NUMERO: 1817A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Bianchini Maria Naomi

MATERIA: Fondamenti di meccanica strutturale - prof. Curà

SCHEMA GENERALE DEL CORSO 30-09-2014

OGGETTO REALE → MODELLO

SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

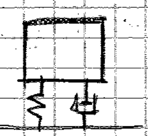
NOI USEREMO SOLO QUESTO TIPO DI STRUTTURA

* SISTEMA CONTINUO di Tipo strutturale
  È UN SISTEMA A PARAMETRI CONTINUI (DISTRIBUITI) (posso descriverlo attraverso un parametro che varia lungo tutta l'estensione, ogni punto ha proprie caratteristiche)
  È UN SISTEMA CHE SI STUDIA IN MANIERA MOLTO RIGOROSA (soluzioni analitiche, rigorose)

Di questo sistema continuo ci sono vari modelli strutturali

- SOLIDO DI DE SAINT VENANT (MODELLO TRAVE)
  L Modello monodimensionale
- PIASTRE (modello 2D)
- GUSCI (modello 2D)

* SISTEMI A PARAMETRI CONCENTRATI
  (i parametri li rappresento tutti concentrati in un solo punto)
  COME AD ESEMPIO MASSA MOLLA SMORZATORE DI UNA SOSPENSIONE



* SISTEMI MATRICIALI
  sono sistemi con soluzioni approssimate

STRUTTURA
OGGETTO REALE

↓

MODELLO (struttura, delle forze, dei vincoli)

↓

CALCOLO delle FORZE AGENTI SULLA STRUTTURA

- forze ESTERNE ⇒ **REAZIONI VINCOLARI**
- forze INTERNE ⇒ **SFORZI**, diagrammi degli sforzi, caratteristiche di sollecitazione

---

└ FA RIFERIMENTO AL CORPO RIGIDO (che non subisce nessuna deformazione)
NON MI INTERESSA LA FORMA NE IL MATERIALE
(⇒ NON È ARGOMENTO DELL'ORALE, SOLO ESERCIZI SUGLI SCRITTI)

↓

CORPO DEFORMABILE ⇒ Parte più difficile ma + interessante

dopo aver definito gli sforzi
↓
TENSIONI (σ, τ) ⇒ stress, la sofferenza della struttura nei punti più sollecitati

PER CALCOLARE LE TENSIONI
⇒ LEGGI COSTITUTIVE del MATERIALE
⇒ FORMA DELLA SEZIONE dell'elemento trave (geometria delle aree)

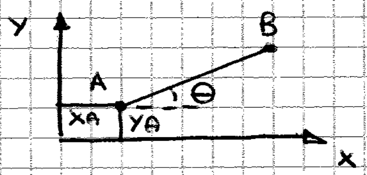
↓

CALCOLARE ATTRAVERSO LE IPOTESI DI ROTTURA (o di cedimento) DEFINISCO IL COEFFICIENTE DI SICUREZZA STATICO della mia STRUTTURA
(⇒ scopo del corso)

COORDINATE di UN SISTEMA (n)

sono le info necessarie e sufficienti per definire la posizione di un corpo rigido nel piano o nello spazio

* CORPO PUNTIFORME NEL PIANO (2D) ⇒ $n=2$
* CORPO PUNTIFORME NELLO SPAZIO (3D) ⇒ $n=3$
* CORPO RIGIDO NEL PIANO (2D) → $n=3$



2 TRASLAZIONALI x_A y_A
1 ROTAZIONALE θ_A

* CORPO RIGIDO NELLO SPAZIO (3D) → $n=6$

3 TRASLAZIONALI x_A y_A z_A
3 ROTAZIONALI θ_x θ_y θ_z

∀ CORPO RIGIDO HA 3 COORDINATE NEL PIANO
6 COORDINATE NELLO SPAZIO

QUESTE COORDINATE POSSONO ESSERE

* **VINCOLATE** (m)
* **LIBERE** (l) → GRADI DI LIBERTÀ della STRUTTURA
(DOF → DEGREE OF FREEDOM)

$$\boxed{n \gtreqless m + l}$$

- $n = m + l$ SISTEMA GENERALE
(delle coordinate una parte è vincolata e una parte no)
- $n = m$, $l = 0$ SISTEMA ISOSTATICO
(sistema è fermo ed è vincolato quanto serve)

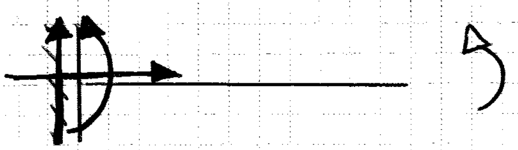
Modelli di vincolo in 2D

(IN 3D LI AFFRONTIAMO QUANDO NE AVREMO NECESSITÀ)

→ DECRESCENTI COME VINCOLI delle COORDINATE

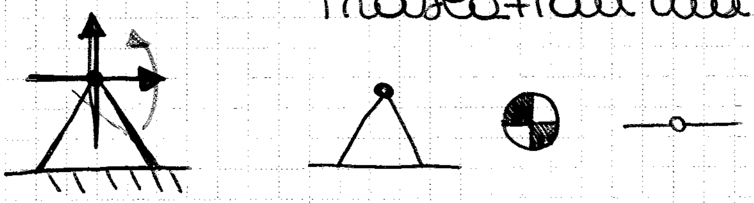
Prendiamo sempre una Trave nel piano $(n=3)$
(COORDINATE SONO $(X_A\ Y_A\ \theta_z)$

* **INCASTRO** → incastro non si muove, vincola tutte e 3 le coordinate

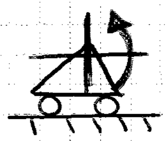


si oppone alla rotazione

* **CERNIERA** (interna, esterna) → vincola le 2 Traslazioni ma consente la rotazione



* **CARRELLO** (o APPOGGIO SEMPLICE) → vincola solo la Traslazione verticale mentre consente la Traslazione orizzontale e la rotazione



1-10-2014

COORDINATE n SONO 3 in 2D
6 in 3D

n CORRISPONDONO ANCHE ALLE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO CHE POSSO SCRIVERE

$$n = m + l$$

n → COORDINATE; m → VINCOLI; l → GRADI di LIBERTÀ

$$n = m + l$$ — EQUAZIONI del MOTO

n: EQUAZIONI di EQUILIBRIO

m: EQUAZIONI PER IL CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI

* $n = m$, $l = 0$ SISTEMA ISOSTATICO
  ⇒ le n equazioni di equilibrio che devo scrivere ci servono tutte per il calcolo delle REAZIONI VINCOLARI (FORZE ESTERNE INCOGNITE)

* $n = m + l$, $l \neq 0$ positivo SISTEMA IPOSTATICO O LABILE
  ⇒ le n equazioni di equilibrio
    * m ci SERVONO PER CALCOLARE LE REAZIONI VINCOLARI
    * l ci SERVONO PER STUDIARE IL MOTO DEL SISTE (lo fermano in un istante)

* $m > n$, $l \neq 0$ negativo SISTEMA IPERSTATICO
  ⇒ io posso scrivere solo n eq di equilibrio che non mi bastano per calcolare tutte le m
  DEVO USARE ALTRI METODI

INCOGNITE
RAO
RAV
RBV

$\xrightarrow{+}$ $R_{AO} = 0$

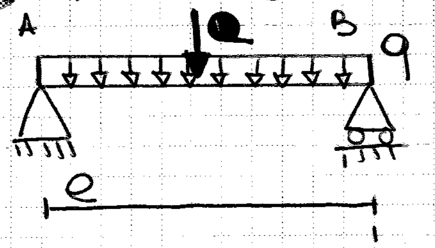
$\uparrow +$ $R_{AV} - F + R_B = 0$

$\circlearrowleft A)$ $R_B l - F\frac{l}{2} = 0 \rightarrow R_B = \frac{F}{2}$

$R_{AV} = \frac{F}{2}$

(–) perché genera un momento orario

TRAVE SU DUE APPOGGI CON UN CARICO DISTRIBUITO



→ la risultante la posso immaginare applicato al baricentro

$Q = q \cdot l$ → non va bene nei diagrammi degli sforzi

$\xrightarrow{+}$ $R_{AO} = 0$

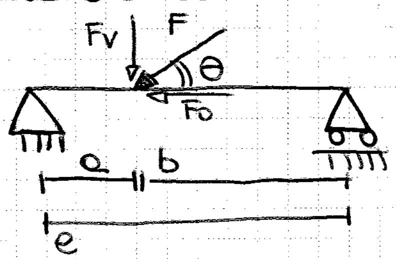
$+\uparrow$ $R_{AV} - Q + R_b = 0$

$\circlearrowleft A)$ $R_b l - Q l/2 = 0$

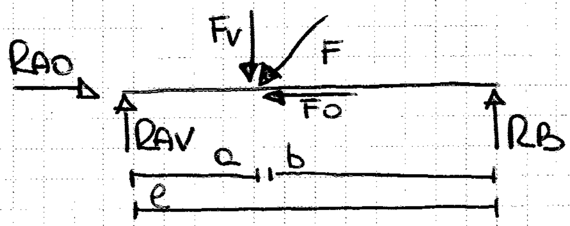
$\circlearrowleft B)$ $Q\frac{l}{2} - R_{AV} l = 0 \rightarrow R_{AV} = \frac{ql}{2}$

$R_B = \frac{ql}{2}$

TRAVE CON DUE APPOGGI E UNA FORZA F NON NELLA METERIA



⇒ Devo fare per forza le proiezioni della forza, ~~se fossero nella~~ se i carrelli fossero nella stessa direzione della forza non ne avrei avuto bisogno



$F_V = F\sin\theta$
$F_O = F\cos\theta$

$\xrightarrow{+}$ $R_{AO} - F_O = 0 \rightarrow R_{AO} = F_O$

$\uparrow +$ $R_{AV} - F_V + R_B = 0$

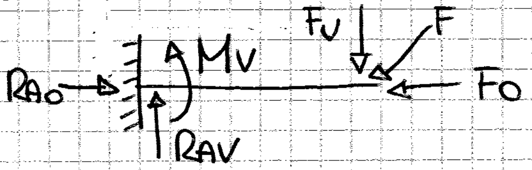
$\circlearrowleft A)$ $-F_V a + R_B l = 0 \rightarrow R_B = \frac{F_V a}{l}$

$R_{AV} = F_V - F_V\frac{a}{l} = F_V\left(1 - \frac{a}{l}\right) = F_V\frac{b}{l}$

Altri esempi di calcolo delle reazioni vincolari

cantilever

* TRAVE CON INCASTRO E FORZA APPLICATA ALL'ALTRA ESTREMITÀ



Mv = MOMENTO DI VINCOLO

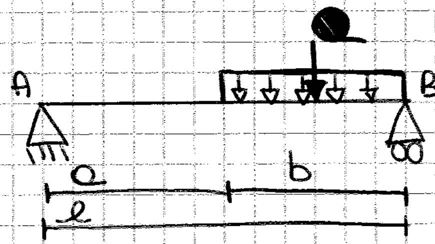
INCOGNITE: R_{AO}, R_{AV}, M_V

$\xrightarrow{+}$ $R_{AO} - F_O = 0 \rightarrow R_{AO} = F_V$

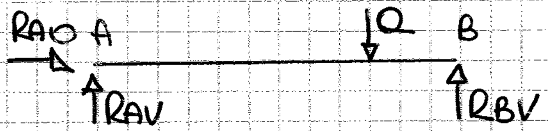
$\uparrow$ $R_{AV} - F_V = 0 \rightarrow R_{AV} = F_V$

$\overset{\curvearrowleft}{A}$ $M_V - F_V l = 0 \rightarrow M_V = F_V l$

* TRAVE CON DUE APPOGGI E CARICO SOLO SU UNA PORZIONE DI TRAVE



$Q = qb \rightarrow$ non va bene nel diagramma degli sforzi



$\xrightarrow{+}$ $R_{AO} = 0$

$+\uparrow$ $R_{AV} + R_{BV} - qb = 0$

$\overset{\curvearrowleft}{A}$ $R_{BV} l - qb\left(a + \frac{b}{2}\right) = 0 \Rightarrow R_{BV} = \frac{qb\left(a + b/2\right)}{l}$

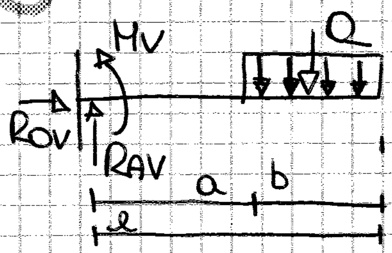
$$R_{AV} = qb - \frac{qb}{l}\left(a + b/2\right)$$

$$R_{AV} = qb\left(1 - \frac{1}{l}\left(a + \frac{b}{2}\right)\right) =$$

$$qb\left(1 - \frac{a}{l} - \frac{b}{2l}\right) = qb\left(\frac{2l - 2a - b}{2l}\right) = \frac{qb^2}{2l} ??$$

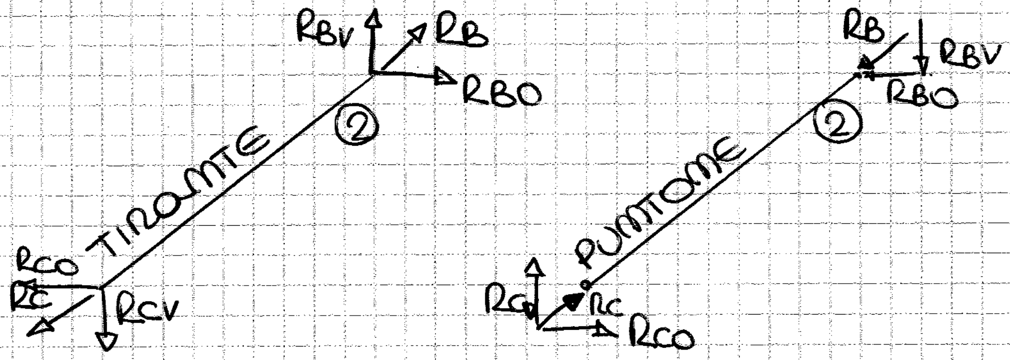
* TRAVE CON INCASTRO E CARICO SOLO SU UNA PORZIONE

$Q = bq$



Asta 2 può quindi ~~fare~~ essere un tirante o un puntone (NON LO SO ESATTAMENTE)

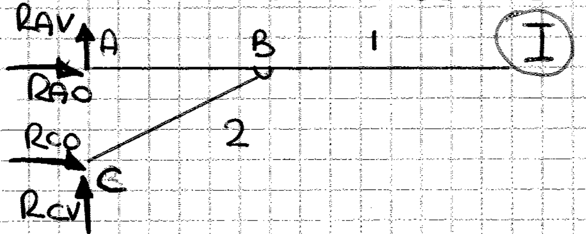
→ LA RISULTANTE DELLE REAZIONI HA SEMPRE LA STESSA DIREZIONE DELL'ASTA



→ NELLE ASTE I VERSI DELLE REAZIONI NON METTERLI A CASO MA O ENTRAMBE CHE SPINGONO O ENTRAMBE CHE TIRANO PERCHÉ ALLORA È MOLTO PIÙ SEMPLICE
(se sono entrambe positive ok, altrimenti sono entrambe negative)

