times 1$

$$6) \hat{X} = N^{-1} T_m$$

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} 0,666 & 0,333 \\ 0,333 & 0,666 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,9939 \\ 0,7310 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5733 \\ 1,1527 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{Q}_2 \\ \hat{Q}_3 \end{pmatrix}$$

$2 \times 2 \qquad 2 \times 1 \qquad 2 \times 1$

$$7) \hat{Y} = A \hat{X}$$

$$\hat{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,5733 \\ 1,1527 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5733 \\ -0,4206 \\ -1,1527 \end{pmatrix}$$

$3 \times 2 \qquad 2 \times 1 \qquad 3 \times 1$

$$8) \hat{V} = \hat{Y} - Y$$

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} -0,001 \\ -0,0001 \\ -0,001 \end{pmatrix}$$

9) Varianza stimata

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{V}^T \hat{V}}{m-n} = \frac{\hat{V}^T \hat{V}}{1} = 3 \cdot 10^{-8}$$

Questo è un caso semplice perché è stata posta la quota iniziale $Q_m = 0$
 Cons. ora un esempio in cui $Q_m \neq 0$

-> Matrice disegno 5×2 (delle incognite) (basandosi sul sistema $\begin{cases} (1) \\ (5) \end{cases}$)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

=> Le linee di livellazione sono diverse, quindi bisogna tenere conto delle precisioni della livellazione

σ_b : $\sigma_{battuta}$ σ_l : $\sigma_{lettura}$ σ_L : $\sigma_{linea\ di\ livellazione}$

$$\sigma_b^2 = 2 \sigma_l^2$$

$$\sigma_L^2 = m \cdot 2 \sigma_l^2$$

con $m = \frac{L}{100}$ (km)

$$P_i = k \frac{1}{\sigma_{iL}^2} = k \frac{100}{2 \sigma_l^2 L} = \frac{k_1}{L}$$

=> Peso $\propto \frac{1}{L}$

1km -> 10 battute (m=10)

=> per questo motivo quando si è fatta la livellazione ad esercitazione, si è sempre presa la misura delle distanze, non solo per mettere il livello in marcia ma anche per poter compensare

la livellazione ad esercitazione, si è sempre presa la misura delle distanze, non solo per mettere il livello in marcia ma anche per poter compensare

Matrice dei pesi: in una stima di MQ in cui esistono delle precisioni bisogna utilizzare la matrice dei pesi

$$P = \begin{pmatrix} 1/L_1 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 1/L_2 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1/L_3 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1/L_m \end{pmatrix}$$

matrice diagonale

Nell'esercizio

$$P = \begin{pmatrix} 1/L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/(1/3)L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/L \end{pmatrix} = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La 4^a linea, che è $\frac{1}{3}L$, pesa 3 volte tanto

Minimi quadrati non lineari:

Applicazioni: reti planimetriche (angoli, distanze)

$$Y = AX + C \quad Y - C = T$$

La linearità si ha quando i parametri incogniti sono lineari (a, b, c hanno exp=1)

$y = \hat{a} + \hat{b} \sqrt{t} + \hat{c} \ln t$ è lineare in quanto $t \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{t} \in \mathbb{R}$ e $\ln t \in \mathbb{R}$ è un numero!

Eg: due distlivelli: $\Delta_{ij} = \hat{Q}_j - \hat{Q}_i$ (exp=1 \Rightarrow linear)

MA $y = a \cos(\vartheta + \hat{\alpha}) \rightarrow$ non lineare (18)

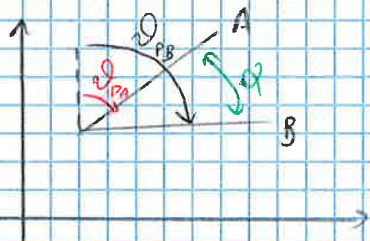
Si vogliono stimare \hat{a} e $\hat{\alpha}$: $\hat{\alpha}$ è all'interno di una fz trigonometrica.

y_1	\hat{Q}_1
y_2	\hat{Q}_2
\vdots	\vdots
y_n	\hat{Q}_n

Per linearizzare si esprimono gli angoli in serie di

Espresso l'angolo ^{misurato con il teodolite} come differenza di due angoli di direzione

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



$$\alpha = \alpha_{PB} - \alpha_{PA} = \arctan \frac{x_B - x_P}{y_P - y_B} - \arctan \frac{x_A - x_P}{y_A - y_P}$$

\Rightarrow la rete planimetrica è risolvibile con MQ non lineari

Si ottiene $f - \hat{f} = T$ (termine noto)

$$\begin{aligned} d_1 - \hat{d}_1 &= T_1 \\ d_2 - \hat{d}_2 &= T_2 \end{aligned}$$

↓
valore dell'espressione
matematica delle misure

incognite: $\hat{X} = \begin{pmatrix} \hat{x}_p \\ \hat{y}_p \end{pmatrix}$

Le incognite sono dei valori infinitesimi cui delle correzioni da dare al valore approssimato per ottenere il valore stimato

$$\begin{aligned} \hat{X}_p &= \tilde{x}_p + \partial \hat{X}_p \\ \hat{Y}_p &= \tilde{y}_p + \partial \hat{Y}_p \end{aligned}$$

piccole correzioni per rendere + precisa la stima

→ Le derivate sono i coefficienti delle incognite e quindi fanno parte della matrice designata A e' una matrice Jacobiana

$$A = J = \begin{pmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial x_p} & \frac{\partial d_1}{\partial y_p} \\ \frac{\partial d_2}{\partial x_p} & \frac{\partial d_2}{\partial y_p} \\ \frac{\partial d_3}{\partial x_p} & \frac{\partial d_3}{\partial y_p} \end{pmatrix} \rightarrow \text{In generale: } J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

A questo punto diventa necessario adattare lo stesso procedimento adottato per i MQ lineari

LEZIONE 6/5/2015

Minimi quadrati non lineari

Si ottiene il vettore ξ delle correzioni da dare ai valori approssimati per ottenere i valori stimati

MQ lineari

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_m \end{pmatrix}$$

$$\xi = \begin{pmatrix} \partial \hat{x}_1 \\ \partial \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \partial \hat{x}_m \end{pmatrix}$$

valori approssimati correzioni stimati:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 + \partial \hat{x}_1 &= \hat{x}_1 \\ \tilde{x}_2 + \partial \hat{x}_2 &= \hat{x}_2 \\ \vdots & \vdots \\ \tilde{x}_m + \partial \hat{x}_m &= \hat{x}_m \end{aligned}$$

Se questo affinamento (corretto di precisione) non e' suff., allora e' possibile fare un 2° ciclo in cui i valori stimati al 1° ciclo ($\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m$) vengono consid.

$$\gamma_{misurato} = \gamma_0 = \tilde{\gamma} + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \dots$$

⇒ la matrice disegno in questo caso si riduce ad un vettore disegno (c'è una sola incognita)

1a) Analisi Matematica

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{d\alpha} \Rightarrow \frac{d\gamma}{d\alpha} = -t^{-\alpha} \ln t$$

$$\gamma = a^x \quad \frac{d\gamma}{dx} = a^x \ln a$$

$$\Rightarrow A=J = \begin{pmatrix} -2 & -0,49 \ln 2 \\ -3 & -0,49 \ln 3 \\ -4 & -0,49 \ln 4 \end{pmatrix} \equiv \vec{a} = \begin{pmatrix} -0,49354 \\ -0,64129 \\ -0,70287 \end{pmatrix}$$

1a) Fox

- linearizzato nei valori approssimati

$$Y - \tilde{Y} = T$$

$$\Rightarrow a^T a = 1,14879$$

2a) Fox

- 1) $A=J$
- 2) J^T
- 3) $J^T J$
- 4) $(J^T J)^{-1} = N^{-1}$
- 5) $T_n = J^T (Y - \tilde{Y}) = J^T T$
- 6) $\hat{\alpha} = (J^T J)^{-1} T_n = (J^T J)^{-1} T_n$

(4)

$$(a^T a)^{-1} = 0,870447$$

$$T = Y - \tilde{Y} = \begin{pmatrix} 0,709107 & - & 0,71202 \\ 0,58035 & - & 0,58328 \\ 0,501532 & - & 0,50698 \end{pmatrix}$$