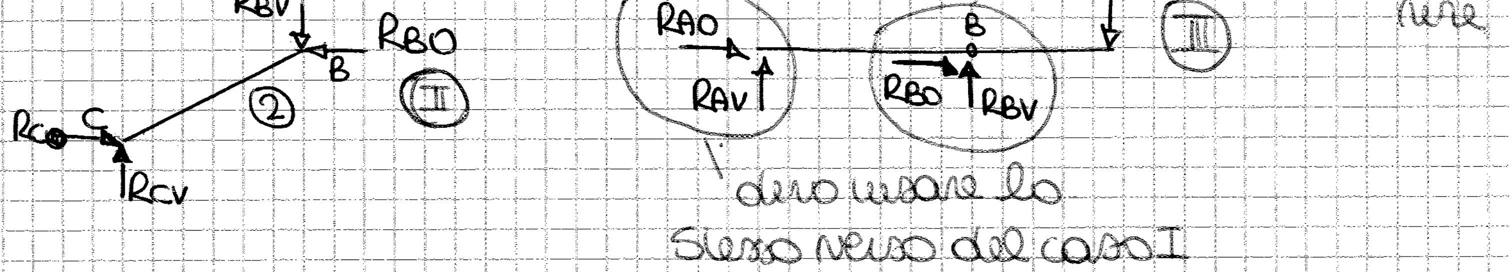
NEL NOSTRO CASO, LA NOSTRA ASTA È UN PUNTONE
Adesso devo calcolare le reazioni

STACCO IL SISTEMA DAL MURO (TOLGO VINCOLI ESTERNI)



→ I VERSI DI RAV e RAO LI METTO A CASO MENTRE RCO E RCV NO

STACCO VINCOLI INTERNI

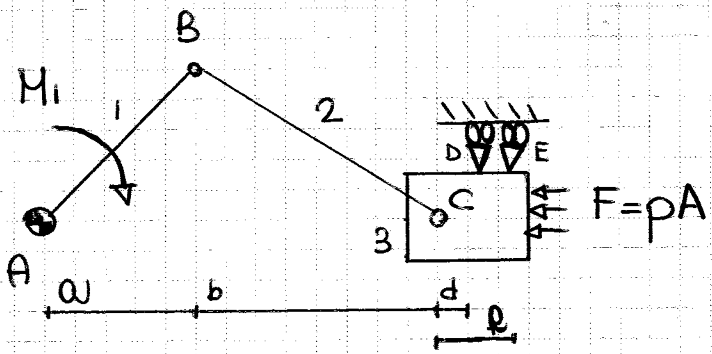


POSSO SCRIVERE 9 eq MA HO SOLO 6 INCOGNITE, DEVO SCEGLIERE

I + II → FACCIAMO QUESTO (è + conveniente & c'è un asta perché le equ sono semplici)
I + III
II + III

ESERCITAZIONE 7-10-2014

SISTEMA ARTICOLATO LABILE



CALCOLARE I GRADI DI LIBERTÀ

$n = \underset{1}{3} + \underset{2}{3} + \underset{3}{3} = 9$

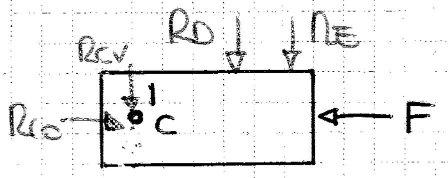
$m = \underset{A}{2} + \underset{B}{2} + \underset{C}{2} + \underset{D}{1} + \underset{E}{1} = 8$

$l = n - m = 1$

1 solo movimento è libero, gli altri sono univocamente definiti
<u>SONO DIPENDENTI</u> TRA LORO

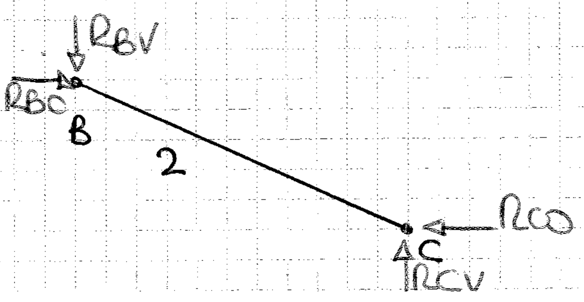
Posso scrivere 9 equazioni di equilibrio

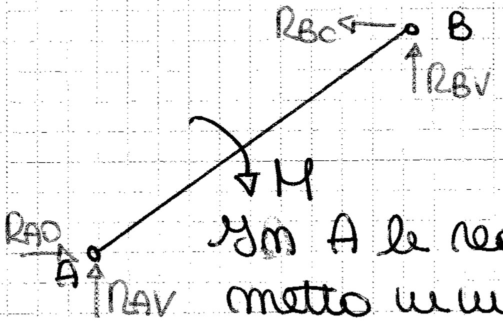
* 8 mi servono per le reazioni vincolari
* 1 è un'equazione del moto (LEGA M a F)



INCOGNITE
- RAV
- RAO
- RBV
- RBO
- RCO
- RCV
- RD
- RE

→ la biella è un'asta
(SOTTOCASO DI TRAVE CARICATO SOLO DALLE REAZIONI VINCOLARI AGLI ESTREMI)
In questo caso è un <u>PUNTONE</u>
SE C'È UN'ASTA È BENE EVIDENZIARE SUBITO LE REAZIONI SU DI ESSA E POI POSIZIONARE LE ALTRE DI CONSEGUENZA





In A le reazioni le metto in un verso casuale

Deve essere equilibrata la risultante

$$\boxed{|R| = \sum_{i=1}^{n} F_i} \longrightarrow$$ RISULTANTE IN MODULO

Per il punto di applicazione occorre fare una MEDIA PESATA (SOMMA DELLE FORZE PER LA LORO DISTANZA) DIVISO IL MODULO)

$$R = \sum_{i=1}^{n} F_i$$

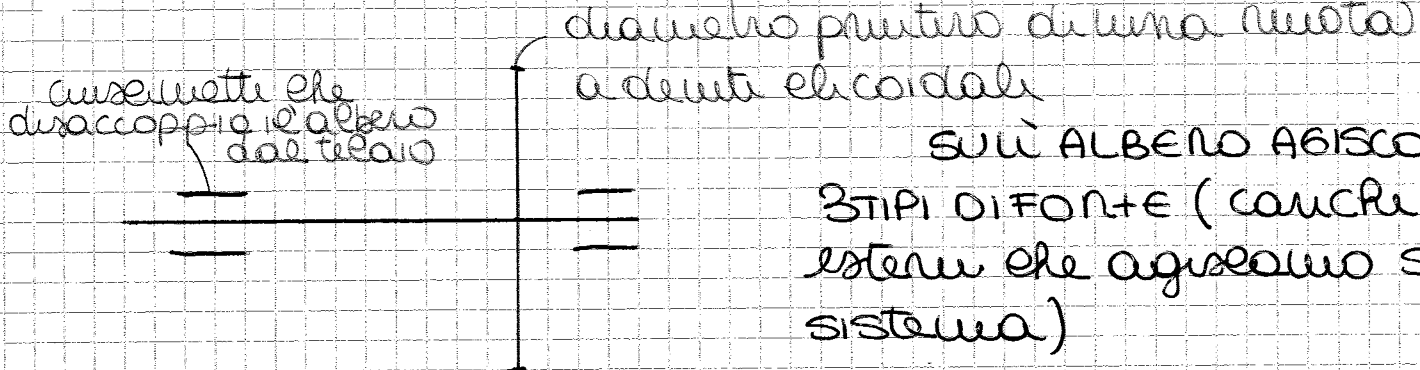
$$O\circlearrowleft \quad Rx = F_1x_1 + F_2x_2 + \dots = \sum_{i=1}^{n} F_i x_i$$

↓ BRACCIO

$$\Rightarrow \boxed{X = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i X_i}{\sum F_i}} \longrightarrow$$ PUNTO DI APPLICAZIONE

Albero posso semplificarlo con un elemento trave che è direttamente l'asse dell'albero

→ A ME NON INTERESSO ~~SE~~ IN QUESTO MOMENTO SE L'ALBERO HA SEZIONI DIFFERENTI PERCHÉ IO STO STUDIANDO LE FORZE ESTERNE (calcolo i carichi che il mondo esterno esercita sull'albero)



SULL'ALBERO AGISCONO 3 TIPI DI FORZE (carichi esterni che agiscono sul sistema)

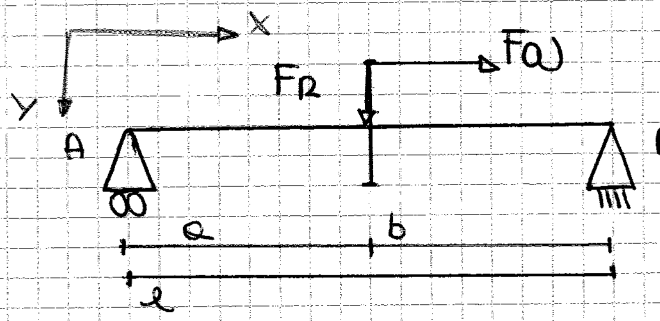
IL SUPPORTO LO POSSO SIMULARE COME UN CARRELLO O CON UNA CERNIERA (mai incastro ⇒ si rompe tutto)

Il gruppo meccanico di solito è labile ad 1 grado di libertà

$\circlearrowleft +)\quad M_T - F_T R = 0 \qquad \boxed{M_T = F_T R}$ — EQUAZIONE DEL MOTO

Calcoliamo le reazioni vincolari

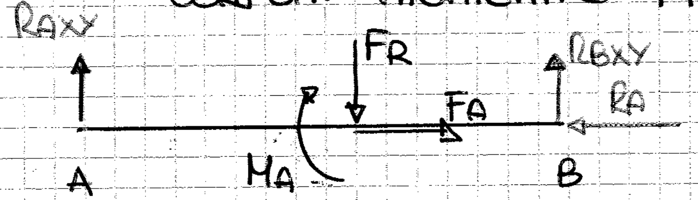
* **COMINCIAMO DAL PIANO XY**



INCOGNITE
R_{Axy}
R_{Bxy}
R_a (comp. assiale)
→ in questo piano non vedo la forza tangenziale

SICCOME IO STO STUDIANDO L'ALBERO (la Trave), **LA RUOTA È COME SE NON ∃**

- forza radiale la considero come un carico applicato sulla trave
- forza assiale la **TRASPORTO**
  la sostituisco con una Fa agente sulla trave e con un momento $M_A = F_a R$



$M_a = F_a R$

SCRIVIAMO LE EQUAZIONI DI EQUI

$\longrightarrow\quad F_A - R_A = 0 \qquad F_A = R_A$

$\uparrow\quad R_{Axy} + R_{Bxy} - F_r = 0 \qquad R_{Axy} = F_r - \dfrac{F_r A - F_a R}{L}$

$A\circlearrowleft\quad R_{Bxy} L - F_r A - M_a = 0$

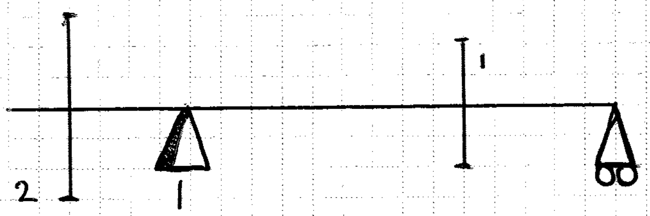
$R_{Bxy} L - F_r A - F_a R = 0 \qquad R_{Bxy} = \dfrac{F_r A + F_a R}{L}$

$R_{Bxy} = \dfrac{F_r A \oplus F_a R}{L} \qquad R_{Axy} = \dfrac{F_r B \ominus F_a R}{L}$

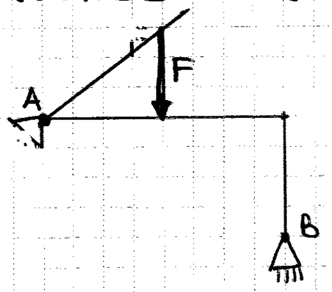
È INTUITIVO CHE IN B CI SIA + E IN A UN − PER LA PRESENZA DI **Ma**

Schema del sistema (tra esercizi)

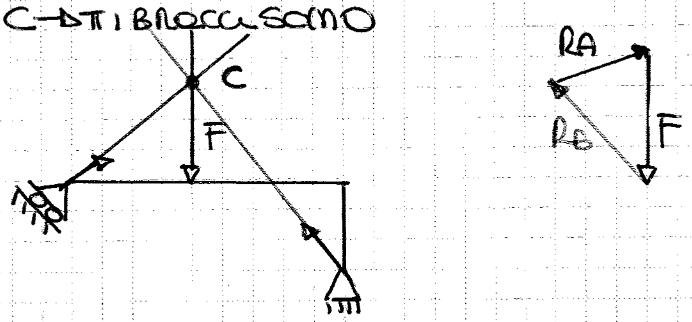
SVOLGI L'ES.



Metodo grafico per il calcolo delle reazioni vincolari → POSSO UTILIZZARLO SOLO SE HO UNA FORZA NOTA IN MODULO DIR E VERSO E UN'ALTRA FORZA NOTA IN DIREZIONE (almeno)



C→DI BLOCCO SONO

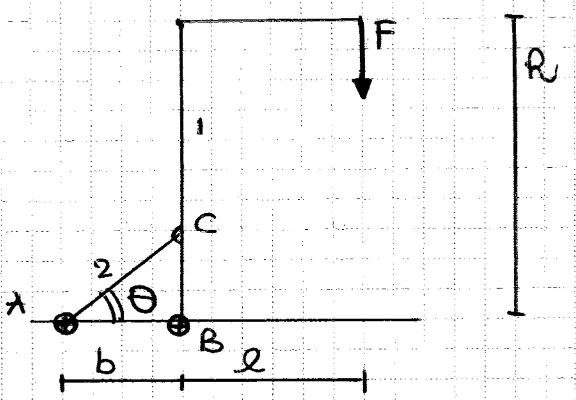


è rispettato equilibrio alle 2 traslazioni e alla rotazione

ESERCIZIO

$\theta = 45°$

C NON INTERROMPE LA CONTINUITÀ DELLA TRAVE

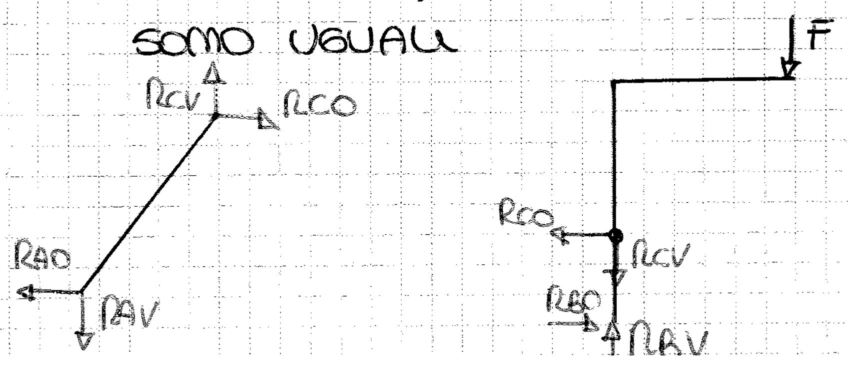


$n = 3 + 3 = 6$

$m = \underset{A}{2} + \underset{B}{2} + \underset{C}{2} = 6$

$l = 0$ → SISTEMA ISOSTATICO

2 → È UN TIRANTE, IN PIÙ SICCOME $\theta = 45°$, TUTTE LE REAZIONI SONO UGUALI



FORZE INTERNE

→ Per arrivare a studiare il coef di sicurezza tagliamo la nostra trave in pezzi sempre più piccoli fino a considerare solo un infinitesimo