(5)

$$T_n = a^T T =$$

$$\hat{\alpha} = | \partial \hat{\alpha} | = N^{-1} T_n = 0,007435$$

→ l'incognita è la correzione da dare al valore approssimato

SOLUZIONE

$$\hat{\alpha} = \tilde{\alpha} + \Delta \hat{\alpha} = 0,49 + 0,007435 = 0,497435$$

$$T = \begin{matrix} \text{VETT.} & \text{VETT.} \\ \text{OSSERV.} & \text{OSS. APPROX.} \end{matrix} \gamma - \tilde{\gamma}$$

$$\rightarrow \gamma = \tilde{\gamma} + J \Delta x + \dots$$

$$\gamma = A \hat{x} + C$$

Correzioni incognite

dove $\gamma - C = T$

Nei MQ lin C compare se quota ≠ 0

es. vettore delle quote nei MQ lin

Nei MQ non lin C c'è sempre, è il vettore delle oss. approssimate

In forma matriciale

$$Y = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial x} & \frac{\partial d_1}{\partial y} \\ \frac{\partial d_2}{\partial x} & \frac{\partial d_2}{\partial y} \\ \frac{\partial d_3}{\partial x} & \frac{\partial d_3}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_p \\ \hat{y}_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{d}_1 \\ \tilde{d}_2 \\ \tilde{d}_3 \end{pmatrix}$$

$$Y = A X + C$$

$$Y - C = T = Y - \tilde{Y}$$

$$\tilde{d}_1 = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$$

$$\tilde{d}_2 = \sqrt{(10-30)^2 + (10-0)^2} = \sqrt{500} = \sqrt{5 \cdot 100} = \sqrt{5} \sqrt{100} = 10\sqrt{5}$$

$$\tilde{d}_3 = \sqrt{(10-0)^2 + (10-10)^2} = 10$$

52

$$T = \begin{pmatrix} d_1 - \tilde{d}_1 \\ d_2 - \tilde{d}_2 \\ d_3 - \tilde{d}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14,142 - 10\sqrt{2} \\ 22,361 - 10\sqrt{5} \\ 10,002 - 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,3562 \\ -3,2023 \\ 20 \end{pmatrix} 10^{-4}$$

$$T = Y - \tilde{Y}$$

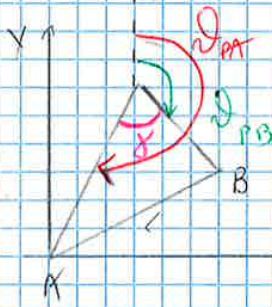
$$J = A = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{x}_p - x_A}{\tilde{d}_1} & \frac{\tilde{y}_p - y_A}{\tilde{d}_1} \\ \frac{\tilde{x}_p - x_B}{\tilde{d}_2} & \frac{\tilde{y}_p - y_B}{\tilde{d}_2} \\ \frac{\tilde{x}_p - x_C}{\tilde{d}_3} & \frac{\tilde{y}_p - y_C}{\tilde{d}_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10-0}{10\sqrt{2}} & \frac{10}{10\sqrt{2}} \\ \frac{-20}{10\sqrt{5}} & \frac{10}{10\sqrt{5}} \\ \frac{10-0}{10} & \frac{10-10}{10} \end{pmatrix}$$

$$N = A^T A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -2/\sqrt{5} & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}$$

$$N^{-1} = \frac{1}{1,6} \begin{pmatrix} 0,7 & -0,1 \\ -0,1 & 2,3 \end{pmatrix} \rightarrow T_m = A^T T$$

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_p \\ \hat{y}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial \hat{x}_p \\ \partial \hat{y}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,0478 \\ -0,3310 \end{pmatrix} 10^{-4}$$

$$\tilde{y} = \underset{\text{asse } // Y}{J_{PA}} - J_{PB} = \arctan \frac{x_A - \tilde{x}_P}{y_A - \tilde{y}_P} - \arctan \frac{x_B - \tilde{x}_P}{y_B - \tilde{y}_P}$$



J_{PB} : arco // Y fino a farla coincidere con la retta PB (angoli di direzione)

$$Y = A \hat{\xi} + \tilde{Y} \quad Y - \tilde{Y} = T = A \hat{\xi}$$

$$J = A = \begin{pmatrix} \frac{\hat{x}_P - x_A}{d_{AP}} & \frac{\hat{y}_P - y_A}{d_{AP}} \\ \frac{\hat{x}_P - x_B}{d_{BP}} & \frac{\hat{y}_P - y_B}{d_{BP}} \end{pmatrix}$$

È nota dall'Analisi Mat.