Nomenclatura

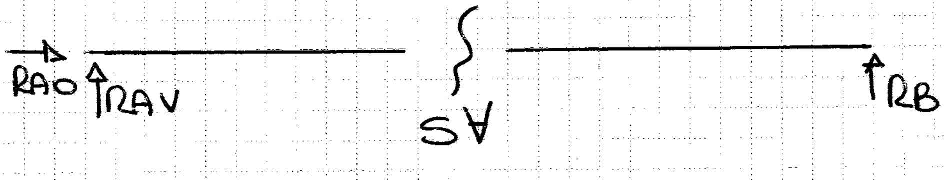
* FORZE INTERNE → Termine di derivazione anglosassone
* SFORZI (DIAGRAMMI DEGLI SFORZI) → TIPICO DEI CIVILI
* SOLLECITAZIONI (ANDAMENTO DELLE CARATTERISTICHE) → TIPICO della MECCANICA

NON IMPORTA IL NOME, È IMPORTANTE CHE SIA CHIARO COME:

* FORZA ESTERNA → globalità della struttura
* FORZA INTERNA → porzione di struttura
* STRESS-TENSIONE → facciamo riferimento ad un punto infinitesimo

FORZE INTERNE → FORZE CHE COMPAIONO SE SEPAR LA TRAVE (mi garantiscono l'equilibrio della porzione di trave con le forze esterne)

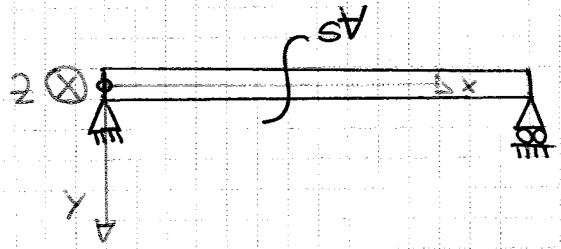
→ Siamo sempre in condizioni di corpo rigido (non conosco la sezione e non conosco il materiale)



ogni pezzo di trave deve essere equilibrato (DATO DALLA SOMMA DELLE FORZE ESTERNE E DELLE FORZE INTERNE)

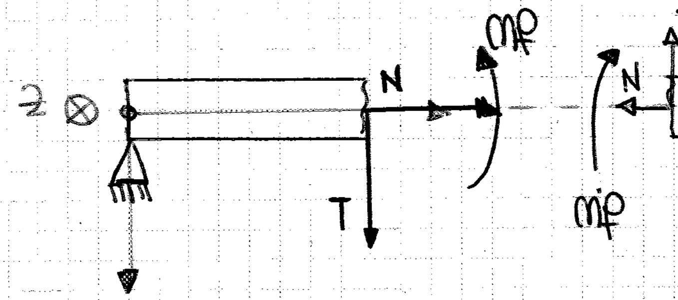
My – MOMENTO FLETTENTE LUNGO Y

Nel caso 2D (Modello Trave) → USIAMO N, Ty, Mz



Guardiamo le convenzioni positive degli sforzi

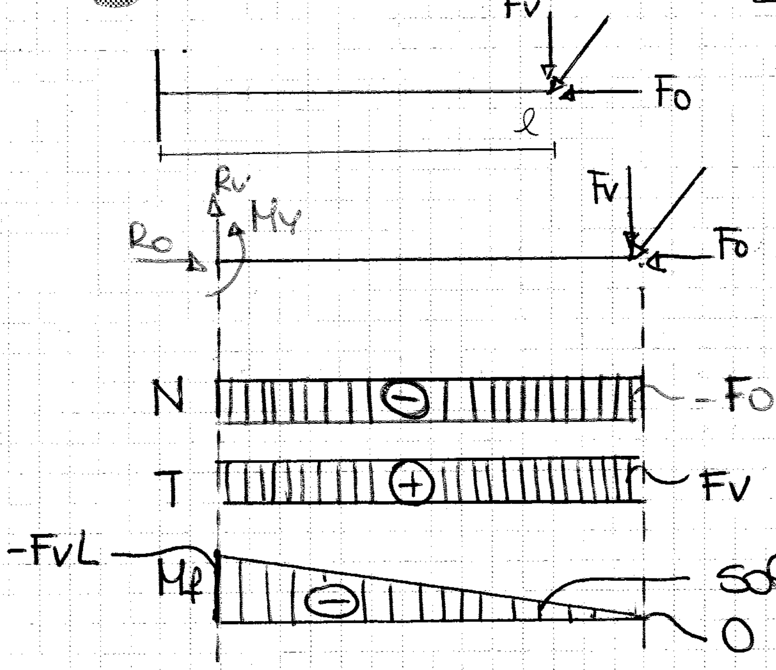
CONVENZIONI POSITIVE DEGLI SFORZI



Mf è pos se mette in trazione le fibre di sotto (in verso antioran riporta la Y sulla x)

SCRIVIAMO LE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO

* TRAVE AD INCASTRO CON **UNA F APPLICATA ALL' ESTREMO**



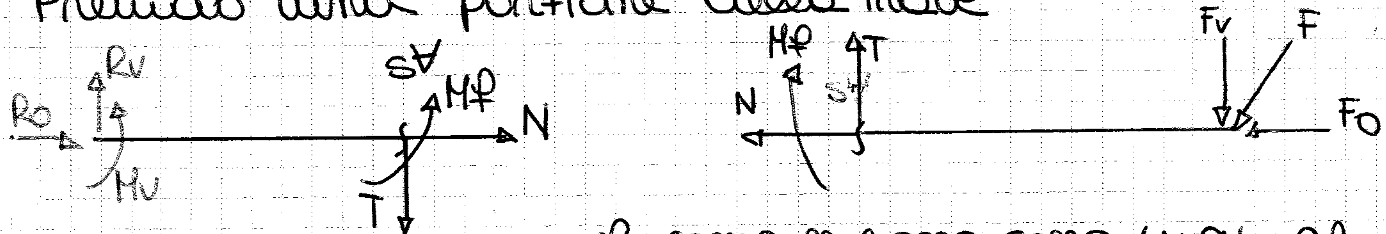
solo una convenzione

Concetto di CAMPATA

CAMBIA SOLO SE INCONTRO QUALCOSA CHE MI FA VARIARE LA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO

→ significa che in ∀ punt[o] spetto la ~~trav~~ Trave ho sempre la stessa) eq. di eq

Prendo una porzione della Trave

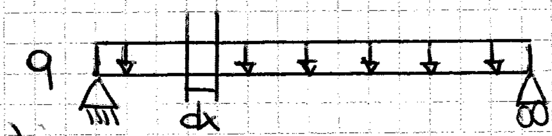


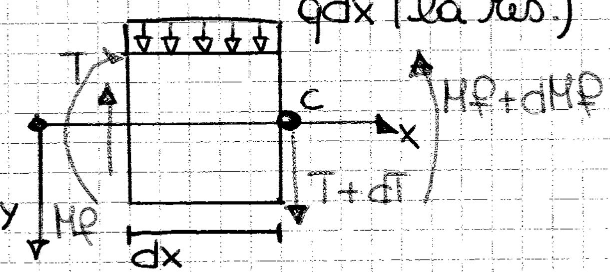
le comp in rosso sono uguali perc[hé] l'equilibrio del sistema va mantenut[o]

DIMOSTRAZIONE → la derivata del momento flettente in dx è lo sforzo di Taglio e che la derivata dello sforzo di Taglio è $-q$ nel caso ci sia un carico distribuito

$$\frac{dMf}{dx} = T$$

$$\frac{dT}{dx} = -q$$





$$+\uparrow \quad \cancel{T} - qdx - \cancel{T} - dT = 0 \qquad q = -\frac{dT}{dx}$$

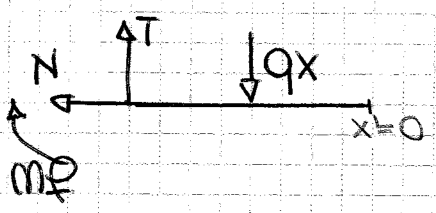
$$C+ \quad -\cancel{Mf} + \cancel{Mf} + dMf - Tdx + \cancel{qdx\frac{dx}{2}} = 0$$

infin di ordine sup

$$\frac{dMf}{dx} = T$$

$\frac{dMf}{dx} = T$ → aiuta a verificare il tutto
(SE Mf è lineare → T è costante)
(SE Mf è una parabola → T è lineare)

Prendo l'altro pezzo di trave

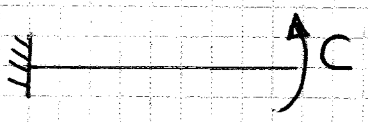


$$N = 0$$
$$T = qx' = q(L-x)$$
$$M_f = -\frac{qx'^2}{2} = -\frac{q(L-x)^2}{2} = -\frac{q(L^2+x^2-2Lx)}{2} = -\frac{qL^2}{2} - \frac{qx^2}{2} + qLx$$

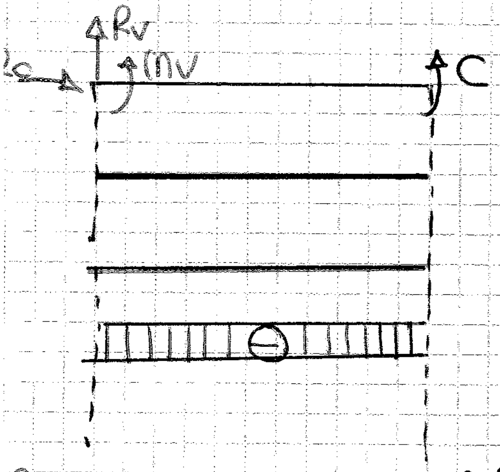
→ È verificato da entrambe le parti

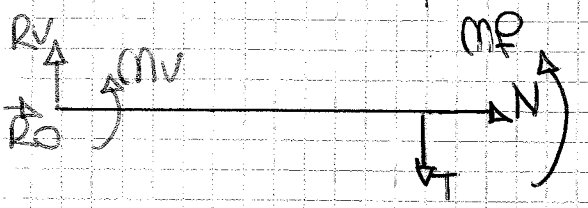
$$\frac{dM_f}{dx} = qL - qx = q(L-x) = T$$

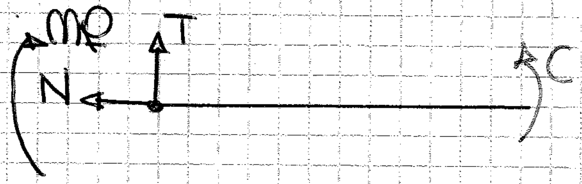
⊛ INCASTRO CON **COPPIA APPLICATA**



$$R_O = 0$$
$$R_V = 0$$
$$M_V = -C$$







$N + R_O = 0 \quad N = 0$

$T - R_V = 0 \quad T = 0$

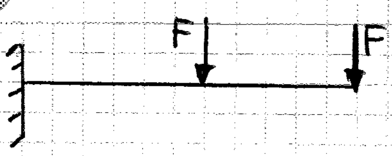
$M_f + M_V = 0 \quad M_f = +C$

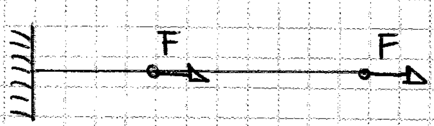
$N = 0$

$T = 0$

$M_f = C$

⊛ TRAVE AD INCASTRO **CON APPLICATE 2 FORZE UGUALI**

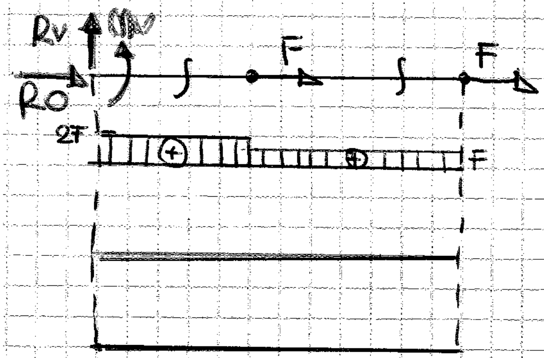


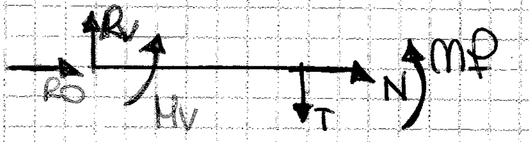


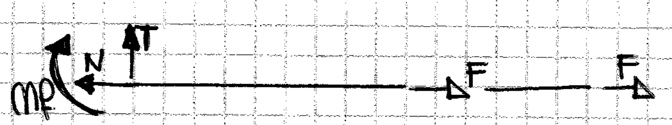
$R_O = -2F$

$R_V = 0$

$M_V = 0$







$N = -R_O = 2F$

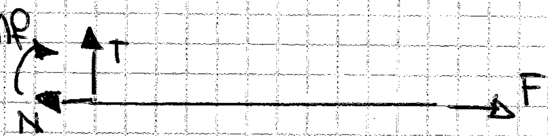
$T = R_V = 0$

$M_f = -M_V + R_V x = 0$

$N = 2F$

$T = 0$

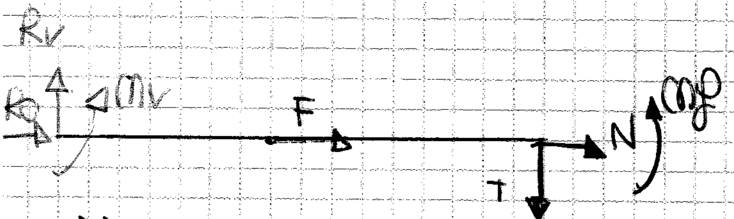
$M_f = 0$



$N = F$

$T = 0$

$M_f = 0$



$N = -R_O - F = +2F - F = F$

$T = R_V = 0$

$M_f + M_V - R_V x = 0 \quad M_f = 0$

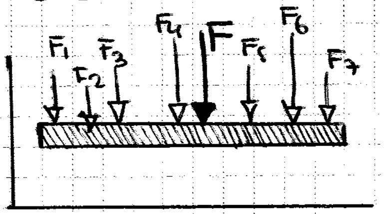
15-10

GEOMETRIA delle AREE → faccio sempre riferimento all'area dell'oggetto

* BARICENTRI MOM STATICI
* MOMENTI d'INERZIA
* ASSI CENTRALI d'INERZIA

BARICENTRO → CENTRO di MASSA (punto in cui è concentrata la forza peso)

- RISULTANTE delle FORZE PARALLELE

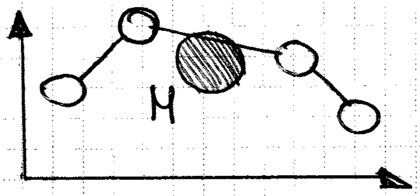


la risultante F è caratterizzata da un modulo e un punto di applicazione

$$F = \sum_{i=1}^{m} F_i \text{ (MODULO)}$$

$$X_F = \frac{\sum_{i=1}^{m} F_i X_i}{\sum F_i} \text{ (PUNTO di APPLICAZIONE)}$$

Possiamo fare lo stesso ragionamento usando le masse anziché le forze



la risultante M è caratterizzata da un modulo e un punto di applicazione

M → SISTEMA EQUIVALENTE di MASSE (massa applicata nel baricentro della struttura in questione)

$$M = \sum_{i=1}^{m} M_i \text{ (MODULO)}$$

$$X_M = \frac{\sum_{i=1}^{m} M_i X_i}{\sum M_i} \Rightarrow M X_M = \sum M_i X_i$$