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_P} \left(\frac{x_A - x_P}{y_A - y_P} \right) = \frac{-1(y_A - y_P) - 0}{(y_A - y_P)^2}$$

$$\frac{\partial J}{\partial x} (PA) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x_A - x_P}{y_A - y_P} \right)^2} \cdot \frac{-1}{y_A - y_P} = \frac{1}{\frac{(y_A - y_P)^2 + (x_A - x_P)^2}{(y_A - y_P)^2}} \cdot \frac{-1}{y_A - y_P} = \frac{(y_A - y_P)^2}{d_{AP}^2} \cdot \frac{-1}{y_A - y_P} = \frac{y_P - y_A}{d_{AP}^2}$$

$$\frac{\partial J}{\partial x} (PB) = \frac{\hat{y}_P - y_B}{d_{BP}^2}$$

$$\frac{\partial J}{\partial x} = \frac{\hat{y}_P - y_A}{d_{AP}^2} - \frac{\hat{y}_P - y_B}{d_{BP}^2} = \odot$$

$$\frac{\partial J}{\partial y_P} (AP) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x_A - x_P}{y_A - y_P} \right)^2} \cdot \frac{-(x_A - x_P)(-1)}{(y_A - y_P)^2} = \frac{x_A - x_P}{(y_A - y_P)^2 + (x_A - x_P)^2} = \square$$

Quindoli

	ANGOLI E DISTANZE	DIREZIONI ANGOLARI
INCOGNITE	<ul style="list-style-type: none"> • coordinate punti della rete noti solo in modo approx 	<ul style="list-style-type: none"> • // • per ogni punto di stazione utilizzato si deve aggiungere l'incognite correzione di orientem. (correz da oltre alle correz approx)

La (4) risulta quindi:

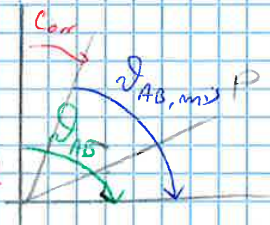
$$\vartheta_{AP, mis} = \arctan \frac{\tilde{x}_P - x_A}{\tilde{y}_P - y_A} - Corr + \frac{\tilde{y}_P - y_A}{d_{PA}^2} \delta x_P - \frac{\tilde{x}_P - x_A}{d_{PA}^2} \delta y_P$$

18

$$(5) \quad \vartheta_{AB, mis} = \arctan \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} - Corr + 0 + 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_P} = \frac{\partial}{\partial y_P} = 0$$

non c'è P, bensì AB!



$\vartheta_{AB} = 90^\circ$ per costruzione

se $\vartheta_{AB, mis} \neq 90^\circ$ è possibile ricavare direttamente la Corr.

Matrice di regressione

$$J = \begin{pmatrix} \delta \tilde{x}_P & \delta \tilde{y}_P & \delta Corr \\ \frac{\tilde{x}_P - x_A}{d_{AP}} & \frac{\tilde{y}_P - y_A}{d_{PA}} & 0 \\ \frac{\tilde{x}_P - x_B}{d_{BP}} & \frac{\tilde{y}_P - y_B}{d_{BP}} & 0 \\ \frac{\tilde{x}_P - x_C}{d_{CP}} & \frac{\tilde{y}_P - y_C}{d_{CP}} & 0 \\ \frac{\tilde{y}_P - y_A}{d_{PA}^2} & -\frac{\tilde{x}_P - x_A}{d_{PA}^2} & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\vartheta_{AB} = \arctan \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} - Corr$$

non c'è P $\rightarrow \frac{\partial}{\partial x_P} = \frac{\partial}{\partial y_P} = 0$

R : mtr quadrata e ortogonale
 $(R^T = R^{-1})$

\neq mtr simmetrica $M = M^T$

Il sistema non è risolvibile, servono 2 punti e non uno (senza μ)
 In genere è preferibile per avere un risultato più affidabile servono più di 2 punti.
 "Risolvo il sistema non come a scuola ma come all'università" $ab!$ 48,2

$$\begin{cases} X_1 = \dots \\ Y_1 = \dots \\ X_2 = T_x + \lambda \cos \alpha x_2 + \lambda \sin \alpha y_2 \\ Y_2 = -T_y - \lambda \sin \alpha x_2 + \lambda \cos \alpha y_2 \\ X_3 = T_x + \lambda \cos \alpha x_3 + \lambda \sin \alpha y_3 \\ Y_3 = T_y - \lambda \sin \alpha x_3 + \lambda \cos \alpha y_3 \\ \vdots \end{cases}$$

Linearizziamo ponendo $\lambda \cos \alpha = a$, $\lambda \sin \alpha = b$ (trucchetti!)

Il sistema diventa

$$\begin{cases} X_1 = \hat{T}_x + \hat{a} x_1 + \hat{b} y_1 \\ Y_1 = \hat{T}_y - \hat{b} x_1 + \hat{a} y_1 \\ X_2 = \hat{T}_x + \hat{a} x_2 + \hat{b} y_2 \\ Y_2 = -\hat{T}_y - \hat{b} x_2 + \hat{a} y_2 \\ X_3 = \dots \\ Y_3 = \dots \\ \vdots \\ Y_4 \end{cases}$$

$n=4$ (4 incognite)

$m=8$?

Avremo il vettore \vec{O}_b (observations) corrispondente alle Y osservate

55

$$\vec{O}_b = \begin{pmatrix} 290 \\ 150 \\ 420 \\ 80 \\ 560 \\ 200 \\ 390 \\ 300 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \hat{T}_x \\ \hat{T}_y \\ \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix}$$

soluz

Sono possibili altre trasformazioni:

- rototraslate semplici
- rototraslate con f. di scala isotropa $I \leftarrow$ in questo corso
- " " " non isotropa (2 fattori di scala)
- omografie
- trasformazione affine (\rightarrow geometria, computer vision)

Progi e difetti di MQ

Difetto principale: mancanza di robustezza \rightarrow in presenza di outlier ("che stanno fuori") ovvero errori: MQ sbaglia le stime: errori nelle osservazioni portano a distorsioni delle stime

Occorre una rete ben fatta che permetta di trovare facilmente gli errori

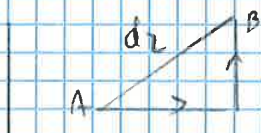
Problema ben condizionato: a piccole diff delle misure corris. piccole diff nelle risposte
mal " : piccole diff. portano ad alterazioni vistose nei risultati

Mal condizionamento \rightarrow indice che fornisce indicazioni sul condizionam. del problema
 si ricava dalle norme della matrice ^{normale} designata e inversa

Norma di un vettore

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Altre norme



Manhattan distance (~~Roma~~ ^{Torino} distance: in una città non si può andare da un lp all'altro saltellando ma percorrendo solo i viali)

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots$$

10, 10

Si introduce per comodità di calcolo la coordinata curvilinea u : latitudine ridotta

$$\boxed{r \, d\varphi = r \, du \quad \frac{du}{d\varphi} = \frac{r}{r}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{r}{r} \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{r}{r}$$

Risolviamo (*) utilizzando u

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 \quad (1)$$

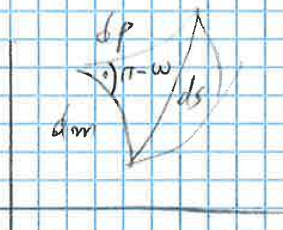
Riscrittura in altro modo

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 \left[1 + \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2}{\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2}\right] - \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 \left[1 + \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2}{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2}\right] = 0 \quad (1')$$