COORDINATA DEL BARICENTRO

IN QUESTO CASO PRENDIAMO UN MATERIALE **OMOGENEO** E **ISOTROPO**

ρ = costante → LO CONSIDERIAMO COSÌ SALVO DIVERSO AVVISO

$$[\rho] = kg/m^2$$

→ FACCIO SEMPRE RIFERIMENTO AD UNA LUNGHEZZA UNITARIA

⇒ * DUE SEZIONI DIVERSE MA CON MATERIALI UGUALI

* DUE SEZIONI CON LA STESSA GEOMETRIA MA MATERIALI DIVERSI

geometria delle aree → 2D

geometria delle masse → 3D

* AREA della SEZIONE PER LA DISTANZA DELL' ASSE DAL BARICENTRO CONSIDERATO

MOMENTO STATICO (per def) ←

$$S_x = \int_A y\, dA = y_G A$$

$$S_y = \int_A x\, dA = x_G A$$

$$S_R = \int_A d\, dA = d_G A$$

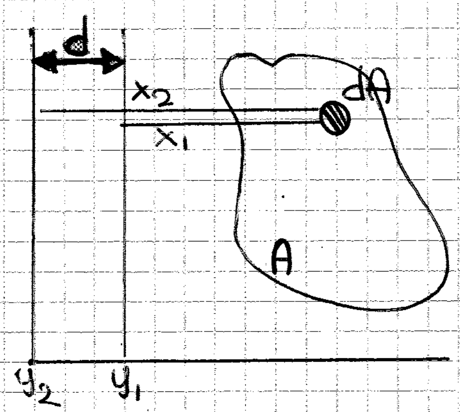
distanza di G da un asse di riferimento

⇒ il mom statico è imp perché ci permette di calcolare il baricentro infatti

$$y_G = \frac{S_x}{A} \qquad x_G = \frac{S_y}{A} \qquad d_G = \frac{S_R}{A}$$

TEOREMA di TRASPOSIZIONE dei MOMENTI STATICI

→ non serve nell'orale ma solo per calcolare il baricentro e le caratteristiche inerziali della struttura



$$S_{y_1} = \int_A x_1\, dA$$

$$S_{y_2} = \int_A x_2\, dA = \int_A (x_1 + d)\, dA = \int_A x_1\, dA + \int_A d\, dA = S_{y_1} + dA$$

costante

MOM STATICO RISPETTO A 1

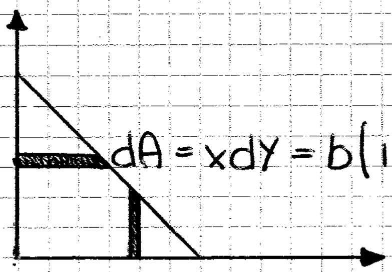
DISTANZA TRA I 2 ASSI × LA AREA TOTALE

UN ASSE BARICENTRICO HA UN MOMENTO STATICO PARI A ZERO (per definizione)

Momento statico di un asse che passa per il baricentro è zero

T. di TRASPOSIZIONE → è complicato considerarlo se non metto almeno 1 asse nel baricentro

- SEZIONE TRIANGOLARE



$$dA = x\,dy = b\left(1-\frac{y}{h}\right)dy$$

$$dA = y\,dx = h\left(1-\frac{x}{b}\right)dx$$

CALCOLO MOMENTI STATICI E COORDINATE BARICENTRO

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{bh^2}{6}\cdot\frac{2}{bh} = \frac{h}{3}$$

$$S_x = \int_A y\,dA = \int_0^h y\,b\left(1-\frac{y}{h}\right)dy = b\int_0^h\left(y-\frac{y^2}{h}\right)dy = b\left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3h}\right]_0^h$$

$$= b\left(\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{3h}\right) = b\left(\frac{h^2}{2}-\frac{h^2}{3}\right) = \frac{1}{6}h^2 b$$

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{b^2h}{6}\cdot\frac{2}{bh} = \frac{b}{3}$$

$$S_y = \int_A x\,dA = \int_0^b x\,h\left(1-\frac{x}{b}\right)dx = h\int_0^b\left(x-\frac{x^2}{b}\right)dy = h\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3h}\right]_0^b$$

$$= h\left(\frac{b^2}{2}-\frac{b^3}{3b}\right) = b\left(\frac{b^2}{2}-\frac{b^2}{3}\right) = \frac{1}{6}b^2h$$

COORDINATE BARICENTRO

$$(x_G\ y_G) = \left(\frac{b}{3}, \frac{h}{3}\right)$$

SOMMA → SI PUÒ UTILIZZARE SEMPRE

$$y_G = \frac{Sx_1 + Sx_2}{A_{TOT}} = \frac{Sx_{TOT}}{A_{TOT}}$$

$$Sx_{TOT} = Sx_1 + Sx_2 = A_1 Y_{G1} + A_2 Y_{G2} = (bH)\frac{H}{2} + (B-b)(H-R)\cdot\frac{(H+R)}{2}$$

$$= \frac{bH^2}{2} + \frac{(B-b)(H-R)^2}{2}$$

$$\frac{H-R}{2} + R = \frac{H-R+2R}{2} = \frac{H+R}{2}$$

SOTTRAZIONE → HA CERTE CARATTERISTICHE NECESSARIE

ha come vincolo il fatto che la differenza deve essere fatta rispetto ad ASSI COINCIDENTI

IN QUESTO CASO POSSO USARLA PERCHÈ HANNO LA BASE IN COMUNE

$$y_G = \frac{Sx_P - Sx_V}{A_{TOT}}$$

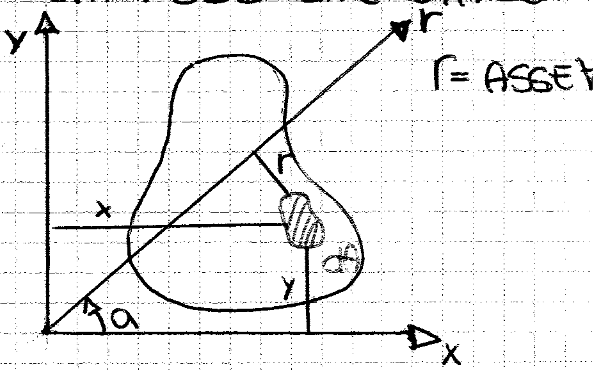
$$Sx_{PIENO} = A_P \cdot Y_{GP} = BH \cdot \frac{H}{2} = \frac{BH^2}{2}$$

$$Sx_{VUOTO} = A_V \cdot Y_{GV} = (B-b)R \cdot \frac{R}{2} = (B-b)\frac{R^2}{2}$$

MOMEMTI di IMERTIA $I = [m^4]$ 16-10

→ consideriamo sempre una sezione ∀ con ρ costante
VOGLIAMO VEDERE COME RISPONDE AI CARICHI LA FORMA DELLA NOSTRA SEZIONE (trascuriamo la ρ)

* MOMENTO D'INERZIA RISPETTO UN ASSE CHE GIACE SUL PIANO DELLA FIGURA



Per def

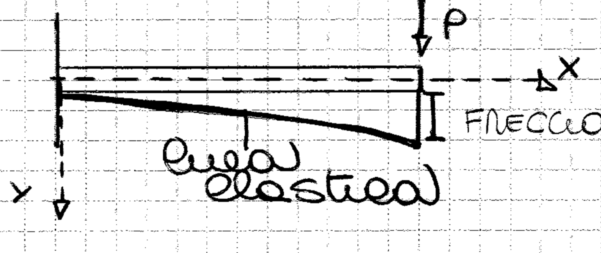
$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

$$I = \int_A d^2 dA$$

→ mentre il momento statico può essere ⪌ 0 (perché dipende dal sistema di riferimento)
IL MOMENTO D'INERZIA È SEMPRE POSITIVO (>0)

"Riprendiamo la nostra trave maestra di vita"
SIGNIFICATO FISICO del MOMENTO di INERZIA



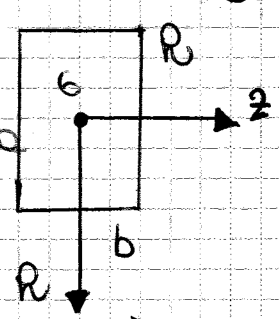
Freccia f = DISTANZA TRA LA FIGURA INDEFORMATA E LA FIGURA DEFORMATA MISURATA LUNGO Y

$$f_{max} = \frac{\overset{\text{CARICO}}{P}\, \overset{\text{LUNGHEZZA}}{L^3}}{3EI_{zG}}$$

E: CARATTERISTICA del MATERIALE (modulo elastico)

Prendo una sezione di questa trave

so dov'è G perché ci sono gli assi di simmetria



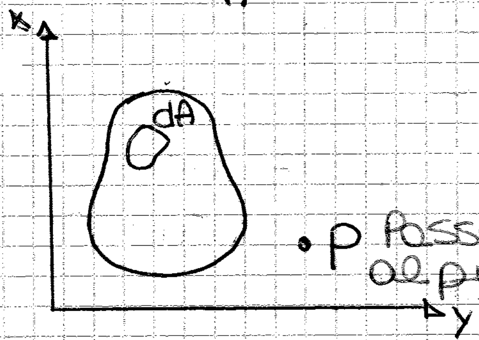
Momento d'inerzia della sezione rispetto ad un asse che giace sul piano della sezione ⊥ alla diret del carico è un valore molto importante

MOMENTO d'INERZIA per capire quant'è flessibile o rigida la trave (quanto si inflette la trave

$$\begin{cases} I_{yG} = \dfrac{hb^3}{12} \\ I_{zG} = \dfrac{bh^3}{\ } \end{cases}$$

$$I_p = \int_A r^2 dA$$

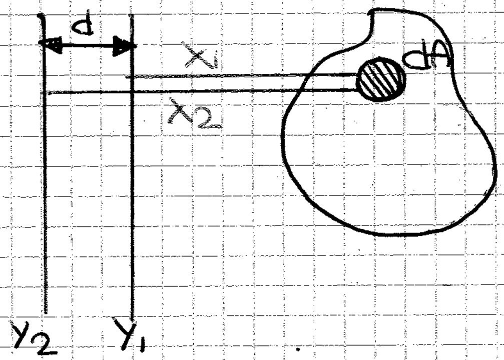
→ lo calcoliamo solo per i solidi assialsimmetrici (QUEI SOLIDI CHE DEVONO SOPPORTARE UN MOMENTO TORCE ATTORNO L'ASSE DELLA TRAVE)



• P passa x P ed è ⊥ al piano xy

TEOREMA di TRASPOSIZIONE del MOMENTO DI INERZIA

supponiamo I_{y_1} noto



$$I_{y_2} = \int_A x_2^2 dA = \int_A (x_1+d)^2 dA$$

$$= \int_A x_1^2 dA + \int_A d^2 dA + \int_A 2d x_1 dA$$

$$= I_{y_1} + d^2 A + 2d S_{y_1}$$ → MOMENTO STATICO

I_{y_1} → MOMENTO di INERZIA RISPETTO L'I ASSE

d^2A → TERMINE di TRASPOSIZIONE

Se y_1 e y_2 sono assi casuali non è conveniente applicare il momento di Trasposizione

MA se lo applico nel caso in cui uno dei due assi è baricentrico, il teorema si semplifica parecch

$$\boxed{I_{y_2} = I_{y_G} + d^2 A}$$

($S_y = 0$ per un asse baricentr

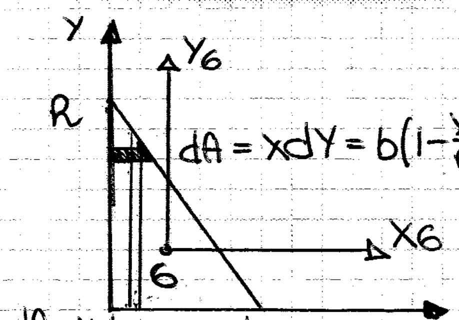
Momento d'inerzia minimo è sempre quello che passa per il baricentro

* SE È NOTO I_{xG} E VOGLIO TROVARE I RISPETTO ∀ ALTRO ASSE ⇒ sempre la somma

* SE È NOTO I_x generico E VOGLIO TROVARE I RISPETTO A G ⇒ sempre sottrazione

$$I_{xG} = I_x - Ad^2 \quad \text{sempre!}$$

SEZIONE TRIANGOLARE



$dA = x\,dY = b\left(1-\frac{y}{R}\right)dY$

$dA = y\,dx = R\left(1-\frac{x}{b}\right)dx$

$$I_x = \frac{bR^3}{12} \qquad I_y = \frac{Rb^3}{12}$$

$$I_{xG} = \frac{bR^3}{36} \qquad I_{yG} = \frac{Rb^3}{36}$$

Calcolare i momenti di inerzia

$$I_x = \int_A y^2\,dY = \int_0^R y^2 b\left(1-\frac{y}{R}\right)dY = b\int_0^R\left(y^2-\frac{y^3}{R}\right)dY = b\left[\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4R}\right]_0^R$$

$$= b\left(\frac{R^3}{3}-\frac{R^4}{4R}\right) = b\left(\frac{R^3}{12}\right) = \frac{bR^3}{12}$$

$$I_{xG} = I_x - Ad^2 = \frac{bR^3}{12} - \frac{bR}{2}\cdot\frac{R^2}{9} = \frac{bR^3}{12} - \frac{bR^3}{18} = \frac{3-2}{36} = \frac{1}{36}b$$

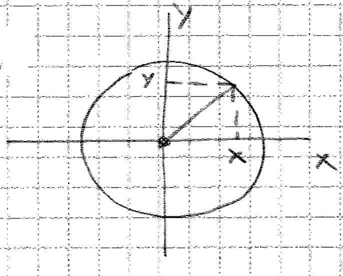
occhio

$$I_y = \int_A x^2\,dx = \int_0^b x^2 R\left(1-\frac{x}{b}\right)dx = R\int_0^b\left(x^2-\frac{x^3}{b}\right)dx = R\left[\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4b}\right]_0^b$$

$$= R\left(\frac{b^3}{3}-\frac{b^4}{4b}\right) = R\left(\frac{4b^3-3b^3}{12}\right) = \frac{Rb^3}{12}$$

$$I_{yG} = I_y - Ad^2 = \frac{Rb^3}{12} - \frac{bR}{2}\cdot\frac{b^2}{9} = \frac{b^3R}{12} - \frac{b^3R}{18} = \frac{Rb^3}{36}$$

Trave a setione circolare resiste molto bene alla Torsione ma non altrettanto bene alla flessione



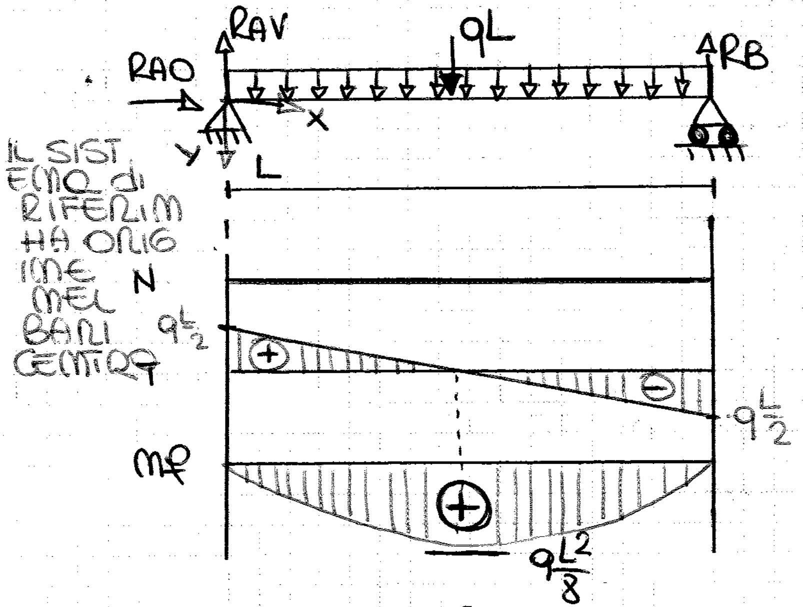
voglio dimostrare che il mom d'inerzia I_x è la metà del mom d'inerzia polare

$$I_x = \frac{I_p}{2} =$$

$$I_r = \int_A r^2 dA = \int_A (x^2+y^2)\, dA = \int 2x^2 dA = 2I_d$$

DIAGRAMMI DEGLI SFORZI 21-10

⊛ TRAVE CON CARICO DISTRIBUITO (sottoposta al suo peso proprio)

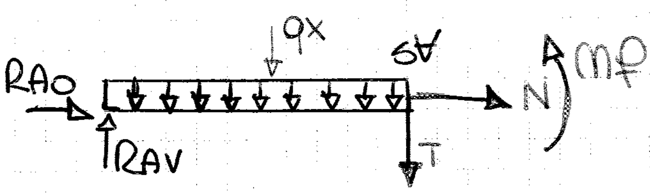


Reazioni vincolari
$R_{AO} = 0$
$R_{AV} = \frac{qL}{2}$
$R_B = \frac{qL}{2}$

Il sistema ha una sola campata → non ho messo la risultante in mezzo
L in ogni punto della trave vado a scrivere la stessa condizione di equilibrio

↓ USARE PER I DIAGRAMMI DEGLI SFORZI LA RISULTANTE qL È UN ERRORE CONCETTUALE

∀ sezione va bene



Mf è positivo se mette in trazione le fibre di sotto (nella direzione y positiva)

$\rightarrow N = -R_{AO} = 0$

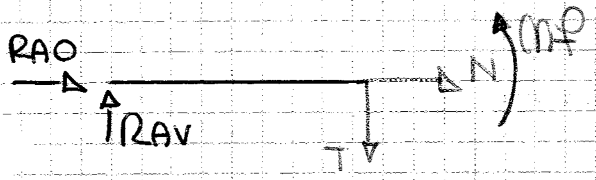
$\uparrow T - R_{AV} + qx = 0 \quad T = R_{AV} - qx = q\left(\frac{L}{2} - x\right)$ ⟨ $x=0 \Rightarrow q\frac{L}{2}$; $x=L \Rightarrow -q\frac{L}{2}$

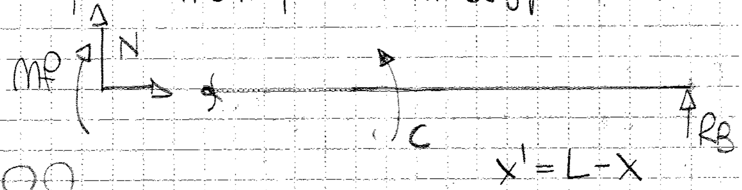
↳ ha un andamento lineare, quindi Mf ha andamento di una curva del II ordine

$\circlearrowright\ Mf + qx\frac{x}{2} - R_{AV}\,x = 0$

$Mf = R_{AV}\,x - q\frac{x^2}{2} = q\frac{L}{2}x - q\frac{x^2}{2} = \frac{q}{2}(Lx - x^2)$ ⟨ $x=0 \Rightarrow 0$; $x=L \Rightarrow 0$

$Mf_{x=0} = 0$ e $Mf_{x=L} = 0$ quindi non riesco a disegnare la curva del momento flettente mom T positivo ma y positivo





??

$N = -RAO = 0 \quad N = 0$

$T = RAV = \frac{C}{L}$

$Mf = RAV\,x = \frac{C}{L}x \begin{cases} Mf_{x=0} = 0 \\ Mf_{x=a} = \frac{C}{L}a \end{cases}$

T è costante → Mf avrà un andamento lineare

$N = 0$

$T + RB = 0 \quad T = -RB = \frac{C}{L}$

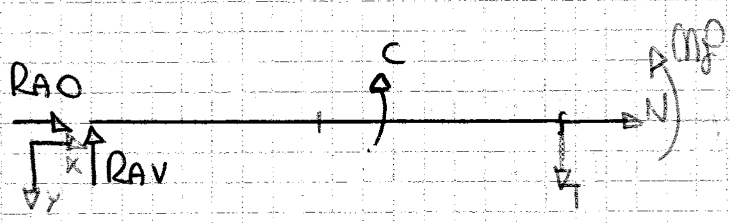
$Mf + C - RB\,x' = 0$

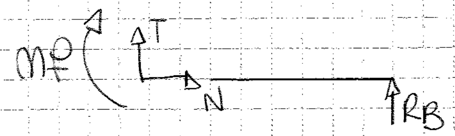
$Mf = RB\,x' + C = 0$

$Mf = C - \frac{C}{L}x' \begin{cases} L \rightarrow Mf = 0 \\ (L-a) \rightarrow Mf = \frac{C\,b}{L} \end{cases}$

$x' = L - x \begin{cases} L \\ 0 - a \quad L - a \end{cases}$

fai attenzione a non confondere il fatto che anche se parti dalla fine consideri ancora la I campata





$N + RAO = 0 \quad N = -RAO = 0$

$T - RAV = 0 \quad T = RAV = \frac{C}{L}$

$Mf + C - RAV\,x = 0$

$Mf = RAV\,x - C = \frac{C}{L}x - C = C\left(\frac{x}{L} - 1\right)$

$Mf_{x=a} = C\left(\frac{a-L}{L}\right) = -\frac{Cb}{L}$

$Mf_{x=L} = 0$

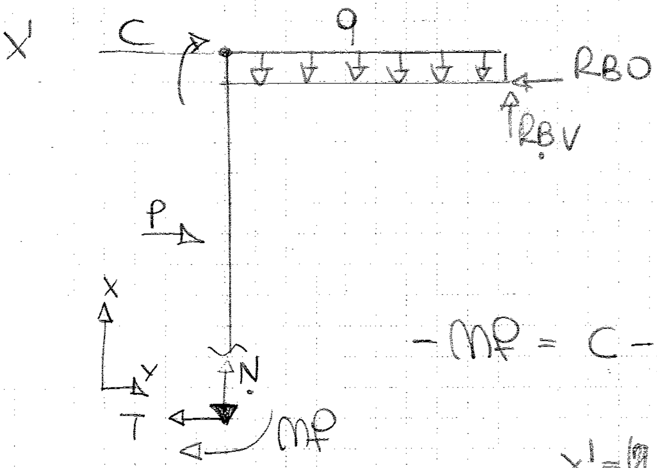
$N = 0$

$T = -RB = \frac{C}{L}$

$Mf - RB\,x' = 0$

$Mf = -\frac{C}{L}x' \begin{cases} Mf_{x'=b} = -\frac{C}{L}b \\ Mf_{x'=0} = 0 \end{cases}$

$x' = L - x \begin{cases} a \rightarrow b \\ L \rightarrow 0 \end{cases}$



$-N+R_{BV}-qa=0$

$P-T-R_{BO}=0$

$\circlearrowleft\ -M_f-P(x'-e)-\cancel{C}-\frac{qa^2}{2}+R_{BO}x'+R_{BV}a=0$

$-M_f = C-R_{BV}a+\frac{qa^2}{2}+P(x'-e)-R_{BO}x'$

$x'=(2L-x)\begin{cases} x=0 \Rightarrow x'=2e \\ x=L \Rightarrow x'=L \end{cases}$

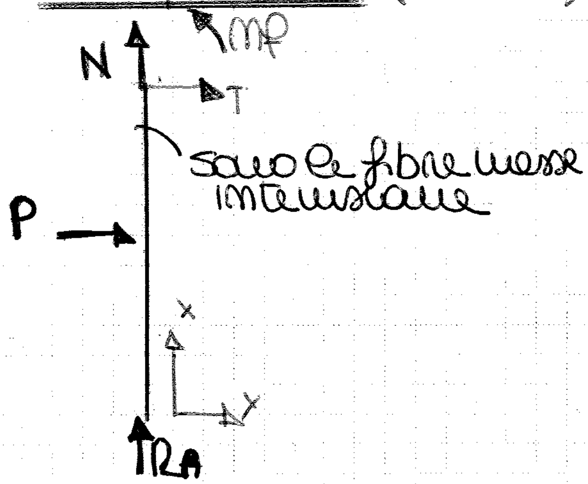
$M_f = -C+R_{BV}a-\frac{qa^2}{2}+x'(R_{BO}-P)+Pe$

$M_f = -C+qa^2-R_Aa-\frac{qa^2}{2}+\cancel{x'(P-P)}+Pe$

$= -C+qa^2-\frac{qa^2}{2}-\left(Pe-C+\frac{qa^2}{2}\right)+Pe$

$\cancel{-C}+\cancel{qe^2}-\cancel{\frac{qe^2}{2}}-Pe+\cancel{C}-\cancel{\frac{qe^2}{2}}+Pe=0$

Campata 2 (e-2e)



$\uparrow\ R_A+N=0 \quad N=-R_A$

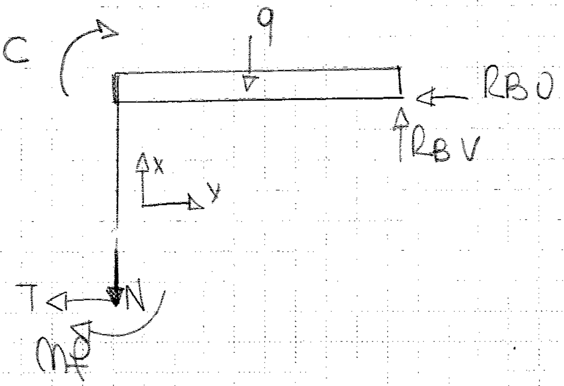
$\rightarrow\ P+T=0 \quad T=-P$

$+\circlearrowleft\ +M_f+P(x-e)=0 \quad M_f=-P(x-e)$

$M_f\begin{cases} M_{f\,x=e}=0 \\ M_{f\,x=2e}=-Pe \end{cases}$

⇒ considera sempre gli estremi della campata considerata

$M_f=P(x'-e) \qquad x'=2L-x \begin{cases} 2L-L=L & M_{f\,x'}=0 \\ \rightarrow 0 & M_{f\,x'}=-Pe \end{cases}$



$-N-qa+R_{BV}=0 \quad -N=\cancel{qa}-\cancel{qe}+Ra$

$N=-Ra$

$T+R_{BO}=0 \quad T=-R_{BO}=-P$

$-M_f-C-\frac{qa^2}{2}+R_{BV}a+R_{BO}x'=0$

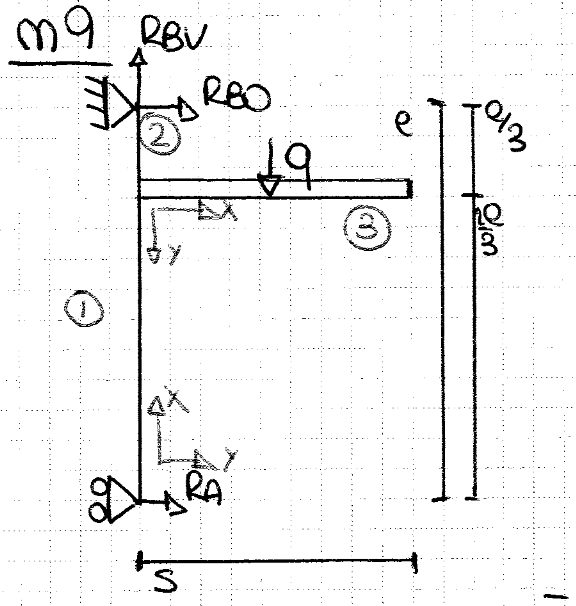
$M_f=R_{BV}a+R_{BO}x'-C-\frac{qa^2}{2}$

$M_f=\cancel{qa^2}-Raa+Px'-\cancel{C}-\cancel{\frac{qe^2}{2}}$

$=\cancel{qe^2}-\cancel{\frac{qe^2}{2}}-\cancel{C}-Pe+\cancel{C}-\cancel{\frac{qe^2}{2}}$

n9

TRAVE A MENSOLA SOTTOPOSTA AL SUO PESO PROPRIO "Sbalzo ad esse"



$q = 1{,}5\ N/mm = 1500$

$L = 3000\ mm = 3$

$s = 2000\ mm = 2$

DIMOSTRO L'ISOSTATICITÀ

$n = 3 \quad m = 2+1 \quad l = 0$

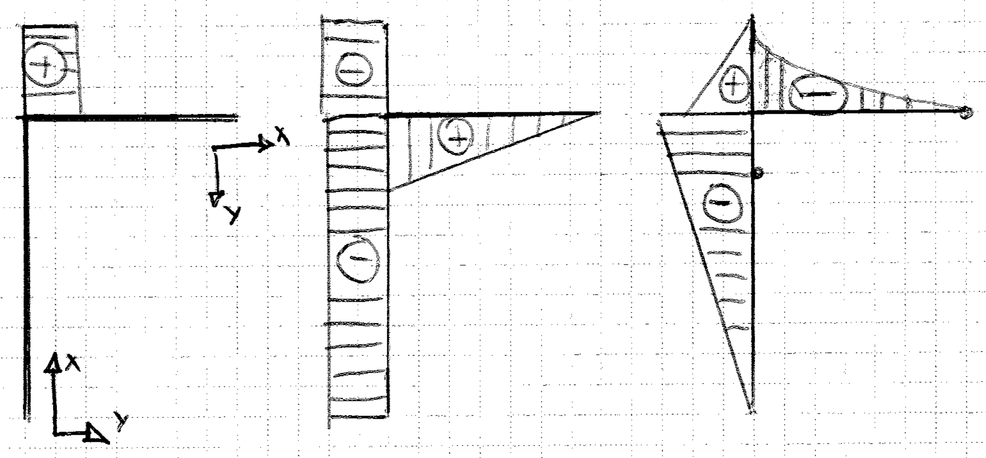
CALCOLO LE REAZIONI VINCOLARI

$RA + RBo = 0 \qquad RA = -RBo = -1000$

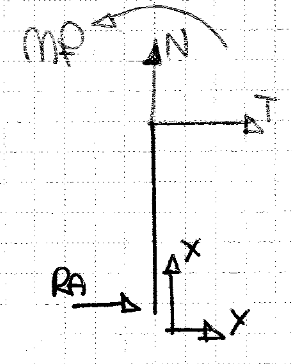
$RBV = qs = 3000$

$RA\,l - q\frac{s^2}{2} = 0 \qquad Ra = \frac{qs^2}{2l} = 1000$

CALCOLO DEGLI SFORZI



campata 1

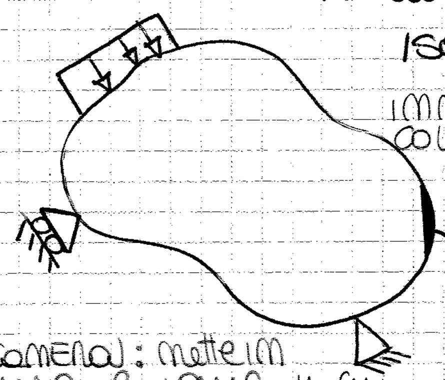


$$Mf = -RAx \begin{cases} Mf_{x=0} = 0 \\ Mf_{x=\frac{2}{3}l} = \frac{qs^2}{\cancel{2l}} \cdot \frac{\cancel{2l}}{3} = \frac{qs^2}{3} = -2000 \end{cases}$$