2) $\Rightarrow \underline{f \equiv 0}$ con $f = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda}$

dim \swarrow Applico teor. Carnot (trigonometrico)

$$\begin{aligned} ds_c^2 &= dp^2 + dm^2 - 2dp \, dm \cos(\pi - \omega) \\ &= g \, d\lambda^2 + e \, d\varphi^2 + 2 \cos \omega \sqrt{ge} \, d\lambda \, d\varphi \\ &= g \, d\lambda^2 + e \, d\varphi^2 \end{aligned}$$



$$ds_{\text{carta}}^2 = g \, d\lambda^2 + e \, d\varphi^2 + 2f \, d\varphi \, d\lambda \quad (\text{Teor. P. (} \omega = \frac{\pi}{2} \text{)})$$

affinché si intersechino a 90° deve essere $ds_c^2 = ds_{\text{carta}}^2$ quindi necessariamente $f \equiv 0$

$$f \equiv 0 \Leftrightarrow \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0 \quad (2) \rightarrow \text{in termini}$$

di lat. ridotta si ha

$$\frac{r}{r} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{r}{r} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0 \quad (2^*)$$

$$\frac{\partial J_{PA}}{\partial y_P} = \frac{\partial}{\partial y_P} \left[\arctan \left(\frac{x_P - x_A}{y_P - y_A} \right) \right] = \frac{1}{1 + \left(\frac{x_P - x_A}{y_P - y_A} \right)^2} \cdot \frac{0 - (x_P - x_A)}{(y_P - y_A)^2} = - \frac{\tilde{x}_P - x_A}{\tilde{d}_{PA}^2}$$

$$\frac{\partial J_{PB}}{\partial y_P} = \dots = \frac{x_B - \tilde{x}_P}{\tilde{d}_{PB}^2} = \frac{x_A - \tilde{x}_P}{\tilde{d}_{PA}^2}$$

$$\frac{\partial J}{\partial y_P} = \frac{x_A - \tilde{x}_P}{\tilde{d}_{PA}^2} - \frac{x_B - \tilde{x}_P}{\tilde{d}_{PB}^2}$$

$$y - \tilde{y} = T = A \hat{\xi}$$

$$A = J = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{x}_P - x_A}{\tilde{d}_{AP}} & \frac{\tilde{y}_P - y_A}{\tilde{d}_{AP}} \\ \frac{\tilde{x}_P - x_B}{\tilde{d}_{BP}} & \frac{\tilde{y}_P - y_B}{\tilde{d}_{BP}} \\ \frac{\tilde{y}_P - y_A}{\tilde{d}_{PA}^2} - \frac{\tilde{y}_P - y_B}{\tilde{d}_{PB}^2} & \frac{x_A - \tilde{x}_P}{\tilde{d}_{PA}^2} - \frac{x_B - \tilde{x}_P}{\tilde{d}_{PB}^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\tilde{x}_P - x_A}{\tilde{d}_{AP}} & \frac{\tilde{y}_P - y_A}{\tilde{d}_{PA}} & 0 \\ \frac{\tilde{x}_P - x_B}{\tilde{d}_{BP}} & \frac{\tilde{y}_P - y_C}{\tilde{d}_{CP}} & 0 \\ \frac{\tilde{x}_P - x_C}{\tilde{d}_{CP}} & \frac{\tilde{y}_P - y_C}{\tilde{d}_{CP}} & 0 \\ \frac{\tilde{y}_P - y_A}{d_{PA}^2} & -\frac{\tilde{x}_P - x_A}{d_{PA}^2} & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \tilde{x}_P \\ \delta \tilde{y}_P \\ \delta \tilde{c}_{cor} \end{pmatrix} = T = Y - \tilde{Y}$$

$$\begin{pmatrix} d_{AP} - \tilde{d}_{AP} \\ d_{BP} - \tilde{d}_{BP} \\ d_{PC} - \tilde{d}_{PC} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_P} & \frac{\partial}{\partial \tilde{y}_P} & \frac{\partial}{\partial \tilde{c}_{cor}} \\ 3 \times 3 & 3 \times 1 & 3 \times 1 \\ J & \delta \hat{\gamma} & = T \end{matrix}$$