$N = 0$

$T = -RA = -1000$

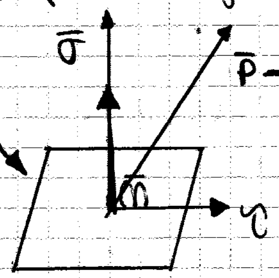
Prendiamo una struttura isostatica ∀ (tutta nota)



immaginiamo di prendere un punto molto colorato (che sia soffrendo molto)

sezione infinitesima del nostro elemento

dA (area infinitesima, un punto)



termocamera: mette in evidenza le + aree in cui la T è più elevata

→ in quei punti la sofferenza è maggiore

nello spazio un area infinitesima è identificata con la sua normale

Tensione $= \boxed{\lim_{dA \to 0} dF/dA}$ $\left[\frac{N}{m^2}\right]$ è di fatto una pressione

(stress - sofferenza)

└ è un vettore che si rappresenta sempre con le sue componenti, σ e τ

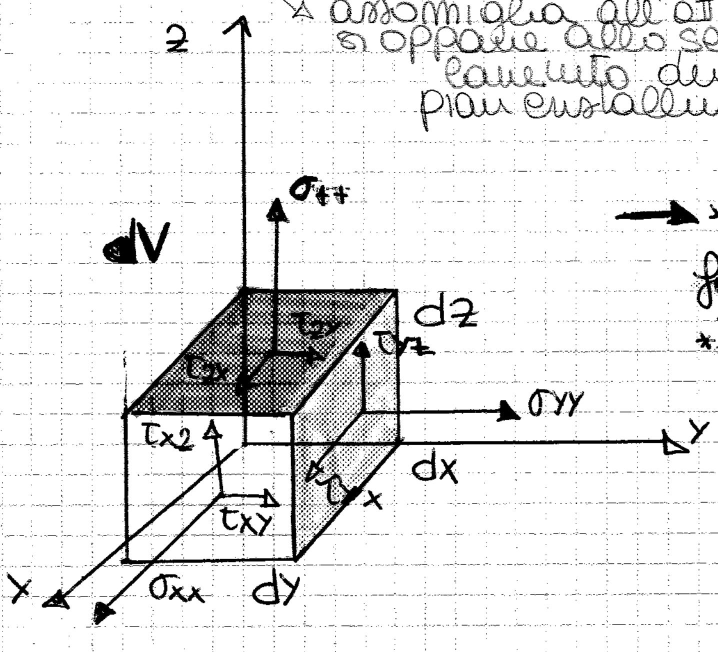
Tensione (stress, sofferenza) si rappresenta con le sue componenti

* $\vec{\sigma}$ = tensione normale (normal stress) ⊥ alla sezione dA → è causato da trazione e compressione
* $\vec{\tau}$ = tensione tangenziale (shear stress) tensione di taglio ∥ alla sezione dA → è causato dalla torsione

assomiglia all'attrito: si oppone allo scorrimento dei piani cristallini

$\sigma_{\square\square}$ (di solito ne mettiamo solo xx come abbiamo)

$\tau_{\square\square}$ (deve avere sempre 2)



→ *I indice indica la normale alla faccia a cui è applicata la tensione
*II indice la direzione della tensione

⇒ non importa in che punto scrivo le tensioni tanto è un elemento infinitesimo

→ adesso consideriamo le facce con gli assi uscenti

nelle facce che non si vedono saranno dirette come gli sforzi nel verso in cui gli assi entrano ma uno vorrò solo le tensioni (σ) → poiché $\tau = \left[N/mm^2 \right]$ devo moltiplicare per l'area su cui agisce

$\vec{x}$ dove viene la σ o la τ non interessa più

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dy\,dz - \sigma_x dy\,dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx\,dz$$

INCREMENTO

$$- \tau_{yx} dx\,dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) dx\,dy - \tau_{zx} dx\,dy = 0$$

(rimangono solo gli incrementi) TUTTI HANNO IN COMUNE IL VOLUME INFINITESIMO

posso trovare l'elemento elementare

Equazioni di equilibrio

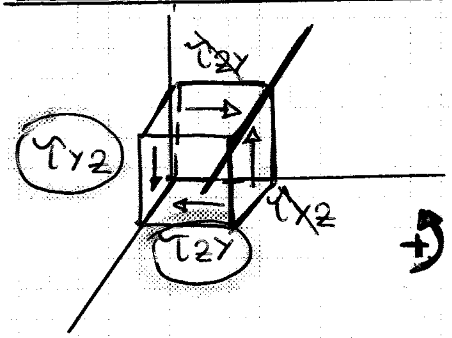
(NON CONSIDERIAMO FORZE DI MASSA)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \quad (\vec{x})$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \quad (\vec{y})$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (\vec{z})$$

Dimostriamo il Teorema di RECIPROCITÀ delle TENSIONI TANGENZIALI $\tau_{ij} = \tau_{ji}$



SCRIVIAMO L'EQUAZIONE DI EQUILIBRIO ATTORNO ALL'ASSE ROSSO

$$\underbrace{\tau_{yz}\, dx\,dz}_{\text{AREA}}\, \underbrace{dy}_{\text{BRACCIO}} - \tau_{zy}\, dx\,dy\,dz = 0$$

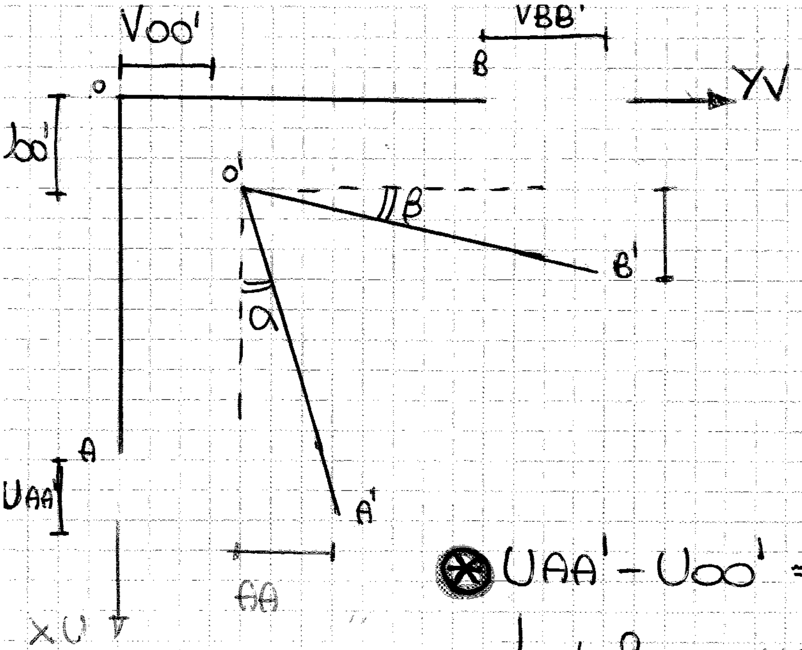
$\tau_{yz} - \tau_{zy} = 0 \quad \tau_{zy} = \tau_{yz}$ CVD

Poiché il tensore di tensione è simmetrico e abbiamo questo teorema sono solo 6 le comp. da ricavare

Perché la tensione normale non fa momento?

PERCHÉ SI TRATTA DI UN ELEMENTO INFINITESIMO QUINDI IL SUO VETTORE NORMALE PUÒ ESSERE APPLICATO IN ∀ PUNTO ANCHE PASSANTE PER LO SPIGOLO ⇒ non dà contributo

τ che giacciono sulla faccia ∥ all'asse rosso allo stesso modo non fanno momento



Deformazioni → quantità adimensionali che fisicamente esprimono quanto sia deformato un elemento rispetto la dimensione iniziale dell'elemento

SPOSTAMENTO DEI DUE ESTREMI SULLA LUNGHEZZA INFINITESIMALE

PROPRIO COME AVEVAMO SCRITTO IERI PER LE TENSIONI

$$U_{AA'} - U_{OO'} = \frac{\partial U}{\partial x} dx$$

└ deformazione intrinseca dell'elemento

$$\Rightarrow \frac{U_{AA'} - U_{OO'}}{dx} = \frac{\partial U}{\partial x} = \varepsilon_x$$

$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}$ → spostamento dei due estremi (def intrinseca) sulla lunghezza infinitesima dell'elemento

$$V_{BB'} - V_{OO'} = \frac{\partial V}{\partial y} dy \Rightarrow \frac{V_{BB'} - V_{OO'}}{dx} = \frac{\partial V}{\partial y} = \varepsilon_y$$

Poi c'è γ che è una deformazione angolare

POSSIAMO CONFONDERE GLI ANGOLI CON LE LORO TANGENTI

$$Tg\alpha = \frac{V_{AA'} - V_{OO'}}{dx} = \frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow \gamma_{xy} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$Tg\beta = \frac{U_{BB'} - U_{OO'}}{dy} = \frac{\partial U}{\partial y}$$

Definizioni delle deformazioni

VALE ANCORA LA RECIPROCITÀ

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}$$

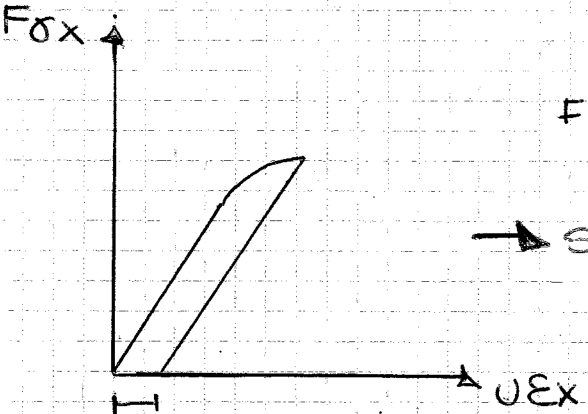
Regime elastico

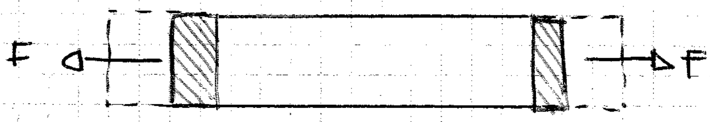
* VARIABILE T NON È IMPORTANTE (variabile Tempo)

* TOTALE RECUPERO ALLO SCARICO
  ↳ rimuovo il carico e il sistema torna nella condizione indeformata

* NON C'È ROTTURA DEI LEGAMI ATOMICI, SOLO UNO "STIRAMENTO ACCORCIAMENTO"

• SE CI TROVIAMO IN CAMPO PLASTICO





→ SUPERO IL LIMITE ELASTICO

↳ deformazione plastica permanente

la parte elastica la recupero, quella plastica è definitiva

Regime plastico

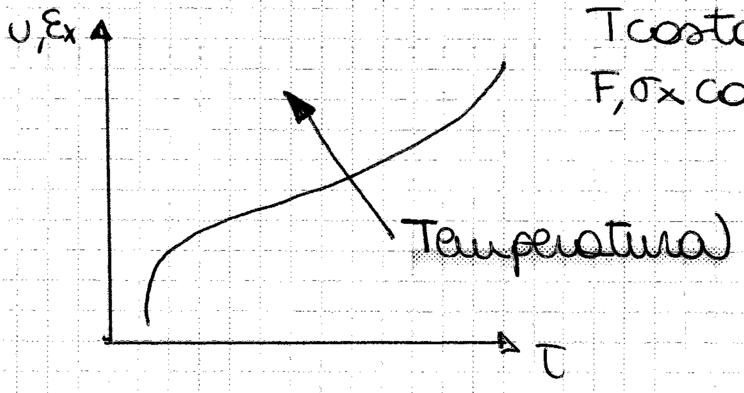
* VARIABILE T NON È IMPORTANTE

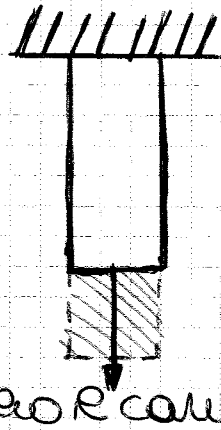
* NON C'È UN TOTALE RECUPERO ALLO SCARICO
  ↳ recupero solo la deformazione elastica

* C'È ROTTURA DEI LEGAMI

• SCORRIMENTO O CREEP

T costante
F, σx costante





lascio il carico applicato per lungo tempo

$M_T, T \rightarrow \tau_{xy} \Rightarrow \gamma_{xy}$ ~~AGLO~~ SFORZO di TAGLIO o IL MOMENTO TORCENTE GENERANO SCORRIMENTI dei PIANI QUINDI TENSIONI di TIPO τ e DEFORMAZIONI ANGOLARI γ

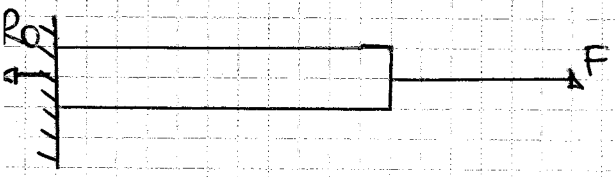
Per definire lo STATO DI TENSIONE di un ~~oggetto~~ PUNTO bisogna sommare tutti questi effetti

MI RIFERISCO AD INFINITESIMI — Sforzi generano tensioni che causano def — RISULTATO - EFFETTO - (ALLUNGAMENTO o ROTAZIONE) FINITO (su tutta la lunghezza)

	SFORZO	TENSIO	DEF		
1	N	σ_x	ε_x	U_{TOT}	lunghezza
2	M_f	σ_x	ε_x	f	freccia
3	M_T	τ_{xy}	γ_{xy}	θ_{TOT}	torsione
4	T	τ_{xy}	γ_{xy}	$\cancel{f}$	TRASCURABILE perché è molto piccola

TENSIONI DOVUTE ALLO SFORZO NORMALE

(SONO IN REGIME LINEARE ELASTICO)



$N = R_0 = F$

$\forall$ sezione scelgo trovo lo stesso sforzo normale

COME PASSO dallo SFORZO NORMALE ALLA TENSIONE?

RISULTANTE della DISTRIBUZIONE DI TENSIONI IN QUELLA SEZIONE È PARI ALLO SFORZO CORRISPONDENTE

$$N = \int_A \sigma_x \, dA$$

~~se il mat fosse omogeneo ed isotropo, e [illegible] costante~~

SICCOME IL MATERIALE È OMOGENEO ED ISOTROPO, E LA N È COSTANTE, POSSO PENSARE CHE CIASCUNA FIBRA SI ALLUNGHI O SI ACCORCI NELLO STESSO MODO, CHE SOFFRA NELLO STESSO MODO. ~~[illegible]~~

CAMBIO di VARIABILI NEGLI INTEGRALI DOPPI

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE 7-10

- SOSTITUZIONE IN 1 VARIABILE PUÒ SEMPLIFICARE O UNA FUNZIONE principalmente O IL DOMINIO (è sempre un INTERVALLO)
- SOSTITUZIONE IN 2 VARIABILI SEMPLIFICA IL DOMINIO (UTILE SE IL DOMINIO NON È NÈ VERTICALMENTE NÈ ORIZZONTALMENTE CONNESSO)

Ripasso - SOSTITUZIONE IN 1D

* somma

$$X_G = \frac{S_{y\,TOT}}{A_{TOT}} = \frac{S_{y1} + S_{y2}}{A_1 + A_2} = \frac{\frac{b}{2}(b \cdot H) + \left[\frac{(B-b)}{2} + b\right](B-b)(H-R)}{b \cdot H + (B-b)(H-R)}$$

$$\frac{X_{G1}A_1 + X_{G2}A_2}{A_1 + A_2}$$

* sottrazione

$$X_G = \frac{S_{y\,TOT}}{A_{TOT}} = \frac{S_{yP} - S_{yV}}{A_P - A_V} = \frac{\frac{B}{2}(HB) - \left[\frac{(B-b)}{2} + b\right](B-b)(R)}{HB - (B-b)R}$$

MOMENTI DI INERZIA RISPETTO AGLI ASSI BARICENTRICI
|| AGLI ASSI AI LATI della FIGURA

*somma   Mom. inerzia rispetto ad asse x baricentrico della figura

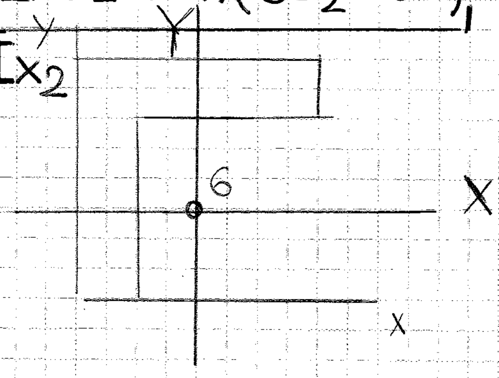
$$I_{TOT\,X} = \underbrace{I_{xG1} + A(y_{G1} - y_G)^2}_{I_{x_1}} + \underbrace{I_{xG2} + A(y_{G2} - y_G)^2}_{I_{x_2}}$$

$$I_{xG1} = \frac{bH^3}{12}$$

$$T_{R\,XG1 \to X} = bH\left(\frac{R}{2} - y_G\right)^2$$

$$I_{xG2} = (B-b)\frac{(H-R)^3}{12}$$

$$T_{R\,XG2 \to X} = (B-b)(H-R)\left(\frac{(H-R)+2R}{2} - y_G\right)^2$$



* DIFFERENZA

$$I_{TOT\,X} = \underbrace{\left[I_{xP} - I_{xV}\right]}_{\text{sono calcolate rispetto agli assi x e y non baricentrici}} - A_{TOT}Y_G^2$$

$I_{TOT\,x}$ – Mom inerzia totale rispetto ad x non baricentrico

$$I_{xP} = \frac{BH^3}{3}$$

$$I_{xV} = \frac{(B-b)R^3}{3}$$

$$A_{TOT}Y_G^2 = (A_P - A_V)Y_G^2 = \left[BH - (B-b)R\right]Y_G^2$$

Differenza

$$I_{TOT\,X_G} = \left[I_{Px} - I_{Vx} \right] - A_{TOT}(y_G)^2$$

$$I_{Px} = \frac{bR^3}{3}$$

$$I_{PV} = \frac{(b-c)(R-a)^3}{3}$$

$$A_{TOT}\,y_G^2 = \left[ba + c(R-a) \right] y_G^2$$

Potevi farlo anche

RISPETTO AL BARICENTRO TOTALE

$$I_{TOT\,X} = I_{G}\text{ PIENO} - I_{G}\text{ VUOTO}$$

$$I_{PG} = I_{PGP} + A_P(Y_{GP} - Y_G)^2 = \frac{bR^3}{12} + bR\left(\frac{R}{2} - Y_G\right)^2$$

$$\cancel{I_{VG} = I_{VGV} + A_V(Y_{GV} - Y_G)^2 = bR - (ba + c(R-a))}$$

Prim, devi alt
calc composto

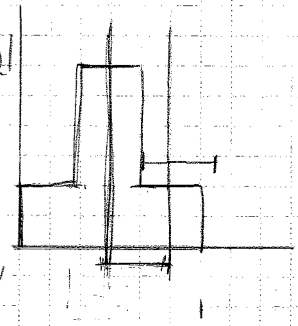
$$\cancel{\left(\left[\frac{R-a}{2} + a\right] - Y_G\right)^2}$$

$$I_{VG} = I_{VGV} + A_V(Y_{GV} - Y_G)^2 = \frac{(b-c)(R-a)^3}{12} + (b-c)(R-a) \cdot \left(\frac{R-a}{2} + a - Y_G\right)^2$$

$I_{TOT}\,Y$

DIFFERENZA

m com di cosa
mas simg concul
punt



$$I_{TOT}\,Y = I_{YP} - I_{YV}$$

$$I_{YP} = \frac{Rb^3}{12} \text{ — è baricentrico}$$

$$I_{YV} = 2\left[I_{YGV} + A_V \cdot X_{GV}^2 \right]$$

ho 2 aree vuote

$$= 2\left[\underbrace{\frac{(b-c)^3}{8} \cdot \frac{(R-a)}{12}}_{I_{YGV}} \right] + \left[\underbrace{\frac{b-c}{2} \cdot (R-a)}_{A_{TOT}} \right] \cdot \left[\frac{b}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{2} - \frac{c}{2}\right) \right]^2$$

somma

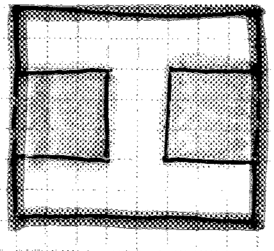
$$I_{TOT}\,Y = I_{YI} + I_{YII}$$

sono tutte mom d'inerzia baricentrici ?

$$I_{YI} = \frac{a \cdot b^3}{12}$$

$$I_{YII} = \frac{(R-a) \cdot c^3}{12}$$

cornice pieno - vuoto



$$I_{x II} = I_{xG II} + TR_{xG II \to xG TOT}$$

$$I_{xG II} = I_{xG II P} - I_{xG II V}$$

$$I_{xG II P} = \frac{bh^3}{12} -$$

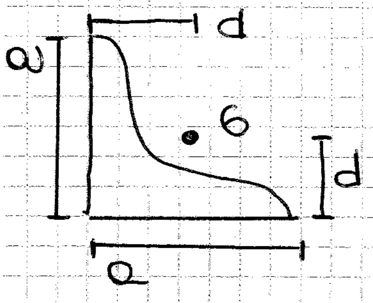
$$I_{xG II V} = \frac{(b-a)(h-2p)^3}{12}$$

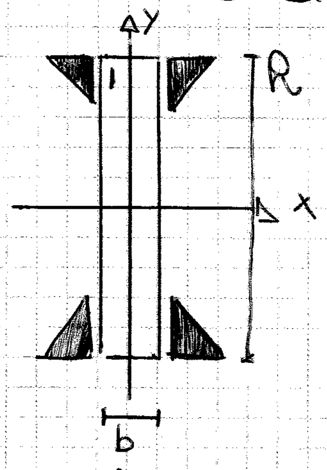
$$TR = A_{TOT}\left(\frac{h}{2} - y_G\right)^2$$

ES

UNA PIASTRA RETTANGOLARE SU CUI SONO SALDATI 4 CANTONALI

Cantonale → NOTA LA POS DEL BARICENTRO





dati

h, b, Area cantonale

I cantonale rispetto G

figura è simmetrica

→ USIAMO GLI ASSI DI SIMM COME SISTEMA DI RIF

NOTA LA POSIZIONE DEL BARICENTRO

$$I_{x TOT} = I_{x,G} + 4 I_{xcG}$$

$$I_{x,G} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{xcG} = I_{xcG_c} + A_c\left(d - \frac{h}{2}\right)^2$$

$$I_{y TOT} = I_{y,G} + 4 I_{ycG}$$

$$I_{y,G} = \frac{hb^3}{12}$$

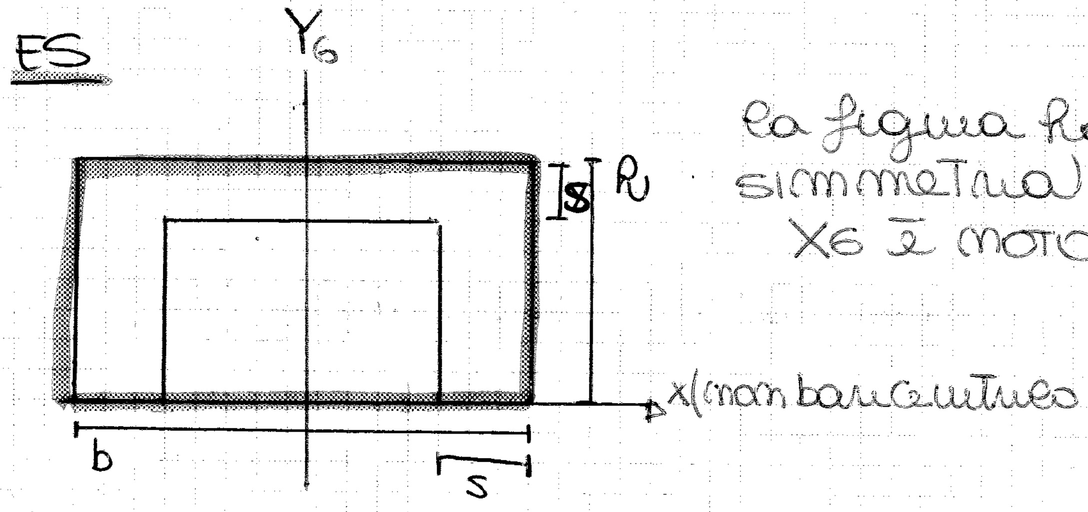
attento!

$$I_{ycG} = I_{ycGc} + A_c\left(d + \frac{b}{2}\right)^2$$

$$I_{x II} = \frac{e(b-f)^3}{12} + A_{II}(y_{G II} - y_G)^2$$

$$I_{x III} = I_{xG III} + T_2 = \frac{1}{36}(c-E)(d-f)^3 + A_3(y_{G III} - y_G)^2$$

ES



la figura ha un asse di simmetria
X_G è noto

Voglio trovare Y_G

$$Y_G = \frac{S_{x TOT}}{A_{TOT}} = \frac{S_{x PIENO} - S_{x VUOTO}}{A_{PIENO} - A_{VUOTO}} = \frac{Y_{G PIENO} A_P - Y_{G VUOTO} A_V}{A_{PIENO} - A_{VUOTO}}$$

$A_P = b \cdot h$

$A_V = (b-2s)(h-s)$

$Y_{G PIENO} = \frac{h}{2}$ $\quad$ $Y_{G VUOTO} \frac{(h-s)}{2}$

Calcolo i momenti di inerzia

$$I_Y = I_{Y PIENO} - I_{Y VUOTO} =$$

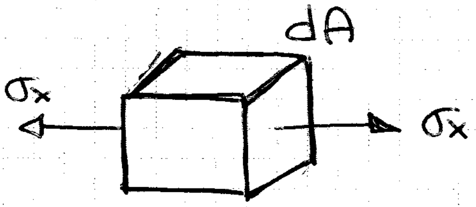
$$I_{YP} = \frac{h b^3}{12} \qquad I_{Y VUOTO} = \frac{(h-s)(b-2s)^3}{12}$$

$$I_{x TOT} = (I_{x PIENO} - I_{x VUOTO}) - A_{TOT} Y_G^2$$

$I_{x PIENO} = \frac{bh^3}{\cancel{12}3}$ → non baricentrico

$I_{x VUOTO} \quad \frac{(b-2s)(h-s)^3}{\cancel{12}3}$

Scriviamo il tensore delle tensioni per un elementino solo a sforzo normale



→ N è costante quindi non si ha l'incremento $d\sigma_x$

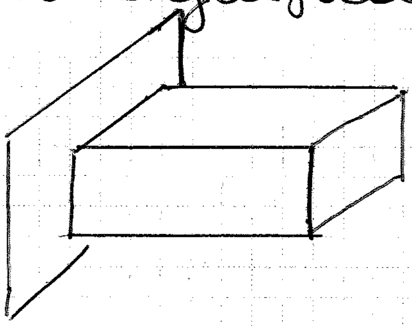
DOMANDA ESAME
Del punto più sollecitato scrivere il tensore delle tensioni

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c'è solo una componente di tensione

σ_x è COSTANTE PERCHÉ N (risultante di distribuzione σ_x) è COSTANTE LUNGO LA TRAVE

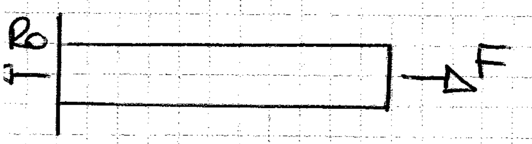
cosa significa fisicamente? PRENDIAMO UNA TRAVE AD INCASTRO

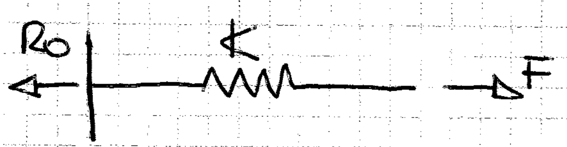


OGNI SEZIONE DELLA TRAVE ⊥ ALL'ASSE x SI MANTIENE NELLA STESSA CONDIZIONE
└ i piani infinitesimamente vicini uno all'altro e ⊥ all'asse Traslano rigidamente
(OGNI FIBRA SI COMPORTA ALLO STESSO MODO)

LE SEZIONI SI MANTENGONO PIANE, SCIVOLANO TRASLANDO RIGIDAMENTE mentre TIRO o comprimo la trave perché ogni fibra si comporta allo stesso modo

OGNI FIBRA SOFFRE ALLO STESSO MODO
QUINDI SI DEFORMA ALLO STESSO MODO
└ OLTRE ALLA σ_x È COSTANTE ANCHE LA ε_x





$R_0 = F$

MODELLO A PARAMETRI DISTRIBUITI

MODELLO A PARAMETRI CONCENTRATI

→ Molla di trazione con rigidezza K

Sono due modelli diversi per rappresentare la stessa cosa

ALLUNGAMENTO MOLLA È PARI A

$F = Kx \qquad x = \frac{F}{K}$

$N = \frac{EA}{L} \Delta L$

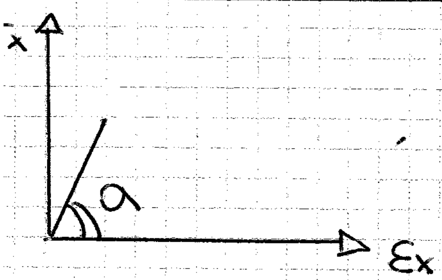
→ posso usare sia il modello a parametri distribuiti (trave) sia il modello a parametri concentrati a seconda di che cosa è più utile per ottenere i medesimi risultati

Analisi dimensionale

$K = \left[\frac{N}{mm}\right] \qquad \frac{EA}{L} = \left[\frac{N}{mm^2} \cdot \frac{1}{mm} \cdot mm^2\right] = \left[\frac{N}{mm}\right]$

↓ P. concentrati

↓ Parametri distribuiti



α → serve per valutare E (bastano 3 prove, meglio 5 per la statica)

IN CAMPO LINEARE ELASTICO VALE LA "LEGGE DI HOOKE"

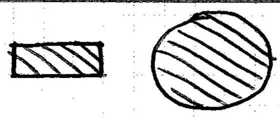
$$\sigma_x = E\,\varepsilon_x$$

Ma ci sono anche altri fenomeni da tenere in considerazione

PROVA di TRAZIONE → caratterizzare staticamente un materiale

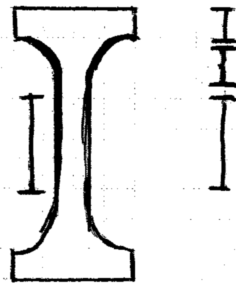
TUTTO È UNIFICATO, NORMATO
* forma - dimensione del provino
* Tipologia - applicazione del carico

SEZIONE
FORMA del PROVINO → ha solo motivi pratici



DIPENDE DA
* TIPO DI AFFERRAGGI della MACCHINA
* TIPO DI MATERIALE

FORMA del PROVINO



→ Per essere sicuro che la prova di Trazione è stata subita correttamente, la rottura del provino deve avvenire nel terzo intermedio della zona calibrata

Perché
- nella zona calibrata la sezione è più piccola ⇒ Tensione raggiunta è magg
- afferraggi sono sufficientemente lontani dal tratto calibrato
  L "EFFETTO DI BORDO" è ASSICURATO

SIMBOLOGIA

E	R_{eH}	R_m
	R_{eL}	R_u
	R_s	S_u
	S_y	
	S_e	

→ significano tutti la stessa cosa nella stessa colonna

$[\,] = N/mm^2 = MPa$

* $\underline{R_{eH}}$ = CARICO LIMITE ELASTICO SUPERIORE
(Picco più grande, al passaggio da elastico a plastico)
È facile da individuare per un mat duttile

* $\underline{R_{eL}}$ = LIMITE ELASTICO
(Media di TUTTI i picchi)

* $\underline{R_S}$ = CARICO di SNERVAMENTO

* $\underline{S_y}$, $\underline{S_e}$ → anglosassone

BISOGNA CONTROLLARE CHE LA S VENGA DALLA TRAZIONE E NON DALLA TORSIONE
→ usano lo stesso simbolo

Per gli acciai duttili, <u>la rottura avviene a 45° rispetto all'asse</u>

PROVA BEN FATTA: si ha una rottura del materiale a 45° rispetto all'asse nel 3° intermedio

COME SI VALUTA UN ACCIAIO DUTTILE - ACCIAIO FRAGILE

$$A = \frac{l_F - l_0}{l_0}\ \%$$ → valore che ci dice se l'acciaio è fragile-duttile

$A > 5\%$ ⇒ duttile

$A < 5\%$ ⇒ fragile

FLESSIONE RETTA: 30-10

TRAVE SOTTOPOSTA A MOMENTO FLETTENTE NEL PIANO

→ lo sforzo normale N e il momento flettente Mf determinano nella sezione una tensione normale σ_x (e quindi una def ε)

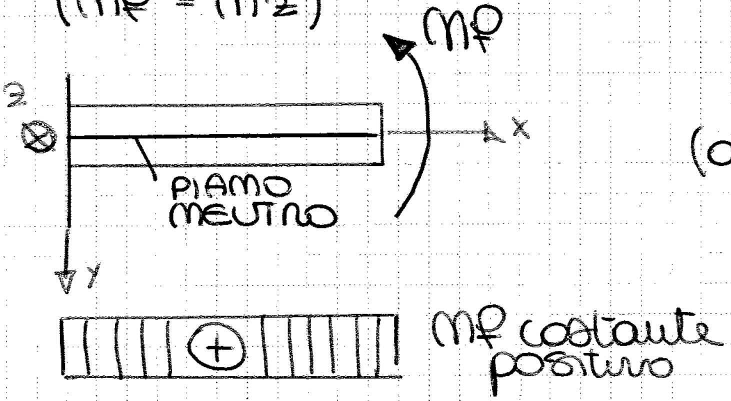
σ_x è ∥ all'asse dell'elemento tende ad accorciare - allungare le fibre del mat

PER LO SFORZO NORMALE ABBIAMO DETTO

$N = \int_A \sigma_x \, dA$, poiché σ_x è costante $N = \sigma_x A$

IN QUESTO CASO PERÒ, σ_x NON PUÒ ESSERE COSTANTE (perché è un momento)

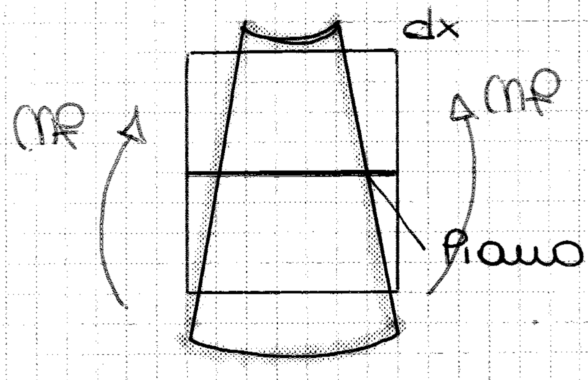
Prendiamo un momento flettente positivo intorno a z ($M_f = M_z$)



Alcune fibre sono in trazione (quelle sotto), altre sono in compressione (quelle sopra)
∃ UN PIANO SPARTIACQUE IN CUI LE FIBRE NON SI ALLUNGANO E NON SI ACCORCIANO → **Piano neutro** (È UN PIANO BARICENTRIC

PRENDIAMO UN INFINITESIMO LUNGO dx DELLA TRAVE

usiamo una sezione rettangolare.



Piano neutro = PIANO XZ RISPETTO UNA TERNA BARICENTRICA

Le sezioni ⊥ all'asse restano piane, si mantengono piane

└ SIGNIFICA CHE OGNI ELEMENTINO È SOTTOPOSTO SOLO AD UNO SFORZO NORMALE

$$= \frac{R\cancel{d\phi} + y\,d\phi - R^*\cancel{d\phi^*} - y\,d\phi^*}{(R^*+y)\,d\phi^*}$$

$R\,d\phi$, $R^*d\phi^*$ sono la lunghezza della fibra neutra

$$\varepsilon_x = \frac{y}{R^*+y}\left(\frac{d\phi - d\phi^*}{d\phi^*}\right) = \frac{y}{R^*+y}\left(\frac{d\phi}{d\phi^*} - 1\right) =$$

$$= \frac{y}{R^*+y}\left(\frac{R^*}{R} - 1\right) = \frac{yR^*}{R^*+y}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R^*}\right)$$

non è molto utile
* le curvature non sono mai note a priori
* a evidenza un andamento non lineare

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{yR^*}{R^*+y}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R^*}\right)}$$

FORMULA NEL CASO PIÙ GENERALE (la trave è già curvata all'inizio)

MA

SE LA TRAVE ALL'INIZIO ERA RETTILINEA

$R^* \to \infty$ quindi

$$\varepsilon_x = \frac{yR^*}{R^*+y}\left(\frac{1}{R} - \cancel{\frac{1}{R^*}}^{\,0}\right) = \frac{y}{1+\cancel{\frac{y}{R^*}}^{\,0}} \cdot \frac{1}{R} = \frac{y}{R}$$

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{y}{R}}$$

$\to$ a parità di R (di quanto ho inflesso la trave)

SE SCENDO ($y \gg$) $\to$ ε_x CRESCE

SE SALGO ($y \ll$) $\to$ ε_x DIMINUISCE (cresce in modulo ma ha segno $-$)

DEVO CAPIRE COME PASSARE DALLA DEFORMAZIONE ALLA TENSIONE (per la traz N avevo fatto l'inverso)

$\llcorner$ con la <u>LEGGE di HOOKE</u>

$$\sigma_x = E\,\varepsilon_x = E\,\frac{y}{R} \quad \to \text{ma } R \text{ non lo conosco}$$

quindi devo legare la tensione σ con il carico applicato (M_f)

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{TRAZIONE} \\ \sigma_x = \dfrac{N}{A}\end{array}}$$

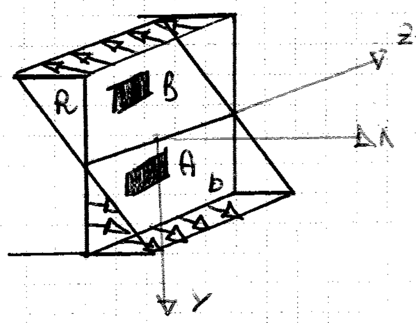
$$\begin{cases} M_f = \dfrac{E}{R} I_z \\ \sigma_x = \dfrac{E}{R} y \end{cases} \Rightarrow \boxed{\sigma_x = \dfrac{M_f}{I_z} y}$$

fibre tese o compresse
* SEGNO di M_f
* SEGNO di y

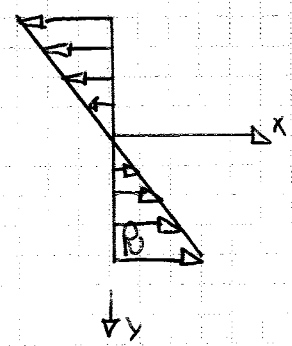
Quindi ⇒ questa relazione posso scriverla per $y = +h/2$, $y = 0$, $y = -h/2$

TORNIAMO ALLA SEZIONE RETTANGOLARE

Andamento 3D



Andamento piano

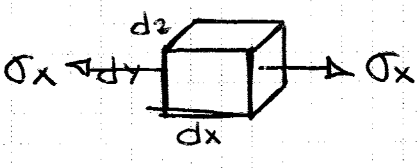


TUTTI I PUNTI A PARI DISTANZA DAL PIANO NEUTRO HANNO LO STESSO σ_x (lungo b σ_x è costante)

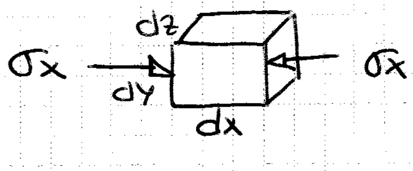
Per identificare la mia trave
* CAMMINO LUNGO LA LUNGHEZZA per RICAVARE LE FORZE INTER
* CAMMINO LUNGO LA SEZIONE per RICAVARE LE TENSIONI

SCRIVIAMO IL TENSORE DELLE TENSIONI PER A e B
→ M_f = COSTANTE

Elementino A



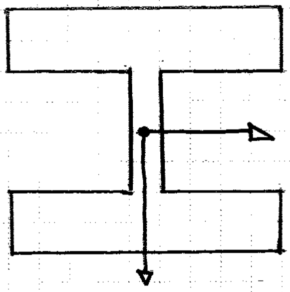
Elementino B



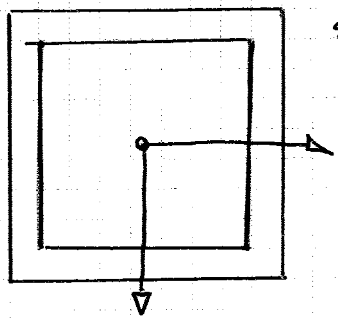
quando definisco il "TENSORE DELLE TENSIONI" di un elementino infinitesimo, questo prescinde da tutto quello che c'è a monte (MODELLO SCELTO, TIPO DI CARICO)

└ la SOFFERENZA di QUESTI DUE ELEMENTINI È la STESSA di UN ELEMENTINO di UNA TRAVE IN TRAZIO

Nella flessione si usano di più sezioni tipo



SFRUTTA MOLTO BENE LA FLESSIONE
- Anima conferisce molta resistenza ma è molto sottile mentre le ~~altre~~ ali si prendono tutto il σ
→ SI AVVICINA ALI UNIFORME RESISTENZA



SEZIONE CAVA
Mat vicino al piano neutro è pochissimo

SEZIONE CIRCOLARE
→ Meno adatto ad essere sottoposta a flessione ma è la più adatta alla Torsione

IL MATERIALE È MOLTO VICINO IL PIANO NEUTRO E SCARSO LONTANO

Mz (+)

$$\sigma_x max = \frac{M_+}{I_z}(y_{max}) = \frac{M_+}{\frac{\pi D^4}{64}} \cdot \frac{D}{2} = \frac{32 M_z}{\pi D^3}$$

I_z PER SEZIONE PIENA È $I_z = \frac{\pi D^4}{64}$

$$\boxed{W_f = \frac{\pi D^3}{32}}$$

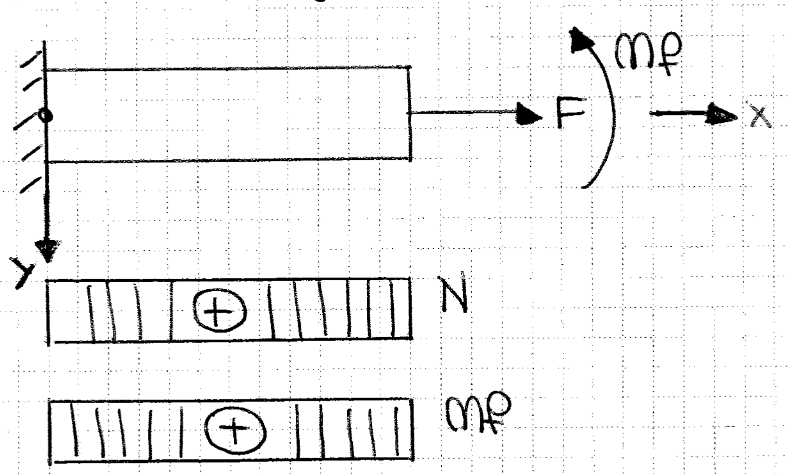
└ MODULO DI RESISTENZA A FLESSIONE

Assi centrali d'inerzia
└ determino max e min momento d'inerzia

Mf $\quad \sigma_x = \frac{Mf}{I_z} y \quad \quad \varepsilon_x = \frac{E}{R}$

allungamento finito circolare
└ dipende dalla struttura, dal mat e dalle condizioni di vincolo

Ripasso generale

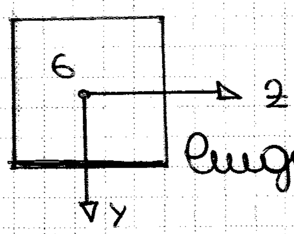


Poiché il Mf è costante, il Taglio sarà sicuramente 0 (è la derivata)
Inoltre, proprio perché il Taglio è zero, posso considerare solo Tensioni di Tipo σ

$\forall$ sezione scelgo di considerare trovo sempre lo stesso sforzo $\Rightarrow$ stesso andamento della tensione

Supponiamo che la Trave abbia una sezione quadrata

S$\forall$

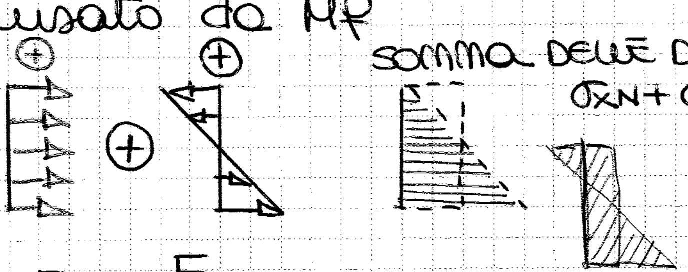


lungo questo lato σ è costante

la Tensione ~~[illegible]~~ complessiva è data dalla somma della ~~sforzo~~ Tensione causata da N con la tensione causata da Mf

somma delle due tensioni

$\sigma_{xN} + \sigma_{xMf}$



Sul piano neutro non ho 0 ma σ_{xN}

$$\sigma_{xN} = \frac{F}{a^2}$$

$$\sigma_{xMf} = \frac{Mf}{I_z} y = \frac{Mf}{a^4/12}$$

il segno dipende da y e Mf

Se vogliamo calcolare la tensione σ_x massima dobbiamo sommare i punti in cui σ_{xN} è max e σ_{xMf} è max